

І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк, В.Л.Карпенко

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ЧАСТИНА II

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк, В.Л.Карпенко

Математичне програмування

Частина II

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей та форм навчання. Протокол № 4 від 25 листопада 2004р.

Вінниця ВНТУ 2005

УДК 517.3 (075)

X 76

Рецензенти:

О.В. Мороз, доктор економічних наук, професор

В.І. Клочко, доктор педагогічних наук, професор

В.С. Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Хом'юк І.В., Хом'юк В.В., Карпенко В.Л.

X 76 **Математичне програмування. Частина 2:** Навчальний посібник.

– Вінниця: ВНТУ, 2005. - 123 с.

У навчальному посібнику подано теоретичні відомості з тем математичного програмування: двоїсті та транспортні задачі лінійного програмування (ЛП), двоїстий симплекс-метод, цілочисельне, дробово-лінійне та нелінійне програмування, задачі теорії ігор та метод множників Лагранжа у вигляді означень, теорем, властивостей. Розглянуті розв'язування прикладів з кожної теми, надається 30 варіантів завдань для лабораторних робіт та завдань для типових розрахунків з кожної теми для самостійного розв'язування.

Розрахований на студентів технічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 517.3 (075)

© Хом'юк І.В., Хом'юк В.В., Карпенко В.Л. 2005

Зміст

Вступ.....	4
1 Двоїсті задачі лінійного програмування.....	5
1.1 Поняття про двоїстість у лінійному програмуванні.....	5
1.2 Основні теореми двоїстості в лінійному програмуванні.....	8
1.3 Розв'язання двоїстих задач.....	10
1.4 Економічна інтерпретація двоїстих задач в ЛП.....	14
2 Транспортна задача.....	16
2.1 Методи розв'язування транспортної задачі.....	17
2.2 Визначення оптимального плану транспортної задачі.....	18
3 Двоїстий симплекс-метод.....	22
4 Цілочисельні задачі лінійного програмування.....	27
4.1 Економічна і геометрична інтерпретація задачі цілочисельного програмування.....	27
4.2 Визначення оптимального плану задачі цілочисельного програмування.....	29
4.3 Метод Гоморі.....	30
5 Задачі дробово-лінійного програмування.....	34
5.1 Геометрична інтерпретація задачі дробово-лінійного програмування.....	34
5.2 Зведення задач дробово-лінійного програмування до задач ЛП.....	39
6 Задачі теорії ігор і лінійне програмування.....	42
6.1 Економічна і геометрична інтерпретації задач теорії ігор.....	42
6.2 Алгебраїчний метод розв'язування ігор.....	44
6.3 Зведення задач теорії ігор до задач лінійного програмування.....	49
7 Задачі нелінійного програмування.....	53
7.1 Економічна і геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування.....	53
8 Метод множників Лагранжа.....	58
9 Завдання для лабораторних робіт.....	64
9.1 Лабораторна робота №1. Двоїсті задачі лінійного програмування.....	64
9.2 Лабораторна робота №2. Розв'язування транспортних задач.....	73
9.3 Лабораторна робота №3. Двоїстий симплекс-метод.....	79
9.4 Лабораторна робота №4. Задачі цілочисельного ЛП.....	82
9.5 Лабораторна робота №5. Задачі дробово-лінійного програмування.....	84
9.6 Лабораторна робота №6. Задачі теорії ігор і лінійне програмування.....	86
9.7 Лабораторна робота №7. Задачі нелінійного програмування.....	90
9.8 Лабораторна робота №8. Метод множників Лагранжа.....	96
10 Завдання для типових розрахунків та приклади їх розв'язування.....	99
10.1 Двоїсті задачі. Транспортна задача.....	99
10.2 Нелінійне програмування.....	116
Література.....	121

ВСТУП

Сучасні умови виробництва продукції в різних галузях на рівні окремих підприємств, а також на вищому макроекономічному рівні супроводжується наростаючими інформаційними течіями, які надходять до економічних й управлінських органів. Різко зростає кількість операцій щодо переробки інформації, необхідної для пошуку найкращих (оптимальних) варіантів розвитку виробництва й прийняття рішень.

Таким чином, пошук найкращого (оптимального) плану (варіанта) простим перебором і порівнянням всіх можливих планів стає вкрай непосильною задачею, при цьому не враховується той факт, що на складання одного варіанта плану також витрачається дуже багато часу. Так виникла потреба впровадження математичних методів в економічні розрахунки.

У посібнику описано і поставлено деякі техніко-економічні задачі й показано, що розв'язання таких задач зводиться до розв'язання задач математичного програмування та їх економічної інтерпретації.

Даний навчальний посібник, який є продовженням “Математичного програмування. Частина 1” містить у собі відомості з тем: “Двоїсті задачі лінійного програмування”, “Транспортна задача”, “Цілочисельні задачі лінійного програмування”, “Задачі дробово-лінійного програмування”, “Задачі теорії ігор і лінійне програмування”, “Задачі нелінійного програмування” та “Метод множників Лагранжа”, які вивчаються студентами технічних вищих навчальних закладів на I, II та III курсах навчання. Висвітлені в посібнику теоретичні відомості можна вважати скороченим курсом лекцій. Ці відомості підтверджуються прикладами. Після теоретичної частини в навчальному посібнику подано 30 варіантів для лабораторних робіт з кожної теми. Кількість розрахована на одну академічну групу. Якщо в групі більше студентів і викладач бажає видати всім різні варіанти, це можна зробити використовуючи літери прізвища, які відповідають алфавіту, поділеному на частини з номерами від 1 до 30 або скорелювати набір випадкових чисел. Наприклад, Іванов – 2, 8, 6, 5, 1, 4, 3; Петров – 30, 1, 8, 6, 25, 4, 17 і т. д. У даному посібнику наведені також завдання для виконання типових розрахунків, які передбачають застосування інформаційних технологій.

Навчальний посібник можна використовувати як для підготовки до колоквіумів, практичних занять з поданих тем, так і для типових розрахунків, контрольних домашніх робіт для студентів заочної форми навчання.

1 Двоїсті задачі лінійного програмування

1.1 Поняття про двоїстість у лінійному програмуванні

З кожною задачею лінійного програмування можна поєднати деяку іншу задачу лінійного програмування, яку називають двоїстою або спряженою. Первісну задачу називають вихідною. Дано означення двоїстої задачі по відношенню до загальної задачі лінійного програмування, яка полягає в знаходженні максимального значення функції

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (1)$$

при умовах

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k, \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \dots + a_{k+1n}x_n = b_{k+1}, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, l}, \quad l \leq n). \end{cases} \quad (2)$$

Означення 1. Задача, яка полягає в знаходженні мінімального значення функції

$$F^*(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \min \quad (4)$$

при умовах

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \dots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \dots + a_{ml}y_l \geq c_l, \\ a_{1l+1}y_1 + a_{2l+1}y_2 + \dots + a_{ml+1}y_m = c_{l+1}, \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m = c_m, \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, k}, \quad k \leq m), \end{cases} \quad (5)$$

називається двоїстою по відношенню до задачі (1) – (3).

Означення 2. Задачі (1) – (3) і (4) – (6) утворюють пару задач, яку називають в лінійному програмуванні двоїстою парою.

Порівнюючи дві сформульовані задачі, можна помітити, що між ними існує зв'язок. Наведемо правила, за якими складається двоїста задача по відношенню до вихідної задачі:

1. Цільова функція вихідної задачі (1) – (3) задається на максимум, а цільова функція двоїстої (4) – (6) – на мінімум.

2. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (7)$$

яка складена із коефіцієнтів при невідомих в системі обмежень (2) вихідної задачі (1) – (3), і аналогічна матриця

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (8)$$

в двоїстій задачі (4) – (6) отримується шляхом транспонування, тобто заміною рядків стовпцями, а стовпців – рядками.

3. Кількість змінних у двоїстій задачі (4) – (6) дорівнює кількості співвідношень в системі (2) вихідної задачі (1) – (3), а кількість обмежень в системі (5) двоїстої задачі – кількості змінних у вихідній задачі.

4. Коефіцієнти при невідомих в цільовій функції (4) двоїстої задачі (4) – (6) є вільними членами в системі (2) вихідної задачі (1) – (3), а вільними членами в співвідношеннях системи (5) двоїстої задачі – коефіцієнти при невідомих у цільовій функції (1) вихідної задачі.

5. Якщо змінна x_j вихідної задачі (1) – (3) може приймати лише додатні значення, то j -е обмеження в системі (5) двоїстої задачі (4) – (6) є нерівністю вигляду “ \geq ”. Якщо ж змінна x_j може приймати як додатні, так і від’ємні значення, то j -е обмеження в системі (5) має вид рівняння. Аналогічні зв’язки існують між обмеженнями (2) вихідної задачі (1) – (3) і змінними двоїстої задачі (4) – (6). Якщо i -е співвідношення в системі (2) вихідної задачі є нерівністю, то i -а змінна двоїстої задачі $y_i \geq 0$. В іншому випадку змінна y_i може приймати як додатні, так і від’ємні значення.

Зауваження 1:

1. Застосовуючи правила побудови двоїстих задач до задачі(4)-(6), дістанемо вихідну задачу (1) - (3).
2. Аналогічні правила побудови двоїстої задачі можна записати для вихідної задачі мінімізації.

Двоїсті пари задач зазвичай поділяють на симетричні і несиметричні. В симетричній парі двоїстих задач обмеження (2) прямої задачі і співвідношення (5) двоїстої задачі є нерівностями виду “ \leq ”. Таким чином, змінні обох задач можуть приймати лише невід’ємні значення.

Література:

1. Ермольев Ю.М. и др. Математические методы исследования операций. – М.: Высшая школа, 1998.
2. Калихман И.Л. Линейная алгебра и математическое программирование - М.: Высшая школа, 1967.
3. Карпелевич Ф.М., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М.: Наука, 1967.
4. Кузнецов Ю.Н., Козубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980.
5. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
6. Новіков В.В., Яценко С.А. Лінійне і нелінійне програмування.: Навч. посібник /МВО Укр.–К.: НМК ВО, 1992.
7. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. – М.: Статистика, 1972.
8. Балашевич В.А. Основы математического программирования. – Мн: Выш. шк., 1985.
9. Кігель В.Г. Елементи лінійного, цілочисельного лінійного і нелінійного програмування: Навч. пос. –К.: ІСДО, 1995.
10. Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування.: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001.
11. Мину Мишель. Математическое программирование: Теория и алгоритмы. – М.: Наука, 1990.
12. Новіков В.В., Яценко С.А. Лінійне і нелінійне програмування.: Навч. посібник / МВО України. –К.: НМК ВО, 1992.
13. Худли Дж.Нелинейное и динамическое программирование. – М.: Мир, 1967.
14. Линейное и нелинейное программирование. – Киев: Вища школа, 1975.
15. Карандаев И.С. Решение двойственных задач в оптимальном планировании. – М.: Статистика, 1976.
16. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, 1969.

Навчальне видання

Ірина Володимирівна Хом'юк
Віктор Вікторович Хом'юк
Володимир Леонідович Карпенко

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ЧАСТИНА II

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Хом'юк І.В.

Редактор В.О. Дружиніна
Коректор З.В. Поліщук

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29,7×42 ¹/₄
Друк різнографічний
Тираж прим.
Зам. №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ