К. В. Добровольська, В. М. Михалевич

ПРАКТИКУМ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

К. В. Добровольська, В. М. Михалевич

ПРАКТИКУМ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2012

УДК 519.2 (075)
ББК 22.171я73
Д56

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 4 від 22.11.2012 р.)

Рецензенти:
О. В. Мороз, доктор економічних наук, професор
В. І. Клочко, доктор педагогічних наук, професор
О. М. Роїк, доктор технічних наук, професор

Добровольська К.В., Михалевич В.М.
Д56 Практикум з теорії ймовірностей для студентів економічних спеціальностей: навчальний посібник / К.В. Добровольська, В.М. Михалевич – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 120 с.

Посібник містить основні поняття та методи теорії ймовірностей. В посібнику подано теоретичний матеріал, розв'язки типових задач, задачі для самостійного розв'язування з відповідями до них. Для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів та коледжів.

УДК 519.2 (075)
ББК 22.171я73

© К. Добровольська, В. Михалевич, 2012

ЗМІСТ

ВСТУП

Під час вивчення теорії ймовірностей найбільші труднощі виникають у процесі розв'язування задач. Метою навчального посібника є надання допомоги студентам в опануванні методики розв'язування задач з використанням теорії ймовірностей. Знання основних понять та методів теорії ймовірностей та вміння їх застосовувати для розв'язання практичних задач є вкрай необхідні для роботи в ринкових умовах кожному освіченому економістові. Застосування теоретико-ймовірнісних і статистичних методів, які дають змогу аналізувати, синтезувати і прогнозувати складні економічні процеси, в даний час стають все більш актуальними. Це обумовлює необхідність вивчення економістами методів теорії ймовірностей.

Навчальний посібник охоплює практично весь матеріал курсу теорії ймовірностей, що вивчається за програмою дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для підготовки бакалаврів, спеціалістів та магістрів з економічних спеціальностей. Посібник містить 9 учбових тем, значну кількість розв'язаних типових задач і прикладів для самостійного розв'язування, необхідні таблиці, зразки контрольних робіт. Значна кількість задач має практичний зміст, що підкреслює прикладне спрямування видання та дає змогу майбутнім спеціалістам використовувати набуті знання у подальшій роботі.

Частина I ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

РОЗДІЛ 1 ВИПАДКОВІ ПОДІЇ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ. ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

1.1 Випадкові події

Подією (або випадковою подією) називають будь-який факт, який в результаті досліду може відбутися або не відбутися. В теорії ймовірностей *випробуванням* називають сукупність умов, у яких може відбуватися дана подія. Наприклад підкидання монети є випробуванням, а випадання "герба" або "номіналу" – подіями. Події позначають великими латинськими літерами: *A, B, C*. Події бувають: елементарні, неможливі, вірогідні, випадкові, а останні – несумісні, сумісні, різноможливі, єдиноможливі, залежні тощо.

Елементарні події – це логічно єдино можливі результати експерименту, які взаємно виключають один одного.

Подію називають *випадковою*, якщо в результаті даного випробування вона може як відбутись, так і не відбутись. Наприклад, у погану погоду відліт літака за розкладом – випадкова подія. Літак може вилетіти, а може і не вилетіти.

Говорячи про випадкову подію, мають на увазі неможливість передбачати результат досліду чи спостереження у масових явищах. Якщо ж у кожній події можна наперед передбачити результат досліду чи спостереження, то подія називається *детермінованою* (передбачуваною). У теорії ймовірностей вивчаються недетерміновані, випадкові події.

Подію називають *вірогідною*, якщо вона обов'язково відбудеться в даному випробуванні. Наприклад, число π є ірраціональним числом. Це вірогідна подія. Число 2 складається з двох одиниць – теж вірогідна подія.

Неможливою називають подію, якщо вона точно не відбудеться в даному випробуванні. Наприклад, з трьох відмінної якості деталей не можна вибрати чотири бракованих.

Стохастичним експериментом називається експеримент, який можна неодноразово повторювати за деяких незмінних умов і результат якого передбачити заздалегідь неможливо. Кожному стохастичному експерименту ставиться у відповідність *простір елементарних подій* Ω , елементами якого є елементарні події ω. Кожна *випадкова подія A* інтерпретується як підмножина простору елементарних подій Ω. *Неможлива подія* – це порожня множина $\varnothing$. *Вірогідна подія* – це весь простір Ω.

Подія A відбулася, якщо відбулася будь-яка подія $\omega \in A$.

Дві події називають *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої в одному й тому самому випробуванні.

Дві події називають *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно в одному й тому самому випробуванні. Наприклад, якщо подія A полягає у приході на лекцію, а B – у відсутності на лекції, то ці дві події несумісні.

Події A і B називають *рівноможливими*, якщо кожна з них не має ніяких переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться в однакових умовах. Наприклад, при разовому киданні монети рівноможливі події появи "герба" і "номіналу".

Події називаються *єдиноможливими*, якщо поява тільки однієї з них є вірогідною подією. Події появи "герба" чи "номіналу" є єдино можливими. Множина єдино можливих подій називається повною групою.

Подія A називається *протилежною* події $\overline{A}$, якщо ці події єдино можливі і утворюють повну групу. Можна дати й інше означення протилежних подій A і $\overline{A}$: $\overline{A}$ – подія, яка полягає в тому, що подія A не відбулася. Наприклад, при одному пострілі єдино можливими є дві події: A – попадання, $\overline{A}$ – промах.

Приклад 1. Монету підкидають тричі. Для даного випробування описати простір елементарних подій.

Розв'язання. Якщо кидати монету тричі, то може бути вісім елементарних наслідків:
(А, А, А); (А, А, Р); (А, Р, Р,); (Р, Р, Р); (А, Р, А); (Р, А, А); (Р, Р, А); (Р, А, Р), де А – випадання аверса (зображення "герба"), Р – випадання реверса (зображення "номіналу"). Очевидно, вони утворюють повну групу подій, тому:

Ω= {(А, А, А); (А, А, Р); (А, Р, Р,); (Р, Р, Р); (А, Р, А); (Р, А, А); (Р, Р, А); (Р, А, Р)} – є простір елементарних подій даного випробування.

1.2 Операції над подіями

Сумою (об'єднанням) двох подій A і B називають таку подію, яка полягає в появі хоча б однієї з подій A або B, або обидвох подій в одному досліді, і позначають $A + B$ (або $A \cup B$).

Добутком (перетином) двох подій A і B називають таку подію, яка полягає в сумісній появі обох подій A і B, і позначають $A \cdot B$ (або $A \cap B$).

Різницею двох подій A і B називають подію, яка настає тоді, коли A вже настала, а B – ні, і це записують так: $A – B$ (або $A \backslash B$).

Неможливу подію позначимо A_H, а вірогідну – A_B. Тоді для двох протилежних подій A і $\overline{A}$ можна записати: $\overline{A} + A = A_B$; $A \cdot \overline{A} = A_H$.
Правила виконання операцій над подіями.

1. $A+A=A$;

2. $A+B=B+A$;

3. $A+(B+C)=(A+B)+C$;

4. $AB=BA$;

5. $AA=A$;

6. $A(BC)=(AB)C$;

7. $A(B+C)=AB+AC$;

8. $A+(BC)=(A+B)(A+C)$;

9. $A+A_H=A$;

10. $A\cdot A_H=A_H$;

11. $A+A_B=A_B$;

12. $A\cdot A_B=A$;

13. $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$;

14. $\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$;

15. $\overline{A_B}=A_H$;

16. $A+\overline{A}=A_B$;

17. $A\cdot\overline{A}=A_H$;

18. $\overline{\overline{A}}=A$.

Приклад 1. Нехай подія A_i = {i – група, яка в даний момент часу перебуває на заняттях}, i = 1, 2, 3. Описати такі події: 1) $A_1\cdot A_2\cdot A_3$; 2) $A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}$; 3) $A_1+A_2+A_3$; 4) $\overline{A_1+A_2+A_3}$;
5) $\left(A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\right)+\left(\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\right)+\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\right)$.

Розв'язання

1. Подія $A_1\cdot A_2\cdot A_3$ означає, що всі групи в даний момент часу перебувають на заняттях.

2. Подія $A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}$ означає, що лише перша та друга групи перебувають на заняттях.

3. Подія $A_1+A_2+A_3$ означає, що принаймні одна з груп перебуває на заняттях.

4. Подія $\overline{A_1+A_2+A_3}$ є протилежною до події $A_1+A_2+A_3$. Вона означає, що жодна група не перебуває на заняттях.

5. Подія $\left(A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\right)+\left(\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\right)+\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\right)$ означає, що в даний момент часу лише одна з груп перебуває на заняттях.

1.3 Класичне означення ймовірності

Поняття ймовірності подій спочатку виникло як інтуїтивне поняття. Ймовірністю події *A* називається кількісна оцінка можливості появи події *A* і позначається *P(A)*. Нехай подія *A* визначається множиною елементарних подій $\{\omega_з\}$. Нехай множина елементарних подій містить підмножину, для якої подія A є вірогідною. Ці елементарні події дістали назву сприятливих для події A. *Класичною ймовірністю* називається відношення числа елементарних подій, що сприяють події A, до загального числа подій. Якщо число елементарних подій, що сприяють A, – це m, а загальне число n, то

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{число результатів, які сприяють події } A}{\text{число всіх можливих результатів}}. \qquad (1.1)$$

З класичного означення ймовірності випливає, що $0 \le P(A) \le 1$, при чому $P(A)=0,$ якщо $A=\varnothing$ - неможлива подія, і $P(A)=1$, якщо $A=\Omega$ - достовірна подія.

Приклад 1. Навмання вибране двозначне число. Знайти ймовірність того, що це число: а) парне; б) ділиться на 3.

Розв'язання

а) Нехай подія A = {вибране двозначне число парне}.
Всі двозначні числа – це є всі числа від 10 до 99 включно. Всього таких чисел є 90. Тому $n=90$. Кількість подій, що сприяють події A, визначається кількістю парних двозначних чисел. Такі числа є {10, 12, 14, ... , 98}. Всього таких чисел є 45 , тобто m = 45. Отже, за класичним означенням ймовірності:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}.$$

б) Нехай подія A = {вибране двозначне число ділиться на 3}.
Всі двозначні числа – це є всі числа від 10 до 99 включно. Всього таких чисел є 90. Тому $n=90$. Кількість подій, що сприяють події A, визначається кількістю двозначних чисел, які діляться на 3, тобто кожне третє число. Такі числа є { 12, 15, 18, ... , 99}. Всього таких чисел є 30, тобто m = 30. Отже, за класичним означенням ймовірності:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 2. З повного набору каменів доміно навмання взято один. Знайти ймовірність того, що: а) сума очок на ньому дорівнює двом; б) сума очок на ньому більша шести.

Розв'язання

а) Нехай подія A = {сума очок на вибраному камені доміно дорівнює 2}.
В повному наборі каменів доміно 28 штук. Тому $n=28$. Кількість подій, що сприяють події A, визначається кількістю каменів, на яких сума очок дорівнює двом. Таких каменів є {(0; 2), (1; 1)}. Всього таких каменів є 2 , тобто m = 2. Отже, за класичним означенням ймовірності:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{28}=\frac{1}{14}.$$

б) Нехай подія A = {сума очок на вибраному камені доміно більша шести}. В повному наборі каменів доміно 28 штук. Тому $n=28$. Кількість подій, що сприяють події A, визначається кількістю каменів, на яких сума очок більша 6. Таких каменів є {(1; 6), (2; 6), (3; 6), (4; 6), (5; 6), (6; 6), (5; 5), (4; 4), (2; 5), (3; 5), (4; 5), (6; 5)}. Всього таких каменів є 12 , тобто m = 12. Отже, за класичним означенням ймовірності:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}.$$

Приклад 3. В урну поклали три червоних, вісім чорних і дев'ять синіх куль. Яка ймовірність вийняти: а) червону кульку;
б) чорну кульку?

Розв'язання

а) Нехай подія A = {вийнята червона кулька}. Загальна кількість кульок в урні – 3 + 8 + 9 = 20, причому вийняти можна будь-яку з них з однаковою ймовірністю. Тому в даному випробуванні є 20 рівноможливих наслідків, тобто n = 20. Кількість подій, що сприяють події A, визначається кількістю червоних кульок, тобто m = 3. Отже, за класичним означенням ймовірності:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{20}.$$

б) Нехай подія B = {вийнята чорна кулька}. В даному випробуванні аналогічно 20 рівноможливих наслідків, тому n = 20. Кількість подій, що сприяють події В, визначається кількістю чорних кульок, тобто m = 8. Отже,

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{8}{20}.$$

Приклад 4. Знайти ймовірність того, що при киданні двох гральних кубиків:

а**)** випаде однакове число очок;

б) число очок, яке випаде на першому кубику менше, ніж число очок, яке випаде на другому;

в) сума очок на обох гральних кубиках більша 9;

г) рівняння $x^2+px+q=0$, де p i q – число очок на першому і другому кубиках, відповідно, має дійсні корені.

Розв'язання

Оскільки результат досліду визначається парою чисел (i, j), де i – число очок, яке випаде при киданні першого кубика, j – число очок, яке випаде при киданні другого кубика, то множиною всіх можливих результатів є множина: $\Omega=\left\{(i, j)\middle|i, j=\overline{1,6}\right\}$.

а) Нехай подія A = {на обох кубиках випаде однакове число очок}. Ця подія матиме місце тоді, коли $i = j$, тобто події A сприяють результати (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), тобто m = 6, а загальне число можливих наслідків n = 36. Отже,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

б) Нехай подія B = {число очок на першому кубику менше за число очок на другому}. Ця подія матиме місце тоді, коли $i<j$, тобто події B сприяють результати (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6), отже m = 15, а загальне число можливих наслідків n = 36.

Тоді:

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}.$$

в) Нехай подія C = {сума числа очок, які випадуть на обох гральних кубиках, більша 9}. Ця подія матиме місце тоді, коли $i + j>9$, тобто події C сприяють результати (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6), отже m = 6, а загальне число можливих наслідків n = 36. Тоді:

$$P(C)=\frac{m}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

г) Нехай подія D = {число очок p на першому кубику і число q очок на другом кубику забезпечують існування дійсних коренів квадратного рівняння $x^2+px+q=0$}. Ця подія матиме місце тоді, коли результатом досліду буде одна із пар $(i, j)\in\Omega$ така, що виконується нерівність $i^2-4j\geq 0$, тобто події D сприяють результати (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), отже m = 19, а загальне число можливих наслідків n = 36.

Тоді: $P(D)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{19}{36}.$

1.4 Геометричне означення ймовірності

Геометричні ймовірності – це ймовірності складних подій з нескінченним числом елементарних подій, кожна з яких інтерпретується як вибір навмання точки з деякої множини n-вимірного (E_n) евклідового простору. Вважається, що множина має деяку геометричну форму і скінченну міру. За подію A звичайно беруть точку, що належить або не належить заданій частині геометричної форми (площі, довжині, об'єму). Ймовірність події A визначається як відношення міри частини геометричної форми до міри всієї форми. Так, для довжини, площі, об'єму (l, S, V) – частини геометричної форми, що має відповідну довжину l_0, площу S_0, об'єм V_0, геометрична ймовірність попадання в частину визначається такими відношеннями:

$$P_r(A)=\frac{l}{l_0};\quad P_r(A)=\frac{S}{S_0};\quad P_r(A)=\frac{V}{V_0}.$$

Приклад 1. Два дійсних числа випадковим чином вибираються з інтервалу [0; 6]. Яка ймовірність того, що сума двох чисел менша 5.

Розв'язання. Позначимо через x перше число, вибране випадковим чином з інтервалу [0; 6], а через y – друге число. Тоді $0 \le x \le 6$, $0 \le y \le 6$. Внаслідок нескінченної кількості таких дійсних чисел потрібно скористатися означенням геометричної ймовірності. У цьому разі множиною всіх можливих наслідків випробування є квадрат (рис. 1.1) зі стороною 6, площа якого дорівнює 36, тобто S_0 = 36.

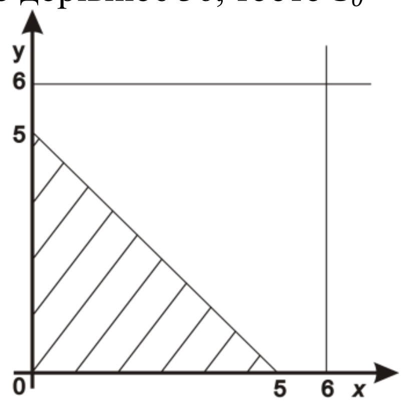


Рисунок 1.1

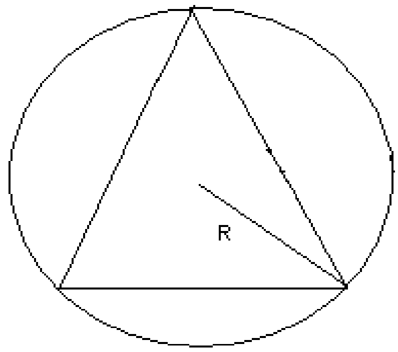
Нехай подія A = {сума двох чисел менша 5}. Тоді маємо $A=\{(x;y): x+y<5\}$ або $A=\{y<5-x\}$. Отже, елементарні наслідки випробування, що сприяють появі події A, утворюють фігуру, що заштрихована на рис. 1.1, площа якої дорівнює $S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5=25$.

Застосовуючи формулу для геометричної ймовірності, одержимо

$$P(A)=\frac{S}{S_0}=\frac{25}{36}.$$

Приклад 2. В коло радіуса *R* вписано правильний трикутник. Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута в коло, попаде в трикутник.

Розв'язання. Нехай подія *A* = {точка попала в трикутник}. Отже, елементарні наслідки випробування, що сприяють появі події *A*, утворюють правильний трикутник площа якого дорівнює $S=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. Множиною всіх можливих наслідків випробування є коло радіуса R, площа якого дорівнює $S_0 = \pi R^2$. За означенням геометричної ймовірності одержимо



$$P(A)=\frac{S}{S_0}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Приклад 3. Двоє вирішили зустрітись у певному місці між 12 та 13 годинами, і домовились, що той хто прийде першим, чекає на другого протягом 15 хвилин, після чого покидає місце зустрічі. Знайти ймовірність їх зустрічі (подія *A*), якщо кожний може протягом домовленої години прийти в довільний момент і моменти їх приходу незалежні.

Розв'язання. За множину елементарних подій візьмемо квадрат із стороною 60 і точками (*x, y*), що зображають час (в хвилинах) приходу кожного протягом години. Розглядатимемо *x* – момент приходу першої особи, та *y* – момент приходу другої особи, як координати точки на площині. Умова зустрічі запишеться у вигляді нерівності $|x-y|<15$. Отже, $A=\{(x,y):|x-y|\le 15\}$. Точки зустрічі лежать у заштрихованій смузі (рис. 1.2). Площа смуги дорівнює різниці площі квадрата і площ двох незаштрихованих трикутників: $S=60^2-(60-15)^2=1575$. Площа основного квадрата $S_0=60^2$. Тоді шукана ймовірність визначається так:

$$P(A)=\frac{S}{S_0}=\frac{60^2-(60-15)^2}{60^2}=\frac{1575}{3600}=\frac{7}{16}.$$

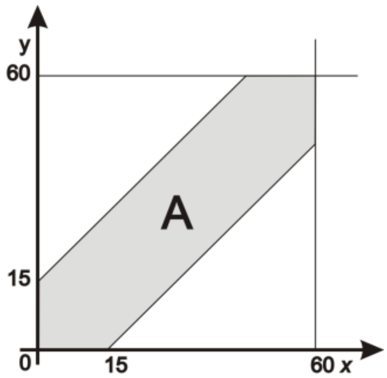


Рисунок 1.2

1.5 Статистичне означення ймовірності

Оскільки класичне означення ймовірності передбачає, що всі елементарні наслідки випробування рівноможливі, що важко обґрунтувати, то розглядають ще й *статистичне означення ймовірності*.

Відносною частотою події A називають відношення кількості випробувань, у яких подія A відбулася, до кількості всіх проведених випробувань. Відносну частоту події A позначають $W(A)$. Тоді

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

де m – кількість випробувань, у яких відбулася подія A; n – кількість усіх проведених випробувань.

Число, навколо якого групуються значення частоти події A при великій кількості випробувань, називають ймовірністю події A:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} W(A).$$

Приклад 1. При перевірці 140 деталей, виготовлених цехом заводу, було виявлено 7 бракованих. Знайти відносну частоту кількості бракованих деталей.

Розв'язання. Нехай подія А полягає в тому, що виявлено браковану деталь. Тоді відносна частота події А дорівнює:

$$W(A) = \frac{m}{n} = \frac{7}{140} = 0,04.$$

Задачі до розділу 1

Задача 1. У ящику містяться кульки білого та чорного кольору. Навмання з нього виймають одну кульку. Подія А = {вийнято кульку білого кольору}, подія В = {вийнято кульку чорного кольору}. Сумісні чи несумісні ці події?

Відповідь: несумісні.

Задача 2. З повного набору каменів доміно навмання взято один. Знайдіть ймовірність того, що сума очок на ньому дорівнює:
а) шести; б) дванадцяти; в) тринадцяти; г) не більша шести.
Відповідь: а) 1/7; б) 1/28; в) неможлива подія; г) 4/7.

Задача 3. Навмання вибрано двозначне число. Знайдіть імовірність того, що це число: а) ділиться або на 2, або на 3; б) просте; в) складене.
Відповідь: а) 2/3; б) 7/30; в) 23/30 .

Задача 4. У двох коробках лежать олівці однакової величини і форми, але різного кольору. У першій коробці 4 червоних і 6 чорних, а в другій – 3 червоних, 3 чорних, 5 жовтих. З обох коробок навмання беруть по одному олівцю. Знайдіть імовірність того, що ці олівці:
а) червоного кольору; б) однакового кольору; в) різного кольору?
Відповідь: а) 6/55; б) 3/11; в) 8/11.

Задача 5. Загальна вартість лотерейних білетів a гривень. Вартість одного білета q гривень. Знайдіть імовірність того, що число виграшних білетів дорівнює m?
Відповідь: mq/a.

Задача 6. В урні 12 кульок: 3 білих, 4 чорних і 5 червоних. Яка імовірність дістати з урни чорну кульку?
Відповідь: 1/3.

Задача 7. В лотереї 2 000 квитків. На один квиток випадає виграш 100 гривень, на чотири квитки – виграш по 50 гривень, на десять квитків – виграш по 10 гривень, на 165 квитків – виграш по 5 гривень, на 400 квитків – виграш по 1 гривні. Інші квитки невиграшні. Яка імовірність виграти по лотерейному квитку не менше 10 гривень?
Відповідь: 0,0175.

Задача 8. Два дійсних числа випадковим чином вибираються з інтервалу [0; 5] . Яка імовірність того, що:
а) сума двох чисел менша 4;
б) добуток двох чисел більший 5;
в) різниця двох чисел менша 2, а їх добуток більший 3.
Відповідь: а) 8/25; б) $\approx 0,478$; в) $\approx 0,428$.

Задача 9. При стрільбі по мішені було виявлено, що відносна частота влучень дорівнює 0,85. Проведено 100 пострілів. Скільки пострілів були влучними?
Відповідь: 85.

Задача 10. У квадрат з вершинами в точках: (0; 0), (0; 1), (1; 1), (1; 0) навмання кинуто точку $(x; y)$. Знайти імовірність того, що координати цієї точки задовольняють нерівність: $y < 2x$.
Відповідь: 3/4.

Задача 11. На відрізку АВ довжиною 12 см ставлять навмання точку М. Знайти імовірність того, що площа квадрата побудованого на відрізку АМ, буде міститись між 36 $м^2$ і 81 $м^2$.
Відповідь: 1/4.

Задача 12. Дано відрізки довжиною 2 см, 5 см, 6 см, 10 см. Яка ймовірність того, що з навмання взятих трьох відрізків можна побудувати трикутник.
Відповідь: 1/2.

Задача 13. В урні a білих і b чорних куль. Яка ймовірність того, що навмання витягнута куля буде білою.
Відповідь: $a/a+b$.

Задача 14. Учасники жеребкування виймають жетони з номерами від 1 до 100. Знайти ймовірність того, що номер першого жетона, який взято навмання, не має цифри 5.
Відповідь: 0,81.

Задача 15. Монету підкидають два рази. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз випаде герб.
Відповідь: 3/4.

Задача 16. З n перших натуральних чисел навмання взято число $к$. Знайти ймовірність того, що число $к^2 - 1$ ділиться на 10. Чи існує послідовність таких ймовірностей?

Відповідь: 1/5, $\lim\limits_{n\to\infty} = 1/5$.

Задача 17. У квадрат з стороною a навмання кидається точка. Знайти ймовірність того, що вона попаде у восьмикутник з вершинами на сторонах квадрата, причому кожна з них лежить на відстані $\frac{1}{4}à$ від ближчої вершини.
Відповідь: 7/8.

Задача 18. У колі одиничного радіуса з центром в т. О (0;0) навмання взято точку. Яка імовірність того, що відстань від точки до початку координат не перевищує 1/3?
Відповідь: 1/9.

Задача 19. У результаті соціологічного опитування 1000 осіб було визначено, що за кандидата А проголосують 428 виборців, за кандидата Б – 501 виборець, а решта електорату не визначилася. Знайти ймовірність того, що виборець проголосує за кандидата Б, і визначити орієнтовну кількість виборців, які проголосують за нього, якщо весь електорат – 70 млн. осіб, а з них візьмуть участь у виборах 70 %.
Відповідь: P(Б)=0,501; 24,5 (млн).

Задача 20. При стрільбі з гвинтівки по мішені відносна частота влучання дорівнює 0,85. Знайти число влучань, якщо було здійснено 20 пострілів.
Відповідь: 17.

РОЗДІЛ 2 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ ОБЧИСЛЕННІ ЙМОВІРНОСТЕЙ

При обчисленні ймовірностей подій досить часто потрібно підраховувати кількість елементарних подій. Здебільшого це зумовлює великі труднощі, подолати які допомагає комбінаторика – розділ математики, предметом вивчення якого є комбінаторні конфігурації – скінченні множини, елементи яких вибрані з певної скінченної множини і розташовані за певним правилом. Комбінаторика вивчає способи підрахунку кількості розміщень, перестановок, сполучень.

Перш ніж подати деталі, нагадаємо, що вираз $n!$ читається “ен-факторіал” і означає добуток усіх натуральних чисел до n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \tag{2.1}$$

причому вважають, що 0! = 1.

Розміщеннями з n елементів по m називаються упорядковані підмножини множини A, що містять m елементів, і які відрізняються одна від одної як складом елементів, так і порядком їх слідування.

Число розміщень із n елементів по m записують A_n^m обчислюється за формулою

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{2.2}$$

Перестановками називаються розміщення із n елементів по n. Число перестановок із n елементів записують P_n обчислюється за формулою

$$P_n = A_n^n = \prod_{k=1}^{n} = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n! \tag{2.3}$$

Сполученнями із n елементів множини A по m називаються невпорядковані її множини, що містять m елементів, які відрізняються між собою хоча б одним елементом.

Число сполучень із n елементів по m записують C_n^m та обчислюють за формулою

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{2.4}$$

При розв'язанні задач з комбінаторики використовують такі правила.

Правило суми. Якщо деякий об'єкт A можна вибрати з сукупності об'єктів m способами, а інший об'єкт B можна вибрати n способами, то вибрати або A, або B можна $m + n$ способами.

Правило добутку. Якщо деякий об'єкт *A* можна вибрати з сукупності об'єктів m способами і після кожного такого вибору об'єкт *B* можна вибрати n способами, то пару об'єктів (*A, B*) можна вибрати $m \cdot n$ способами.

Приклад 1. Із лабораторії, в якій працює 20 чоловік, 5 співробітників повинні поїхати у відрядження. Які різні комбінації можуть бути цієї групи, якщо директор лабораторії, його заступник і головний інженер одночасно не можуть поїхати?

Розв'язання. Кількість усіх варіантів груп співробітників з двадцяти дорівнює C_{20}^{5}. З цієї кількості C_{17}^{2} – заборонені варіанти. Шукана кількість комбінацій дорівнює

$$C_{20}^{5} - C_{17}^{2} = \frac{20!}{5!(20-5)!} - \frac{17!}{2!(17-2)!} = \frac{20!}{5!15!} - \frac{17!}{2!15!} =$$

$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{17 \cdot 16}{1 \cdot 2} = 15504 - 136 = 15368.$$

Приклад 2. Банк протягом місяця може видати в кредит позику трьом своїм клієнтам, в той час як поступили замовлення на кредит від 10 клієнтів першого району і 5 клієнтів другого району. Банк розігрує випадковим чином три позики серед тих, від кого надійшло замовлення. Знайти імовірність того, що позика дістанеться двом клієнтам першого району.

Розв'язання. Нехай подія *A* = {позика дістанеться двом клієнтам першого району та одному клієнту другого району, оскільки всього банк надає 3 позики }. Випробування – проведення розігрування серед клієнтів банку. Наслідок випробування – трійка клієнтів. Число наслідків даного випробування дорівнює числу можливих трійок, які можна утворити із сукупності чисельністю 15 елементів (клієнтів банку). Тобто це є комбінація з 15 елементів по 3:

$$C_{15}^{3} = \frac{15!}{12!3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455 \text{, тобто } n = 455.$$

Можливі двійки клієнтів першого району: $C_{10}^{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$, одного клієнта другого району можна вибрати: $C_{5}^{1} = 5$. Використавши правило добутків, отримаємо $m = C_{12}^{3} \cdot C_{5}^{1} = 45 \cdot 5 = 225$.

Отже, за класичним означенням ймовірності:

$$P(A)=\frac{225}{455}=0,49.$$

Приклад 3. Ліфт, в якому знаходиться 9 пасажирів, може зупинятися на десяти поверхах. Пасажири виходять групами в два, три і чотири чоловіки. Скількома способами це може відбутися?

Розв'язання. Кількість способів розподілити пасажирів по вказаних групах дорівнює

$$C_9^2\cdot C_7^3\cdot C_4^4=\frac{9!}{2!(9-2)!}\cdot\frac{7!}{3!(7-3)!}\cdot 1=\frac{9!}{2!7!}\cdot\frac{7!}{3!4!}=\frac{9!}{2!3!4!}.$$

Кожна з трьох груп може вийти на одному з десяти поверхів. Це можна зробити $A_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}$ способами. Отже, це може відбутися

$$\frac{10!}{7!}\cdot\frac{9!}{2!3!4!}=\frac{10!\cdot 7!\cdot 8\cdot 9}{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{10!}{4}\quad \text{способами.}$$

Приклад 4. В урні 10 кульок: 6 білих і 4 чорних. Дістали дві кульки. Яка ймовірність того, що обидві кульки – білі?

Розв'язання. Нехай подія *A* = {дістали дві білі кульки}. В цій задачі загальне число елементарних наслідків $n=C_{10}^2=\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45.$ Отже, елементарні наслідки випробування, що сприяють появі події *A*, визначаються рівністю $m=C_6^2=\frac{6!}{2!(6-2)!}=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15.$ За класичним означенням ймовірності Р(А) = $\frac{m}{n}=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}.$

Приклад 5. У групі 20 хлопців і 10 дівчат, серед яких вибирають двох для участі в студентській олімпіаді. Яка ймовірність того, що:

а) А = {виберуть двох дівчат};

б) В = {виберуть хлопця й дівчину}?

Розв'язання. У групі 30 осіб, серед яких 20 хлопців і 10 дівчат. Вибір двох осіб з 30 є сполученнями, кількість яких

$n = C_{30}^{2} = \dfrac{30!}{2!(30-2)!} = \dfrac{30 \cdot 29}{1 \cdot 2} = 435.$ Це загальна кількість наслідків у випробуванні – виборі двох осіб з 30.

а) Нехай подія A = {вибрали двох дівчат}. Загальна кількість наслідків, що сприяють події A, визначається кількістю виборів двох дівчат з 10: $m = C_{10}^{2} = \dfrac{10!}{2!(10-2)!} = \dfrac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$ За класичним означенням ймовірності

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^{2}}{C_{30}^{2}} = \frac{45}{435} = \frac{9}{87}.$$

б) Нехай подія B = {вибрали хлопця й дівчину}. Це можна зробити $m = 20 \cdot 10 = 200$ способами. Отже, за класичним означенням ймовірності

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{20 \cdot 10}{C_{30}^{2}} = \frac{200}{435} = \frac{40}{87}.$$

Приклад 6. Знайти ймовірність того, що серед шести карт, навмання взятих з колоди із 36 карт, опиниться рівно три фігури чорного кольору.

Розв'язання. При кінцевому числі рівноможливих елементарних наслідків ймовірність події дорівнює відношенню числа елементарних наслідків, що сприяють цій події, до загального числа елементарних наслідків.

Оскільки елементарний наслідок – це довільний набір з 6 карт і повне число карт дорівнює 36, число елементарних наслідків дорівнює числу підмножин з 6 елементів в множині з 36 елементів, тобто

$$n = C_{36}^{6} = \frac{36!}{6!(36-6)!} = \frac{36!}{6!30!} = \frac{31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1947792.$$

Підрахуємо число елементарних наслідків $N(m_1)$, що сприяють даній події. Введемо дві множини A і B. Ознака, за якою карти відносять до множини A, – чорна фігура, тобто туз, король, дама, валет треф або пік. Множина A містить тільки ці карти, а B – всі інші.

Визначимо числа елементів в множинах A і B, тобто числа n_A і n_B ($n_A + n_B = n$). Маємо $n_A = 8$ (туз, король, дама, валет, треф і пік) і $n_B = 28$ ($n_A + n_B = 8 + 28 = 36 = n$).

Сприятливі наслідки формуються шляхом довільного вибору $m_1 = 3$ карт з множини A, що складається з $n_A = 8$ карт, і довільного вибору $m - m_1 = 6 - 3 = 3$ карт з множини B, яка складається з $n_B = 28$ карт. Тому число сприятливих наслідків дорівнює

$$N(3) = m = C_{8}^{3} \cdot C_{28}^{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} \cdot \frac{28!}{3!(28-3)!} = 183456.$$

За класичним означенням ймовірності

$$P(З) = \frac{m}{n} = \frac{C_8^3 \cdot C_{28}^3}{C_{36}^6} = \frac{183456}{1947792} = \frac{546}{5797} \approx 0,0942.$$

Приклад 7. На трамвайній зупинці дев'ять пасажирів чекають трамвай, який має три вагони. Кожен пасажир вибирає вагон навмання. Знайти ймовірності подій:

а) A = {у перший вагон зайдуть три пасажири};

б) B = {у кожний вагон зайдуть по три пасажири}.

Розв'язання

а) Кожен з пасажирів може вибрати один з трьох вагонів трамвая. Якщо один з пасажирів вже вибрав вагон, то наступний пасажир також може вибрати будь-який з трьох вагонів і т. д. Тому 9 пасажирів можуть увійти в трамвай 3^9 способами. Отже, загальне число елементарних наслідків $n = 3^9$. Елементарні наслідки випробування, що сприяють появі події *A*, визначаються рівністю $m = 2^6 C_9^3$. Дійсно, трьох пасажирів з дев'яти можна вибрати C_9^3 способами, а інші шість – вибирають один з двох вагонів 2^6 способами.

За класичним означенням ймовірності

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2^6 \cdot C_{28}^3}{3^9} \approx 0,27.$$

б) Події B будуть сприяти $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3$ елементарних наслідків. Тому

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3}{3^9} \approx 0,09.$$

Приклад 8. На 15 картках написані числа від 1 до 15 включно. Навмання взято дві картки. Знайдіть ймовірність того, що сума чисел, які написані на цих картках, дорівнює десяти.

Розв'язання. Нехай подія *A* = {на двох вибраних картках сума чисел, які написані на цих картках дорівнює десяти}. Елементарні наслідки випробування, що сприяють появі події *A*, визначаються кількістю виборів двох карток з 15: $n = C_{15}^2 = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105.$ Події *A* сприяють результати {(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6)}, отже $m = 4$, а загальне число можливих наслідків $n = 105$. Тоді, за класичним означенням ймовірності $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{C_{15}^2} = \frac{4}{105}$.

Приклад 9. У коробці є 4 червоних і 6 чорних олівців. З неї випадково випали 3 олівці. Знайдіть імовірність того, що два з них червоні.

Розв'язання. Нехай подія *A* полягає в тому, що з трьох випавших олівців два червоні.

В цій задачі загальне число елементарних наслідків (всі можливі трійки олівців) : $N(\Omega)=C_{10}^{3}=\dfrac{10!}{3!\,7!}=120.$

Подія *A* – рівно два червоні олівці: $\mathrm{N(A)}=\mathrm{C}_4^2\cdot C_6^1=\dfrac{4!}{2!2!}\cdot 6=36$;

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{36}{120}=0,3.$$

Задачі до розділу 2

Задача 1. Сім яблук та три апельсина потрібно покласти в два пакета так, щоб в кожному пакеті був хоча б один апельсин і щоб кількість кількість фруктів в них було однаковою. Скількома способами це можна зробити?
Відповідь: 105.

Задача 2. З 10 тенисисток і 6 тенисистів складають 4 змішані пари. Скількома способами це можна зробити?
Відповідь: 10!/48.

Задача 3. В ящику є 4 білих і 5 червоних кульок. З ящика навмання одна за одною виймаються всі кульки, які знаходяться в ньому і, не дивлячись, відкладають в сторону. Знайти ймовірність того, що остання вийнята кулька буде білою.
Відповідь: 4/9.

Задача 4. У корзині є 15 грибів, з яких 10 – їстівні. Господиня навмання бере три і готує сніданок. Знайти ймовірність того, що вона доживе до обіду.
Відповідь: 24/91.

Задача 5. З групи студентів, що складається з 4 дівчат і 21 юнака, вибирають жеребкуванням трьох. Яка ймовірність того, що серед них будуть 1 дівчина і 2 юнаки?
Відповідь: 42/115.

Задача 6. Електронний пристрій складається з 5 елементів і функціонує нормально, якщо справні всі елементи. При складанні елементи пристрою вибираються з партії 1000 елементів. Будь-який з можливих C_{1000}^{5} способів вибору має одну й ту саму ймовірність. У партії 950 справних і 50 несправних елементів. Подія *A* полягає в тому, що пристрій працює справно. Треба знайти *P(A)*.
Відповідь: $\approx 0,77$.

Задача 7. Із 100 телевізорів, що є на складі, 30 % мають приховані дефекти. Магазин отримує 60 телевізорів для роздрібної торгівлі. Знайти ймовірність того, що серед них буде 40 справних.
Відповідь: 0,121.

Задача 8. З урни, у якій 6 білих і 4 чорні кулі, навмання взято 3 кулі. Який склад куль серед вибраних трьох має найбільшу ймовірність?
Відповідь: вибір двох білих і однієї чорної кулі.

Задача 9. Чотири квитки в театр розігрують 5 хлопців і 7 дівчат. Знайти ймовірність того, що в театр підуть 2 хлопці і 2 дівчини.
Відповідь: 14/33.

Задача 10. В урні *a* білих і *b* чорних кульок ($a \geq 2; b \geq 2$). З урни виймають одночасно дві кульки. Яка подія є більш ймовірною: а) кульки одного кольору; в) кульки різного кольору.
Відповідь: *P(A)=P(B)* при $(a-b)^2 = a+b$.

Задача 11. Абонент, набираючи номер телефону, забув дві останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи лише, що вони різні. Яка ймовірність події *A* – набрані абонентом навмання дві останні цифри номера телефона є правильні?
Відповідь: 0,0111.

Задача 12. На фірмі працюють 10 інженерів і 5 спеціалістів із питань ринку. Керівник фірми вирішив для виконання спеціального завдання сформувати робочу групу з 5 осіб. Яка ймовірність події *A* – вибрана навмання група з 5 осіб містить трьох інженерів і двох спеціалістів ринку?
Відповідь : $\approx 0,4$.

Задача 13. У коробці міститься 50 деталей, з яких 40 – стандартних. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання вийнятих з коробки деталей є хоча б одна стандартна.
Відповідь: 0,69.

Задача 14. В розіграші беруть участь 18 команд, з яких випадковим чином формується 2 групи по 9 команд в кожній. Серед учасників змагань є 5 команд екстракласу. Знайти ймовірність того, що дві команди екстракласу потраплять в одну з груп, а три в іншу групу.
Відповідь: 12/17.

Задача 15. В ящику є 4 білих і 5 червоних кульок. З ящика навмання одна за одною виймають всі кульки, які знаходяться в ньому і, не дивлячись, відкладають в сторону. Знайти ймовірність того, що остання вийнята кулька буде білою.
Відповідь: 4/9.

Задача 16. В записаному телефонному номері 135-3... три останні цифри стерлись. В припущенні, що всі комбінації трьох стертих цифр рівноможливі, знайти ймовірність того, що стерлись різні цифри, відмінні від 1, 3, 5.
Відповідь: 0,21.

РОЗДІЛ 3 ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ І МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Об'єднанням (або сумою) декількох випадкових подій називають подію, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається хоча б одна з цих подій.

Об'єднання подій $A_1, A_2, ..., A_n$ позначають символом

$$A_1 + A_2 + ... + A_n.$$

Якщо події, які об'єднують несумісні (ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно), то ймовірність об'єднання декількох подій дорівнює сумі ймовірностей об'єднуючих подій (аксіома додавання ймовірностей):

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n), \quad (3.1)$$

а для довільних подій $A_1, A_2, ..., A_n$

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) - P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n).$$

Об'єднання подій A *і* $\overline{A}$ дає достовірну подію, а оскільки події A *і* $\overline{A}$ несумісні, то

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad \textit{або} \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Якщо в результаті даного випробування може відбутися лише одна з несумісних подій $A_1, A_2, ..., A_n$, то події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють так звану *повну групу подій*. Оскільки об'єднання подій повної групи є подією достовірною, то для таких подій має місце рівність

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

Суміщенням (або добутком) двох випадкових подій A_1 *і* A_2 називається складна подія, яка полягає в тому, що ці дві події відбуваються одночасно або послідовно. Суміщення подій A_1 *і* A_2 позначається символом $A_1 \cdot A_2$.

Ймовірність події A_2, обчислена за умови появи події A_1, називають *умовною ймовірністю події* A_2 (за умови появи події A_1) і позначають $P(A_2 / A_1)$ *або* $P_{A_1}(A_2)$.

Якщо події A_1 з A_2 незалежні, то $P(A_2 / A_1) = P(A_2)$ і, навпаки, $P(A_1 / A_2) = P(A_1)$.

Ймовірність добутку двох випадкових подій A_1 *і* A_2 дорівнює добутку ймовірностей однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої події за умови, що перша подія відбулася, тобто

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1 / A_2). \quad (3.2)$$

Для незалежних подій ймовірність їх сумісності дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2). \quad (3.3)$$

Нехай є n незалежних випадкових подій $A_1, A_2, ..., A_n$. Ймовірність появи хоча б однієї з цих подій визначається за формулою:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot ...\cdot P(\overline{A}_n). \qquad (3.4)$$

Приклад 1. З 25 перших натуральних чисел навмання взято три числа. Знайти імовірність того, що серед них чисел кратних чотирьом менше двох.

Розв'язання. Простором елементарних подій є всі трійки без повторень з 25, $N(\Omega) = C_{25}^3 = 2300$. Подія А полягає в тому, що серед цих чисел кратних чотирьом менше двох (тобто жодного або одне). Введемо позначення:
Подія A_0 = {жодного числа кратного чотирьом};
Подія A_1 = {одне число з трьох взятих є кратне чотирьом};
$A = A_0 + A_1.$

З 25 чисел, кратних чотирьом, є шість чисел: {4, 8, 12, 16, 20, 24}. Тоді 19 чисел не кратні чотирьом.

$$\mathrm{N(A) = N(A_0) + N(A_1) = C_{19}^3} + C_6^1 \cdot C_{19}^2 = 969 + 6\cdot 171 = 1995.$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1995}{2300} \approx 0{,}87.$$

Приклад 2. Підприємець має акції двох компаній. Ймовірність отримання дивідендів по акціях тільки однієї з двох компаній дорівнює 0,4. Причому для першої компанії вона дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що він отримає дивіденди по акціях другої компанії.

Розв'язання. Нехай подія A_1 полягає в тому, що підприємець отримає дивіденди по акціях першої компанії, A_2 – другої. Тоді

$$P(A_1) = 0{,}7; \quad P(A_2) = x.$$

Подія {отримано дивіденди по акціях тільки однієї з двох компаній} має вигляд

$P(A_1\overline{A_2}) + P(A_2\overline{A_1}) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(A_2)P(\overline{A_1}),$ звідки маємо рівняння:
$0{,}7(1-x) + x(1-0{,}7) = 0{,}4;$ розв'язавши яке, знайдемо

$$x = 0{,}75.$$

Приклад 3. Імовірність банкрутства для першої фірми дорівнює 0,1; для другої – 0,2; для третьої – 0,3. Знайти ймовірності таких подій:

1) A – збанкротує лише одна фірма;
2) B – збанкрутують дві фірми;

3) C – збанкрутують всі три фірми;
4) D – не збанкротує жодна з фірм.

Розв'язання. Нехай подія A – (збанкрутує або перша, або друга, або третя фірма).

Тоді подія A виконується за таких умов: $A=(A_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3)\cup(\bar{A}_1\cap A_2\cap\bar{A}_3)\cup(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap A_3)$.

Доданки в цій сумі – несумісні події, а множники кожного доданка – події, незалежні в сукупності. Тому ймовірність суми дорівнює сумі ймовірностей кожного доданка, а ймовірність добутків доданків – добутку ймовірностей множників, де $P(\bar{A}_1)=1-P(A_1)=1-0,1=0,9$; $P(\bar{A}_2)=1-P(A_2)=1-0,2=0,8$; $P(\bar{A}_3)=1-P(A_3)=1-0,3=0,7$.

Отже,

$P(A)=P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\bar{A}_3)+{}+P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(A_3)$;

$P(A)=0,1\cdot0,8\cdot0,7+0,9\cdot0,2\cdot0,7+0,9\cdot0,8\cdot0,3=0,398.$

Нехай подія B – (збанкрутують дві фірми). Тоді подія B виконується за таких умов:

$B=(A_1\cap A_2\cap\bar{A}_3)\cup(A_1\cap\bar{A}_2\cap A_3)\cup(\bar{A}_1\cap A_2\cap A_3)$,

$P(B)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\bar{A}_3)+P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(A_3)+{}+P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$;

$$P(B)=0,1\cdot0,2\cdot0,7+0,1\cdot0,8\cdot0,3+0,9\cdot0,2\cdot0,3=0,092.$$

Нехай подія C – (збанкрутують три фірми).

$C=A_1\cap A_2\cap A_3, P(C)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$,

отже: $P(C)=0,1\cdot0,2\cdot0,3=0,006$.

Нехай подія D – (не збанкрутує жодна з фірм).

$D=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3, P(D)=P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)$ $P(D)=0,9\cdot0,8\cdot0,7=0,504$.

Приклад 4. Пасажир для придбання квитка може звернутися в одну з двох кас. Ймовірність того, що він придбає квиток в першій касі, дорівнює 0,7, а в другій – 0,8. Знайти ймовірність того, що квиток буде придбано.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що квиток буде придбано, подія A_1 – квиток буде придбано в 1-й касі, подія A_2 – квиток буде придбано в 2-й касі. Тоді $A=A_1+A_2$.

Оскільки навність квитка в першій касі не виключає наявності цього самого в другій, події сумісні. Тоді

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cdot A_2).$$

Однак події $A_1\, i\, A_2$ незалежні, тому що ймовірність наявності квитка в першій касі не залежить від того, чи є він в другій касі. Тому $P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)$.

Отже, $P(A)=0,7+0,8-0,7\cdot0,8=0,94$.

Приклад 5. З партії доміно навмання взято 7 каменів. Знайти ймовірність того, що серед них менше трьох дублів.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що на взятих 7 каменях доміно менше трьох дублів.
Подія A_0 – на взятих 7 каменях жодного дубля;
Подія A_1 – на взятих 7 каменях один дубль;
Подія A_2 – на взятих 7 каменях два дублі.
Тоді $A = A_0 + A_1 + A_2$.
В цій задачі загальне число елементарних наслідків $N(\Omega) = C_{28}^{7} = \frac{28!}{7!(28-7)!} = 1184040.$

$N(A_0) = C_{21}^{7} = \frac{21!}{7!(21-7)!}$; $N(A_1) = 7 \cdot C_{21}^{6} = 7 \cdot \frac{21!}{6!(21-6)!}$;

$N(A_2) = C_7^2 \cdot C_{21}^{5} = \frac{7!}{2!(7-2)!} \cdot \frac{21!}{5! \cdot (21-5)!}$

$N(A) = N(A_0) + N(A_1) + N(A_2) =$

$$= C_{21}^{7} + 7 \cdot C_{21}^{6} + C_7^2 \cdot C_{21}^{5} = \frac{21!}{7!(21-7)!} + 7 \cdot \frac{21!}{6!(21-6)!} + \frac{7!}{2!(7-2)!} \cdot \frac{21!}{5! \cdot (21-5)!} =$$

$= 923457.$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{923457}{1184040} \approx 0,78.$$

Задачі до розділу 3

Задача 1. Парламентська комісія складається з 30 депутатів: 10 представників комуністичної партії, 5 соціалістів і 15 зелених. Голова комісії обирається жеребкуванням. Знайти ймовірність того, що це буде представник лівої партії.
Відповідь: 0,5.

Задача 2. Мішень складається з трьох областей. Ймовірність влучення стрільцем у першу область мішені дорівнює 0,45, у другу область – 0,35, у третю – 0,15. Яка ймовірність того, що при одному пострілі стрілець влучить:
а) у першу або другу область;
б) не влучить у мішень.
Відповідь: а) 0,8; б) 0,05.

Задача 3. Колектив працівників фірми складається на 65 % з жінок. Серед працівників фірми 25 % чоловіків і 35 % жінок мають вищу освіту. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний працівник фірми це чоловік і має вищу освіту.
Відповідь: 0, 0875.

Задача 4. Стан використання підприємствами наданих їм кредитів контролюється центральним і обласним банками. Центральний банк перевіряє вибірково 10 % , а обласний банк – 20 % підприємств. Яка ймовірність того, що навмання вибране підприємство буде перевірене поточного року центральним банком і не перевірене обласним банком, якщо рішення щодо перевірки на різних рівнях приймаються незалежно.
Відповідь: 0,08.

Задача 5. По повітряній кулі незалежно один від одного стріляють 4 стрільці, ймовірність влучень кожного з яких відповідно дорівнюють 0,7; 0,75; 0,8; 0,9. Знайти ймовірність знищення кулі.
Відповідь: 0,9985.

Задача 6. У першій урні 8 білих і 2 чорні кулі, а в другій 5 білих і 5 чорних куль. Знайти ймовірність того, що з двох взятих навмання куль по одній з кожної урни принаймні одна біла.
Відповідь: 0,9.

Задача 7. Бізнесмен має контакти з трьома банками і може брати кредити в кожному з них. Протягом 5 попередніх років перший банк погодився надати кредит 6 разів, другий банк – 7 разів, третій банк – 9 разів при 10 звертаннях до кожного з них. Яка ймовірність того, що в даний час хоча б один із банків виділить бізнесменові кредит.
Відповідь: 0,988.

Задача 8. На автомобілі встановлено два охоронні пристрої, які працюють незалежно. Ймовірність того, що при викраденні спрацює перший дорівнює 0,95, другий – 0,9. Знайти ймовірність того, що при викраденні спрацює:
а) тільки один пристрій;
б) хоча б один.
Відповідь: а) 0,14; б) 0,995.

Задача 9. Студент знає 20 з 25 питань програми іспиту. Знайти ймовірність того, що він дасть правильну відповідь на три питання, які він отримав на іспиті.
Відповідь: 57/115.

Задача 10. У ящику лежать деталі трьох сортів: 5 – першого, 4 – другого, 3 – третього. З ящика навмання виймають одну деталь і не повертають в ящик. Знайти ймовірність того, що:
а) при першому випробуванні виявиться деталь першого сорту,
б) при другому випробуванні – другого сорту,
в) при третьому випробуванні – третього сорту.
Відповідь: а) 5/12; б) 4/11; в) 1/22.

Задача 11. Агенція оцінює стан кредитування особи, що визначає її рейтинг як "відмінний", "добрий", "задовільний" і "незадовільний". Ймовірність, що особа отримає "відмінний" рейтинг, становить 0,25, "добрий" – 0,3, "задовільний" – 0,3. Яка ймовірність того, що особа отримає не більше, ніж "добрий" рейтинг.
Відповідь: 0,75.

Задача 12. Ймовірність вчасної сплати податків для першого підприємства складає 0,8, для другого – 0,6, для третього – 2/3. Визначити ймовірність вчасної сплати податків не більше, ніж одним підприємством.
Відповідь: 0,23.

Задача 13. Ймовірність прибуткової діяльності для першої фірми складає 0,7, для другої – 0,5, для третьої ця ймовірність у три рази менша від суми імовірностей для перших двох фірм. Знайти ймовірність того, що прибутковими будуть дві фірми.
Відповідь: 0,51.

Задача 14. Ймовірність вчасного повернення кредиту для першої фірми складає 0,9, для другої – 0,88. Яка ймовірність того, що вчасно поверне кредит тільки одна фірма?
Відповідь: 0,196.

Задача 15. Обчислити ймовірність неповернення позичальником кредиту банку (кредитний ризик щодо позичальника), якщо фахівцями банку було встановлено, що: а) позичальник погасить узяту позику після її пролонгації і в терміни пролонгації в повному обсязі з імовірністю 0,17; б) позика буде винесена на прострочення після того, як вона буде пролонгована з імовірністю 0,06; в) позика буде винесена на прострочення відразу після закінчення терміну дії кредитного договору, тобто без пролонгації з імовірністю 0,01.
Відповідь: 0,24.

Задача 16. Позичальник може не повернути кредит банку при впливі хоч би одного з таких чинників ризику: галузевому (переорієнтація економіки, зменшення попиту на продукцію даної галузі); системному (зміни в

економічній системі, які можуть негативно вплинути на фінансовий стан позичальника, гаранта, страховика); форс-мажорному (землетруси, повені, катастрофи, смерчі, страйки, військові дії); суб’єктивному (репутація позичальника, гаранта, страховика в діловому світі, їх відповідальність і готовність виконати взяті зобов’язання); юридичному (недоліки в складанні та оформленні кредитного договору, гарантійного листа, договору страхування). Визначити ймовірність неповернення кредиту банку, якщо задані ймовірності кожного з чинників ризику.
Відповідь: $P(A)=1-\left[1-P(A_1)\right]\left[1-P(A_2)\right]\left[1-P(A_3)\right]\left[1-P(A_4)\right]\left[1-P(A_5)\right]$.

Задача 17. Визначити умову, при якій буде економічно вигідно проводити поштучний контроль певних деталей, якщо в механізм встановлюється 2 такі деталі. Вартість механізму – N грн, вартість поштучного контролю 1 деталі – M грн, ймовірність виготовлення бракованої деталі p. Механізм виходить з ладу, якщо в ньому буде хоча б одна бракована деталь. Чи буде економічно вигідно проводити поштучний контроль деталей, якщо вартість механізму $N = 2$ грн., вартість контролю кожної деталі $M = 1$ коп, а ймовірність виготовлення бракованої деталі: а) 0,1; б) 0,01; в) 0,001.
Відповідь: а) вигідно; б) вигідно; в) недоцільно.

Задача 18. З урни, яка містить 3 білі та 2 чорні кулі, перекладено дві кулі в урну, яка містить 4 білі і 4 чорні кулі. Знайти ймовірність того, що взяті з другої урни дві кулі після перекладення виявляться білими.
Відповідь: 0,195.

Задача 19. На іспиті з теорії ймовірностей є 34 білети. Студент підготував лише 30 білетів. Яка ймовірність того, що студент складе іспит, якщо йому довелося тягнути білет двічі, оскільки першого разу він витяг білет, якого не знав.
Відповідь: 0,107.

РОЗДІЛ 4 ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БАЙЄСА

4.1 Формула повної ймовірності

Нехай є повна група несумісних подій (гіпотез) $H_1, H_2, \ldots H_n$ і нехай A – деяка подія, яка настає за умови настання якоїсь з подій $H_1, H_2, \ldots H_n$.

Оскільки події $H_1, H_2, \ldots H_n$ утворюють повну групу несумісних подій, то подію A можна записати як суму добутків подій $A = A\cdot H_1 + A\cdot H_2 + \ldots + A\cdot H_n$, де всі доданки в правій частині рівності є несумісними між собою подіями і, отже, ймовірність настання події A дорівнює сумі ймовірностей подій $A\cdot H_1, A\cdot H_2, \ldots, A\cdot H_n$:

$$P(A) = P(A\cdot H_1) + P(A\cdot H_2) + \ldots + P(A\cdot H_n). \tag{4.1}$$

Застосувавши до кожного з доданків, які стоять у правій частині останньої рівності, формулу добутку ймовірностей залежних подій, дістанемо *формулу повної ймовірності*:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)\cdot P_{H_n}(A) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A). \tag{4.2}$$

4.2 Формула Байєса

Нехай проведено випробування, в результаті якого з'явилася подія A. Визначимо, як змінилися (в зв'язку з тим, що подія A вже настала) ймовірності гіпотез. Тобто, будемо знаходити умовні ймовірності $P_A(H_1), P_A(H_2), \ldots, P_A(H_n)$.

Знайдемо спочатку ймовірність $P_A(H_1)$. За теоремою добутку маємо

$$P(AH_1) = P(A)\cdot P_A(H_1) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A).$$

Звідки
$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}.$$

Замінивши *P(A)* за формулою (4.2), отримаємо

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}.$$

Аналогічно для інших гіпотез

$$P_A(H_\kappa) = \frac{P(H_\kappa)\cdot P_{H_\kappa}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}, \qquad \kappa = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Формули (4.3) називаються *формулами Байєса*. Вони дозволяють переоцінити ймовірності гіпотез після того, як стає відомим результат випробування, в якому з'явилася подія A.

Приклад 1. Є чотири ящики. В першому ящику 1 біла і 1 чорна кульки. В другому – 2 білих і 3 чорних кульки. В третьому – 3 білих і 5 чорних кульок. В четвертому – 4 білих і 7 чорних кульок. Подія H_i – вибір i-го ящика (i = 1, 2, 3, 4). Дано, що ймовірність вибору i-го ящика дорівнює $\frac{i}{10}$, тобто $P(H_1)=\frac{1}{10}$, $P(H_2)=\frac{1}{5}$, $P(H_3)=\frac{3}{10}$, $P(H_4)=\frac{2}{5}$. Навмання вибирається один із ящиків і з нього дістають одну кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька виявиться білою.

Розв'язання. Позначимо такі події : A = {дістали білу кульку}
З умови випливає, що умовна ймовірність дістати білу кульку з першого ящика дорівнює $P_{H_1}(A)=\frac{1}{2}$; з другого – $P_{H_2}(A)=\frac{2}{5}$; з третього – $P_{H_3}(A)=\frac{3}{8}$; з четвертого – $P_{H_4}(A)=\frac{4}{11}$.
Ймовірність дістати білу кульку знайдемо за формулою повної ймовірності:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)+P(H_4)\cdot P_{H_4}(A).$$

Тобто, $P(A)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{8}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{11}=\frac{1707}{4400}.$

Приклад 2. Проводяться три види страхування. Ймовірність того, що страхового випадку не буде: за першим видом страхування – 0,9, за другим – 0,95, за третім – 0,85. Питома вага кількості договорів за кожним з трьох видів у загальній кількості укладених за цими видами договорів становить відповідно 50, 30 і 20 %. Знайдіть ймовірність того, що страховий випадок не відбудеться.

Розв'язання. Позначимо такі події: A = {страховий випадок не відбудеться}, а відповідні ймовірності за окремими видами страхування H_1, H_2, H_3.

За умовою відомі $P(H_1)=0,5;\ P(H_2)=0,3;\ P(H_3)=0,2$ і умовні ймовірності події A щодо кожного з них: $P_{H_1}(A)=0,9$; $P_{H_2}(A)=0,95$; $P_{H_3}(A)=0,85$.

Шукана подія відбудеться, якщо настане одна з трьох подій. За формулою повної ймовірності:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\ P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)\,.$$

Тобто, $P(A)=0{,}5\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}95\ +0{,}2\cdot 0{,}85=0{,}905.$

Приклад 3. Два стрільці незалежно один від одного роблять по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення в мішень першого стрільця – 0,8, другого – 0,4. Відомо, що є одне влучення. Знайти ймовірність того, що в мішень влучив перший стрілець.

Розв'язання. До проведення експерименту (пострілу по мішені) можливі дві гіпотези: H_1 або H_2 – влучення 1-го або 2-го стрільця, відповідно.
З умови випливає :

$$P(H_1)=\frac{1}{2}\,;\quad P(H_2)=\frac{1}{2};\text{– ймовірності гіпотез ;}$$

$$P_{H_1}(A)=0{,}8;\quad P_{H_2}(A)=0{,}4.\ \text{– умовні ймовірності події } A.$$

Шукану ймовірність $P_A(H_1)$ знайдемо за формулою Байєса (4.2)

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A).}=$$

$$=\frac{0{,}5\cdot 0{,}8}{0{,}5\cdot 0{,}8+0{,}5\cdot 0{,}4}=\frac{2}{3}\,.$$

Приклад 4. Число вантажних автомобілів, які проїжджають повз бензозаправку, відноситься до числа легкових автомобілів, які проїжджають повз ту ж бензозаправку, як 2:5. 5 % вантажівок і 2 % легковиків заправляються на цій бензозаправці. До бензозаправки під'їхав автомобіль. Знайдіть ймовірність того, що це вантажівка.

Розв'язання. Позначимо такі події:
A = {до заправки під'їхав автомобіль};
H_1 = {під'їхала вантажна машина};
H_2 = {під'їхала легкова машина}.
Тоді згідно з умовою задачі

$$P(H_1)=\frac{2}{7}\,;\quad P(H_2)=\frac{5}{7}\ \text{ – ймовірності гіпотез;}$$

$$P_{H_1}(A)=\frac{1}{20};\quad P_{H_2}(A)=\frac{1}{50}\ \text{ – умовні ймовірності події } A.$$

Шукану ймовірність $P_A(H_1)$ знайдемо за формулою Байєса (4.2).

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A).} =$$

$$= \frac{\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{20}}{\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{20}+\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{50}} = \frac{1}{2}\ .$$

Задачі до розділу 4

Задача 1. Студент знає відповіді на 15 з 20 екзаменаційних білетів. У якому випадку ймовірність того, що він складе екзамен, буде більшою, коли він іде відповідати першим, чи коли він іде другим?
Відповідь: ймовірності однакові – 3/4.

Задача 2. З урни, яка містить 3 білі та 2 чорні кулі, перекладено дві кулі в урну, яка містить 4 білі і 4 чорні кулі. Знайдіть ймовірність того, що взяті з другої урни дві кулі після перекладання виявляться білими.
Відповідь: $\approx 0{,}25$.

Задача 3. У спортивному магазині 20 % спортивних костюмів виготовлено фірмою “Puma”, 30 % – “Adidas”, 50 % – “Reebok”. Ймовірності браку для кожної з цих фірм становлять 0,05; 0,01; 0,06, відповідно. Яка ймовірність того, що навмання взятий спортивний костюм виявиться бракованим?
Відповідь: 0,043.

Задача 4. На стадіон прибуло десять спортсменів, з яких чотири виконували вправи повністю, п'ять – на 80 % і один виконував вправи наполовину. Яка ймовірність виконання вправ першим викликаним спортсменом?
Відповідь: 0,85.

Задача 5. Відомо, що число непридатних серед 100 електроламп не перевищує 5, причому всі припущення про кількість непридатних електроламп рівноможливі. Знайти ймовірність того, що у партії немає непридатних, якщо вибрані навмання 5 електроламп виявились придатними.
Відповідь: $\approx \frac{1}{6}\cdot 5{,}289.$

Задача 6. Деталі, виготовлені цехом заводу, потрапляють для перевірки їхньої стандартності до одного з двох контролерів. Ймовірність того, що деталь потрапить до першого контролера, дорівнює 0,6, до другого – 0,4.

Ймовірність того, що придатна деталь буде визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94, другим – 0,98. Придатна деталь при перевірці визнана стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь перевіряв другий контролер.
Відповідь: 0,41.

Задача 7. При переливанні крові необхідно враховувати групу крові донора і хворого. Людині, що має четверту групу крові, можна перелити кров будь-якої групи; людині з другою або третьою групою крові можна перелити кров або тієї ж групи, або першої; людині з першою групою крові можна перелити лише кров першої групи. Серед населення 33,7 % мають першу групу, 37,5 % – другу, 20,9 – третю і 7,9 % – четверту групу крові. Знайти ймовірність того, що випадково взятому хворому можна перелити кров випадково взятого донора.
Відповідь: $\approx 0,574$.

Задача 8. Для заліку викладач підготував 50 задач: 20 з вищої математики, 20 з теорії ймовірностей і 10 з математичного програмування. Для отримання заліку необхідно розв'язати першу задачу, запропоновану викладачем. Студент вміє розв'язувати 18 задач з вищої математики, 15 задач з теорії ймовірностей і 5 задач з математичного програмування. Студент склав залік. Знайти ймовірність того, що йому дісталася задача з теорії ймовірностей.
Відповідь: 15/38.

Задача 9. У ящику знаходиться 10 тенісних м'ячів, з яких 8 нових (таких, якими ще не грали). Для першої гри беруть три м'ячі, які після гри повертають у ящик. Для другої гри беруть один м'яч. Знайдіть ймовірність того, що цей м'яч новий.
Відповідь: 0,56.

Задача 10. 96 % деталей стандартні. Пропонується спрощена схема контролю, яка з імовірністю 0,98 пропускає стандартні деталі, а з імовірністю 0,05 – нестандартні. Знайдіть ймовірність того, що деталь, яка пройшла контроль, є стандартною.
Відповідь: 0,9428.

Задача 11. З 10 студентів, що прийшли складати іспит, Іван та Петро знають 20 білетів із 30, Сергій – 15 білетів із 30, а всі інші знають всі 30 білетів. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний студент складе іспит, якщо знання білета гарантує складання іспиту з ймовірністю 0,85, а при незнанні білета можна скласти іспит з ймовірністю 0,1.
Відповідь: $\approx 0,763$.

Задача 12. Система сигналізації може спрацювати помилково з імовірністю 0,05, а в разі крадіжки спрацьовує з ймовірністю 0,9. Ймовірність крадіжки в даному районі становить 0,25. Знайти ймовірність того, що сигналізація спрацювала помилково.
Відповідь: $\approx 0{,}143$.

Задача 13. У магазині реалізується продукція трьох фірм, частка кожної, відповідно, така: 1-ї фірми – 50 %, 2-ї фірми – 30 %, 3-ї фірми – 20 %. Для продукції кожної з фірм брак, відповідно, становить: для продукції 1-ї фірми – 2 %, для продукції 2-ї фірми – 3 %, для продукції 3-ї фірми – 5 %. Яка ймовірність того, що навмання придбана в магазині одиниця продукції є якісною?
Відповідь: 0,971.

Задача 14. У першому ящику 30 деталей, з яких 20 стандартних. У другому – 15 деталей, з яких 10 стандартних. З другого ящика беруть навмання одну деталь і перекладають її до першого ящика.

а) Знайти ймовірність того, що навмання взята після цього деталь з першого ящика стандартна.

б) Нехай відомо, що з першого ящика вийнято стандартну деталь. Знайти ймовірність того, що до першого ящика перекладено нестандартну деталь.

Відповідь: а) 2/3, б) 10/31.

Задача 15. Стан використання підприємствами наданих їм кредитів контролюється центральним і обласним банками. Центральний банк перевіряє вибірково 10 %, а обласний банк – 20 % підприємств. Яка ймовірність того, що навмання вибране підприємство буде перевірене поточного року центральним банком і не перевірене обласним банком, якщо рішення щодо перевірки на різних рівнях приймаються незалежно.
Відповідь: 0,08.

Задача 16. У кошику міститься 20 яблук білого і 15 червоного кольору. Навмання виймають три яблука з кошика і кладуть замість них три яблука червоного кольору. Потім навмання виймають одне яблуко. Яка ймовірність того, що вийнято яблуко червоного кольору?
Відповідь: 0,4776.

Задача 17. До центру статистичних досліджень надходить інформація з трьох пунктів: з першого – 50 %, з другого – 30 %, з третього – 20 % усієї інформації. Ймовірність допущення помилки при обробці статистичних даних у першому пункті дорівнює 0,1, у другому – 0,05, у третьому – 0,15. Яка ймовірність того, що отримана центром у даний момент часу інформація цілком правильна.

Відповідь: 0,905.

Задача 18. Комерційний банк надає кредити 3 фірмам. Ймовірність неповернення кредиту для 1-ї фірми – 1 %; для 2-ї – 8,2 %; для 3-ї – 5,4 %. Визначити частки кредитів, які повинен надати комерційний банк, виходячи з умови рівності можливих обсягів неповернених кредитів відносно кожної фірми. Знайти загальний ризик неповернених кредитів комерційному банку.
Відповідь: 0,054; 0,02295.

РОЗДІЛ 5 НЕЗАЛЕЖНІ ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ У СХЕМІ БЕРНУЛЛІ

5.1 Формула Бернуллі

Нехай проводиться певне число однакових випробувань (експериментів), у кожному з яких можливі лише два несумісні наслідки: деяка подія *A* може відбутися або не відбутися.

Означення. Серія повторних незалежних випробувань з одним із можливих результатів *A* або $\bar{A}$, у кожному з яких подія *A* має одну і ту ж ймовірність появи $P(A)=p$, називається *схемою Бернуллі*.

Отже, якщо випробування проводяться за схемою Бернуллі, то в кожному з них можливий тільки один із двох наслідків: *A* або $\bar{A}$, до того ж ймовірності $P(A)=p$ *і* $P(\bar{A})=1-p=q$ є однаковими в кожному випробуванні.

Побудуємо ймовірнісну модель експерименту, який полягає в послідовному здійсненні *n* незалежних випробувань з одним із двох можливих результатів.

Якщо повторні випробування проводяться за схемою Бернуллі, вирішується така основна задача: визначити ймовірність $P_n(\kappa)$ того, що подія *A* появиться рівно *к* разів у *n* випробуваннях за умови, що ймовірність її появи в кожному окремому випробуванні $P(A)=p$.

Теорема. Ймовірність $P_n(\kappa)$ того, що в результаті *n* випробувань (експериментів) за схемою Бернуллі подія *A* з'явиться рівно *к* разів (*к* = 0,1,2, ..., *n*), обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_n(\kappa) = C_n^{\kappa}\, p^{\kappa}\, q^{n-\kappa} \qquad (5.1)$$

де $p = P(A)$ − ймовірність появи події *A* в одному випробуванні;

$$q = 1 - p = P(\bar{A}) \ .$$

Формулу (5.1) називають ще біномною, а самі ймовірності $P_n(\kappa)$ – біномними ймовірностями. Така назва пов'язана з тим, що числа $P_n(\kappa)$ мають безпосереднє відношення до формули бінома Ньютона.

Ймовірність появи події *A* в *n* випробуваннях *к* разів, де число *к* перебуває між числами κ_1 і κ_2, $0 \le \kappa_1 \le \kappa_2 \le n$, знаходиться за формулою:

$$P_n(\kappa_1 \le \kappa \le \kappa_2) = P_n(\kappa_1) + P_n(\kappa_1 + 1) + \ldots + P_n(\kappa_2).$$

Ймовірність появи події *A* в *n* випробуваннях хоча б один раз:

$$P_n(1 \le \kappa \le n) = 1 - q^n. \qquad (5.2)$$

Означення. *Найімовірнішим числом* появ події *А* в *n* незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі називається число κ_0 появ події *А*, ймовірність якого перевищує або принаймні не є меншою за ймовірності решти можливих наслідків випробувань (експериментів).

Найімовірніше число κ_0 появ події *А* в *n* випробуваннях за схемою Бернуллі можна визначити з нерівності:

$$np - q \le \kappa_0 \le np + p, \qquad (5.3)$$

де p і q є відповідно ймовірностями появи і непояви події в одному випробуванні.

Довжина проміжку $[np - q; np + p]$ дорівнює одиниці, і його кінці – або обидва нецілі числа, або обидва цілі числа. Цей проміжок може містити в собі одне ціле число (якщо кінці – нецілі числа) або два цілих числа (якщо кінці – цілі числа). Цілі числа, що містяться в даному проміжку, і є тими значеннями *к*, за яких $P_n(\kappa)$ набуває найбільшого значення.

Приклад 1. В урні 30 кульок: 20 білих і 10 чорних. Витягнули підряд 4 кульки, причому кожну витягнуту кульку повертають в урну перед витягуванням наступної і кульки в урні перемішують. Знайти ймовірність того, що серед витягнутих 4 кульок буде 2 білих.

Розв'язання. Позначимо подію *А*: {серед 4 кульок – 2 білих}. Ймовірність дістати білу кульку можна вважати однаковою в усіх чотирьох випадках $p = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$; тоді $q = 1 - p = \frac{1}{3}$. За умовою задачі *n* = 4. Застосувавши формулу Бернуллі, матимемо:

$$\kappa = 2; \qquad P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{27}.$$

Приклад 2. Яка ймовірність того, що при 10 підкиданнях монети герб випаде: а) від 4 до 6 разів; б) жодного разу; в) не менше 4 разів.

Розв'язання. Позначимо подію *А*: {випадіння герба}. Тоді $P(A) = p = \frac{1}{2}$.

Тому $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. За умовою задачі *n* = 10. Застосувавши формулу Бернуллі (5.1) та наслідки з неї, матимемо:

а) $4 \le к \le 6 \qquad P_{10}(4 \le к \le 6) = P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) =$

$$= C_{10}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{6} + C_{10}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} + C_{10}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} =$$

$$= \frac{10!}{4!6!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \frac{10!}{5!5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \frac{10!}{4!6!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{21}{32} \approx 0,65.$$

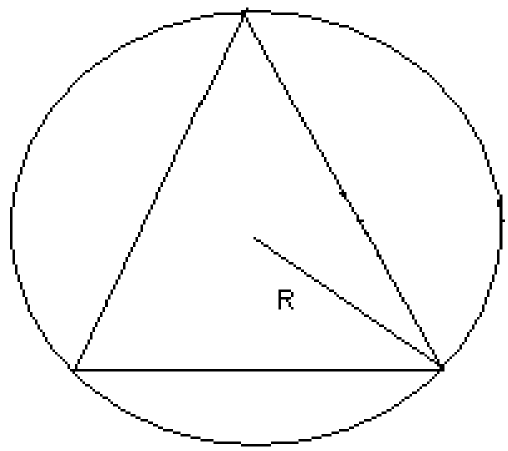
б) $к = 0 \qquad P_{10}(0) = C_{10}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{2^{10}} \approx 0,00097.$

в) $4 \le к \le 10 \qquad P_{10}(к \ge 4) = 1 - P_{10}(к < 4) =$

$$= 1 - \left(C_{10}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C_{10}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{9} + C_{10}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{8} + C_{10}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(1 + C_{10}^{1} + C_{10}^{2} + C_{10}^{3}\right) \approx 0,78.$$

Приклад 3. У крузі навмання обирається 5 точок. Знайдіть ймовірність того, що 2 з них будуть обрані з правильного трикутника, вписаного в цей круг.



Розв'язання. Позначимо подію *A*: {точка потрапила в трикутник, який вписано в коло}. Отже, елементарні наслідки випробування, що сприяють появі події *A*, утворюють правильний трикутник, площа якого дорівнює $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. Множиною всіх можливих наслідків випробування є коло радіуса R, площа якого дорівнює $S_0 = \pi R^2$. За означенням геометричної ймовірності одержимо

$$P(A) = \frac{S}{S_0} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Тоді $P(A) = p = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. Тому $q = 1 - p = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4\pi}$. За умовою задачі $n = 5$. Застосувавши формулу Бернуллі (5.1), матимемо:

$$\kappa = 2 \qquad P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^3 \approx 0{,}345.$$

Приклад 4. Гральний кубик кидається 10 разів. Знайти ймовірність того, що "шістка" випаде: а) один раз; б) не більше двох разів; в) найімовірніше число випадення "шістки".

Розв'язання. а) Проводиться серія із десяти випробувань. Ймовірність випадення шістки при кожному випробуванні одна і та ж $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - ð = \frac{5}{6}$. За умовою задачі n = 10. Застосувавши формулу Бернуллі (5.1) та наслідки з неї матимемо:

$n = 10,\ p = \frac{1}{6},\ q = \frac{5}{6},\ \kappa = 1$.

$$P_{10}(1) = C_{10}^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \approx 0{,}323.$$

б) $\kappa \le 2 \quad P_{10}(\kappa \le 2) = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) =$

$$= C_{10}^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + C_{10}^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^9 + C_{10}^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0{,}776.$$

в) Найімовірніше число випадення "шістки" знайдемо з нерівностей: $np - q \le \kappa_0 \le np + p$, тобто $10 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le \kappa_0 \le 10 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$, $\frac{5}{6} \le \kappa_0 \le \frac{11}{6}$.

Отже $\kappa_0 = 1$.

5.2 Локальна теорема Муавра – Лапласа

Теорема. Нехай $p = P(A)$ – ймовірність появи випадкової події A в кожному випробуванні, серія яких проводиться за схемою Бернуллі, $0 < ð < 1$. Тоді для великих значень n ймовірність $Ð_ï(ê)$ появи події A рівно κ разів у n випробуваннях за схемою Бернуллі обчислюється за наближеною формулою:

$$P_n(\kappa) \approx \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{npq}}, \qquad \text{якщо} \qquad x_0 = \frac{\kappa - np}{\sqrt{npq}}, \tag{5.4}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – *функція Гаусса*.

Функція Гаусса має важливі застосування в теорії ймовірностей і математичній статистиці. З огляду на це опишемо її основні *властивості*:

- $\varphi(x)$ визначена для всіх $x \in (-\infty;\infty)$ *і* $\varphi(x) > 0$;
- $\varphi(x)$ є парною функцією, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
- $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x) = 0,$ тобто вісь *Ox* є асимптотою графіка $\varphi(x)$;
- $\varphi(x)$ має максимум у точці $x = 0$ і $\max\varphi(x) = \varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Графік функції зображено на (рис. 5.1)

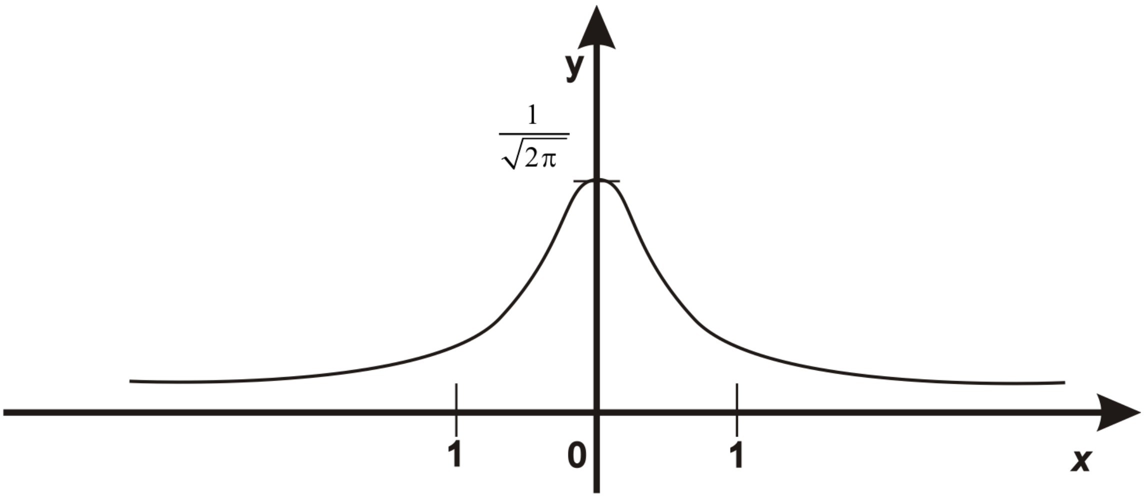


Рисунок 5.1

Функція Гаусса табульована (додаток А). У таблиці А.1 додатка А наведено значення $\varphi(x)$ для $0 \le x \le 3{,}99.$ Для обчислення значень $\varphi(x)$ при від'ємних значеннях $-3{,}99 < x < 0$ використовують парність функції, а для $|x| > 3{,}99$ приймають, що $\varphi(x) = 0.$

5.3 Інтегральна теорема Муавра – Лапласа.

Теорема. Нехай $p = P(A)$ – ймовірність появи випадкової події *А* в кожному випробуванні, серія яких проводиться за схемою Бернуллі. Тоді для великих значень *n* ймовірність $P_n(\kappa_1 \le \kappa \le \kappa_2)$ того, що подія *А* з'явиться від κ_1 до κ_2 разів у *n* випробуваннях за схемою Бернуллі, виражається наближеною формулою:

$$P_n(\kappa_1 \le \kappa \le \kappa_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \tag{5.5}$$

де $\quad x_1=\dfrac{\kappa_1-np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2=\dfrac{\kappa_2-np}{\sqrt{npq}}.$

Для простішого запису формули (5.5) вводять функцію Лапласа:

$\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz,$ яку називають *стандартним інтегралом ймовірності*.

За допомогою функції Лапласа формула (5.4) записується у вигляді:

$$P_n(\kappa_1\le\kappa\le\kappa_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1). \tag{5.6}$$

Функція Лапласа має важливі застосування в теорії ймовірностей і математичній статистиці. З огляду на це опишемо її основні *властивості*:

- $\Phi(x)$ визначена для всіх $x\in(-\infty;\infty)$, $\Phi(x)>0$, якщо $x>0$ і $\Phi(x)<0$, якщо $x<0$;
- $\Phi(x)-$ непарна функція, тобто $\Phi(-x)=-\Phi(x)$;
- $\Phi(0)=0$; $\Phi(+\infty)=0{,}5\, i\ \ \Phi(-\infty)=-0{,}5 \Rightarrow$ прямі y = 0,5 і y = -0,5 асимптоти графіка функції при $x\to+\infty$ i $x\to-\infty$, відповідно;
- $\Phi(x)$ – зростаюча функція, бо $\Phi'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}>0$;
- на інтервалі $(0,\ +\infty)$ графік $\Phi(x)$ опуклий і на інтервалі $(-\infty,0)$ – ввігнутиий.

Функція Лапласа $\Phi(x)$ табульована (додаток Б). Значення $\Phi(x)$ табульовані для $0\le x\le5$. Значення $\Phi(x)$ для $-5\le x<0$ знаходяться за таблицею Б.1 додатка Б і рівністю $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

Значення $\Phi(x)$ приймаються рівними 0,5, якщо $x>5$, і $-0{,}5$, якщо $x<-5$.

Графік зображено на (рис. 5.2)

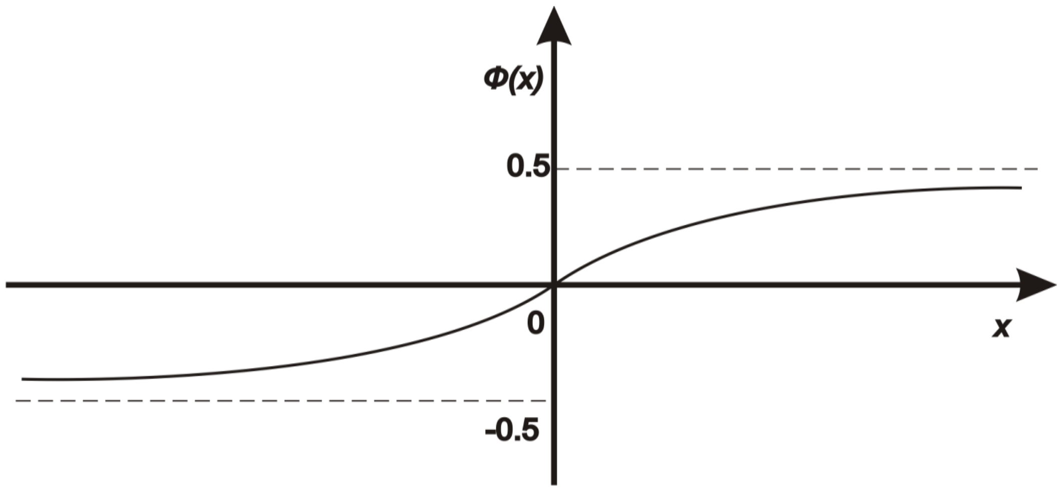


Рисунок 5.2

Приклад 5. Ймовірність того, що з конвеєра зійде виріб першого сорту дорівнює 0,9. Знайдіть ймовірність того, що із 600, взятих на перевірку, виробів:

а**)** 530 будуть першого сорту;

б) першого сорту буде не менше 520 і не більше 535.

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що навмання взятий виріб є першого сорту. За умовою задачі, $n = 600$, $p = 0{,}9$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $\kappa = 530$.

а) Шукану ймовірність $P_{600}(530)$ обчислюємо за формулою (5.4), бо використання формули Бернуллі призводить до громіздких обчислень:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = \sqrt{54} \approx 7{,}4;$$

$x_0 = \dfrac{\kappa - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{530 - 600 \cdot 0{,}9}{7{,}4} = \dfrac{-10}{7{,}4} \approx -1{,}36,$ за таблицею додатка А знаходимо $\varphi(1{,}36) = 0{,}158$ і обчислюємо:

$$P_{600}(630) \approx \frac{\varphi(-1{,}36)}{7{,}4} = \frac{\varphi(1{,}36)}{7{,}4} = \frac{0{,}158}{7{,}4} \approx 0{,}022.$$

б) Для обчислення шуканої ймовірності $P_{600}(520 \le \kappa \le 535)$ використаємо формулу (5.6). Спочатку обчислимо:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = \sqrt{54} \approx 7{,}4;$$

$$x_1 = \frac{520 - 600 \cdot 0{,}9}{7{,}4} \approx \frac{-20}{7{,}4} \approx -2{,}72, \qquad x_2 = \frac{535 - 600 \cdot 0{,}9}{7{,}4} \approx \frac{-5}{7{,}4} \approx -0{,}68.$$

За таблицею додатка Б знаходимо:

$\varPhi(x_1) = \varPhi(-2{,}72) = -\varPhi(2{,}72) = -0{,}4967;$

$\varPhi(x_2) = \varPhi(-0{,}68) = -\varPhi(0{,}68) = -0{,}2517$ і одержуємо, що

$$P_{600}(520 \le \kappa \le 535) \approx \varPhi(x_2) - \varPhi(x_1) = \varPhi(-0{,}68) - \varPhi(-2{,}72) =$$

$$= \varPhi(-0{,}68) + \varPhi(2{,}72) = -0{,}2517 + 0{,}4967 = 0{,}245.$$

5.4 Асимптотична формула Пуассона

Для наближеного обчислення появи події A в n незалежних випробуваннях κ разів схеми Бернуллі при великих n і малих p таких, що $np < 10$, доцільно використовувати *формулу Пуассона*:

$$P_n(\kappa) \approx \frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda = n \cdot p \tag{5.7}$$

Для виразу $\frac{\lambda^{\kappa} e^{-\lambda}}{\kappa!}$, який розглядається як функція двох змінних k і λ, складено таблицю значень (додаток В).

Приклад 6. З бази до магазину відправлено 4000 пляшок води. За спостереженнями відправника ймовірність того, що в дорозі пляшка розіб'ється, дорівнює 0,0005. Знайдіть ймовірність того, що в дорозі з 4000 пляшок:
а) розіб'ється 3 пляшки;
б) розіб'ється не менше 3 і не більше 5 пляшок.

Розв'язання. а) Нехай подія А – навмання вибрана пляшка розіб'ється в дорозі. За умовою задачі, ймовірність $p = P(A) = 0,0005$ є мала, а число n = 4000 – велике. Тому для обчислення шуканої ймовірності $P_{4000}(3)$ доцільно використати формулу Пуассона (5.7).
У даному випадку:

$$\lambda = n \cdot p = 4000 \cdot 0,0005 = 2 \quad \text{і} \quad P_{4000}(3) \approx \frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0,183.$$

б) Для обчислення шуканої ймовірності $P_{4000}(3 \le \kappa \le 5)$ використаємо для кожного з доданків формулу Пуассона (5.7).

$$P_{4000}(3 \le \kappa \le 5) = P_{4000}(3) + P_{4000}(4) + P_{4000}(5) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} + \frac{2^4}{4!} e^{-2} + \frac{2^5}{5!} e^{-2} \approx$$

$$\approx 0,183 + 0,09 + 0,036 = 0,309.$$

Задачі до розділу 5

Задача 1. В урні 15 кульок: 10 чорних і 5 білих. Випробування виконують так: виймають одну кульку, фіксують її колір і кладуть назад; перемішують кульки і виймають ще одну кульку. Таку процедуру повторюють кілька разів. Яка ймовірність того, що під час такого випробування з 5 вийнятих кульок буде 4 білих?
Відповідь: 10/243.

Задача 2. Сто станків працюють незалежно один від одного, причому ймовірність безперебійної роботи кожного з них протягом зміни дорівнює – 0,8. Знайдіть ймовірність того, що протягом зміни безперебійно пропрацює:
а) 85 станків;
б) від 75 до 85 станків.
Відповідь: а) 0,456; б) 0,7888.

Задача 3. Підручник надруковано тиражем 90000 примірників. Ймовірність неправильного брошурування підручника дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має 5 бракованих підручників.
Відповідь: 0,0607.

Задача 4. У регіоні 75 % фермерів мають річний прибуток, що не перевищує 1 млн. гривень. Навмання вибирають 400 фермерів. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться 270 фермерів, річний прибуток яких перевищує 1 млн. гривень.
Відповідь: 0,0001.

Задача 5. Ймовірність кожної людини захворіти на грип під час епідемії становить 0,2. Яка ймовірність того, що серед 400 навмання перевірених осіб хворими на грип виявляться від 70 до 100 осіб?
Відповідь: 0,8882.

Задача 6. Під час виробництва деякої масової продукції ймовірність випуску нестандартного виробу становить 0,01. Яка ймовірність того, що в партії зі 100 виробів цієї продукції 2 вироби будуть нестандартними?
Відповідь: 0,184.

Задача 7. Ймовірність несплати податків для кожного з 500 підприємців регіону дорівнює 0,1. Знайти найімовірнішу кількість підприємців регіону, які не сплачують податків, і визначити відповідну ймовірність.
Відповідь: 50; 0,06.

Задача 8. Два рівносильних шахісти грають в шахи. Що вірогідніше виграти: дві партії з чотирьох чи три партії з шести (нічиї до уваги не беруться)?
Відповідь: $P_4(2) > P_6(3)$.

Задача 9. Гральний кубик підкидають 800 разів. Яка ймовірність того, що кількість очок кратна трьом, з'явиться не менше 260 разів і не більше 274 разів?
Відповідь: 0,4003.

Задача 10. У процесі виробництва ймовірність дефектів у кожній партії продукції становить 0,1. Яка ймовірність того, що з десяти партій дефекти матимуть менше двох партій?
Відповідь: 0,7316.

Задача 11. Ймовірність виграшу на один лотерейний білет дорівнює 0,3. Куплено 10 білетів. Знайти ймовірність того, що:
а) серед куплених білетів 2 будуть виграшними;

б) найвірогідніше число виграшних білетів і відповідну ймовірність.
Відповідь: а) 0,233; б) 3; 0,267.

Задача 12. У магазин зайшло 8 покупців. Ймовірність того, що будь-який з них не піде з магазину без покупки, дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що жоден з них нічого не купить.
Відповідь: 0,0168.

Задача 13. В одержаній партії текстильних виробів 0,6 % браку. Яка ймовірність при випадковому виборі 1000 виробів виявити:
а) шість бракованих виробів;
б) хоча б один бракований виріб.
Відповідь: а) 0,1606; б) 0,9975.

Задача 14. За фенотипом діти карооких і кучерявих батьків, якщо вони гетерозиготні за цими ознаками (кароокість домінує над блакитноокістю, а кучерявість над прямоволосістю), можуть бути чотирьох типів: 1) кароокі кучеряві з ймовірністю 9/16; 2) кароокі прямоволосі з ймовірністю 3/16; 3) блакитноокі кучеряві з ймовірністю 3/16; 4) блакитноокі прямоволосі з ймовірністю 1/16. Припустимо, у таких батьків народилося 5 дітей (без двійнят). Знайти ймовірність того, що серед цих дітей:
а) двоє першого типу;
б) хоча б один блакитноокий і прямоволосий;
в) хоча б один блакитноокий.
Відповідь: а) 0,267; б) 0,276; в) 0,77.

Задача 15. Спортсмен 5 разів стріляє по мішені. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,4. Для одержання заліку необхідно влучити не менше трьох разів.
а) Яка ймовірність одержання заліку?
б) Яка найбільш імовірна кількість влучень у мішень?
Відповідь: а) 0,317; б) 2.

Задача 16. Відомо, що 30 % власників квартир мають заборгованість в оплаті комунальних послуг. Яка ймовірність того, що серед навмання вибраних 700 власників квартир число осіб, які не мають заборгованості, виявиться в межах від 400 до 500 чоловік.
Відповідь: 0,7939.

Задача 17. В екзаменаційному білеті є 5 запитань. На кожне запитання дано 3 можливі відповіді, серед яких необхідно вибрати одну правильну. Яка ймовірність того, що методом простого відгадування вдається відповісти щонайменше на 4 запитання.
Відповідь: 0,04527.

ЧАСТИНА ІІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

РОЗДІЛ 6 ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Випадкова величина – це величина, яка в результаті експерименту з випадковим результатом набуває того чи іншого чисельного значення. Прикладами випадкових величин, що набувають різних чисельних значень під впливом багатьох випадкових факторів, можуть бути:

а) число очок, яке випаде на верхній площині за одне кидання грального кубика;

б) число бракованих виробів серед *n* навмання взятих;

в) число кидань монети до першої появи герба;

г) число викликів, які надходять на телефонну станцію протягом деякого проміжку часу;

д) тривалість часу обслуговування покупця і т. д.

Випадкові величини позначають великими літерами латинського алфавіту X, Y, Z,…, а їх можливі значення – малими літерами x, y, z,… латинського алфавіту.

Випадкові величини поділяються на дискретні та неперервні.

Випадкова величина називається *дискретною*, якщо множина її можливих значень є скінченною або зліченною.

Законом розподілу випадкової величини називається довільна відповідність, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями.

Закон розподілу дискретної випадкової величини задають таблично, аналітично або графічно.

У випадку дискретної випадкової величини закон розподілу найзручніше описувати за допомогою ряду розподілу – таблиці, де наведено всі можливі значення цієї випадкової величини та відповідні їм ймовірності, причому $\sum_{з=1}^{ї} p_i = 1$.

ξ	x_1	x_2	. . .	x_n
P	p_1	p_2	. . .	p_n

Закон розподілу дискретної випадкової величини можна задавати ще графічно у вигляді багатокутника розподілу. Для його зображення у прямокутній системі координат будують точки з координатами (x_1, p_1), (x_2, p_2),... і з'єднують їх відрізками. Одержана ламана буде називатися *багатокутником розподілу* даної випадкової величини (рис. 6.1).

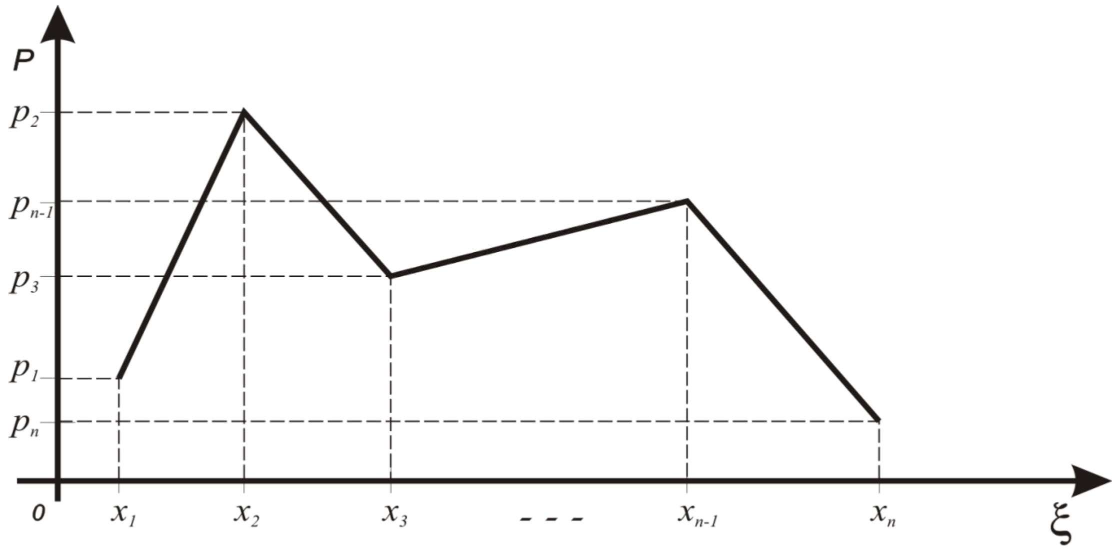


Рисунок 6.1

Інший спосіб задання розподілу випадкової величини – зазначення її функції розподілу.

Функцією розподілу випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка дорівнює ймовірності того, що випадкова величина набуде значення, яке менше x, тобто

$$F(x)=P(X<x).$$

Функція розподілу має такі властивості:

Область визначення $F(x)$ – всі дійсні числа; область значень – проміжок $[0;1]$.

$F(x)$ – неспадна функція, тобто якщо $x_1<x_2$, то $F(x_1)\le F(x_2)$.

Ймовірність того, що випадкова величина X потрапить в інтервал $[a,b)$, визначається за формулою:

$$P(a<x<b)=F(b)-F(a). \qquad (6.1)$$

Якщо випадкова величина X дискретна, то:

$$F(x)=\sum_{x_i<x}P(X=x_i), \qquad (6.2)$$

де підсумовування виконується за всіма індексами i, для яких виконується умова $x_i<x$.

6.1 Основні закони розподілу ймовірностей

Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини може виражатися різними аналітичними формулами.

1. Біномний закон розподілу

Нехай проводиться серія n незалежних випробувань у схемі Бернуллі і $p=P(A)$ – ймовірність появи події A в кожному окремому випробуванні.

Сформулюємо закон розподілу дискретної випадкової величини – числа появ події A в n випробуваннях.

Випадкова величина X може набути значень $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2, \ldots,\ x_n = n.$ Ймовірності можливих значень x_i випадкової величини X обчислимо за формулою Бернуллі:

$$p_i = P_n(i) = C_n^i\, p^i\, q^{n-i}, \qquad q = 1 - p \tag{6.3}$$

і одержимо закон розподілу випадкової величини X:

$X = x_i$	0	1	2	...	x_n
$P = p_i$	q^n	$C_n^1\, p q^{n-1}$	$C_n^2\, p^2\, q^{n-2}$	...	$p^ї$

Одержаний у формі такої таблиці закон розподілу дискретної випадкової величини Х називається *біномним*.

2. Розподіл Пуассона

Розподіл ймовірностей дискретної випадкової величини X, яка набуває значень x_i : 0, 1, 2, ..., n,... з імовірностями

$$p_i = P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda},\ i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.4}$$

називається *законом розподілу Пуассона*, що залежить від параметра λ, $\lambda > 0$.

3. Геометричний розподіл

Нехай проводиться серія n незалежних випробувань у схемі Бернуллі і p – ймовірність появи події A в кожному окремому випробуванні, а $q = 1 - p$. Випробування припиняються, як тільки з'явиться подія A. Це означає, що коли подія A з'явиться в $ò$ -му випробуванні, то в попередніх $m-1$ випробуваннях вона не з'являлася.

Дискретна випадкова величина X є числом випробувань, які необхідно провести до першої появи події A. Можливими значеннями випадкової величини X є $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots$ Оскільки q^{m-1} є ймовірністю того, що подія в $m-1$ випробуваннях не з'явиться, а p – ймовірністю того, що вона з'явиться в m -му випробуванні, то

$$P(X = m) = q^{m-i} p. \tag{6.5}$$

Закон розподілу дискретної випадкової величини X, що виражається формулою (6.4), називається геометричним, оскільки права частина цієї формули – загальний член геометричної прогресії.

4. Рівномірний розподіл

Нехай X – випадкова величина, яка набуває n значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Кажуть, що вона розподілена рівномірно, якщо

$$P\{X = x_i\} = \frac{1}{n} \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Ряд розподілу для такої випадкової величини має вигляд:

X	1	2	...	n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

6.2 Числові характеристики дискретної випадкової величини

Числа, які описують випадкову величину сумарно називаються *числовими характеристиками* цієї величини.

а) Математичне сподівання

Математичним сподіванням *M(X)* дискретної випадкової величини *X* називається сума добутків всіх її можливих значень на їх ймовірності:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (6.6)$$

Математичне сподівання має такі властивості:

Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій величині, тобто, якщо *C = const*, то *M(C) = C*.

Сталий множник виноситься за знак математичного сподівання, тобто, якщо *C = const*, то *M(CX)=CM(X)*.

Математичне сподівання алгебраїчної суми двох (або кількох) випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань цих величин, тобто $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин (або кількох взаємно незалежних випадкових величин) дорівнює добутку математичних сподівань цих величин, тобто, якщо *X* і *Y* – незалежні випадкові величини, то $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Математичне сподівання випадкової величини *X* наближено дорівнює середньому арифметичному зваженому її спостережуваних значень. Це означає, що за досить великого числа експериментів середнє арифметичне спостережуваних значень випадкової величини *X* можна прийняти рівним її математичному сподіванню. Математичне сподівання *M(X)* випадкової величини *X* є точка числової прямої, в околі якої "розсіяні" її значення $x_1, x_2, ..., x_n$.

Математичне сподівання числа *X* появ події *A* в *n* випробуваннях за схемою Бернуллі дорівнює добуткові числа *n* випробувань на ймовірність *p* появи події в одному випробуванні, тобто:

$$M(X) = np. \qquad (6.7)$$

б) Дисперсія

Відхиленням дискретної випадкової величини X від її математичного сподівання $M(X)$ називається різниця $X - M(X)$. Відхилення $X - M(X)$ є також дискретною випадковою величиною.

Дисперсією $D(X)$ дискретної випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання, тобто:

$$D(X) = M\left\{(X - M(X))^2\right\} = M(X^2) - (M(X))^2. \tag{6.8}$$

Дисперсія має такі властивості.

Дисперсія сталої величини дорівнює нулю.

$$D(C)=0 \Leftrightarrow C=const.$$

Сталий множник виноситься у квадраті за знак дисперсії.

$$D(CX)=C^2D(X).$$

Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин (або кількох взаємно незалежних величин) дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X -Y)=D(X)+D(Y).$$

У разі проведення послідовності n випробувань за схемою Бернуллі дисперсія випадкової величини X – числа появ події A в цих випробуваннях обчислюється за формулою:

$$D(X) = npq, \tag{6.9}$$

де $P = const$ – ймовірність появи події A в окремому експерименті, $q = 1 - p$.

в) Середнє квадратичне відхилення

Якщо випадкова величина вимірюється в деяких одиницях, то дисперсія вимірюватиметься в квадратах цих одиниць. Тому доцільно мати характеристику розсіювання значень випадкової величини тієї ж вимірності, що й сама величина.

Середнім квадратичним відхиленням дискретної випадкової величини X називають корінь квадратний з дисперсії $D(X)$ і позначають $\sigma(X)$, тобто:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{6.10}$$

г) Мода і медіана

Модою дискретної випадкової величини X називається таке її значення x_i, ймовірність якого є найбільшою.

Медіаною дискретної випадкової величини *X* називається таке її значення у законі розподілу, для якого сума ймовірностей можливих значень зліва і справа від нього не перевищує 0,5.

Математичне сподівання, мода, медіана та дисперсія характеризують найбільш важливі риси розподілу випадкової величини, тобто, відповідно його центральну тенденцію та ступінь розсіювання можливих значень величини навколо середнього значення. У теорії ймовірностей застосовуються деякі інші чисельні характеристики відповідного призначення, кожна з яких характеризує випадкову величину з позиції тих чи інших особливостей її розподілу.

д) Початкові і центральні моменти

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини *X* називають математичне сподівання величини X^k і позначають γ_k:

$$\gamma_k = M(X^k). \tag{6.11}$$

Враховуючи означення математичного сподівання для дискретних і неперервних випадкових величин, одержимо відповідно:

$$\gamma_k = M(X^k) = \sum x_i^k \cdot p_i .$$

Зокрема, $\gamma_1 = M(X)$, $\gamma_2 = M(X^2)$. Тоді формулу для обчислення дисперсії можна записати так:. $D(X) = \gamma_2 - \gamma_1^2$. (6.12)

Центральним моментом k-го порядку дискретної випадкової величини *X* називають математичне сподівання величин $(X\text{-}M(X))^k$ і позначають μ_k:

$$\mu_k = M\left[(X - M(X))^k\right]. \tag{6.13}$$

Центральний момент для дискретної випадкової величини:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - M(X)\right]^k \cdot p_i . \tag{6.14}$$

е) Асиметрія і ексцес

Незручність використання μ_3 полягає в тому, що його вимірність є кубом розмірності випадкової величини. Щоб усунути цю незручність, за характеристику асиметрії обирають безрозмірну характеристику – відношення третього центрального моменту до куба середнього квадратичного відхилення, яке називають коефіцієнтом асиметрії або асиметрією.

Асиметрією дискретної випадкової величини *X* називається число *A*, яке обчислюється за формулою:

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \ (\text{де } \mu_3 = \gamma_3 - 3\gamma_2\gamma_1 + 2\gamma_1^3). \tag{6.15}$$

Четвертий центральний момент використовується для характеристики ступеня концентрації можливих значень випадкової величини *X* навколо центра розподілу.

Ексцесом дискретної випадкової величини X називається число E, яке обчислюється за формулою:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \qquad (6.16)$$

Число 3 віднімається від відношення $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$ тому, що для найбільш поширеного нормального розподілу відношення $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$;

Криві або ймовірнісні багатокутники розподілу, які є більш гостровершинні, ніж нормальний, мають додатний ексцес, а більш плосковершинні – від'ємний ексцес. Числовою характеристикою E користуються для симетричних або близьких до них розподілів.

Приклад 1. По мішені виконується 4 незалежних постріли з ймовірністю влучення – 0,8. Потрібно:

а) знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X, що дорівнює числу влучень в мішень;

б) знайти $P(1 \le x \le 3)$;

в) побудувати багатокутник розподілу;

г) знайти функцію розподілу.

Розв'язання. а) Випадкова величина X є дискретною і може набувати значень $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$. За формулою Бернуллі обчислимо відповідні ймовірності p_i цих можливих значень, знаючи, що $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$.

$$P_0 = P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = C_4^0 (0{,}8)^0 (0{,}2)^4 = 0{,}0016.$$

$$P_1 = P_4(1) = C_4^1 p^1 q^3 = C_4^1 (0{,}8)^1 (0{,}2)^3 = 0{,}0256.$$

$$P_2 = P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = C_4^2 (0{,}8)^2 (0{,}2)^2 = 0{,}1536.$$

$$P_3 = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = C_4^3 (0{,}8)^3 (0{,}2)^1 = 0{,}4096.$$

$$P_4 = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = C_4^4 (0{,}8)^4 (0{,}2)^0 = 0{,}4096.$$

Виконаємо перевірку: $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$.

Закон розподілу даної випадкової величини X має форму:

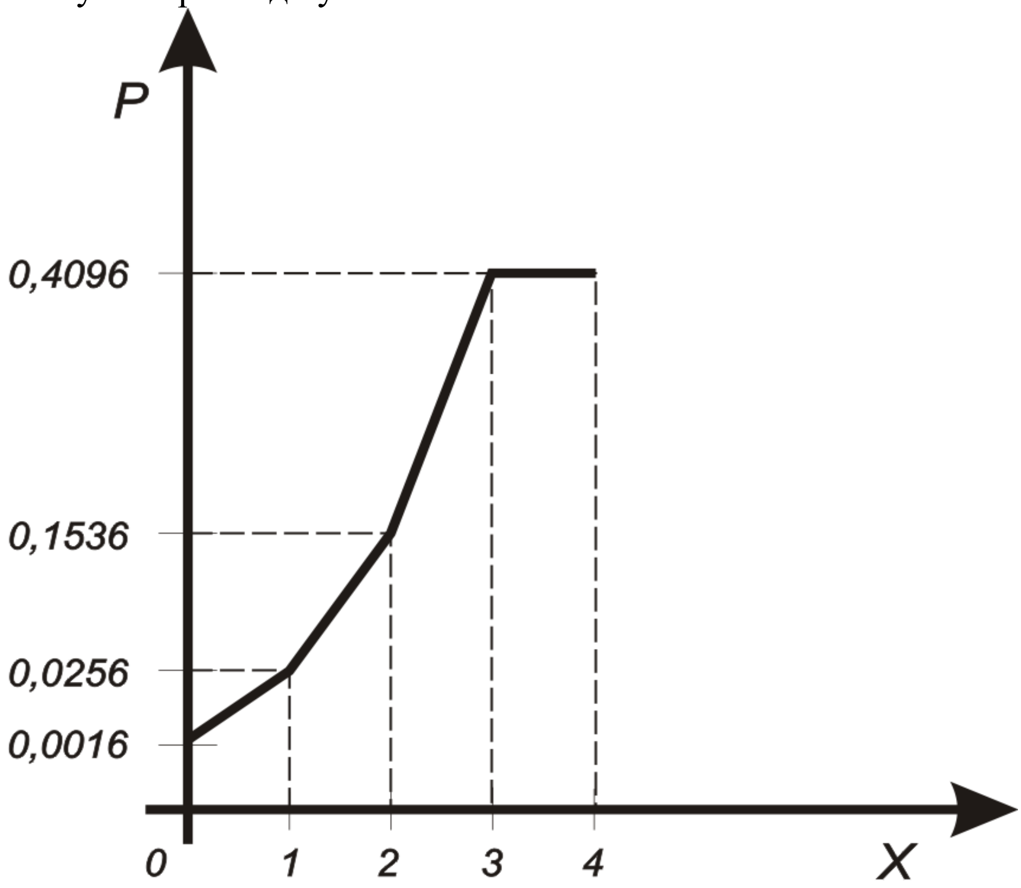
$X = x_i$	0	1	2	3	4
$p = p_i$	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

б) Із закону розподілу випадкової величини X знайдемо:

$$P(1 \le x \le 3) = P_1 + P_2 + P_3 =$$

$$= 0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}4096 = 0{,}588.$$

в) багатокутник розподілу:



г) Якщо $x \le 0,$ то $F(x) = P(X < x) = 0,$ оскільки подія $X < x$ неможлива.

Якщо $0 < x \le 1,$ то $F(x) = P(X < x) = 0,0016,$ бо подія $X < x$ є рівносильна події $X = 0$, яка має ймовірність 0,0016.

Якщо $1 < x \le 2,$ то $F(x) = P(X < x) = 0,0016 + 0,0256 = 0,0272,$ бо подія $X < x$ є сумою двох несумісних подій: X=0, що має ймовірність 0,0016, і $X = 1$, яка має ймовірність 0,0256.

Якщо $2 < x \le 3,$ то $F(x) = P(X < x) = 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 = 0,1808,$ бо подія $X < x$ є сумою трьох несумісних подій: $X = 0$, що має ймовірність 0,0016, $X = 1$, яка має ймовірність 0,0256 і $X = 2$, яка має ймовірність 0,1536.

Якщо $3 < x \le 4,$ то $F(x) = P(X < x) = 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 =$ $= 0,5904,$ оскільки подія $X < x$ в даному випадку є сумою чотирьох несумісних подій: $X = 0$, що має ймовірність 0,0016, $X = 1$, яка має ймовірність 0,0256 , $X = 2$, яка має ймовірність 0,1536 і $X = 3$, яка має ймовірність 0,4096.

Якщо $x > 4,$ то $F(x) = P(X < x) = 1,$ бо подія $X < x$ є вірогідною.

Отже, функція розподілу заданої дискретної випадкової величини X має такий аналітичний вигляд:

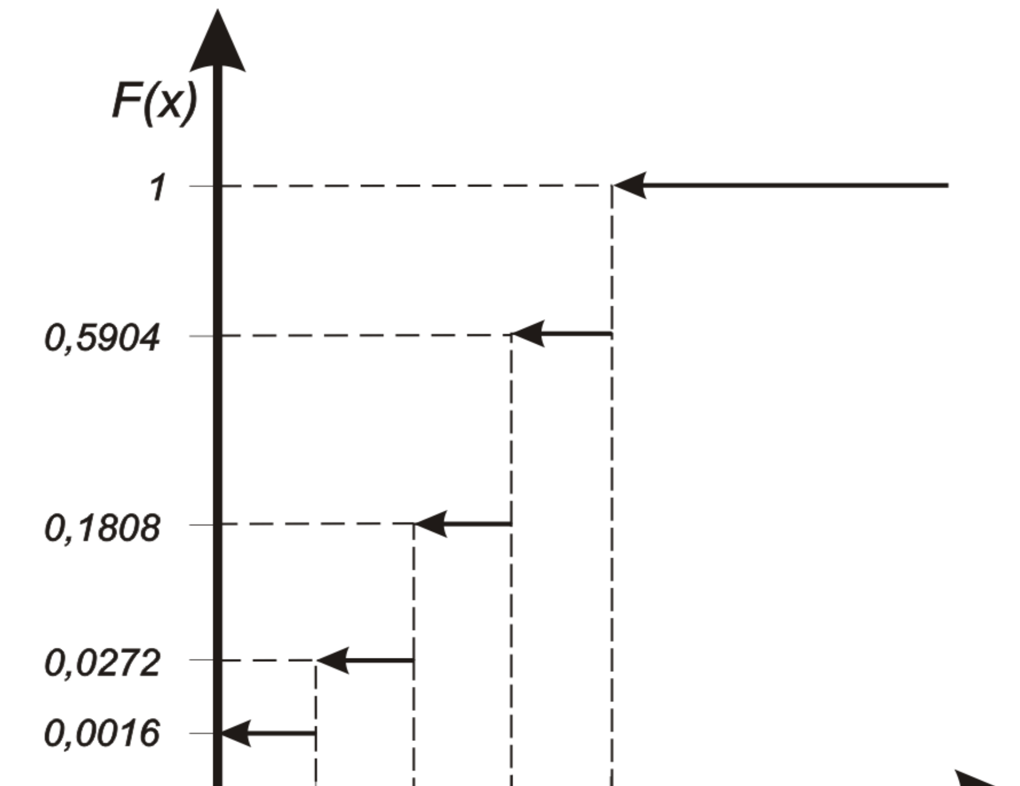
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ 0,0016, & 0<x\le 1;\\ 0,0272 & 1<x\le 2;\\ 0,1808 & 2<x\le 3;\\ 0,5904 & 3<x\le 4;\\ 1 & x>4. \end{cases}$$

Знайдемо ймовірність $P(1\le x\le 3)$ за формулою (6.1), маючи аналітичний вигляд функції розподілу дискретної випадкової величини X:

$$P(1\le x\le 3)=F(3+0)-F(1)=0,5904-0,0016=0,588.$$

Графік цієї функції показує, що функція розподілу дискретної випадкової величини має "східчастий" характер.

Побудуємо графік *F(x)*.



Приклад 2. В коробці є 7 олівців, з яких 4 червоні. З цієї коробки навмання беруть 3 олівці. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа витягнутих червоних олівців та обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. Випадкова величина X є дискретною і може набувати значень $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$. Обчислимо відповідні ймовірності p_i цих можливих значень:

$$P_0=\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}; \qquad P_1=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35};$$

$$P_2=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}; \qquad P_3=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}.$$

Отже, закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

$X = x_i$	0	1	2	3
$p = p_i$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Зробимо перевірку: $P_0+P_1+P_2+P_3=1.$

Далі обчислюємо:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_ip_i=0\cdot\frac{1}{35}+1\cdot\frac{12}{35}+2\cdot\frac{18}{35}+3\cdot\frac{4}{35}=\frac{12}{7}.$$

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2p_i=0^2\cdot\frac{1}{35}+1^2\cdot\frac{12}{35}+2^2\cdot\frac{18}{35}+3^2\cdot\frac{4}{35}=\frac{24}{7}.$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{24}{7}-\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{24}{49}.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{24}{49}}\approx 0,699.$$

Приклад 3. Нехай випадкова величина X задана рядом розподілу

X	1	2	3	4	5
P	0,05	0,15	P_3	0,40	0,10

Чому дорівнює ймовірність p_3. Знайти числові характеристики цієї випадкової величини.

Розв'язання. За умови закону розподілу: $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$. Тобто

$$P_1+P_2+P_3+P_4+P_5=1. \Rightarrow P_3=1-\left(P_1+P_2+P_4+P_5\right)=$$
$$=1-\left(0,05+0,15+0,4+0,1\right)=0,3.$$

Математичне сподівання:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 1\cdot 0,05+2\cdot 0,15+3\cdot 0,3+4\cdot 0,4+5\cdot 0,1=3,35.$$

Дисперсія:

$$D(X)=M(X-M(X))^2=\left(1-3,35\right)^2\cdot 0,5+\left(2-3,35\right)^2\cdot 0,15+$$
$$+\left(3-3,35\right)^2\cdot 0,3+\left(4-3,35\right)^2\cdot 0,4+\left(5-3,35\right)^2\cdot 0,1=3,513.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\approx 1,87.$$

Задачі до розділу 6

Задача 1. У грошовій лотереї розігрується 2 виграші по 1000 грн, 10 виграшів по 100 грн і 100 виграшів по 10 грн за загальної кількості білетів 10 000. Написати закон розподілу випадкової величини X – виграшу власника одного лотерейного білета.

Задача 2. У партії з 10 одиниць є 8 стандартних. Навмання відібрано 2 вироби. Скласти закон розподілу числа стандартних виробів серед відібраних.

Задача 3. В урні 7 куль з яких 4 білих, решта чорні. З цієї урни навмання витягують 3 кулі. Випадкова величина X – число витягнутих білих куль. Потрібно:

а) знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X;

б) знайти $P(x\geq 2)$;

в) побудувати багатокутник розподілу;

г) знайти функцію розподілу.

Задача 4. Завод випускає 96% виробів першого сорту і 4% виробів другого сорту. Навмання відібрана партія з 1000 виробів. Нехай X – число виробів першого сорту у вибірці. Знайти середнє значення і дисперсію випадкової величини X.

Задача 5. Електронна пошта банку підтримує зв'язки із сотнею абонентів. Ймовірність того, що за одиницю часу на електронну пошту надійде повідомлення від абонента, становить 0,02. Написати закон розподілу величини X – числа надходжень сигналів від абонентів. Яка при цьому з подій є більш імовірною: B – за одиницю часу надійдуть сигнали від 3 абонентів, C – за одиницю часу надійдуть сигнали від 4 абонентів?

Задача 6. Завод відправив на базу 500 якісних виробів. Ймовірність пошкодження кожного виробу в дорозі дорівнює 0,002. Знайти закон

розподілу величини X – числа пошкоджених виробів і знайти ймовірності подій:
а) пошкоджено менше трьох виробів;
б) пошкоджено більше двох виробів;
в) пошкоджено хоча б один виріб.

Задача 7. Молокозавод має договори на постачання молока з трьома фермерами і двома агрофірмами. Ймовірність виконання договору одним фермером становить 0,8, а однією агрофірмою – 0,6. Знайти середню кількість постачальників сировини, які виконають договори.

Задача 8. Нехай X – випадкова величина, яка дорівнює кількості випадань грані "6" при двох підкиданнях кубика. Знайти ряд розподілу, функцію розподілу випадкової величини X та її графік.

Задача 9. Студент знає 20 запитань з 25. Навмання виймається 5 запитань. Випадкова величина X – кількість запитань, на які студент знає відповіді. Знайти ряд розподілу випадкової величини X та ймовірність складання іспиту (іспит вважається складеним, якщо студент дає відповідь більше, ніж на половину запитань). Знайти числові характеристики випадкової величини X.

Задача 10. У партії з 10 деталей 2 браковані. Навмання виймається 3 деталі. Нехай X – випадкова величина, яка дорівнює кількості бракованих деталей серед вибраних. Знайти ряд розподілу і функцію розподілу випадкової величини X.

Задача 11. У групі з 20 студентів є троє відмінників. Випадково вибираються 4 студенти. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка дорівнює кількості відмінників серед вибраних студентів.

Задача 12. Ймовірність погашення банківського кредиту кожним клієнтом становить 0,7. Знайти математичне сподівання випадкової величини X – числа клієнтів серед вибраних 10, які своєчасно і в повному обсязі повернуть кредити банку.

Задача 13. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка дорівнює кількості вгаданих номерів у лотереї "5 із 36".

Задача 14. Можливими значеннями випадкової величини X є числа 1, 2, 3. Знайти ймовірність цих значень, якщо $M(X) = 2{,}3$; $M(X^2) = 5{,}9$.
Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Y = -2X - 1$.

Задача 15. В ящику є 6 конусних і 15 циліндричних деталей. Навмання виймають 3 деталі. Написати закон розподілу випадкової величини X – кількості циліндричних деталей серед вийнятих. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Задача 16. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – кількість появ події A в двох незалежних випробуваннях, якщо ймовірністі появи події в цих випробуваннях однакові і відомо, що $M(X) = 0{,}9$.

Задача 17. Три стрільці виконують по 4 постріли. Ймовірність влучення кожного з пострілів для першого становить 0,8, для другого – 0,9, для третього – 0,85. Знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення загального числа пробоїн у мішені.

Задача 18. На фінансовому ринку є акції трьох видів (*A, B, C*). Норма прибутку акцій залежить від ринкової кон'юктури (%). Проаналізувати ситуацію і вибрати тип акції, що найбільш приваблива для інвестора з точки зору міри її ризику. За величину ризику прийняти коефіцієнт варіації.

Задача 19. Гравець в казино ставить на "червоне" доти, доки не виграє. Випадкова величина X – кількість спроб. Знайти ряд розподілу випадкової величини X, найімовірнішу кількість спроб і ту кількість спроб x, при якій виконується умова $P\,(X \le x) \ge 0{,}999$.
Вказівка. Вважати, що рулетка має 37 полів (від 0 до 36), серед яких 18 червоних.

РОЗДІЛ 7 НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Випадкова величина X називається *неперервною*, якщо її можливі значення суцільно заповнюють деякий скінченний або нескінченний проміжок на числовій прямій. Тому на відміну від дискретної випадкової величини розподіл неперервної випадкової величини неможливо задати, зазначивши значення, яких вона набуває, та відповідні їм ймовірності. Зрозуміло, що множина можливих значень неперервної випадкової величини є незліченною. Найпростішим і найпоширенішим способом задання розподілу неперервної випадкової величини є задання її функції розподілу.

Закон розподілу неперервної випадкової величини задають за допомогою функції щільності ймовірностей $f(X)$. Ймовірність $p(a < x < b)$ того, що значення, яке приймає випадкова величина X, потрапляє в проміжок (a, b), визначається рівністю

$$p(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{7.1}$$

Графік функції $f(X)$ називається кривою розподілу. Геометрично ймовірність потрапляння випадкової величини в проміжок (a, b) дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції, яка обмежена кривою розподілу, віссю OX і прямими $x = a$, $x = b$.

Функція щільності розподілу ймовірностей має такі властивості:

$$1)\ f(X) \geq 0, \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Якщо всі значення випадкової величини X містяться в проміжку (A, B), то остання умова може бути замінена умовою $\int_A^B f(x)dx = 1.$

Функція $F(X) = P(x < X)$ називається функцією розподілу ймовірностей випадкової величини X. Функція $F(X)$ існує як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин. Якщо $f(X)$ – функція щільності розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{7.2}$$

З останньої рівності випливає, що

$$f(X) = F'(x). \tag{7.3}$$

Іноді функцію $f(X)$ називають *диференціальною* функцією розподілу ймовірності, а функцію $F(X)$ – *інтегральною* функцією розподілу ймовірностей. Отже, *щільністю (густиною) розподілу* ймовірності випадкової величини X називають функцію $f(X)$, яка дорівнює першій похідній функції розподілу $F(X)$. Із наведеного означення випливає, що функція розподілу $F(X)$ є первісною для щільності розподілу $f(X)$.

7.1 Числові характеристики неперервної випадкової величини

а) Математичне сподівання

Математичним сподіванням *M(X)* неперервної випадкової величини X, всі можливі значення якої належать відрізку $[a,b]$, називається визначений інтеграл:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx. \tag{7.4}$$

Якщо можливі значення X належать *R*, то:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \tag{7.5}$$

де за припущенням невласний інтеграл збігається абсолютно.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини – точка числової осі, яка характеризує її “середнє” значення або центр розподілу її значень.

б) Дисперсія

Дисперсією $D(X)$ неперервної випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата її відхилення $X - M(X)$:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx,$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(X))^2, \text{ якщо } x \in [a,b], \tag{7.6}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx, \text{ якщо можливі значення } X \text{ належать } R.$$

в) Середнє квадратичне відхилення

Середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X)$ неперервної випадкової величини X називають корінь квадратний з дисперсії *D(X)*:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{7.7}$$

Дисперсія і середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини характеризують “розсіювання” можливих її значень в околі точки *Ox*, яка зображає математичне сподівання.

г) Мода і медіана

Модою M_o неперервної випадкової величини X називається точка максимуму щільності розподілу, тобто:

$$M_o = x_0, \text{ де } f(x_0) = \max f(x). \qquad (7.8)$$

Медіаною *Me* неперервної випадкової величини *X* називається те її можливе значення, для якого виконується рівність:

$$P(-\infty < X < Me) = P(Me < X < \infty). \qquad (7.9)$$

Медіану *Me* визначають з рівняння $F(Me) = 0{,}5$, де $F(x)$ – функція розподілу величини *X*.

д) Початкові і центральні моменти

Початковим моментом k-го порядку неперервної випадкової величини *X* називають математичне сподівання випадкової величини X^k і позначають γ_k:

$$\gamma_k = M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)dx, \qquad (7.10)$$

Якщо розподіл випадкової величини *X* зосереджений на всій числовій осі *Ox*.

$$\gamma_k = M(X^k) = \int_a^b x^k \cdot f(x)dx, \qquad (7.11)$$

Якщо розподіл випадкової величини *X* зосереджений на інтервалі $[a,b]$.

Центральним моментом k-го порядку неперервної випадкової величини *X* називаються математичне сподівання випадкової величини $(X\text{-}M(X))^k$ і позначають μ_k.

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^k f(x)dx, \qquad (7.12)$$

Якщо розподіл випадкової величини *X* зосереджений на всій числовій осі *Ox*.

$$\mu_k = \int_a^b [x - M(X)]^k f(x)dx, \qquad (7.13)$$

Якщо розподіл випадкової величини *X* зосереджений на інтервалі $[a,b]$. Очевидно, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$.

е) Асиметрія та ексцес

Асиметрією неперервної випадкової величини *X* називається число *A*, яке обчислюється за формулою:

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \qquad (7.14)$$

Ексцесом неперервної випадкової величини *X* називається число *E*, яке обчислюється за формулою:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \qquad (7.15)$$

Ексцес *E* та коефіцієнт асиметрії *A*, є безрозмірними величинами. Він характеризує "гостровершинність" графіка щільності розподілу розглядуваної випадкової величини порівняно з кривою нормального розподілу:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

7.2 Основні закони розподілу

а) *Рівномірний закон розподілу*

Неперервна випадкова величина називається рівномірно розподіленою на проміжку $[a,b]$, якщо її щільність $f(X)$ на цьому проміжку є стала, а поза ним дорівнює нулю, тобто:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b);\\ 0, & x\notin(a,b).\end{cases}$$

Відповідна функція розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення рівномірно розподіленої на проміжку $[a,b]$ випадкової величини обчислюється за формулами:

$$M(X)=\frac{a+в}{2},\quad D(X)=\frac{(в-a)^2}{12},\quad \sigma(X)=\frac{в-a}{2\sqrt{3}}.$$

б) *Нормальний закон розподілу.*

Неперервна випадкова величина X називається розподіленою за нормальним законом, або нормально розподіленою, з параметрами $-\infty<a<+\infty$ *і* $\sigma>0$, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty.$$

Параметр *а* дорівнює математичному сподіванню випадкової величини *X*: *M(X)* = *а*. Параметр σ дорівнює середньому квадратичному відхиленню випадкової величини *X*: $\sigma(X)=\sigma$.

Функція розподілу нормально-розподіленої випадкової величини має вигляд:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt.$$

Ймовірність потрапляння нормально-розподіленої випадкової величини X в інтервал (x_1, x_2) обчислюється за формулою:

$$P(x_1 < X < x_2)=\left[\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)\right], \qquad (7.16)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

в) *Показниковий розподіл.*

Неперервна випадкова величина X називається розподіленою за показниковим законом, або показниково розподіленою, з параметром λ, якщо щільність розподілу її ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

де $\lambda > 0$ – параметр розподілу.

Відповідна функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Параметр λ має такий ймовірнісний зміст:

$$\lambda=\frac{1}{M(X)},\quad \lambda=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}=\frac{1}{\sigma(X)}.$$

Приклад 1. Випадкова величина X задана законом розподілу з щільністю $f(X)$, причому

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ a(3x^2-x), & 0\leq x\leq 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Знайти:

1) параметр a;

2) ймовірність потрапляння величини X в проміжок (1, 2).

Розв'язання

1) Значення параметра a обчислюємо з умови, що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \;\Rightarrow\; a\int\limits_{0}^{3}(3x^2-x)dx=1,$$

$$a\left(\frac{3}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^3=1 \;\Rightarrow\; a\left(27-\frac{9}{2}\right)=1,\quad a=\frac{2}{45}.$$

2) Ймовірність потрапляння випадкової величини X в проміжок (1,2) знайдемо з рівності:

$$P(1<x<2)\ =\frac{2}{45}\int_1^2(3x^2\ -\ x)dx=\ \frac{2}{45}(\frac{3}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2)\Big|_1^2=$$

$$=\frac{2}{45}\left(8-2-1+\frac{1}{2}\right)=\frac{22}{90}.$$

Приклад 2. Дано щільність ймовірності випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x-\frac{1}{4}x^3, & 0\le x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Знайти:
а) математичне сподівання;
б) дисперсію;
в) середнє квадратичне відхилення;
г) медіану випадкової величини X.

Розв'язання

а) Математичне сподівання $M(X)$ обчислимо за формулою (7.4):

$$M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)dx=\int_0^2 x\cdot(x-\frac{1}{4}x^3)dx=\int_0^2(x^2-\frac{1}{4}x^4)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{20}\Big|_0^2=$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{8}{5}=\frac{16}{15}.$$

б) Дисперсію $D(X)$ обчислемо за формулою (7.6):

$$D(X)=\int_a^b x^2f(x)dx-(M(X))^2.$$

$$M(X^2)=\int_a^b x^2f(x)dx=\int_0^2 x^2\cdot(x-\frac{1}{4}x^3)dx=\int_0^2(x^3-\frac{1}{4}x^5)dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}\Big|_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}.$$

$$D(X)=\frac{4}{3}-\left(\frac{16}{15}\right)^2=\frac{44}{225}.$$

в) Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ обчислимо за формулою:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{44}{225}}\approx 0{,}4422.$$

г) Медіану *Me* знайдемо з умови $P\,[X<\mu]=0{,}5.$ В даному випадку

$$P\,[X<\mu]=\int_0^{\mu}(x-\frac{1}{4}x^3)\,dx=\frac{\mu^2}{2}-\frac{\mu^4}{16}.$$

Маємо рівняння :

$$\frac{\mu^2}{2}-\frac{\mu^4}{16}=0{,}5;$$

$$\mu^4-\mu^2+8=0,$$

звідки $\mu=\pm\sqrt{4\pm\sqrt{8}}.$

З чотирьох коренів рівняння потрібно вибрати корінь, який міститься між числами 0 і 2. Таким чином, $Me=\mu=\sqrt{4-\sqrt{8}}.$

Приклад 3. Завод виготовляє кульки для підшипників. Номінальний діаметр кульок (математичне сподівання) складає a = 10 мм. Внаслідок неякісного обладнання діаметр кульки є випадковою величиною *X*, яка розподілена за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням від номінального діаметра $\sigma_x=2$ мм. Під час контролю бракуються всі кульки, діаметр яких відрізняється від номіналу більш, ніж на 2 мм, тобто ті, у яких діаметр менший $\alpha=8$ мм і більший $\beta=12$ мм. Знайти ймовірність виготовлення:

а) якісної деталі; б) бракованої деталі.

Розв'язання. а) Ймовірність виготовлення якісної деталі, діаметр якої міститься в проміжку $\alpha\le X\le\beta$ (8 – 12 мм), буде дорівнювати:

$$P\left(\alpha\le X\le\beta\right)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma_{\tilde{o}}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma_{\tilde{o}}}\right)=2\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma_{\tilde{o}}}\right)=2\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=$$

$$=2\Phi(1)=2\cdot 0{,}3413=0{,}6826.$$

Значення інтегральної функції Ф(1) беремо із значень таблиць для інтегральної функції $\Phi(x)$. Тим самим встановлено, що 68,26 % всіх деталей будуть якісними.

б) Ймовірність виготовлення бракованої деталі можна знайти, беручи до уваги той факт, що виготовлення якісної деталі і бракованої – протилежні події:

$$P\left(X<\alpha, X>\beta\right)=1-P\left(\alpha\le X\le\beta\right)=1-0{,}6826=0{,}3174,$$

тобто 31,74 % деталей будуть бракованими.

Задачі до розділу 7

Задача 1. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2;\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Обчислити ймовірності потрапляння випадкової величини X в інтервали (1; 2,5) і (2,5; 3,5).

Відповідь: 0,25; 0,75.

Задача 2. Щільність розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le \pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Показати, що $f(X)$ може бути щільністю ймовірності деякої випадкової величини X. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X.

Відповідь: $M(X)=\frac{\pi}{2}$; $D(X)=\frac{\pi^2}{4}-2.$

Задача 3. Визначити математичне сподівання величини з рівномірним розподілом.

Відповідь: $\frac{a+b}{2}.$

Задача 4. Визначити дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини з рівномірним розподілом.

Відповідь: $\frac{(b-a)^2}{12}$; $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$

Задача 5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ ax^2, & 0<x\le\sqrt{3};\\ 0, & x>\sqrt{3}.\end{cases}$$

1. Знайти параметр a і функцію $F(x)$;
2. Побудувати графіки $f(X)$ і $F(x)$;

3. Обчислити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду і медіану.

Відповідь: 1) $a = 1\big/\sqrt{3}$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1\big/3\sqrt{3}\,x^2, & 0 < x \le \sqrt{3}; \\ 0, & x > \sqrt{3}. \end{cases}$

3) $M(X) = 3\sqrt{3}\big/4; D(X) = 0{,}1125; \sigma(X) = 0{,}3354; M_o = \sqrt{3}; M_e = 1{,}37.$

Задача 6. Щільність розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ ax^2, & 0 \le x < 1; \\ a(2-x)^2, & 1 \le x < 2; \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$

При якому значенні a функція $f(X)$ є щільністю розподілу випадкової величини X. Обчислити початкові і центральні моменти перших чотирьох порядків, асиметрію та ексцес.

Відповідь: $a = 3/2;\ \mu_1 = 0;\ \mu_2 = 0{,}1;\ \mu_3 = 0; \mu_4 = 1/35; A = 0; E = -1/7.$

Задача 7. Випадкову величину X задано щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \le \dfrac{1}{4}; \\ 16x, & \dfrac{1}{4} < x \le \dfrac{\sqrt{2}}{4}; \\ 0, & x > \dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Відповідь: M(X) = 0,194; $D(X)$ = 0,0155; $\sigma(X)$ = 0,1244.

Задача 8. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті 4 незалежних випробувань величина X точно 3 рази набуде значення, що належить інтервалу (0,25; 0,75).
Відповідь: 0,25.

Задача 9. Задано щільність розподілу випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{3}{2}x^2, & 0\le x<1;\\ \frac{3}{2}(2-x)^2, & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Знайти: початкові і центральні моменти перших чотирьох порядків; асиметрію та ексцес випадкової величини X.
Відповідь: $\mu_1=1; \mu_2=1{,}1; \mu_3=1{,}3; \mu_4=57/35; A=0; E=-1/7.$

Задача 10. Знайти дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, X розподіленої рівномірно в інтервалі (2; 8).
Відповідь: $D(X)=3;\ \sigma(X)=\sqrt{3}.$

Задача 11. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з математичним сподіванням $M(X)$ = 3 і дисперсією $D(X)=4/3$. Знайти функцію розподілу випадкової величини X.

Відповідь: $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \frac{x-1}{4}, & 1\le x\le 5;\\ 1, & x\ge 5.\end{cases}$$

Задача 12. Автобуси деякого маршруту йдуть чітко за розкладом. Інтервал руху – 5 хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійде до зупинки, буде чекати автобус менше 3 хв.
Відповідь: 0,6.

Задача 13. Час T безвідмовної роботи двигуна автомобіля розподілений за показниковим законом. Відомо, що середній час безвідмовної роботи двигуна між технічними “обслуговуваннями” дорівнює 100 годинам. Визначити ймовірність безвідмовної роботи двигуна за 80 годин.
Відповідь: 0,5507.

Задача 14. Закон розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X заданий щільністю:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ cos\,x, & 0<x\le \pi/2;\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, обчислити ймовірності $P(\pi/6<X<\pi/3)$, $P(\pi/6<X<\pi)$.

Відповідь: 0,366; 0,5 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2;\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$

Задача 15. Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням a = 25. Ймовірність потрапляння X в інтервал (10; 15) дорівнює 0,2. Чому дорівнює ймовірність потрапляння X в інтервал (35; 40).
Відповідь: 0,2.

Задача 16. Який процент конденсаторів з числа відібраних з відхиленням $\pm 20\,\%$, що підлягають нормальному закону розподілу величин, буде мати відхилення від номіналу в межах від 0 до +1 % (передбачається, що весь діапазон відхилень конденсаторів становить 3σ)?
Відповідь: 6%.

Задача 17. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку [7; a], причому щільність на цьому проміжку дорівнює 1/20. Зазначити значення параметра a і знайти числові характеристики випадкової величини X.
Відповідь: a = 27; $M(X)$=17; $D(X)$=100/3; σ = 5,77.

РОЗДІЛ 8 ДВОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Часто доводиться розв’язувати задачі, в яких розглядаються події, що описуються не однією, а кількома – зокрема, двома випадковими величинами. Наприклад, прибуток навмання вибраного підприємця визначається кількома одновимірними випадковими величинами: обсягом випуску продукції, ринковими цінами на його продукцію, ринковими цінами на сировину і т. д.

Двовимірною випадковою величиною називають систему з двох випадкових величин $(X;\ Y)$, для якої визначена ймовірність $P[(X<x), (Y<y)]$ спільного виконання нерівностей $X<x$, $Y<y$, де x, y – довільні дійсні числа.

Функцією розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини *(X; Y)* називається функція *F(x, y)*, яка для будь-яких чисел *x* і *y* визначає ймовірність одночасної появи подій $X < x$, $Y < y$, тобто

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = P(X < x \cap Y < y).$$

Будемо розглядати *X* та *Y* як декартові координати точки на площині. Точка *M(X; Y)* може займати довільне положення на площині *OXY*. Тоді функція розподілу дає ймовірність того, що випадкова точка *M(X; Y)* потрапляє в область *D*, яка зображена на рис. 8.1.

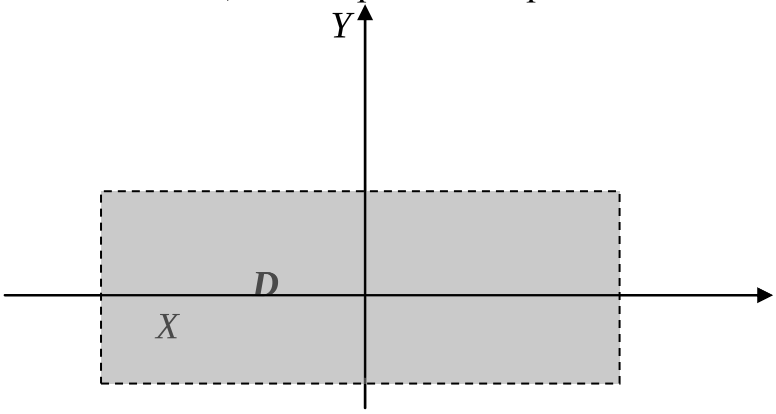


Рисунок 8.1

Двовимірна випадкова величина *(X; Y)* називається *дискретною,* якщо *X* та *Y* – дискретні одновимірні випадкові величини і *неперервною*, якщо її складові *X* та *Y* є неперервними одновимірними випадковими величинами. Складові *X* і *Y* двовимірної випадкової величини *(X; Y)* називають її *компонентами*.

Нехай можливі значення *X* та *Y* утворюють, наприклад, скінченні послідовності $x_1, x_2, ..., x_n$ та $y_1, y_2, ..., y_s$. Можливі значення двовимірної випадкової величини *(X; Y)* мають вигляд $(x_i; y_j)$, де $i=1, 2, ..., n;$ $j=1, 2, ..., s$. Позначимо через p_{ij} ймовірність того, що $(X; Y)= (x_i; y_j)$:

$$p_{ij}= P[(X < x_i), (Y < y_j)].$$

Законом розподілу двовимірної дискретної випадкової величини *(X; Y)* називають перелік її можливих значень $(x_i; y_j)$ де $i = 1, 2, ..., n;$ $j = 1, 2, ..., s$ та відповідних їм ймовірностей $p\,(x_i; y_j)$.

Названий закон розподілу записують у формі таблиці. Перший рядок таблиці містить можливі значення випадкової величини *X*, а перший стовпець – можливі значення *Y*. В інших клітинках таблиці вказані відповідні ймовірності, причому їх сума завжди дорівнює одиниці.

Y \ *X*	1	2	3
1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
2	p_{21}	p_{22}	p_{23}

Сума всіх ймовірностей:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} p_{ij} = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1.$$

Функція розподілу має такий вигляд:

$$F(x, y) = \sum_{i}\sum_{j} p_{ij},$$

де подвійна сума береться для тих *i* та *j*, для яких $x_i<x$, $y_j<y$.

Дві дискретні випадкові величини *X* та *Y* називаються *незалежними*, якщо для будь-яких дійсних чисел *x* і *y* ймовірність сумісної появи двох подій $X < x$ *і* $Y < y$ дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто:

$$P(X < x \cap Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$$

або $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$. Якщо функція розподілу $F(x, y)$ не може бути подана як добуток $F_1(x) \cdot F_2(y)$, то величин X і Y є залежні.

Двовимірна величина *(X; Y)* називається *неперервною*, якщо існує така неперервна невід'ємна функція *f(x, y)* двох змінних, що ймовірність того, що точка *M(X; Y)* міститься в деякій області *D* площини *OXY*, дорівнює подвійному інтегралу від функції *f(x, y)* по області *D*:

$$P(M(X;Y) \in D) = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

Функція *f(x, y)* називається *щільністю* розподілу ймовірностей системи двох величин *X* та *Y*. Звідси, зокрема, випливає, що якщо область *D* має вигляд, зображений на рис. 1, то функцію розподілу системи випадкових величин можна записати таким чином:

$$F(x, y) = P[(X < x), (Y < y)] = \iint_D f(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{y} f(x, y)dy.$$

Неперервні випадкові величини *X* та *Y* називаються *незалежними*, якщо

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y), \tag{8.1}$$

де $f_1(x)$ та $f_2(y)$ – відповідно щільності розподілу ймовірностей випадкових величин *X* та *Y*. В цьому випадку

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P[(X < x), (Y < y)] = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{y} f_1(x) f_2(x)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_1(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{y} f_2(y)dy = F_1(x) \cdot F_2(y), \end{aligned} \tag{8.2}$$

де $F_1(x)$ та $F_2(y)$ – відповідно функції розподілу величин *X* та *Y*.

Властивості двовимірної щільності ймовірності:

1. Двомірна щільність ймовірності невід'ємна:

$f(x,y) \geq 0.$

2. Подвійний невласний інтеграл з нескінченними межами від двовимірної щільності дорівнює 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1. \qquad (8.3)$$

Звідси випливає, що якщо всі можливі значення (x, y) належать обмеженій області D, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 1.$$

Знаючи функцію розподілу $F(x,y)$ двовимірної випадкової величини *(X; Y),* легко знайти як функцію розподілу, так і щільність розподілу кожної з випадкових величин *X* та *Y*.

Дійсно, нехай $F_1(x)$ – функція розподілу випадкової величини *X*. Тоді $F_1(x) = P(X < x)$. Оскільки в цьому випадку *Y* може набувати будь-яких значень, то $F_1(x) = P[(X < x),\ (-\infty < Y < +\infty)]$.

Згідно з формулою для функції розподілу системи випадкових величин, одержимо:

$$F_1(x) = P[(X < x),\ (-\infty < Y < +\infty)] = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy. \qquad (8.4)$$

Диференціюємо рівність (8.4) за *x*:

$$f_1(x) = F_1'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy.$$

Аналогічно одержимо:

$$f_2(x) = F_2'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Таким чином, щоб одержати щільність однієї із складових двовимірної випадкової величини, необхідно проінтегрувати в межах від $-\infty$ до $+\infty$ щільність розподілу системи *f(x, y)* по змінній, яка відповідає іншій випадковій величині.

Якщо випадкові величини, які утворюють систему, залежні, то для знаходження їх сумісного розподілу недостатньо знати закони розподілу складових, а потрібно ще знати так званий умовний закон розподілу однієї з них. *Умовним законом* розподілу складової *X* випадкової величини *(X, Y)* за фіксованого значення складової $Y = y_j$ називається перелік усіх можливих значень x_i випадкової величини X та відповідних їм умовних ймовірностей $p(x_i / y_j)$.

Ймовірності $p(x_i / y_j)$ і $p(y_j / x_i)$ обчислюються за формулами:

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad p(y_j / x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} \tag{8.5}$$

8.1 Числові характеристики двовимірної випадкової величини

Основні числові характеристики складових для дискретної двовимірної випадкової величини *(X, Y)* виражаються формулами:

- математичне сподівання:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = \sum_i \sum_j x_i p(x_i, y_j),$$
$$M(Y) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j) = \sum_i \sum_j y_j p(x_i, y_j) \tag{8.6}$$

- дисперсії:

$$D(X) = \sum_i \sum_j (x_i - M(X))^2 p_{ij},$$
$$D(Y) = \sum_i \sum_j (y_j - M(Y))^2 p_{ij}, \tag{8.7}$$

- середні квадратичні відхилення:

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}; \; \sigma_Y = \sqrt{D(Y)}. \tag{8.8}$$

Основні числові характеристики для неперервної двовимірної випадкової величини *(X, Y)* виражаються формулами:

- математичні сподівання:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx, \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy, \tag{8.9}$$

де $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy,$ – щільність розподілу складової *X*,

$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx,$ – щільність розподілу складової *Y*.

- дисперсії:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f_1(x)dx,\ D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}(y-M(Y))^2 f_2(y)dy. \qquad (8.10)$$

- середні квадратичні відхилення:

$$\sigma_X=\sqrt{D(X)};\ \sigma_Y=\sqrt{D(Y)}. \qquad (8.11)$$

Важливими числовими характеристиками двовимірної випадкової величини *(X, Y)* є коваріація (або кореляційний момент) і коефіцієнт кореляції, які певною мірою відіграють роль показників взаємозв’язку між компонентами X і Y.

Кореляційним моментом $\operatorname{cov}(X,Y)$ (*коваріацією*) системи випадкових величин *(X, Y)* називається математичне сподівання добутку відхилень складових цієї величини від їх математичних сподівань:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M(X\cdot Y)-M(X)\cdot M(Y). \qquad (8.12)$$

Коефіцієнтом кореляції r_{XY} системи випадкових величин *(X, Y)* називається відношення коваріації до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин:

$$r_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}, \qquad (8.13)$$

де

$$\sigma_X=\sqrt{D(X)},\sigma_Y=\sqrt{D(Y)}. \qquad (8.14)$$

Коефіцієнт кореляції характеризує ступінь залежності випадкових величин X і Y, до того ж не будь-якої залежності, а тільки лінійної, яка проявляється в тому, що зі зростанням однієї випадкової величини друга має тенденцію також зростати або спадати: у першому випадку $r_{XY}>0$ і кажуть, що випадкові величини X і Y пов’язані додатною кореляційною залежністю; у другому – $r_{XY}<0$ і кажуть, що випадкові величини X і Y пов’язані від’ємною кореляційною залежністю. Для будь-яких двох випадкових величин $|r_{XY}|<1$. Якщо випадкові величини незалежні, то $r_{XY}=0$; якщо випадкові величини пов’язані лінійною залежністю, то $r_{XY}=\pm 1$.

Приклад 1. Двовимірна випадкова величина *(X, Y)* має щільність розподілу $f(x,y)=\dfrac{a}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

Знайти:

а) коефіцієнт a;

б) ймовірність потрапляння випадкової точки *M(X; Y)* в квадрат зображений на рис. 8.2;

в) функцію розподілу $F(x,y)$;

г) щільності розподілу кожної з випадкових величин X та Y;

д) з’ясувати, чи незалежні випадкові величини X і Y.

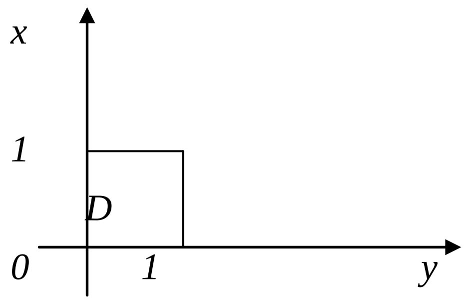


Рисунок 8.2

Розв’язання. а) Використаємо властивість функції щільності (8.3):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1,$$ або

$$a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} =$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = a\cdot\left(arctgy\Big|_{-\infty}^{\infty}\cdot arctgx\Big|_{-\infty}^{\infty}\right) =$$

$$= a\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a\cdot\pi\cdot\pi = a\pi^2.$$

Отже, $a\pi^2 = 1, \Rightarrow a = \frac{1}{\pi^2}.$

Щільність розподілу $f(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}.$

б) Ймовірність p потрапляння випадкової точки $M(X;\ Y)$ в квадрат D, зображений на рис. 8.2, обчислюється за формулою

$$P(M(X;Y)\in D) = \iint_D f(x,y)dxdy = \frac{1}{\pi^2}\iint_D\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}\cdot\int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi^2}\left(arctgy\Big|_0^1\cdot arctgx\Big|_0^1\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\cdot(arctg1 - arctg0)\cdot(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}.$$

в) За означенням знаходимо функцію розподілу $F(x,y)$:

$$F(x,y)=P[(X<x),(Y<y)]=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{x}dx\int\limits_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{x}dx\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\cdot\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}[arctgx-arctg(-\infty)]\cdot[arctgy-arctg(-\infty)]=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(arctgx+\frac{\pi}{2}\right)\left(arctgy+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{arctgx}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{arctgy}{\pi}+\frac{1}{2}\right)=F_1(x)\cdot F_2(y).$$

Де $F_1(x)=\dfrac{arctgx}{\pi}+\dfrac{1}{2}$; $F_2(y)=\dfrac{arctgy}{\pi}+\dfrac{1}{2}$.

Оскільки інтегральна функція системи $F(x,y)$ дорівнює добутку інтегральних функцій її складових, то випадкові величини незалежні.

г) Щільності розподілу ймовірностей випадкових величин X та Y знаходимо за формулами:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\cdot arctgy\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\cdot\pi=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Аналогічно знайдемо, що

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

д) Оскільки $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}\cdot\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}=f_1(x)\cdot f_2(y)$, то випадкові величини X і Y – незалежні.

Приклад 2. Із коробки, у якій міститься три білі і три чорні кулі, виконують послідовне витягування куль, без повернень до першої появи білої кулі. X – кількість кульок узятих з коробки. Далі витягування куль продовжують до першої появи чорної кулі. Y – кількість кульок в другій серії випробувань. Необхідно описати закон розподілу ймовірностей системи випадкових величин *(X, Y)*. Скласти окремі закони розподілу для випадкових величин X і Y. Знайти:

а) математичні сподівання M(X) і M(Y);

б) дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$;

в) середні квадратичні відхилення σ_X, σ_Y,

г) кореляційний момент $\text{cov}(X,Y)$, коефіцієнт кореляції r_{XY};

д) умовний закон розподілу X за умови, що $Y = 1$; умовний закон розподілу Y за умови, що $X = 4$.

Розв'язання. Випадкова величина X може набувати значень 1, 2, 3, 4, а випадкова величина Y – значень 1, 2, 3.

Обчислимо $p_{i,j}$ $(i=1,2,3,4,\ \ j=1,2,3)$ – ймовірність того, що $X=i,\ \ Y=j$:

$$p_{11}=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10};$$

$$p_{12}=P(X=1,Y=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{20};$$

$$p_{13}=P(X=1,Y=3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{20};$$

$$p_{21}=P(X=2,Y=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{20};$$

$$p_{22}=P(X=2,Y=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{10};$$

$$p_{23}=P(X=2,Y=3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{20};$$

$$p_{31}=P(X=3,Y=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{20};$$

$$p_{32}=P(X=3,Y=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{20};$$

$$p_{33}=P(X=3,Y=3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{20};$$

$$p_{41}=P(X=4,Y=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{0}{3}=0;$$

$$p_{42}=P(X=4,Y=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{20};$$

$$p_{43}=P(X=4,Y=3)=0.$$

Отримані значення запишемо в таблицю розподілу ймовірностей системи випадкових величин (X,Y):

Y \ X	1	2	3	4
1	3/10	3/20	1/20	0
2	3/20	1/10	1/20	1/20
3	1/20	1/20	1/20	0

$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} p_{ij} = \frac{3}{10}+\frac{3}{20}+\frac{1}{20}+0+\frac{3}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+0=1.$ Із отриманої таблиці досить легко записати безумовні закони розподілу для випадкових величин X і Y:

$$P(x=1)=\frac{3}{10}+\frac{3}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2};\ P(x=2)=\frac{3}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{3}{10};$$

$$P(x=3)=\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{3}{20};\ P(x=4)=0+\frac{1}{20}+0=\frac{1}{20}.$$

$$P(y=1)=\frac{3}{10}+\frac{3}{20}+\frac{1}{20}+0=\frac{1}{2};\ P(y=2)=\frac{3}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{7}{20};$$

$$P(y=3)=\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+0=\frac{3}{20}.$$

X	1	2	3	4
P	1/2	3/10	3/20	1/20

Y	1	2	3
P	1/2	7/20	3/20

а) Щоб відшукати математичне сподівання $M(X)$, можна скористатись формулою $M(X)=\sum_i\sum_j x_i p_{ij}$, звідки:

$$M(X)=1\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{3}{20}+1\cdot\frac{1}{20}+2\cdot\frac{3}{20}+2\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{20}+$$
$$+3\cdot\frac{1}{20}+3\cdot\frac{1}{20}+3\cdot\frac{1}{20}+4\cdot 0+4\cdot\frac{1}{20}+4\cdot 0=\frac{7}{4}.$$

Аналогічно обчислюється математичне сподівання $M(Y)$.

$M(Y)=\sum_i\sum_j y_j p_{ij}$, звідки:

$$M(Y)=1\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{3}{20}+1\cdot\frac{1}{20}+1\cdot 0+2\cdot\frac{3}{20}+2\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{20}+$$
$$+2\cdot\frac{1}{20}+3\cdot\frac{1}{20}+3\cdot\frac{1}{20}+3\cdot\frac{1}{20}+3\cdot 0=\frac{33}{20}.$$

б) Щоб відшукати дисперсію $D(X)$, можна скористатись формулою $D(X)=\sum_i\sum_j (x_i - M(X))^2 p_{ij}$, звідки:

$$D(X)=\left(1-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{10}+\left(1-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{20}+\left(1-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{20}+\left(2-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{20}+$$

$$+\left(2-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{10}+\left(2-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{20}+\left(3-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{20}+\left(3-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{20}+$$

$$+\left(3-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{20}+\left(4-\frac{7}{4}\right)^2\cdot 0+\left(4-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{20}+\left(4-\frac{7}{4}\right)^2\cdot 0\approx 0{,}806$$

Аналогічно обчислюється дисперсія $D(Y)$.

$D(Y)=\sum_i\sum_j (y_j-M(Y))^2 p_{ij}$, звідки:

$$D(Y)=\left(1-\frac{33}{20}\right)^2\cdot\frac{3}{10}+\left(1-\frac{33}{20}\right)^2\cdot\frac{3}{20}+\left(1-\frac{33}{20}\right)^2\cdot\frac{1}{20}+\left(1-\frac{33}{20}\right)^2\cdot 0+$$

$$+\left(2-\frac{33}{20}\right)^2\cdot\frac{3}{20}+\left(2-\frac{33}{20}\right)^2\cdot\frac{1}{10}+\left(2-\frac{33}{20}\right)^2\cdot\frac{1}{20}+\left(2-\frac{33}{20}\right)^2\cdot\frac{1}{20}+$$

$$+\left(3-\frac{33}{20}\right)^2\cdot\frac{1}{20}+\left(3-\frac{33}{20}\right)^2\cdot\frac{1}{20}+\left(3-\frac{33}{20}\right)^2\cdot\frac{1}{20}+\left(3-\frac{33}{20}\right)^2\cdot 0\approx 0{,}53.$$

в) Середнє квадратичне відхилення $\sigma_X=\sqrt{D(X)}$, де $D(X)-$ дисперсія випадкової величини *X*:

$\sigma_X=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}806}\approx 0{,}889.$

Аналогічно обчислюємо $\sigma_Y=\sqrt{D(Y)}$:

$\sigma_Y=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{0{,}53}\approx 0{,}73.$

г) Кореляційний момент $\operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-M(X)M(Y)$, де

$M(XY)=\sum_i\sum_j x_i y_j p_{ij}$,

$$M(X\cdot Y)=1\cdot 1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot 1\cdot\frac{3}{20}+3\cdot 1\cdot\frac{1}{20}+4\cdot 1\cdot 0+1\cdot 2\cdot\frac{3}{20}+2\cdot 2\cdot\frac{1}{10}+$$

$$+3\cdot 2\cdot\frac{1}{20}+4\cdot 2\cdot\frac{1}{20}+1\cdot 3\cdot\frac{1}{20}+2\cdot 3\cdot\frac{1}{20}+3\cdot 3\cdot\frac{1}{20}+4\cdot 3\cdot 0=\frac{61}{20}=3{,}05.$$

$$M(X)M(Y)=\frac{7}{4}\cdot\frac{33}{20}=\frac{231}{80}=2{,}8875.$$

Отже,

$\operatorname{cov}(X,Y)=3{,}05-2{,}8875=0{,}1625.$

Коефіцієнт кореляції $r_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$.

Отже,

$$r_{XY}=\frac{0{,}1625}{0{,}73\cdot 0{,}889}=\frac{0{,}1625}{0{,}64897}\approx 0{,}25.$$

д) Знайдемо умовний закон розподілу X за умови, що $Y = 1$;
Оскільки за формулою (8.5):

$$P(X=1/Y=1)=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}+\frac{3}{20}+\frac{1}{20}+0}=\frac{6}{10};$$

$$P(X=2/Y=1)=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{10}+\frac{3}{20}+\frac{1}{20}+0}=\frac{3}{10};$$

$$P(X=3/Y=1)=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}+\frac{3}{20}+\frac{1}{20}+0}=\frac{1}{10};$$

$$P(X=4/Y=1)=\frac{0}{\frac{3}{10}+\frac{3}{20}+\frac{1}{20}+0}=0.$$

Умовний закон розподілу X за умови, що $Y = 1$, матиме такий вигляд:

X	1	2	3	4
$P(X/Y=1)$	6/10	3/10	1/10	0

Умовний закон розподілу Y за умови, що $X = 4$:

$$P(Y=1/X=4)=\frac{0}{0+\frac{1}{20}+0}=0;$$

$$P(Y=2/X=4)=\frac{\frac{1}{20}}{0+\frac{1}{20}+0}=1;$$

$$P(Y=3/X=4)=\frac{0}{0+\frac{1}{20}+0}=0.$$

Умовний закон розподілу Y за умови, що $X = 4$, матиме такий вигляд:

Y	1	2	3
$P(Y/X = 4)$	0	1	0

Той факт, що безумовний закон розподілу величини X не збігається з умовним законом розподілу цієї величини, свідчить про те, що величини X і Y залежні.

Задачі до розділу 8

Задача 1. Задано розподіл системи випадкових величин (X, Y):

Y \ X	1	2	3
-1	0,2	0,1	0,3
0	0,15	0,15	0,1

а) Знайти безумовні закони розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y);
б) знайти умовний закон розподілу X за умови, що Y = -1;
в) знайти умовний закон розподілу Y за умови, що X = 3;
г) з’ясувати, залежні чи ні випадкові величини X і Y.
Відповідь: а)

X	1	2	3
P	0,35	0,25	0,4

Y	-1	0
P	0,6	0,4

б)

X	1	2	3
$P(X/Y = -1)$	1/3	1/6	1/2

Y	-1	0
$P(Y/X = 3)$	3/4	1/4

в) залежні.

Задача 2. Із коробки, у якій містяться три червоні і дві сині кулі, навмання без повернення виймають послідовно кульки до першої появи синьої кулі. Далі кулі виймають до першої появи червоної кульки.

Необхідно описати закон розподілу ймовірностей системи випадкових величин *(X, Y)*, де X – кількість куль, узятих з коробки до першої появи синьої кулі; Y – кількість кульок, узятих з коробки до першої появи червоної кулі після того, як перша синя куля була вийнята з коробки.

Скласти окремі закони розподілу для випадкових величин X і Y.
Відповідь:

X	1	2	3	4
P	4/10	3/10	2/10	1/10

Y	0	1	2
P	1/10	6/10	3/10

Задача 3. Задано розподіл системи випадкових величин (X, Y):

Y \ X	0	1
0	0,2	0,15
1	0,15	0,15
2	0,1	0,25

Знайти:
а) математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$;
б) дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$.
Відповідь: 0,55; 1; 0,2475; 0,7.

Задача 4. Задано розподіл системи випадкових величин (X, Y):

Y \ X	-10	-8	-6	-4
10	0,023	0,027	0,05	0,1
20	0,05	0,1	0,025	0,025
30	0,05	0,05	0,025	0,025
40	0,027	0,023	0,05	0,35

Знайти:
а) математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$;
б) середні квадратичні відхилення σ_X, σ_Y;
в) кореляційний момент $\operatorname{cov}(X,Y)$, коефіцієнт кореляції r_{XY};
г) умовний закон розподілу X за умови, що Y = 40; умовний закон розподілу Y за умови, що X = -8.
Відповідь: -5; 28,5; 2,49; 11,68; -7,12; -0,24.

Y	10	20	30	40
$P(Y/X=-8)$	27/200	100/200	50/200	23/200

X	-10	-8	-6	-4
$P(X/Y=40)$	27/450	23/450	50/450	50/450

Задача 5. Двовимірна неперервна випадкова величина *(X, Y)* задана щільністю розподілу:

$$f(x,y)=\begin{cases} a(x+y), & (x,y)\in Q, \\ 0, & (x,y)\notin Q \end{cases},$$

де $Q=\{(x,y): 0<x<1,\ 0<y<1\}$.

Визначити число a, щільності розподілів одновимірних компонент X і Y та з'ясувати, чи незалежні випадкові величини X і Y.

Відповідь: a = 1; залежні.

Задача 6. Задано розподіл системи випадкових величин *(X, Y):*

Y \ X	1	2	3
1	0,02	0,06	0,12
2	0,03	0,09	0,18
3	0,05	0,15	0,3

Довести незалежність випадкових величин X та Y.

Задача 7 . Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини *(X, Y)* задано таблицею*:*

Y \ X	-2	4	6
3	1,7a	2,2a	2,1a
5	0,3a	1,8a	1,9a

Знайти:

а) значення константи a;

б) математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$;

в) середні квадратичні відхилення σ_X, σ_Y.

Відповідь: a = 0,1; 3,6; 3,8; 2,94; 0,98.

Задача 8. Дано щільність розподілу двовимірної випадкової величини $(X;Y)$: $f(x,y)=a\left(xy+y^2\right)$, де $(x,y)\in D=\{(x,y): 0\le x\le 1;\ 0,5x\le y\le x\}$.

Знайти:

а) значення константи a;

б) математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$;

в) середні квадратичні відхилення σ_X, σ_Y;

г) кореляційний момент $\text{cov}(X,Y)$, коефіцієнт кореляції r_{XY};

Відповідь: a = 6; 0,8; 0,63125; 0,163; 0,654; 0,021; 0,2.

Задача 9. Дано щільність розподілу двовимірної випадкової величини (X; Y):

$$f(x,y)=\frac{20}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}.$$

Знайти функцію розподілу *F(x, y)*.

Відповідь: $F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{4}+\frac{1}{2}\right)$

Задача 10. Дано щільність розподілу двовимірної випадкової величини (X; Y):

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y), & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ 0, & x\notin\left[0\frac{\pi}{2}\right], y\notin\left[0,\frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу *F(x, y)*.

Відповідь:

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0,\ y<0,\\ \frac{1}{2}(\sin x+\sin y-\sin(x+y)), & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ \frac{1}{2}(1+\sin y-\cos y), & x>\frac{\pi}{2},\ y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ \frac{1}{2}(1+\sin x-\cos x), & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ y>\frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2},\ \ y>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Задача 11. Дано функцію розподілу двовимірної випадкової величини (X; Y):

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-ax})(1-e^{-by}), & x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & x<0, y<0.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу *f(x, y)*.

Відповідь: $f(x,y)=abe^{-(ax+by)}$

Задача 12. Дано щільність розподілу двовимірної випадкової величини (X; Y):

$$f(x,y)=\frac{C}{(9+x^2)(16+y^2)}.$$

Знайти сталу C.

Відповідь: $\frac{12}{\pi^2}$.

Задача 13. Задано розподіл системи випадкових величин (X, Y):

Y \ X	0	1	3
2	0,3	0,2	0,1
5	0,1	0,1	0,2

Визначити кореляційний момент та коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y.

Відповідь: $0,66$; $r_{XY}=0,36$.

Задача 14. Двовимірна неперервна випадкова величина *(X, Y)* задана щільністю розподілу:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y), & (x,y)\in Q,\\ 0, & (x,y)\notin Q\end{cases}.$$

де $Q=\{(x,y):0<x<1,\ 0<y<1\}$.

Знайти:

а) математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$;

б) дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$.

Відповідь: 7/12; 7/12; 11/44; 11/44 .

РОЗДІЛ 9 ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ. НЕРІВНІСТЬ ЧЕБИШОВА

Законами великих чисел зазвичай називають теореми, які встановлюють достатні умови практично достовірного настання деякої події, що залежить від необмежено зростаючої кількості n інших подій, кожна з яких окремо відіграє незначну роль. Теоретичну основу закону великих чисел становлять нерівність Чебишова та поняття збіжності послідовності випадкових величин.

Лема Чебишова. Якщо випадкова величина X невід'ємна та існує математичне сподівання $M(X)$, то для будь-якого числа $\alpha > 0$ справедлива нерівність:

$$P\{X < \alpha\} > 1 - \frac{M(X)}{\alpha}. \tag{9.1}$$

Нерівність Чебишова. Якщо випадкова величина X має скінченні математичне сподівання і дисперсію, то для всякого числа $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:

$$P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{9.2}$$

або

$$P\{|X - M(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{9.3}$$

Тобто ймовірність того, що відхилення значень випадкової величини X від її математичного сподівання $M(X)$ буде меншим за абсолютним значенням від додатного числа ε є не меншою, ніж $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Нерівність (9.2) називається нерівністю Чебишова і у випадку малого числа $\varepsilon > 0$ вона дає оцінку знизу ймовірності того, що величина X набуде значення, досить близького до її математичного сподівання $M(X)$.

Збіжність послідовності випадкових величин за ймовірністю

Нехай задана послідовність випадкових величин: $X_1, X_2, ..., X_n, ...$
Кажуть, що ця послідовність збігається за ймовірністю до випадкової величини a, якщо за необмеженого збільшення n ймовірність події $\left(|X_ї - a| < \varepsilon\right)$(де $\varepsilon > 0$ – як завгодно мале фіксоване число) наближається до одиниці, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_ї - a| < \varepsilon\right) = 1. \tag{9.4}$$

Теорема Чебишова. Нехай X_i (i= 1,2,...) – послідовність попарно незалежних випадкових величин, які мають однакове математичне сподівання, що дорівнює a, а їх дисперсії обмежені в сукупності ($D(X_i) \leq C,\ (i = 1, 2, ...)$).
Позначимо:

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}, \ \ \overline{a_n} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, \ \ n = 1, 2, ...$$

Тоді для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ виконується гранична нерівність:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\overline{X_n} - \overline{a_n}\right| < \varepsilon\right\} = 1. \quad (9.5)$$

Тобто різниця між середнім арифметичним випадкових величин і середнім арифметичним їх математичних сподівань збігається за ймовірністю до нуля.

Теорема Чебишова знаходить важливе практичне застосування. Зокрема на цій теоремі грунтується вибірковий метод, який широко використовується в статистиці. Суть його полягає в тому, що на підставі вивчення певної ознаки для достатньо великої випадкової вибірки об'єктів роблять висновок про всю їх сукупність.

Закон великих чисел Бернуллі. Нехай проводиться серія із *n* незалежних випробувань, в результаті кожного з яких може настати чи не настати подія *A*, причому ймовірність настання події *A* в кожному випробуванні стала і рівна *p*. Якщо подія *A* настала *m* разів, то відношення $\frac{m}{n}$ називається відносною частотою появи події *A*.

Теорема Бернуллі: з ймовірністю, як завгодно близькою до одиниці, можна стверджувати, що при достатньо великому *n* частота появи події *A* як завгодно мало відрізняється від її ймовірності, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1, \quad (9.6)$$

при будь-якому додатному числі ε.

Тобто відносна частота події *A* збігається за ймовірностю до її ймовірності *P*.

В умовах теореми Бернуллі нерівність Чебишова, застосована до випадкової величини $\frac{m}{n}$, має вигляд:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \quad (9.7)$$

Центральна гранична теорема. Нехай $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – послідовність незалежних випадкових величин зі скінченними математичними сподіваннями $a_i = M(X_i)$ і дисперсіями $\sigma_i^2 = D(X_i),\ i = 1, 2, ...$ Уведемо нові випадкові величини: $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, для яких $M(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $D(Y_n) = \sigma^2(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$.

Тоді, якщо виконується умова $\lim \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{3/2}} = 0$, де $b_i = M\left|X_i - a_i\right|^3$, то для будь-якого числа x виконується така гранична рівність:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_n - M\left(Y_n\right)}{\sigma\left(Y_n\right)} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,5 + \Phi\left(x\right). \qquad (9.8)$$

Рівність (9.8) означає, що закон розподілу нормованих відхилень суми Y_n за $n \to \infty$ наближається до стандартного нормального закону розподілу. Центральна гранична теорема встановлює умови, за яких указаний граничний закон є нормальним.

Наслідок із центральної граничної теореми. Нехай $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин зі скінченними математичними сподіваннями $a = M(X_n)$, дисперсією $\sigma^2 = D(X_n)$, і $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $M(Y_n) = na$, $\sigma^2(Y_n) = D(Y_n)\sigma^2$.

Тоді для будь-якого x:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_n - M\left(Y_n\right)}{\sigma\left(Y_n\right)} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,5 + \Phi\left(x\right). \qquad (9.9)$$

Приклад 1. Монета кидається 1000 разів. Оцінити зверху ймовірність відхилення частоти появи герба від ймовірності появи герба менше, ніж на 0,1.

Розв'язання. В даній задачі n = 1000, p = q = 0,5, ε = 0,1. Застосуємо нерівність (9.7), одержимо:

$$P\left\{\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0,1\right\} \ge 1 - \frac{0,5 \cdot 0,5}{1000 \cdot 0,01} = \frac{39}{40}.$$

Оскільки нерівність $\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0,1$ рівносильна подвійній нерівності $400 < m < 600$, то можна зробити висновок, що ймовірність числа попадань герба в інтервал (400; 600) більша $\frac{39}{40}$.

Приклад 2. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	0,1	0,5
P	0,4	0,6

Застосовуючи нерівність Чебишова (9.2), оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 0,3.$

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію величини *X*:

$M(X) = 0,1 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,6 = 0,34;\quad D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 =$

$= ((0,1)^2 \cdot 0,4 + \left(0,5\right)^2 \cdot 0,6) - (0,34)^2 = 0,0384.$

За нерівністю Чебишова (9.2) маємо:

$$P\{|X - M(X)| < 0,3\} = P\left(|X - 0,34| < 0,3\right) \geq 1 - \frac{0,0384}{\left(0,3\right)^2} = 0,573.$$

Приклад 3. Ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює $\frac{1}{4}$. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що число *X* появи події знаходиться в межах від 100 до 200, якщо буде проведено 600 випробувань.

Розв'язання. В даній задачі *n* = 600, *p* = 0,25, *q* = 0,75. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію величини *X*:

$M(X) = n \cdot p = 600 \cdot 0,25 = 150.$

$D(X) = n \cdot p \cdot q = 600 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 112,5.$

$\varepsilon = 200 - 150 = 150 - 100 = 50.$

За нерівністю Чебишова (9.2) маємо: $P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$

Отже, $P\{|X - 150| < 50\} \geq 1 - \frac{112,5}{\left(50\right)^2} = 0,95.$

Задачі до розділу 9

Задача 1. Майстерня обслуговує 100 телевізорів. Ймовірність того, що кожний зі 100 телевізорів витримає гарантійний термін роботи, становить 0,9. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що більше, ніж 85 і менше, ніж 95 телевізорів витримають гарантійний термін роботи. Отриманий результат порівняти з ймовірністю цієї ж події, обчисленої за допомогою інтегральної формули Лапласа.

Відповідь: 0,64; 0,8164.

Задача 2. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 0,2$, якщо $D(X) = 0,004$.
Відповідь: 0,9.

Задача 3. В урні 1000 білих і 2000 чорних кульок. Витягнули (з поверненням) 300 кульок. Оцінити зверху ймовірність того, що число m витягнутих при цьому білих кульок задовольняє подвійній нерівності $80 < m < 120$.
Відповідь: 5/6.

Задача 4. Середньодобове споживання електроенергії в населеному пункті дорівнює 12000 $кВт \cdot год$. Визначити ймовірність того, що споживання електроенергії в цьому населеному пункті протягом даної доби перевищить 50000 $кВт \cdot год$.
Відповідь: 0,24.

Задача 5. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < \sqrt{0,4}$.
Відповідь: 0,909.

Задача 6. Прилад складається з 10 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента за час Т дорівнює 0,05. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, що відмовили, і середнім числом (математичним сподіванням) відмов за час Т виявиться менше 2.
Відповідь: 0,88.

Задача 7. Деякий проміжок часу на біржі зберігався відносно стабільний курс валюти. На основі даних біржової статистики на цей період було складено таку таблицю можливих змін курсу валют:

Можлива зміна курсу, %	-1	-0,5	0	0,5	1
Ймовірність зміни	0,1	0,3	0,5	0,05	0,05

За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 0,54$.

Відповідь: $\geq 0,29$, а точне значення 0,8.

Задача 8. У касі якогось закладу в наявності є 4500 грн. У черзі знаходиться 20 працівників. Сума *X*, яку потрібно виплатити кожному, є випадковою величиною із математичним сподіванням, рівним 200 грн і середнім квадратичним відхиленням 55 грн. Знайти ймовірність того, що суми, котра є в касі, не вистачить усім людям, які стоять у черзі.
Відповідь: 0,9772.

Задача 9. З 5000 виробів було обстежено 500 шт., відібраних випадковим чином. Серед них виявилось 10 бракованих. Прийнявши частку бракованих виробів серед відібраних за ймовірність виготовлення бракованого виробу, оцінити ймовірність того, що у всій партії виявиться бракованих виробів не більше 3 % і не менше 1 %.
Відповідь: 0,9608.

ВАРІАНТИ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Варіант № 1

Задача 1.

В урні є 8 білих і 4 чорних кульки. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих 5 кульок буде: а) 2 чорних кульки; б) одна чорна кулька; в) всі кульки білі.

Задача 2.

Ймовірність вчасного повернення кредиту для першої фірми складає 0,9, другої – 0,88. Яка ймовірність того, що вчасно поверне кредит тільки одна фірма?

Задача 3.

На двох верстатах виготовляють деталі, які надходять на конвеєр. З першого верстата надійшло 400 деталей, а з другого на 50 % більше. Перший верстат дає 3 % браку, другий – 2 %. Знайти ймовірність, що навмання взята деталь є бракованою і виготовленою на першому верстаті.

Задача 4.

Гральний кубик кидається 10 разів. Знайти ймовірність того, що шістка випаде не більше трьох разів.

Задача 5.

Нехай *X* – випадкова величина, яка дорівнює кількості випадань грані “6” при двох підкиданнях кубика. Знайти ряд розподілу, функцію розподілу та побудувати її графік, багатокутник розподілу випадкової величини *X*. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант № 2

Задача 1.

Група складається з 29 студентів, серед яких 12 відмінників. Навмання відбирають 15 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних будуть: а) тільки невідмінники; б) тільки 3 відмінники; в) тільки 6 невідмінників.

Задача 2.

Ймовірність прибуткової діяльності для першої фірми складає 0,7, для другої – 0,5, для третьої ця ймовірність у три рази менша від суми ймовірностей для перших двох фірм. Знайти ймовірність того, що прибутковими будуть дві фірми.

Задача 3.

Продукція виготовляється на двох підприємствах і надходить на спільну базу. Ймовірність виготовлення бракованої продукції для першого підприємства становить 0,1. Для другого – 0,2. Перше підприємство здало на склад 100 одиниць продукції, друге – 400. Знайти ймовірність, що навмання взята зі складу одиниця продукції буде небракованою.

Задача 4.

Два стрільці стріляють по одному разу в мішень. Ймовірність влучення для кожного з них дорівнюють відповідно 0,6 і 0,7. Знайти ймовірність того, що:

а) тільки один стрілець влучить в мішень, б) хоча б один влучить в мішень в) жоден не влучить в мішень.

Задача 5.

Випадкова величина *X* має щільність розподілу *f(X).* Знайти коефіцієнт *a*, Функцію розподілу *F(X),* знайти ймовірність події $(1 \le X \le 2)$. Обчислити *M(X), D(X).*

$$f(X) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ a(3x - x^2) & 0 \le x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Варіант № 3

Задача 1.

З 30-ти радіоприймачів випадково для перевірки відбирають 3 радіоприймачі. Партія містить 5 несправних радіоприймачів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних будуть: а) тільки несправні радіоприймачі; б) тільки справні; в) два справні.

Задача 2.

Ймовірність вчасної сплати податків для першого підприємства складає 0,8; для другого – 0,6; для третього – 2/3. Визначити ймовірність вчасної сплати податків не більше ніж одним підприємством.

Задача 3.

Два економісти заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність зробити помилку в документі для першого економіста – 0,1, для другого – 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий – 60. Навмання взятий з папки документ виявився з помилкою. Визначити ймовірність, що його склав перший економіст.

Задача 4.

Гральний кубик кидається 6 разів. Знайти ймовірність того, що число очок менше трьох випаде три рази.

Задача 5.

Студент знає 20 з 25 питань. Навмання вибирається 5 запитань. Випадкова величина X – кількість запитань, на які студент знає відповідь. Знайти ряд розподілу, багатокутник розподілу, функцію розподілу та побудувати її графік. Знайти: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант № 4

Задача 1.

30 екзаменаційних білетів містять по 3 запитання, які не повторюються. Студент знає відповідь тільки на 75 запитань. Яка ймовірність того, що вибраний на екзамені навмання білет буде складатися: а) тільки з підготовлених студентом запитань; б) тільки з непідготовлених; в) з двох непідготовлених запитань?

Задача 2.

З 10 студентів, що прийшли на іспит, Іван і Петро знають 20 білетів, Сергій – 15 білетів із 30, а всі інші знають всі 30 білетів. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний студент складе іспит, якщо знання білета гарантує складання іспиту з імовірністю 0,85, а при незнанні білету можна скласти іспит з імовірністю 0,1.

Задача 3.

Стрілець робить 3 постріли по мішені. Ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі дорівнює 0,3. Побудувати ряд розподілу числа влучень.

Задача 4.

Знайти коефіцієнт с: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ c(x-2), & 2 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$

Обчислити числові характеристики даної випадкової величини.

Задача 5.

Число вантажних автомобілів, які проїзджають мимо бензозаправки, відноситься до числа легкових автомобілів, які проїзджають мимо тієї ж бензозаправки, як 2 : 5. П'ять відсотків вантажівок і два відсотки легковиків заправляються на цій бензозаправці. До бензозаправки під'їхав автомобіль. Знайти ймовірність того, що це вантажівка.

Варіант № 5

Задача 1.

У партії з 15 виробів є 10 стандартних. Навмання відібрано 2 вироби. Скласти закон розподілу числа стандартних виробів серед відібраних.

Задача 2.

У відділ магазину надійшло 15 виробів, серед яких 10 вищого сорту. Для контролю навмання витягують 3 вироби без повернення. Знайти ймовірність того, що: а) всі вироби будуть вищого сорту; б) два вироби з трьох будуть вищого сорту.

Задача 3.

Перша бригада виготовила 80 виробів, друга – 120. У першій бригаді 2 % виробів браковані, а в другій – 5 %. Деталі надходять на спільний конвеєр. Навмання взятий виріб виявився небракованим. Яка ймовірність, що він виготовлений першою бригадою?

Задача 4.

У крузі навмання обирається 5 точок. Знайти ймовірність того, що дві з них будуть обрані з квадрата, який вписано в це коло.

Задача 5.

Випадкова величина *X* має щільність розподілу *f(X).* Знайти коефіцієнт *a*, функцію розподілу *F(X)*, знайти ймовірність події $(0{,}5 \le X \le 1)$. Обчислити *M*(*X*), *D*(*X*).

$$f(X) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ a(2x - x^2) & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Варіант № 6

Задача 1.

У лотереї серед 70 білетів є 12 виграшних. Навмання вибираються 8 білетів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних будуть: а) всі виграшними; б) 5 білетів виграшними; в) всі білети невиграшними.

Задача 2.

Система сигналізації може помилково спрацювати з імовірністю 0,05, а в разі крадіжки спрацьовує з імовірністю 0,9. Ймовірність крадіжки в даному районі становить 0,25. Знайти ймовірність того, що сигналізація спрацювала помилково.

Задача 3

Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини, заданої законом розподілу:

x	3	5	7	9
p	0,4	0,3	0,2	0,1

Задача 4.

Ймовірність влучення в мішень для першого стрільця дорівнює P, а для другого – 0,7. Відомо, що ймовірність тільки одного влучення в мішень у випадку, коли кожен з них робить по одному пострілу дорівнює 0,38. Знайти невідому ймовірність P.

Задача 5.

Функція розподілу неперервної випадкової величини X має вигляд:

$$F(X)=\begin{cases}0, & x<0,\\ a\,x^5 & 0\le x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a, щільність розподілу $f(X)$, знайти ймовірність події $(1\le X\le 4)$. Обчислити $M(X)$, $D(X)$.

Варіант № 7

Задача 1.

На склад надійшло 30 виробів, з яких 10 – вищого сорту. Навмання вибирають 7 виробів. Знайти ймовірність того, що: а) три вироби будуть вищого сорту; б) всі вироби будуть вищого сорту; в) один виріб буде вищого сорту.

Задача 2.

Кількість вантажних автомобілів, що їздять по шосе, на якому стоїть бензоколонка, відноситься до кількості легковиків як 3:2. Ймовірність того, що заправлятиметься вантажівка, дорівнює 0,1; для легковиків ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки під’їхав автомобіль. Знайти ймовірність того, що це вантажівка.

Задача 3.

Функція розподілу випадкової величини X задана у вигляді:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ ax^3, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a, Mx, Dx та щільність розподілу величини X.

Задача 4.

Спортсмен п'ять разів стріляє по мішені. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,4. Для одержання заліку необхідно влучити не менше трьох разів. Яка ймовірність одержання заліку? Яка найбільш ймовірна кількість влучень у мішень?

Задача 5.

Нехай X – випадкова величина, яка дорівнює кількості вгаданих номерів у лотереї “5 із 36”. Знайти ряд розподілу випадкової величини X, функцію розподілу, багатокутник розподілу. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант № 8

Задача 1.

Ймовірність влучення в ціль при одному залпі з двох гармат дорівнює 0,38. Знайти ймовірність влучення в ціль при одному пострілі першою із гармат, якщо відомо, що для другої гармати ця ймовірність дорівнює 0,8.

Задача 2.

Для контролю продукції з трьох партій виробів, які містять їх однакову кількість, вибирається один. Яка ймовірність виявити браковану продукцію, якщо в одній партії 16 % виробів браковані, а в двох інших – всі доброякісні?

Задача 3.

Знайти математичне сподівання та дисперсію рівномірного розподілу, для якого диференціальна функція має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Задача 4.

Із урни, яка містить чотири білі та дві чорні кулі, виймають по черзі три кулі. Знайти ймовірність того, що всі вони будуть білими, якщо кулі не повертають в урну після огляду.

Задача 5.

Два дійсних числа випадковим чином вибираються з інтервалу [0;5]. Яка ймовірність того, що сума двох чисел менша 4.

Варіант № 9

Задача 1.

Відділ технічного контролю перевіряє вироби на якість. Ймовірність того, що виріб якісний, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з двох перевірених виробів лише один якісний.

Задача 2.

Підприємство отримало деталі від трьох постачальників: від першого 200 штук, з яких 4 браковані, від другого 400 штук, з яких 2 браковані, з третього – 400, з яких 1 % бракованих. Деталі на складі розміщено в контейнерах. Визначити ймовірність того, що навмання взята деталь з навмання вибраного контейнера виявилась бракованою. Яка ймовірність, що це деталь від третього постачальника?

Задача 3.

Знайти інтегральну функцію рівномірного розподілу, для якого диференціальна функція має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Задача 4.

Ймовірність банкрутства для першої фірми дорівнює 0,1, для другої – 0,25, для третьої – 0,35. Знайти ймовірність, що не збанкрутує жодна фірма.

Задача 5.

В круг на удачу кидається точка. Знайти ймовірність того, що вона потрапить в квадрат, який вписано в це коло.

Варіант № 10

Задача 1.

У ящику міститься 15 однотипних деталей. Із них 9 стандартних, а решта – браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято 2 деталі. Обчислити ймовірність того, що було вийнято одну стандартну деталь і одну браковану.

Задача 2.

У лікарню надходять в середньому 50 % хворих із хворобою B, 30 % – із хворобою C, 20 % – із хворобою D. Ймовірність повного вилікування хвороби B становить 0,7, хвороби C – 0,8, а хвороби D – 0,9. Хворого вилікували. Знайти ймовірність того, що він страждав хворобою B.

Задача 3.

Функція розподілу випадкової величини X задана у вигляді:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Знайти *Mx, Dx* та щільність розподілу величини *X*.

Задача 4.

У двох коробках лежать олівці однакової величини і форми, але різного кольору. У першій коробці 4 червоних і 6 чорних, у другій – 3 червоних, 3 чорних і 5 жовтих. З обох коробок навмання беруть по одному олівцю. Знайдіть ймовірність того, що ці олівці різного кольору.

Задача 5.

З партії доміно навмання взято 7 каменів. Знайдіть ймовірність того, що серед них менше трьох дублів.

Варіант № 11

Задача 1.

В урні є 8 білих і 4 чорних кульки. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих 5 кульок буде: а) 2 чорних кульки; б) одна чорна кулька; в) всі кульки білі.

Задача 2.

Ймовірність вчасного повернення кредиту для першої фірми складає 0,9, другої – 0,88. Яка ймовірність того, що вчасно поверне кредит тільки одна фірма?

Задача 3.

На двох верстатах виготовляють деталі, які надходять на конвеєр. З першого верстата надійшло 400 деталей, а з другого на 50 % більше. Перший верстат дає 3 % браку, другий – 2 %. Знайти ймовірність, що навмання взята деталь є бракованою і виготовленою на першому верстаті.

Задача 4.

В першій урні знаходиться три білих, п'ять червоних та сім синіх кульок, в другій урні – дві білих, чотири червоних та дев'ять синіх кульок. З кожної урни навмання виймають по одній кульці. Знайти ймовірність того, що вийняті кульки будуть одного кольору.

Задача 5.

З 25 перших натуральних чисел навмання взято три числа. Знайдіть ймовірність того, що серед них чисел кратних чотирьом менше двох.

Варіант № 12

Задача 1.

Група складається з 29 студентів, серед яких 12 відмінників. Навмання відбирають 15 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних будуть: а) тільки невідмінники; б) тільки 3 відмінники; в) тільки 6 невідмінників.

Задача 2.

Ймовірність прибуткової діяльності для першої фірми складає 0,7, для другої – 0,5, для третьої ця ймовірність у три рази менша від суми ймовірностей для перших двох фірм. Знайти ймовірність того, що прибутковими будуть дві фірми.

Задача 3.

Продукція виготовляється на двох підприємствах і надходить на спільну базу. Ймовірність виготовлення бракованої продукції для першого підприємства становить 0,1. Для другого – 0,2. Перше підприємство здало на склад 100 одиниць продукції, друге – 400. Знайти ймовірність, що навмання взята зі складу одиниця продукції буде небракованою.

Задача 4.

Студент знає відповіді на 20 з 25 запитань, винесених за екзамен. Знайти ймовірність того, що студент не знає лише одне з трьох запропонованих запитань.

Задача 5.

У коробці є 5 червоних і 7 чорних олівців. З неї випадково випали 4 олівці. Знайти ймовірність того, що 2 з них червоні.

Варіант № 13

Задача 1.

З 30-ти радіоприймачів випадково для перевірки відбирають 3 радіоприймачі. Партія містить 5 несправних радіоприймачів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних будуть: а) тільки несправні радіоприймачі; б) тільки справні; в) два справні.

Задача 2.

Ймовірність вчасної сплати податків для першого підприємства складає 0,8, для другого – 0,6, для третього – 2/3. Визначити ймовірність вчасної сплати податків не більше ніж одним підприємством.

Задача 3.

Два економісти заповнюють документи, які складають у спільну теку. Ймовірність зробити помилку в документі для першого економіста 0,1, для другого – 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий – 60. навмання взятий з папки документ виявився з помилкою. Визначити ймовірність, що його склав перший економіст.

Задача 4.

Ймовірність банкрутства для першої фірми дорівнює 0,2, для другої – 0,3, для третьої – 0,25. Знайти ймовірність, що збанкрутує лише одна фірма.

Задача 5.

На 15 картках написані числа від 1 до 15 включно. Навмання взято дві картки. Знайдіть ймовірність того, що сума чисел, які написані на цих картках, дорівнює 10.

Варіант № 14

Задача 1.

30 екзаменаційних білетів містять по 3 запитання, які не повторюються. Студент знає відповідь тільки на 75 запитань. Яка ймовірність того, що вибраний на екзамені навмання білет буде складатися: а) тільки з підготовлених студентом запитань; б) тільки з непідготовлених; в) з двох непідготовлених запитань?

Задача 2.

З 10 студентів, що прийшли на іспит, Іван і Петро знають 20 білетів, Сергій – 15 білетів із 30, а всі інші знають всі 30 білетів. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний студент складе іспит, якщо знання білета гарантує складання іспиту з імовірністю 0,85, а при незнанні білета можна здати іспит з імовірністю 0,1.

Задача 3.

Стрілець робить 3 постріли по мішені. Ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі дорівнює 0,3. Побудувати ряд розподілу числа влучень.

Задача 4.

Знайти коефіцієнт c: $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ c(x-2), & 2<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

Обчислити числові характеристики даної випадкової величини.

Задача 5.

Щільність розподілу ймовірностей системи неперервних випадкових величин (X, Y) має вигляд:

$$f(X,Y)=\begin{cases}a(xy+y^2) & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

Область D – це квадрат, який обмежено лініями x = 0, x = 2; y = 0, y = 2.

Знайти:

а) коефіцієнт a;

б) Математичні сподівання M_X та M_Y .

Варіант № 15

Задача 1.

У партії з 15 виробів є 10 стандартних. Навмання відібрано 2 вироби. Скласти закон розподілу числа стандартних виробів серед відібраних.

Задача 2.

У відділ магазину надійшло 15 виробів, серед яких 10 вищого сорту. Для контролю навмання витягують 3 вироби без повернення. Знайти ймовірність того, що: а) всі вироби будуть вищого сорту; б) два вироби з трьох будуть вищого сорту.

Задача 3.

Перша бригада виготовила 80 виробів, друга – 120. У першій бригаді 2 % виробів браковані, а в другій – 5 %. Деталі надходять на спільний конвеєр. Навмання взятий виріб виявився небракованим. Яка ймовірність, що він виготовлений першою бригадою?

Задача 4.

Щільність розподілу ймовірностей системи неперервних випадкових величин (X, Y) має вигляд:

$$f(X,Y)=\begin{cases}a(x+y^2) & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

Область D – це квадрат, який обмежено лініями x = -1, x = 1; y = -1, y = 1.

Знайти:

а) коефіцієнт a;

б) математичні сподівання M_X та M_Y .

Задача 5.

При виготовленні деякої масової продукції ймовірність появи одного нестандартного виробу дорівнює 0,01. Яка ймовірність того, що в партії із 100 виробів 4 будуть нестандартними?

Варіант № 16

Задача 1.

У лотереї серед 70 білетів є 12 виграшних. Навмання вибираються 8 білетів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних будуть: а) всі виграшними; б) 5 білетів виграшними; в) всі білети невиграшними.

Задача 2.

Система сигналізації може помилково спрацювати з ймовірністю 0,05, а в разі крадіжки спрацьовує з ймовірністю 0,9. Ймовірність крадіжки в даному районі становить 0,25. Знайти ймовірність того, що сигналізація спрацювала помилково.

Задача 3.

Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини, заданої законом розподілу:

x	3	5	7	9
p	0,4	0,3	0,2	0,1

Задача 4.

Ймовірність настання події в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що число X настання події міститься в межах від 150 до 250, якщо буде проведено 800 випробувань.

Задача 5.

Радіолампа надійшла з одного із трьох заводів відповідно з ймовірностями 0,35; 0,45; 0,2. Ймовірність вийти з ладу протягом року дорівнює 0,2 для ламп, виготовлених першим заводом, 0,3 – другим, 0,1 – третім. Знайти ймовірність того, що вибрана навмання лампа: а) працюватиме рік; б) належить третьому заводу, якщо про неї відомо, що вона не вийшла з ладу протягом року.

Варіант № 17

Задача 1.

На склад надійшло 30 виробів, з яких 10 – вищого сорту. Навмання вибирають 7 виробів. Знайти ймовірність того, що: а) три вироби будуть вищого сорту; б) всі вироби будуть вищого сорту; в) один виріб буде вищого сорту.

Задача 2.

Кількість вантажних автомобілів, що їздять по шосе, на якому стоїть бензоколонка, відноситься до кількості легковиків як 3:2. Ймовірність того, що заправлятиметься вантажівка, дорівнює 0,1; для легковиків ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки під'їхав автомобіль. Знайти ймовірність того, що це вантажівка.

Задача 3.

Функція розподілу випадкової величини *X* задана у вигляді:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ ax^3, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт *a*, *Mx*, *Dx* та щільність розподілу величини *X*.

Задача 4.

В ящику 10 бракованих та 6 якісних деталей. Навмання виймають дві деталі. Яка ймовірність того, що деталі будуть однаковими?

Задача 5.

Знайти ймовірність того, що з 500 висіяних насінин не зійде 130, якщо схожість насіння оцінюється ймовірністю 0,75.

Варіант №18

Задача 1.

Ймовірність влучення в ціль при одному залпі з двох гармат дорівнює 0,38. Знайти ймовірність влучення в ціль при одному пострілі першою із гармат, якщо відомо, що для другої гармати ця ймовірність дорівнює 0,8.

Задача 2.

Для контролю продукції з трьох партій виробів, які містять їх однакову кількість, вибирається один. Яка ймовірність виявити браковану продукцію, якщо в одній партії 16 % виробів браковані, а в двох інших – всі доброякісні?

Задача 3.

Знайти математичне сподівання та дисперсію рівномірного розподілу, для якого диференціальна функція має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Задача 4.

В урні міститься 6 кульок, з яких 4 пофарбовані. Навмання вибрано три кульки. Знайти:

а) ряд розподілу дискретної випадкової величини *X* – числа пофарбованих кульок серед відібраних;

б) функцію розподілу *F(X)*;

в) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Варіант №19

Задача 1.

Відділ технічного контролю перевіряє вироби на якість. Ймовірність того, що виріб якісний, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з двох перевірених виробів лише один якісний.

Задача 2.

Підприємство отримало деталі від трьох постачальників: від першого 200 штук, з яких 4 браковані, від другого 400 штук, з яких 2 браковані, від третього – 400, з яких 1 % браковані. Деталі на складі розміщено в контейнерах. Визначити ймовірність того, що навмання взята деталь з навмання вибраного контейнера виявилась бракованою. Яка ймовірність, що це деталь від третього постачальника?

Задача 3.

Знайти інтегральну функцію рівномірного розподілу, для якого диференціальна функція має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Задача 4.

Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з яких 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що відмовлять два блоки.

Задача 5.

У партії з 10 деталей 2 браковані. Навмання виймається 3 деталі. Нехай X – випадкова величина, яка дорівнює кількості бракованих деталей серед вибраних. Знайти ряд розподілу і функцію розподілу випадкової величини X.

Варіант № 20

Задача 1.

У ящику міститься 15 однотипних деталей. Із них 9 стандартних, а решта – браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято 2 деталі. Обчислити ймовірність того, що було вийнято одну стандартну деталь і одну браковану.

Задача 2.

У лікарню поступають в середньому 50 % хворих із хворобою B, 30 % – із хворобою C, 20 % – із хворобою D. Ймовірність повного вилікування хвороби B становить 0,7, хвороби C – 0,8, а хвороби D – 0,9. Хворого вилікували. Знайти ймовірність того, що він страждав хворобою B.

Задача 3.
Функція розподілу випадкової величини *X* задана у вигляді:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Знайти *Mx*, *Dx* та щільність розподілу величини *X*.

Задача 4.
Випадкову величину *X* задано щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{якщо } 0<x\le \dfrac{1}{4};\\ 16x, & \text{якщо } \dfrac{1}{4}<x\le \dfrac{\sqrt{2}}{4};\\ 0, & \text{якщо } x>\dfrac{\sqrt{2}}{4}.\end{cases}$$

Знайти числові характеристики даної випадкової величини.

Задача 5.
В урні 10 кульок – 3 білих і 7 чорних. Навмання виймають дві кульки. Знайти ймовірність того, що друга кулька виявилась чорною, якщо першу кульку повертали до урни.

Варіант № 21

Задача 1.
В урні є 8 білих і 4 чорних кульки. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих 5 кульок буде: а) 2 чорних кульки; б) одна чорна кулька; в) всі кульки білі.

Задача 2.
Ймовірність вчасного повернення кредиту для першої фірми складає 0,9, другої – 0,88. Яка ймовірність того, що вчасно поверне кредит тільки одна фірма?

Задача 3.
Два верстати виготовляють деталі, які надходять на конвеєр. З першого верстата надійшло 400 деталей, а з другого на 50 % більше. Перший верстат дає 3 % браку, другий – 2 %. Знайти ймовірність, що навмання взята деталь є бракованою і виготовленою на першому верстаті.

Задача 4.
Мішень складається з трьох областей. Ймовірність влучення стрільцем у першу область мішені дорівнює 0,45, у другу область – 0,35, у третю – 0,15. Яка ймовірність того, що при одному пострілі стрілець не влучить у мішень.

Задача 5.

У групі з 20 студентів є троє відмінників. Випадково вибирається 4 студенти. Знайти числові характеристики випадкової величини *X*, яка дорівнює кількості відмінників серед вибраних студентів.

Варіант № 22

Задача 1.

Група складається з 29 студентів, серед яких 12 відмінників. Навмання відбирають 15 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних будуть: а) тільки невідмінники; б) тільки 3 відмінники; в) тільки 6 невідмінників.

Задача 2.

Ймовірність прибуткової діяльності для першої фірми складає 0,7; для другої – 0,5; для третьої ця ймовірність у три рази менша від суми ймовірностей для перших двох фірм. Знайти ймовірність того, що прибутковими будуть дві фірми.

Задача 3.

Продукція виготовляється на двох підприємствах і надходить на спільну базу. Ймовірність виготовлення бракованої продукції для першого підприємства становить 0,1. Для другого – 0,2. Перше підприємство здало на склад 100 одиниць продукції, друге – 400. Знайти ймовірність, що навмання взята зі складу одиниця продукції буде небракованою.

Задача 4.

Студент знає 20 запитань з 25. Навмання вибирається 5 запитань. Випадкова величина *X* – кількість питань, на які студент знає відповідь. Знайти ряд розподілу випадкової величини *X*.

Задача 5.

Випадкова величина *X* має функцію розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le -4;\\ \dfrac{a\left(x+4\right)^2}{16}, & \text{якщо } -4<x\le 0;\\ 1, & \text{якщо } x>0.\end{cases}$$

Знайти параметр *a*, аналітичний вираз для щільності, ймовірність потрапляння випадкової величини *X* в інтервал (- 2; 5).

Варіант № 23

Задача 1.

З 30-ти радіоприймачів випадково для перевірки відбирають 3 радіоприймачі. Партія містить 5 несправних радіоприймачів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних будуть: а) тільки несправні радіоприймачі; б) тільки справні; в) два справні.

Задача 2.

Ймовірність вчасної сплати податків для першого підприємства складає 0,8; для другого – 0,6; для третього – 2/3. Визначити ймовірність вчасної сплати податків не більше ніж одним підприємством.

Задача 3.

Два економісти заповнюють документи, які складають у спільну теку. Ймовірність зробити помилку в документі для першого економіста 0,1; для другого – 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий – 60. навмання взятий з папки документ виявився з помилкою. Визначити ймовірність, що його склав перший економіст.

Задача 4.

В одному класі 5 відмінників, у другому – 3 відмінники, а в третьому класі відмінників немає. З навмання взятого класу вибрали учня. Знайти ймовірність того, що він відмінник, якщо в кожному класі вчиться по 30 дітей.

Задача 5.

Симетрична монета підкидається 3 рази. Випадкова величина X – кількість "аверсів", які при цьому випали. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини *X*.

Варіант № 24

Задача 1.

30 екзаменаційних білетів містять по 3 запитання, які не повторюються. Студент знає відповідь тільки на 75 питань. Яка ймовірність того, що вибраний на екзамені навмання білет буде складатися: а) тільки з підготовлених студентом запитань; б) тільки з непідготовлених; в) з двох непідготовлених запитань?

Задача 2.

З 10 студентів, що прийшли на іспит, Іван і Петро знають 20 білетів, Сергій – 15 білетів із 30, а всі інші знають всі 30 білетів. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний студент складе іспит, якщо знання білета гарантує складання іспиту з ймовірністю 0,85, а при незнанні білета можна здати іспит з імовірністю 0,1.

Задача 3.

Стрілець робить 3 постріли по мішені. Ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі рівна 0,3. Побудувати ряд розподілу числа влучень.

Задача 4.

Знайти коефіцієнт *c*: $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ c(x-2), & 2<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

Обчислити числові характеристики даної випадкової величини.

Задача 5.

Із урни, яка містить чотири білі та дві чорні кулі, виймають по черзі три кулі. Знайти ймовірність того, що всі вони будуть білими:

а) якщо кулі не повертають в урну після огляду;

б) якщо кожну кулю після огляду повертають в урну.

Варіант № 25

Задача 1.

У партії з 15 виробів є 10 стандартних. Навмання відібрано 2 вироби. Скласти закон розподілу числа стандартних виробів серед відібраних.

Задача 2.

У відділ магазину надійшло 15 виробів, серед яких 10 вищого сорту. Для контролю навмання витягують 3 вироби без повернення. Знайти ймовірність того, що: а) всі вироби будуть вищого сорту; б) два вироби з трьох будуть вищого сорту.

Задача 3.

Перша бригада виготовила 80 виробів, друга – 120. У першій бригаді 2 % виробів браковані, а в другій – 5 %. Деталі надходять на спільний конвеєр. Навмання взятий виріб виявився небракованим. Яка ймовірність, що він виготовлений першою бригадою?

Задача 4.

Спортсмен 5 разів стріляє по мішені. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,4. Для одержання заліку необхідно влучити не менше трьох разів. Яка ймовірність одержання заліку? Яка найбільш ймовірна кількість влучень?

Задача 5.

В коло радіуса R вписано правильний трикутник. Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута в коло, потрапить в трикутник.

Варіант № 26

Задача 1.

У лотереї серед 70 білетів є 12 виграшних. Навмання вибираються 8 білетів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних будуть: а) всі виграшними; б) 5 білетів виграшними; в) всі білети невиграшними.

Задача 2.

Система сигналізації може помилково спрацювати з імовірністю 0,05; а в разі крадіжки спрацьовує з імовірністю 0,9. Ймовірність крадіжки в даному районі становить 0,25. знайти ймовірність того, що сигналізація спрацювала помилково.

Задача 3.

Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини, заданої законом розподілу:

x	3	5	7	9
p	0,4	0,3	0,2	0,1

Задача 4.

Підприємець має акції двох компаній. Ймовірність отримання дивідендів по акціях тільки однієї з двох компаній дорівнює 0,38; причому для першої компанії вона дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що він отримає дивіденди по акціях другої компанії.

Задача 5.

У відділі працює 10 економістів, серед яких двоє – подружжя. Жеребкуванням вибирають трьох. Знайти ймовірність того, що серед вибраних спеціалістів буде принаймні один із подружжя.

Варіант № 27

Задача 1.

На склад надійшло 30 виробів, з яких 10 – вищого сорту. Навмання вибирають 7 виробів. Знайти ймовірність того, що: а) три вироби будуть вищого сорту; б) всі вироби будуть вищого сорту; в) один виріб буде вищого сорту.

Задача 2.

Кількість вантажних автомобілів, що їздять по шосе, на якому стоїть бензоколонка, відноситься до кількості легковиків як 3:2. Ймовірність того, що заправлятиметься вантажівка, дорівнює 0,1; для легковиків ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки під’їхав автомобіль. Знайти ймовірність того, що це вантажівка.

Задача 3.

Функція розподілу випадкової величини X задана у вигляді:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ ax^3, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a, Mx, Dx та щільність розподілу величини X.

Задача 4.

Система сигналізації може помилково спрацювати з ймовірністю 0,05; а в разі крадіжки спрацьовує з ймовірністю 0,9. Ймовірність крадіжки в даному районі становить 0,25. Знайти ймовірність того, що сигналізація спрацювала помилково.

Задача 5.

Два рівносильних шахісти грають в шахи. Що вірогідніше виграти: дві партії з чотирьох, чи три партії з шести (нічиї до уваги не беруться)?

Варіант № 28

Задача 1.

Ймовірність влучення в ціль при одному залпі з двох гармат дорівнює 0,38. Знайти ймовірність влучення в ціль при одному пострілі першою із гармат, якщо відомо, що для другої гармати ця ймовірність дорівнює 0,8.

Задача 2.

Для контролю продукції з трьох партій виробів, які містять їх однакову кількість, вибирається один. Яка ймовірність виявити браковану продукцію, якщо в одній партії 16 % виробів браковані, а в двох інших – всі доброякісні?

Задача 3.

Знайти математичне сподівання та дисперсію рівномірного розподілу, для якого диференціальна функція має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Задача 4.

На стадіон прибуло десять спортсменів, з яких чотири виконували вправи повністю, п'ять – на 80 % і один виконував вправи наполовину. Яка ймовірність виконання вправ першим викликаним спортсменом?

Задача 5.

Випадкова величина X розподілена за законом

$$f(x)=\begin{cases}A\cos x, & якщо\ x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2});\\ 0, & якщо\ x\notin(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}).\end{cases}$$

1. Знайти коефіцієнт *A*.
2. Записати функцію розподілу.
3. Обчислити числові характеристики *Mx*, *Dx* та середнє квадратичне відхилення.

Варіант № 29

Задача 1.

Відділ технічного контролю перевіряє вироби на якість. Ймовірність того, що виріб якісний, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з двох перевірених виробів лише один якісний.

Задача 2.

Підприємство отримало деталі від трьох постачальників: від першого 200 штук, з яких 4 браковані, від другого 400 штук, з яких 2 браковані, від третього – 400, з яких 1 % браковані. Деталі на складі розміщено в контейнерах. Визначити ймовірність того, що навмання взята деталь з навмання вибраного контейнера виявилась бракованою. Яка ймовірність, що це деталь від третього постачальника?

Задача 3.

Знайти інтегральну функцію рівномірного розподілу, для якого диференціальна функція має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Задача 4.

Студент знає 20 з 25 запитань програми іспиту. Знайти ймовірність того, що він дасть правильну відповідь на три запитання, які він отримав на іспиті.

Задача 5.

Щільність розподілу ймовірностей системи неперервних випадкових величин (X, Y) має вигляд:

$$f(X,Y)=\begin{cases}a(xy+y) & (x,y)\in D,\\ 0 & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Область D – це квадрат, який обмежено лініями $x = 0$, $x = 3$; $y = 0$, $y = 3$.

Знайти:

а) коефіцієнт a;

б) математичні сподівання M_X та M_Y .

Варіант № 30

Задача 1.

У ящику міститься 15 однотипних деталей. Із них 9 стандартних, а решта – браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято 2 деталі. Обчислити ймовірність того, що було вийнято одну стандартну деталь і одну браковану.

Задача 2.

У лікарню поступають в середньому 50 % хворих із хворобою B, 30 % – із хворобою C, 20 % – із хворобою D. Ймовірність повного вилікування хвороби B становить 0,7, хвороби C – 0,8, а хвороби D – 0,9. Хворого вилікували. Знайти ймовірність того, що він страждав хворобою B.

Задача 3.

Функція розподілу випадкової величини X задана у вигляді:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Знайти Mx, Dx та щільність розподілу величини X.

Задача 4.

У грошовій лотереї випущено 100 білетів. Розігрується один виграш у 50 гривень і 10 виграшів по 1 гривні. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини X – вартості можливого виграшу для власника одного лотерейного білета.

Задача 5.

У партії виробів з 10 одиниць є 8 стандартних. Навмання відібрано 2 вироби. Скласти закон розподілу числа стандартних виробів серед відібраних.

Додаток А

Таблиця А.1 – Значення функції Гауса $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3874	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3467	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,12	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,011	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,007	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,006	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0055	0,0053	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,000
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Додаток Б

Таблиця Б.1 – Значення функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	**0,40**	0,1554	**0,80**	0,2881	**1,20**	0,3849
0,01	0,0040	**0,41**	0,1591	**0,81**	0,2910	**1,21**	0,3869
0,02	0,0080	**0,42**	0,1628	**0,82**	0,2939	**1,22**	0,3883
0,03	0,0120	**0,43**	0,1664	**0,83**	0,2967	**1,23**	0,3907
0,04	0,0160	**0,44**	0,1700	**0,84**	0,2995	**1,24**	0,3925
0,05	0,0199	**0,45**	0,1736	**0,85**	0,3023	**1,25**	0,3944
0,06	0,0239	**0,46**	0,1772	**0,86**	0,3051	**1,26**	0,3962
0,07	0,0279	**0,47**	0,1808	**0,87**	0,3078	**1,27**	0,3980
0,08	0,0319	**0,48**	0,1844	**0,88**	0,3106	**1,28**	0,3997
0,09	0,0359	**0,49**	0,1879	**0,89**	0,3133	**1,29**	0,4015
0,10	0,0398	**0,50**	0,1915	**0,90**	0,3159	**1,30**	0,4032
0,11	0,0438	**0,51**	0,1950	**0,91**	0,3186	**1,31**	0,4049
0,12	0,0478	**0,52**	0,1985	**0,92**	0,3212	**1,32**	0,4066
0,13	0,0517	**0,53**	0,2019	**0,93**	0,3238	**1,33**	0,4082
0,14	0,0557	**0,54**	0,2054	**0,94**	0,3264	**1,34**	0,4099
0,15	0,0596	**0,55**	0,2088	**0,95**	0,3289	**1,35**	0,4115
0,16	0,0636	**0,56**	0,2123	**0,96**	0,3315	**1,36**	0,4131
0,17	0,0675	**0,57**	0,2157	**0,97**	0,3340	**1,37**	0,4147
0,18	0,0714	**0,58**	0,2190	**0,98**	0,3365	**1,38**	0,4162
0,19	0,0753	**0,59**	0,2224	**0,99**	0,3389	**1,39**	0,4177
0,20	0,0793	**0,60**	0,2257	**1,00**	0,3413	**1,40**	0,4192
0,21	0,0832	**0,61**	0,2291	**1,01**	0,3438	**1,41**	0,4207
0,22	0,0871	**0,62**	0,2324	**1,02**	0,3461	**1,42**	0,4222
0,23	0,0910	**0,63**	0,2357	**1,03**	0,3485	**1,43**	0,4236
0,24	0,0948	**0,64**	0,2389	**1,04**	0,3508	**1,44**	0,4251
0,25	0,0987	**0,65**	0,2422	**1,05**	0,3531	**1,45**	0,4265
0,26	0,1026	**0,66**	0,2454	**1,06**	0,3554	**1,46**	0,4279
0,27	0,1064	**0,67**	0,2486	**1,07**	0,3577	**1,47**	0,4292
0,28	0,11103	**0,68**	0,2517	**1,08**	0,3599	**1,48**	0,4306
0,29	0,1141	**0,69**	0,2549	**1,09**	0,3621	**1,49**	0,4319
0,30	0,1179	**0,70**	0,2580	**1,10**	0,3643	**1,50**	0,4332
0,31	0,1217	**0,71**	0,2611	**1,11**	0,3665	**1,51**	0,4345
0,32	0,1255	**0,72**	0,2642	**1,12**	0,3686	**1,52**	0,4357
0,33	0,1293	**0,73**	0,2673	**1,13**	0,3708	**1,53**	0,4370
0,34	0,1331	**0,74**	0,2703	**1,14**	0,3729	**1,54**	0,4382
0,35	0,1368	**0,75**	0,2734	**1,15**	0,3749	**1,55**	0,4394
0,36	0,1406	**0,76**	0,2764	**1,16**	0,3770	**1,56**	0,4406
0,37	0,1443	**0,77**	0,2794	**1,17**	0,3790	**1,57**	0,4418
0,38	0,1480	**0,78**	0,2823	**1,18**	0,3810	**1,58**	0,4429
0,39	0,1517	**0,79**	0,2852	**1,19**	0,3830	**1,59**	0,4441

Додаток В

Таблиця В.1 - Значення функції Пуассона $P(k,\lambda)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

к	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4965	0,4493	0,4065
1	0,0904	0,1637	0,2222	0,2681	0,3032	0,3293	0,3176	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003
7									

Продовження таблиці В.1

к	λ								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,3678	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
к	λ								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18							0,0002	0,0009	0,0029
19							0,0001	0,0004	0,0014
20								0,0002	0,0006
21								0,0001	0,0003
22									0,0001

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. / Гмурман В. Е. – М. : Высшая школа, 1999.

2. Вентцель Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей. / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Академия, 2005. – 448 с.

3. Овчинников П. П. Вища математика. Ч. 2. / Овчинников П. П. – К. : Техніка, 2000. – 792 с.

4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 3. / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – М. : Высшая школа, 1971. – 288 с.

5. Томусяк А. А. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. Ч. 1. / Томусяк А. А., Трохименко В. С., Шунда М. С. – Вінниця, 2001. – 331 с.

6. Ковбаса С. И. Теория вероятностей и математическая статистика. / С. И. Ковбаса, В. Б. Ивановский. – СПб. : Альфа, 2001. – 192 с.

7. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. / [Чорней Р. К., Дюженкова О. Ю., Жильцов О. Б. та ін.]. – К. : МАУП, 2003. – 328 с.

8. Турчин В. М. Теорія ймовірностей: Основні поняття, приклади, задачі : Навчальний посібник / Турчин В. М. – К. : А. С. К., 2004. – 208 с.

9. Булига К. Б. Практикум з теорії ймовірностей та матемачної статистики/ К. Б. Булига, Л. В. Барановська. – К. : Європ. ун-т. (фінанси, ін форм. системи, менеджмент і бізнес), 2000. – 173 с.

10. Бобик О. І. Теорія ймовірностей і математична статистика. : підручник/ Бобик О. І., Берегова Г. І., Копитко Б. І. – К.: ВД ”Професіонал”, 2007. – 560 с.

11. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв’язування задач. / Кармелюк Г. І. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 576 с.

12. Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / под ред. А. И. Кириллова. – [2 изд.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 400 с.

13. Михалевич В. М. Методичні вказівки до виконання типових розрахунків "Теорія імовірностей" з курсу вищої математики для студентів бакалаврату всіх спеціальностей триступеневої підготовки спеціалістів з вищою інженерною освітою денної форми навчання / Уклад. Михалевич В. М., Каплун В. А., Панкова Т. Є. – Вінниця, 1994. – 74 с.

14. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы / под ред. М. И. Сканави. – М. : Высшая школа, 1988. – 431 с.

15. Каніовська І. Ю. Теорія ймовірностей у прикладах і задачах / Каніовська І. Ю. – К. : ІВЦ “Видавництво” Політехніка”, ТОВ “Фірма “Періодика”, 2004. – 156 с.

16. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. / Гнеденко Б. В. – М. : Физматгиз, 1961.

17. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей. / Шефтель З. Г. – К. , 1994.

18. Барковський В. В. Теорія ймовірностей і математична статистика. / Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. – К. : ЦУЛ, 2002. – 448 с.

19. Солодовников А. С. Теория вероятностей : учебное пособие для студентов пед. ин-тов по мат. спец-ти / Солодовников А. С. – М. : Просвещение, 1983.

20. Бугір М. К. Практикум з теорії ймовірності та математичної статистики : навчальний посібник. / Бугір М. К. – Тернопіль : Т. О. В. “ЦМДС”, 1998.

21. Гурский Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Гурский Е. И. – М. : Высш. шк., 1971.

22. Захарченко Н. В. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики : навчальний посібник. / Захарченко Н. В., Козловський А. В., Погріщук Б. В. – Вінниця, 2005.

23. Ковтун І. О. Основи актуарних розрахунків: навчальний посібник / Ковтун І. О., Денисенко М. П., Кабанов В. Г. – К. : “В. Д. Професіонал”, 2008. – 480 с.

24. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики : навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл. / за ред. Р. К. Чорнея. – К. : МАУП, 2003. – 328 с.

Навчальне видання

Добровольська Катерина В'ячеславівна
Михалевич Володимир Маркусович

ПРАКТИКУМ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Навчальний посібник

Редактор В. Дружиніна
Оригінал-макет підготовлено К. Добровольською

Підписано до друку 05.12.2012 р.
Формат 29,7x42$^{1}/_{4}$. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 7.9.
Наклад 75 прим. Зам. № 2012-

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.