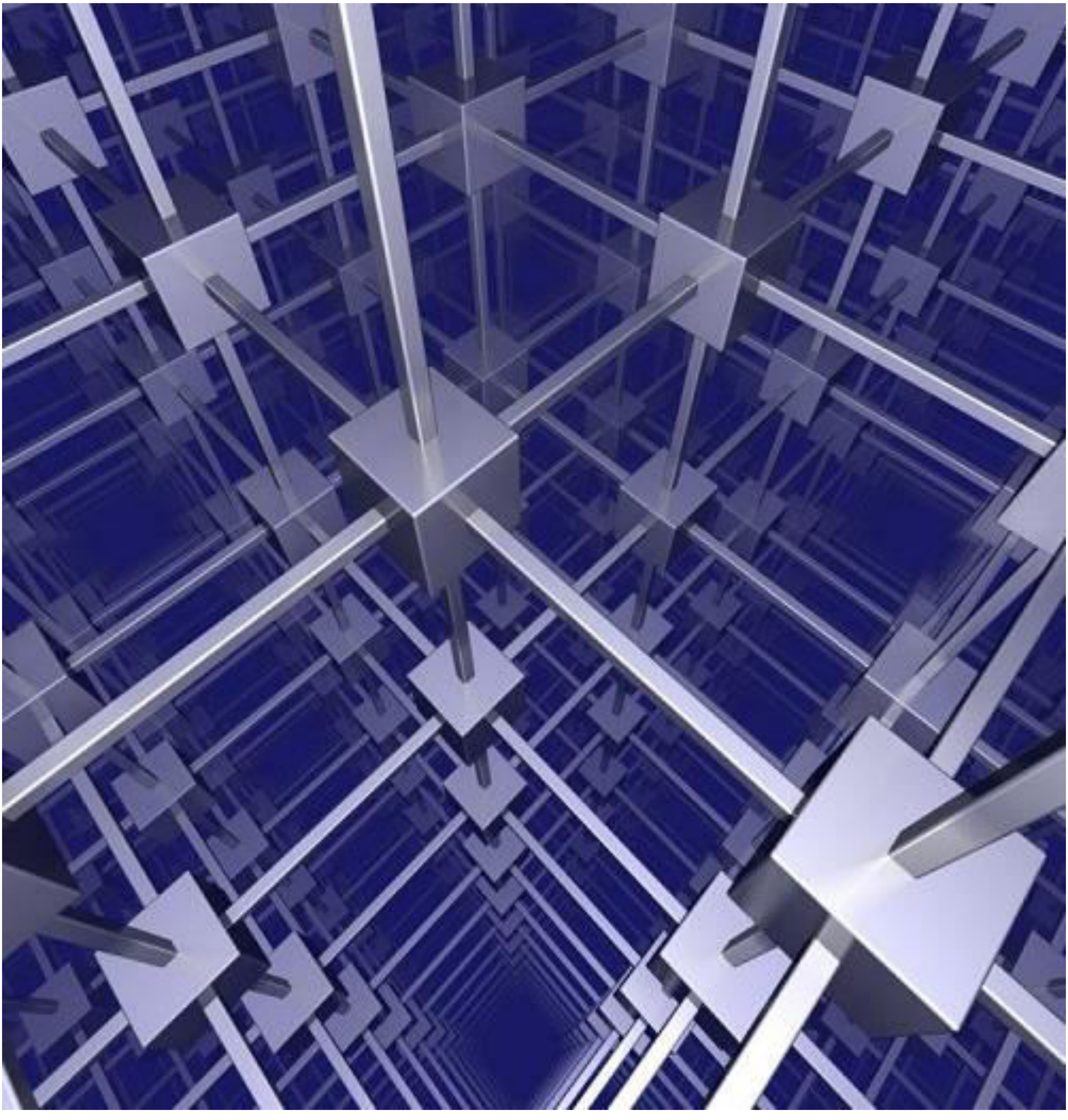
В. І. Клочко, З. В. Бондаренко, С. А. Кирилащук

ВИЩА МАТЕМАТИКА.
ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ



Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

В. І. Клочко, З. В. Бондаренко, С. А. Кирилащук

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2012

УДК 004:517.9+378.147
ББК 32.973:22.161.6+74.58
К50

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 10 від 26.05.2011 р.)

Рецензенти:

А. М. Коломієць, доктор педагогічних наук, професор
О. М. Джеджула, доктор педагогічних наук, професор
В. А. Лужецький, доктор технічних наук, професор

Клочко, В. І.
К50 Вища математика. Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння. Тестові завдання : навчальний посібник / В. І. Клочко, З. В. Бондаренко, С. А. Кирилащук. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 84 с.

Навчальний посібник містить базові поняття теоретичного матеріалу функцій багатьох змінних та диференціальних рівнянь. Також пропонуються тестові завдання щодо зазначених тем. Посібник може бути корисним викладачам та студентам технічних університетів.

УДК 004:517.9+378.147
ББК 32.973:22.161.6+74.58

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Керувати та корегувати будь-яким процесом можливо лише на підставі даних контролю. Не становить винятку і процес навчальної діяльності. Ефективність застосування стандартів можлива тільки в умовах об'єктивного контролю знань і вмінь студентів.

Зміст матеріалу, що міститься у навчальному посібнику «Вища математика. Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння. Тестові завдання» відповідає офіційно затвердженій робочій навчальній програмі з дисципліни та створює суттєвий фундамент у підготовці студентів інженерних спеціальностей до їх майбутньої професійної діяльності.

Пропонований навчальний посібник розрахований для проведення проміжного контролю і має на меті визначити на певному ступені навчання 1) рівень навчальних досягнень студентів з теоретичних питань; 2) техніку диференціювання функції багатьох змінних; 3) сформованість умінь знаходження загальних та частинних розв'язків диференціальних рівнянь. Автори дотримувались принципу значимості. Отже, включили в тестові завдання лише перевірку тих елементів знань, які вони віднесли до найбільш важливих, ключових саме для студентів технічних спеціальностей. Це є особливістю посібника, оскільки такі уміння відіграють роль структурних елементів в індивідуальному знанні.

Навчальний посібник «Вища математика. Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння. Тестові завдання» складається з двох розділів, містить навчальний матеріал, який відповідає програмі курсу вищої математики, що вивчається у технічних ВНЗ. Структура посібника подається у такому вигляді: після основного теоретичного матеріалу з функції багатьох змінних та диференціальних рівнянь пропонуються тестові питання. Основним матеріалом є функції двох змінних, диференціальні рівняння першого та вищих порядків, лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків.

РОЗДІЛ 1

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1. Означення та символіка. Змінна величина z називається *функцією від двох змінних x та y*, якщо кожній парі значень $(x; y)$ із заданої області D відповідає визначене значення z. Відповідний запис має вигляд

$$z = f(x; y) \text{ або } z = z(x; y).$$

Змінну z називають *залежною змінною* (функцією), а змінні x, y *незалежними змінними* (аргументами). Область D називають областю визначення функції. Множину значень z позначають як E.

Оскільки кожній упорядкованій парі чисел $(x; y)$ відповідає в прямокутній системі координат Oxy єдина точка $M(x; y)$ площини, що те саме, точка двовимірного простору R_2, і, навпаки, кожній точці $M(x; y)$ площини відповідає єдина упорядкована пара чисел $(x; y)$, то функція $z = f(x; y)$, де $(x; y) \in D$, можна розглядати як функцію точки M і замість $z = f(x; y)$ писати $z = f(M)$. Областю визначення $D \subset R_2$ функції у цьому випадку є деяка множина точок площини Oxy. Зокрема, областю визначення функції може бути вся площина або частина площини, обмежена певними лініями.

Лінію, що обмежує область D, називають межею області визначення. Точки області, які не лежать на її межі, називають *внутрішніми*. *Область*, яка містить одні внутрішні точки, називається *відкритою*. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така *область* називається *замкненою* [4, С. 284-285].

Лінією рівня функції $z = f(x; y)$ називають лінію $f(x; y) = C$ на площині Oxy, в точках якої функція зберігає постійне значення $z = C$.

Поверхнею рівня функції $u = f(x; y; z)$ називається поверхня $f(x; y; z) = C$, у точках якої функція зберігає постійне значення $u = C$.

2. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. *Частинною похідною* від функції $z = f(x; y)$ за незалежною змінною x називається похідна

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x} = f'_x(x; y),$$

яка обчислюється при постійному y.

Позначається z'_x, f'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Частинною похідною за y називається похідна

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x; y)}{\Delta y} = f'_y(x; y),$$

яка обчислюється при постійному x.

Позначають z'_y, f'_y, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Для частинних похідних виконуються звичайні правила та формули диференціювання [3].

Якщо існує частинна похідна за x від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$, то її називають *частинною похідною другого порядку* від функції $f(x; y)$ за змінною x і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ або f''_{xx}.

Таким чином, за означенням

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{або} \quad f''_{xx} = (f'_x)'_x.$$

Якщо існує частинна похідна від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$ за змінною y, то цю похідну називають *мішаною частинною похідною другого порядку* від функції $f(x;y)$ і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ або f''_{xy}.

Отже, за означенням

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ або } f''_{xy} = (f'_x)'_y.$$

Для функції двох змінних $f(x;y)$ можна розглядати чотири похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Якщо існують частинні похідні від частинних похідних другого порядку, то їх називають *частинними похідними третього порядку* функції $f(x;y)$, їх вісім.

3. Повний диференціал. Повним приростом функції $z = f(x;y)$ у точці $M(x;y)$ називається різниця

$$\triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x;y),$$

де $\triangle x$ та $\triangle y$ – довільний приріст аргументів.

Функція $z = f(x;y)$ називається диференційованою у точці $(x;y)$, якщо у цій точці повний приріст можна подати у вигляді

$$\triangle z = A \triangle x + B \triangle y + \alpha(\triangle x, \triangle y) \triangle x + \beta(\triangle x, \triangle y) \triangle y,$$
$$\alpha(\triangle x, \triangle y) \to 0 \text{ і } \beta(\triangle x, \triangle y) \to 0 \text{ при } \triangle x \to 0, \quad \triangle y \to 0.$$

Повним диференціалом функції $z = f(x; y)$ називається головна частина повного приросту Δz , лінійна відносно приросту аргументів Δx та Δy, тобто $dz = A \Delta x + B \Delta y$.

Диференціалами незалежних змінних x та y назвемо прирости цих змінних $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді запишемо

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Аналогічна формула має місце для диференційованої функції трьох змінних $u = f(x; y; z)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

При досить малому значенні $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для диференційованої функції $z = f(x; y)$ справедливі наближені рівності [3, С. 211]:

$$\Delta z \approx dz; f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x; y) + dz.$$

4. Похідна складеної функції. Нехай $z = f(x; y)$ – функція двох змінних x та y, кожна з яких, в свою чергу, є функцією незалежної змінної t:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

тоді функція $f(x; y)$ є складеною функцією змінної t. П*охідна складеної функції* $z = f(x(t), y(t))$ обчислюється за формулою:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Якщо $z = f(x;y)$, де $y = \varphi(x)$, то повний диференціал від z по x обчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

5. Похідна за напрямом. Градієнт функції. Похідна функції $z = f(x;y)$ у точці $M(x;y)$ за напрямом вектора $l = \overline{MM_1}$ називають границю

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{|MM_1| \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|MM_1|} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho},$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Якщо функція $f(x;y)$ диференційована, то *похідна за даним напрямом* обчислюється за формулою

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin\alpha,$$

де $\alpha -$ кут, який утворюється між вектором l та віссю Ox.

У випадку функції трьох змінних $u = f(x;y;z)$ *похідна за даним напрямом* обчислюється аналогічно. Відповідна формула має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma,$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора l.

Градієнтом функції $z = f(x;y)$ у точці $M(x;y)$ називається вектор, який має початок у точці M та має своїми координатами частинні похідні функції z:

$$grad\, z = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j.$$

Градієнт функції та похідна за напрямом вектора l пов'язані формулою

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \text{пр}_1 grad\, z.$$

Градієнт вказує напрям найбільшого зростання функції у заданій точці. Похідна $\frac{\partial z}{\partial l}$ за напрямом градієнта має найбільше значення, яке дорівнює

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\text{найб.}} = |grad\, z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Для функції $u = f(x; y; z)$ *градієнт* функції дорівнює [3, С. 216]

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

6. Диференціювання функцій заданих неявно. *Похідна неявної функції* $y = y(x)$, заданої рівнянням $F(x; y) = 0$, де $F(x; y)$ – диференційована функція змінних x та y, знаходиться за формулою:

$$y' = -\frac{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}}{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}}, \tag{1}$$

де $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} \neq 0$.

Похідні вищих порядків функції заданої неявно слід обчислювати послідовним диференціюванням формули (1), розглядаючи y як функцію від x.

Аналогічно, *частинні похідні функції* двох змінних $z = \varphi(x; y)$ заданої неявно, яка задана рівнянням $F(x; y; z) = 0$, де $F(x; y; z)$ диференційована функція змінних x , y, z, обчислюються за формулою

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

де $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} \neq 0$ [3, С. 218].

7. Дотична площина та нормаль до поверхні. *Дотичною площиною до поверхні у точці* M називається площина, яка містить у собі всі дотичні до кривих, які проходять через M і лежать на поверхні.

Запишемо *рівняння дотичної площини*. Оскільки ця площина проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\overline{n}$, то її рівняння має вигляд:

$$\mathrm{F}'_x(M_0)(x - x_0) + \mathrm{F}'_y(M_0)(y - y_0) + \mathrm{F}'_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Нормаллю до поверхні в точці M називають пряму, що проходить через точку M перпендикулярно до дотичної площини в цій точці.

Оскільки нормаль проходить через точку M і має напрямний вектор $\overline{n}$, то канонічні *рівняння нормалі* мають такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{\mathrm{F}'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{\mathrm{F}'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{\mathrm{F}'_z(M_0)}.$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z = f(x; y)$, то взявши $F(x; y; z) = f(x; y) - z = 0$, отримаємо

$$\mathrm{F}'_x(M_0) = f'_x(x_0; y_0), \qquad \mathrm{F}'_y(M_0) = f'_y(x_0; y_0), \qquad \mathrm{F}'_z(M_0) = -1$$

і *рівняння дотичної площини* має вигляд:

$$f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Канонічне рівняння нормалі набуде вигляду [4, С.310-311].:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

8. Локальний екстремум функції. Функція $z = f(x; y)$ має максимум (мінімум) у точці $M_0(x_0;\ y_0)$, якщо значення функції у цій точці більше (менше), ніж її значення у будь-якій іншій точці $M(x; y)$ деякого околу точки M_0, тобто $f(x_0;\ y_0) > f(x; y)$ [відповідно $f(x_0;\ y_0) < f(x; y)$] для будь-яких точок $M(x; y)$, які відповідають умові $|M_0M| < \delta$, де δ – достатньо мала додатна величина.

Максимум або мінімум функції називається її *екстремумом*. Точка M_0 , у якій функція має екстремум, називається *точкою екстремуму*.

Якщо диференційована функція $z = f(x; y)$ досягає екстремуму в точці $M_0(x_0;\ y_0)$, то її частині похідні першого порядку у цій точці дорівнюють нулю, тобто

$$\frac{\partial f(x_0;\ y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0;\ y_0)}{\partial y} = 0$$

(необхідні умови екстремуму).

Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, називають *стаціонарними точками.* Не будь-яка стаціонарна точка є точкою екстремуму.

Нехай $M_0(x_0;\, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x;y)$. Позначимо

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2}.$$

Складемо дискримінант $\Delta = AC - B^2$. Тоді:

якщо $\Delta > 0$, то функція має у точці M_0 екстремум, причому при $A < 0$ – максимум, $A > 0$ – мінімум;

якщо $\Delta < 0$, то у точці M_0 екстремуму немає;

якщо $\Delta = 0$, то потрібні додаткові дослідження [3, С. 221].

9. Найбільше та найменше значення функції. Функція $z = f(x;y)$ задана і неперервна в замкненій та обмеженій області D досягає в цій області найбільшого та найменшого значень. Для того щоб знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x;y)$ в замкнутій області, *потрібно*:

1) знайти всі стаціонарні точки, які належать даній області D, розв'язавши систему рівнянь $f'_x(x;y) = 0$, $f'_y(x;y) = 0$, та обчислити значення функції в цих точках;

2) знайти найбільше та найменше значення функції на лініях, які утворюють межу області;

3) серед усіх знайдених значень вибрати найбільше та найменше.

Тестові завдання з дисципліни «Вища математика»

Тема: «Функції багатьох змінних»

1. Що називається поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$?

A. Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називається множина всіх точок простору $M(x, y, z)$, які задовольняють нерівність $f(x, y, z) > 0$.

B. Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називається множина всіх точок простору $M(x, y, z)$, які задовольняють рівняння $f(x, y, z) = C$, де C – довільна стала.

C. Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називається множина всіх точок простору $M(x, y, z)$, які задовольняють нерівність $f(x, y, z) < 0$.

D. Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називається множина всіх точок простору $M(x, y, C)$, які задовольняють рівняння $f(x, y, C) = 0$, де C – довільна стала.

2. Що називається лінією рівня функції $z = f(x, y)$?

A. Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $M(x, y)$ координатної площини Oxy, які задовольняють нерівність $f(x, y) > 0$

B. Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $M(x, y)$ координатної площини Oxy, які задовольняють нерівність $f(x, y) < 0$

C. Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $M(x, y)$ координатної площини Oxy, які задовольняють рівняння $f(x, y) = C$, де C – довільна стала.

D. Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $M(x, C)$ координатної площини Oxy, які задовольняють рівняння $f(x, C) = 0$, де C – довільна стала.

3. Що називається повним диференціалом du функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$?

A. $du = f'_x(M_0) + f'_y(M_0) + f'_z(M_0)$.

B. $du = f'_x(M_0) \cdot f'_y(M_0) \cdot f'_z(M_0) \Delta x \Delta y \Delta z$, де $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – прирости аргументів в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

C. $du = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + f'_z(M_0)\Delta z$, де $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – прирости аргументів в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

D. $du = (f'_x(M_0) + f'_y(M_0) + f'(M_0))\Delta x \Delta y \Delta z$, де $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – прирости аргументів в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

4. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ функції $z = arctg\frac{y}{x}$ в точці $M_0(1, 1)$?

A. $-1/2$. B. 1. C. -1. D. 2.

5. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = arctg\frac{x}{y}$ в точці $M_0(2,1)$?

A. $-4/5$. B. $1/5$. C. $-2/5$. D. $-2/3$.

6. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ функції $z = \arcsin\frac{x^2}{y^2}$ в точці **$M_0(1,2)$?**

A. $-1/\sqrt{15}$. B. $-2/\sqrt{15}$. C. $3/\sqrt{15}$. D. $2/\sqrt{15}$.

7. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = \arcsin\frac{x^2}{y^2}$ в точці $M_0(1,2)$**?**

A. $-1/\sqrt{15}$. B. $-2/\sqrt{15}$. C. $3/\sqrt{15}$. D. $2/\sqrt{15}$.

8. Чому дорівнює похідна $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z=\sin\left(x^2 y\right)$, $x=t^2$, $y=\frac{\pi}{4}t$ **в точці** $t_0=1$**?**

A. $\frac{5\sqrt{2}}{8}\pi$. B. $\frac{5}{8}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$. D. $\frac{5\sqrt{2}}{4}\pi$.

9. Чому дорівнює похідна $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z=tg\left(x+y\right)$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}\cdot t$, $y=t^2$ **в точці** $t_0=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ **?**

A. $\sqrt{2\pi}$. B. $\sqrt{3\pi}$. C. $\sqrt{6\pi}$. D. $2\sqrt{6\pi}$.

10. Чому дорівнює похідна $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z=\cos\left(x\,y^2\right)$**,** $x=\frac{\pi}{2}t^2$, $y=t^3$ **в точці** $t_0=1$**?**

A. 3π. B. -4π. C. -3π. D. 5π.

11. Чому дорівнює похідна $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z=ctg\left(x-y\right)$**,** $x=\frac{\pi}{2}t$, $y=\frac{\pi}{4}t^2$ **в точці** $t_0=1$**?**

A. $\pi/4$. B. π. C. 0. D. 1.

12. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ функції $z=z\left(x,y\right)$**, яка задана неявно рівнянням** $\ln\left(x^2-4y^3-z^2+4xy+1\right)=0$**, в точці** $M_0\left(4;-1;2\right)$ **?**

A. -1. B. -2. C. 1. D. 4.

13. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = z(x, y)$, яка задана неявно рівнянням $\ln\left(x^2 - 4y^3 - z^2 + 4xy + 1\right) = 0$, в точці $M_0(4; -1; 2)$?

A. -1. B. 1. C. -2. D. 4.

14. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ функції $z = z(x, y)$, яка задана неявно рівнянням $e^{xy-z} + xy^2 z + z + 1 = 0$, в точці $M_0(1; -1; -1)$?

A. -1. B. -3. C. 1. D. 2.

15. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = z(x, y)$, яка задана неявно рівнянням $e^{xy-z} + xy^2 z + z + 1 = 0$, в точці $M_0(1; -1; -1)$?

A. -3. B. -1. C. 1. D. 2.

16. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функції $z = e^{x^2 - y^2}$ в точці $M_0(1; -1)$?

A. -4. B. 6. C. -3. D. 2.

17. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функції $z = e^{x^2 - y^2}$ в точці $M_0(1; -1)$?

A. -4. B. -3. C. 6. D. 2.

18. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функції $z = e^{x^2/y}$ в точці $M_0(-1; 1)$?

A. $-2e$. B. 1. C. $6e$. D. 0.

19. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функції $z = ye^{x+y}$ в точці $M_0(-1;1)$?

A. -4. B. 3. C. -3. D. 2.

20. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функції $z = 4arctg(xy)$ в точці $M_0(-1;1)$?

A. -4. B. 3. C. -3. D. 2.

21. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функції $z = \ln(x + 2e^y)$ в точці $M_0(-1;0)$?

A. -2. B. 2. C. -3. D. -1.

22. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функції $z = e^{xy^2+1}$ в точці $M_0(-1;1)$?

A. -2. B. -1. C. 4. D. 2.

23. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функції $z = e^{x^2y^2-1}$ в точці $M_0(-1;1)$?

A. -1. B. -2. C. 4. D. 2.

24. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ функції $z = e^{x^2y-1}$ в точці $M_0(1;1)$?

A. -1. B. -2. C. 4. D. 6.

25. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ **функції** $z = \cos\left(x^2 - y^2\right)$ **в точці** $M_0(1;1)$ **?**

A. -1. B. 6. C. 4. D. 2.

26. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ **функції** $z = \cos\left(x^2 + 2y^3 - 3x\right)$ **в точці** $M_0(1;1)$ **?**

A. -2. B. 2. C. 4. D. 6.

27. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ **функції** $z = \cos\left(y^3 - x^2 y\right)$ **в точці** $M_0(1;1)$ **?**

A. -2. B. 6. C. 4. D. 2.

28. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ **функції** $z = x\sin(2x - y)$ **в точці** $M_0(1;2)$ **?**

A. -2. B. 1. C. 0. D. -1.

29. Чому дорівнює похідна функції $u = f(x, y, z)$ **в точці** M_0 **за напрямом вектора** $\vec{s}$**, напрямні косинуси якого** $\cos\alpha$**,** $\cos\beta$**,** $\cos\gamma$**?**

A. $\frac{\partial f(M_0)}{\partial s} = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma$.

B. $\frac{\partial f(M_0)}{\partial s} = \left|f'_x(M_0)\cos\alpha\right| + \left|f'_y(M_0)\cos\beta\right| + \left|f'_z(M_0)\cos\gamma\right|$.

C. $\frac{\partial f(M_0)}{\partial s} = f'_x(M_0)\cos^2\alpha + f'_y(M_0)\cos^2\beta + f'_z(M_0)\cos^2\gamma$.

D. $\frac{\partial f(M_0)}{\partial s} = f'_x(M_0)\cdot f'_y(M_0)\cdot f'_z(M_0)\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

30. Градієнтом $grad\, f(M_0)$ функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називається

A. вектор $grad\, f(M_0) = f(M_0)\left(f'_x(M_0)\vec{i} + f'_y(M_0)\vec{j} + f'_z(M_0)\vec{k}\right)$.

B. вектор $grad\, f(M_0) = f'_x(M_0)\vec{i} + f'_y(M_0)\vec{j} + f'_z(M_0)\vec{k}$.

C. величина $grad\, f(M_0) = f'_x(M_0) + f'_y(M_0) + f'_z(M_0)$.

D. величина $grad\, f(M_0) = f'_x(M_0) \cdot f'_y(M_0) \cdot f'_z(M_0)$.

31. Який геометричний зміст градієнта $grad\, f(M_0)$ функції $u = f(x, y, z)$?

A. Вектор $grad\, f(M_0)$ є вектором нормалі в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні рівня функції $u = f(x, y, z)$, яка проходить через цю точку.

B. Вектор $grad\, f(M_0)$ утворює кут 60° із вектором нормалі в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні рівня функції $u = f(x, y, z)$, яка проходить через цю точку.

C. Вектор $grad\, f(M_0)$ утворює кут 45° з вектором нормалі в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні рівня функції $u = f(x, y, z)$, яка проходить через цю точку.

D. Вектор $grad\, f(M_0)$ перпендикулярний до вектора нормалі в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні рівня функції $u = f(x, y, z)$, яка проходить через цю точку.

32. Якщо $u = x^3 + y^2 - 2xyz + z^4$, $\vec{s}(2;-1;2)$ і $M_0(0;1;-1)$, то похідна за напрямом $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial s}$ дорівнює

A. -2. B. 4. C. 3. D. 10.

33. Якщо $u = \dfrac{z^3}{2x^3 - 3y^2}$**,** $\vec{s}(1;-2;2)$ **і** $M_0(1;-1;2)$**, то похідна за напрямом** $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial s}$ **дорівнює**

A. -2. B. 10. C. -6. D. -1.

34. Якщо $u = 3e^{x+y^2z^3}$**,** $\vec{s}(1;-2;-2)$ **і** $M_0(1;1;-1)$**, то похідна за напрямом** $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial s}$ **дорівнює**

A. -2. B. 4. C. -1. D. -6.

35. Якщо $u = 3\sin(xy + 3xz - 2yz)$**,** $\vec{s}(1;2;-2)$ **і** $M_0(1;3;1)$**, то похідна за напрямом** $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial s}$ **дорівнює**

A. 2. B. -4. C. -1. D. 10.

36. Якщо $u = 3\arcsin\dfrac{x + y^2}{z}$**,** $\vec{s}(-2;1;2)$ **і** $M_0(-1;1;1)$**, то похідна за напрямом** $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial s}$ **дорівнює**

A. 10. B. 2. C. -1. D. -6.

37. Якщо $z = \ln(xy^2 - 1)$ **і** $M_0(2,1)$**, то** $grad\, z(M_0)$ **дорівнює**

A. $2\vec{i} + 3\vec{j}$. B. $\vec{i} + 4\vec{j}$. C. $3\vec{i} - 2\vec{j}$. D. $2\vec{i} - 4\vec{j}$.

38. Якщо $z = x^2y + xy^2$ **і** $M_0(-1,3)$**, то** $grad\, z(M_0)$ **дорівнює**

A. $3\vec{i} + 5\vec{j}$. B. $5\vec{i} - 3\vec{j}$. C. $3\vec{i} - 5\vec{j}$. D. $2\vec{i} + 3\vec{j}$.

39. Якщо $z = 8tg\frac{x}{y}$ **і** $M_0(\pi,4)$**, то** $grad\,z(M_0)$ **дорівнює**

A. $4\vec{i} + \pi\vec{j}$. B. $4\vec{i} - 2\pi\vec{j}$. C. $2\vec{i} - \pi\vec{j}$. D. $4\vec{i} - \pi\vec{j}$.

40. Якщо $z = \sin\frac{x}{y^2}$ **і** $M_0(\pi,1)$**, то** $grad\,z(M_0)$ **дорівнює**

A. $-\vec{i} + 2\pi\vec{j}$. B. $\vec{i} - 2\pi\vec{j}$. C. $2\vec{i} - \pi\vec{j}$. D. $4\vec{i} + 2\pi\vec{j}$.

41. Якщо $u = \ln\left(xy^2 + z^3 - 1\right)$ **і** $M_0(3;1;-1)$**, то** $grad\,u(M_0)$ **дорівнює**

A. $2\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$. B. $\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$. C. $\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. D. $3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k}$.

42. Якщо $u = \frac{2}{x^2 y + 2z^3}$ **і** $M_0(2;1;-1)$**, то** $grad\,u(M_0)$ **дорівнює**

A. $\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$. B. $\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$. C. $4\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$. D. $-2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

43. Якщо $u = 2y + 2xz^3 - x^2 yz$ **і** $M_0(1;3;-1)$**, то** $grad\,u(M_0)$ **дорівнює**

A. $\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$. B. $4\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$. C. $3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$. D. $-2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

44. Що називають стаціонарною точкою $M_0(x_0, y_{0,} z_0)$ **функції** $u = f(x, y, z)$**?**

A. Стаціонарною точкою $M_0(x_0, y_{0,} z_0)$ функції $u = f(x, y, z)$ називається точка, в якій всі частинні похідні одночасно задовольняють нерівності $f'_x(M_0) < 0$, $f'_y(M_0) < 0$, $f'_z(M_0) < 0$.

B. Стаціонарною точкою $M_0(x_0, y_{0,} z_0)$ функції $u = f(x, y, z)$ називається точка, в якій всі частинні похідні одночасно задовольняють нерівності $f'_x(M_0) > 0$, $f'_y(M_0) > 0$, $f'_z(M_0) > 0$.

C. Стаціонарною точкою $M_0(x_0, y_{0,} z_0)$ функції $u = f(x, y, z)$ називається точка, в якій всі частинні похідні одночасно задовольняють рівності $f'_x(M_0) = 0$, $f'_y(M_0) = 0$, $f'_z(M_0) = 0$.

D. Стаціонарною точкою $M_0(x_0, y_{0,} z_0)$ функції $u = f(x, y, z)$ називається точка, в якій частинні похідні задовольняють хоча б одну з рівностей $f'_x(M_0) = 0$, $f'_y(M_0) = 0$, $f'_z(M_0) = 0$.

45. Для функції $z = 3x^2 - 6xy + 2y^2 + 5x + 3y + 5$ **стаціонарними точками є**

A. $M_1(11/6, 2)$. B. $M_1(19/6, 4)$. C. $M_1(3,4)$, $M_2(-1,2)$. D. $M_1(3/4, -5)$.

46. Для функції $z = 2x^2 - 5xy + 3y^2 - 3x + y - 3$ **стаціонарними точками є**

A. $M_1(10, -7)$. B. $M_1(-12, -15)$. C. $M_1(-3,5)$, $M_2(2,4)$. D. $M_1(-13, -11)$.

47. Для функції $z = x^2 - 3xy + 2y^2 - x + y - 6$ **стаціонарними точками є**

A. $M_1(-1, -1)$. B. $M_1(2, -7)$. C. $M_1(-2, -3)$, $M_2(2, -4)$. D. $M_1(-2, 1)$.

48. Для функції $z = x^2 - 4xy + 3y^2 + x + 2y - 8$ **стаціонарними точками є**

A. $M_1(1/6, 3)$. B. $M_1(2, -13)$, $M_2(2/5, -2)$. C. $M_1(3/4, -5)$. D. $M_1(7/2, 2)$.

49. Для функції $z = x^2(2\ln x - 3)$ **стаціонарними точками є**

A. $M_1(e, -e^2)$. B. $M_1(1,2)$, $M_2(\sqrt{e}, -2e)$. C. $M_1(e^2, e^4)$. D. $M_1(1, -3)$.

50. Для функції $z = xe^{-x^2/2}$ **стаціонарними точками є**

A. $M_1(1, e^{-1/2})$, $M_2(0,1)$. B. $M_1(2, e^{-2})$, $M_2(-2, e^{-2})$.

C. $M_1(1, e^{-1/2})$, $M_2(-1, e^{-1/2})$. D. $M_1(0,1)$.

51. Сформулюйте достатню умову існування гладкого екстремуму для функції двох змінних $z = f(x, y)$**.**

A. Якщо $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$ і справедлива нерівність $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{M_0} < 0$, тоді функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум, якщо $f''_{xx}(M_0) < 0$, і мінімум, якщо $f''_{xx}(M_0) > 0$.

B. Якщо $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$ і справедлива нерівність $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{M_0} > 0$, тоді функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум, якщо $f''_{xx}(M_0) > 0$, і мінімум, якщо $f''_{xx}(M_0) < 0$.

C. Якщо $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$ і справедлива нерівність $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{M_0} > 0$, тоді функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум, якщо $f''_{xx}(M_0) < 0$, і мінімум, якщо $f''_{xx}(M_0) > 0$.

D. Якщо $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$ і справедлива рівність $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{M_0} = 0$, тоді функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум, якщо $f''_{xx}(M_0) < 0$, і мінімум, якщо $f''_{xx}(M_0) > 0$.

ВІДПОВІДІ

на тестові завдання з дисципліни «Вища математика»

Тема: «Функції багатьох змінних»

№ тест. завдання	Варіанти відповіді				№ тест. завдання	Варіанти відповіді			
	A	B	C	D		A	B	C	D
1		+			26				+
2			+		27			+	
3			+		28				+
4	+				29	+			
5			+		30		+		
6				+	31	+			
7	+				32	+			
8	+				33			+	
9				+	34			+	
10		+			35				+
11			+		36		+		
12			+		37		+		
13		+			38			+	
14				+	39				+
15	+				40	+			
16		+			41		+		
17				+	42				+
18	+				43		+		
19		+			44			+	
20				+	45		+		
21	+				46				+
22	+				47	+			
23		+			48				+
24			+		49	+			
25			+		50			+	
					51			+	

РОЗДІЛ 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1. Загальні поняття. *Диференціальним рівнянням першого порядку* називається співвідношення вигляду

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \qquad (1)$$

де x – незалежна змінна (аргумент); $y = y(x)$ – невідома функція аргументу x; $F(x, y, y')$ – задана функція змінних (x, y, y'), $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Рівняння (1) не розв'язане відносно похідної.

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad (2)$$

де $f(x, y)$ – задана функція двох змінних, називається *диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної*.

Часто використовують симетричну форму запису диференціального рівняння першого порядку:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – задані функції змінних x та y.

Розв'язком диференціального рівняння (1) або (2) на інтервалі l називається неперервна диференційована функція $y = \varphi(x)$, яка перетворює це рівняння в тотожність, тобто

$$F\left(x,\varphi(x),\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)=0 \quad \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}=f\left(x,\varphi(x)\right)\right),\ x\in l\ .$$

Співвідношення $\Phi(x,y)=0$ називається *інтегралом* рівняння (1) або (2), якщо воно неявно задає розв'язок $y=\varphi(x)$ цього рівняння.

Графік розв'язку $y=\varphi(x)$ називається *інтегральною кривою* диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння (ДР) має нескінченну множину розв'язків. Але розв'язок, що моделює деякий фізичний процес, повинен бути єдиним. Тому, розв'язуючи прикладну задачу, як правило, знаходимо не всі розв'язки диференціального рівняння, а якийсь один розв'язок, обумовлений додатковими умовами.

В теорії диференціальних рівнянь пошук єдиного розв'язку ДР першого порядку зводиться до розв'язування задачі Коші, якщо додаткові умови задаються значенням шуканої функції в одній точці. Це – задача з початковими умовами. Якщо ж додаткові умови задаються у двох точках, то задача називається крайовою. Будемо розглядати лише задачу Коші. Отже, сформулюємо її.

2. Задача Коші. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'=f(x,y)\,, \tag{3}$$

що задовольняє початкову умову

$$y(x_0)=y_0\ , \tag{4}$$

де x_0, y_0 – деякі дійсні числа.

Дамо геометричну інтерпретацію задачі Коші.

Нехай $y = \varphi(x)$ – деякий розв'язок рівняння (3), назвемо його частинним розв'язком. Отже, геометричний зміст задачі Коші полягає у тому, що потрібно знайти інтегральну криву диференціального рівняння (3), яка проходить через точку (x_0, y_0) (умова (4)).

Виникає питання, а чи єдина крива проходить через задану точку, і чи взагалі існує розв'язок задачі (3) – (4)? На ці питання дає відповідь теорема Коші.

Теорема Коші. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в деякій області D площини xOy і має в цій області неперервну частинну похідну $\frac{\partial f}{\partial y}$, то через кожну точку (x_0, y_0) області D проходить тільки одна інтегральна крива рівняння (3).

Із теореми Коші випливає, що рівняння $y' = f(x, y)$ має нескінченну множину розв'язків в області D, оскільки на прямій $x = x_0$ можна вказати безліч точок (x_0, y_0), які лежать в області D.

Введемо поняття загального розв'язку, що опише всю множину розв'язків диференціального рівняння першого порядку.

Загальним розв'язком рівняння (2) називається функція $y = \varphi(x, c)$, яка залежить від довільної сталої C і в деякій області D задовольняє умови:

а) $\varphi(x, c)$ є розв'язком рівняння (3) при довільному C (C може належати деякій множині);

б) довільний розв'язок рівняння може бути записаний у вигляд $y = \varphi(x, c)$ при деякому конкретному значенні C.

Якщо загальний розв'язок рівняння (3) заданий у неявному вигляді $F(x, y, \tilde{N}) = 0$, то він називається загальним інтегралом диференціального рівняння (3).

Розв'язок $F(x, y, \tilde{N}_0) = 0$, де C_0 – конкретне значення довільної сталої C, обумовлений початковою умовою (4), називається частинним інтегралом.

3. Геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку. Розглянемо геометричний зміст рівняння (3). Нехай $y = \varphi(x)$ – його розв'язок; x, y – прямокутні декартові координати. Тоді графік функції $y = \varphi(x)$ має в кожній точці дотичну, кутовий коефіцієнт якої дорівнює y' або, що випливає з рівняння (3), дорівнює $f(x, y)$. Отже, рівняння $y' = f(x, y)$ визначає зв'язок між координатами точки області D та кутовим коефіцієнтом дотичної до інтегральної кривої у цій точці.

Іншими словами, диференціальне рівняння першого порядку визначає в кожній точці області існування розв'язку напрям дотичної, проведеної до інтегральної кривої. А в цілому в області D рівняння $y' = f(x, y)$ задає поле напрямів. Його можна побудувати таким чином. Задаємо точку (x_1, y_1), знаходимо $f(x_1, y_1)$, тобто обчислюємо y'. В області D будуємо точку з координатами (x_1, y_1) і відрізок дотичної з центром у цій точці, тангенс кута нахилу якого до осі абсцис дорівнює $f(x_1, y_1)$. Множина точок і відрізків дотичних є полем напрямів.

Але зручніше поле напрямів будувати таким чином. Будуються лінії, у яких напрям поля в кожній точці однаковий, тобто $y' = k$ або $f(x, y) = k$. Такі лінії називають *ізоклінами.*

4. Поняття про особливі точки і розв'язки рівняння.

Диференціальне рівняння крім розв'язків, що входять у загальний розв'язок, можуть мати інші розв'язки. За допомогою теореми Коші відділити їх не можемо, бо умови теореми Коші є достатніми, тобто можуть існувати єдині в деякому околі точки розв'язки, а умови теореми не виконуються. Розв'язок, у кожній точці якого порушується умова єдиності теореми Коші, називається особливим розв'язком рівняння. Особливий розв'язок не належить області існування загального розв'язку, тому не міститься у формулі загального розв'язку ні при яких значеннях довільної сталої, навіть коли $C \to \pm\infty$. Особливі розв'язки можна виявити у процесі інтегрування рівняння. Це ті криві, рівняння яких можуть бути втраченими при перетворенні рівняння або його загального інтегралу.

Якщо диференціальне рівняння має частинні і особливі розв'язки, то можуть бути побудовані розв'язки шляхом склеювання дуг частинних і особливих, які не є ні частинними, ні особливими.

Особливою називається точка (x_0, y_0), в досить малому околі якої права частина рівняння (3) не задовольняє умови теореми існування і єдиності розв'язку. Поведінка інтегральних кривих в околі цієї точки може бути довільною: через особливу точку може не проходити жодна інтегральна крива, може проходити одна, декілька або безліч інтегральних кривих. Дослідження в теорії диференціальних рівнянь, знання про розподіл особливих точок та про характер поведінки інтегральних кривих в околі цих точок дають можливість зробити висновки про поведінку інтегральних кривих в області задання диференціального рівняння.

Якщо рівняння (3) можна записати у вигляді

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – неперервні диференційовні функції, то точка (x_0, y_0) буде особливою, коли $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$.

5. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Розглянемо рівняння (3), в яких праву частину $f(x, y)$ можна подати у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від x, а друга – від y, тобто $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$.

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f_1(x) f_2(y) \tag{5}$$

називається рівнянням з *відокремлюваними змінними.*

Рівняння (5) можна подати у вигляді:

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dx + \varphi_2(x)\psi_2(y)dy = 0.$$

6. Диференціальні рівняння, однорідні відносно змінних. Функція двох змінних $\varphi(x, y)$ називається *однорідною функцією n-го виміру*, якщо для будь-якого $t \neq 0$ справедлива тотожність:

$$\varphi(tx, ty) = t^m \varphi(x, y). \tag{6}$$

Наприклад, функція $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ однорідна другого виміру, оскільки $\varphi(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2\varphi(x, y)$.

Перевірте, що функція $\varphi(x, y) = ax + by$ – однорідна функція першого виміру, а $\varphi(x, y) = \sin\dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ – нульового виміру.

Справедливі твердження: сума, добуток та частка від ділення однорідних функцій є однорідною функцією.

Важливим для подальшого вивчення матеріалу є твердження про те, що однорідну функцію $\varphi(x, y)$ нульового виміру можна подати у вигляді

$$\varphi(x,y)=\psi(y/x).$$

Дійсно,

$$\varphi(tx,ty)=t^0\varphi(x,y),$$

тобто $$\varphi(x,y)=\varphi(tx,ty).$$

Нехай

$$t=1/x, \text{ тоді } \varphi(x,y)=\varphi(\frac{1}{x}\cdot x,\frac{1}{x}\cdot y)=\varphi(1,\frac{y}{x})=\psi(\frac{y}{x}).$$

Переходимо до розгляду однорідних диференціальних рівнянь.

Рівняння $y'=f(x,y)$ називається однорідним відносно змінних, якщо його права частина є однорідною функцією нульового виміру, тобто якщо його можна подати у вигляді:

$$y'=\varphi(y/x). \tag{7}$$

Розв'язування рівняння зводиться до пошуку розв'язку рівняння з відокремлюваними змінними. Для цього введемо функцію $u(x)=\dfrac{y(x)}{x}$,тобто введемо заміну $y=ux$. Перетворимо рівняння (7) за допомогою підстановки $y=Ux$. Для цього знайдемо похідну $y'=u+u'x$ і підставимо вирази для y і y' у рівняння (7), отримаємо:

$$u+xu'=\varphi(u)$$

або $$xdu=[\varphi(u)-u]dx, \quad \varphi(u)-u\neq 0.$$

Одержане рівняння є ДР з відокремлюваними змінними відносно невідомої функції $u(x)$. Відокремлюємо змінні

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо одержане рівняння

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C, \qquad \psi(u)=\ln|x|+C.$$

Виразивши функцію u через x і y, знаходимо загальний інтеграл даного рівняння:

$$\psi(y/x)=\ln|x|+C.$$

7. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

Диференціальне рівняння $y'=f(x,y)$ називається *лінійним*, якщо воно лінійне відносно шуканої функції y та її похідної y', тобто має вигляд:

$$y'+P(x)y=Q(x). \tag{8}$$

Вважаємо, що функції $P(x)$ і $Q(x)$ неперервні при $a < x < b$.

Наприклад, рівняння $y'+y\sin x=x^2$; $y'+xy=0$ є лінійними. Рівняння $y'+xy^2=\cos x$; $(y')^2+xy=x^3$ не є лінійними (чому?).

Якщо права частина $Q(x)$ рівняння (8) не дорівнює тотожно нулю, то це рівняння називається лінійним неоднорідним рівнянням. Якщо ж $Q(x)\equiv 0$, то рівняння $y'+P(x)y\equiv 0$ називається лінійним однорідним рівнянням.

Розглянемо методи розв'язування лінійних диференціальних рівнянь.

Метод Лагранжа. Розглянемо лінійне однорідне рівняння $y' + P(x)y = 0$, яке відповідає неоднорідному диференціальному рівнянню (8). Наприклад, рівняння $y' + y\sin x = 0$ буде відповідним лінійним однорідним рівнянням неоднорідному $y' + y\sin x = x^2$.

Рівняння $y' + P(x)y = 0$ – рівняння з відокремлюваними змінними. Знайдемо його розв'язок.

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y\,; \qquad \frac{dy}{y} = -P(x)dx\,;$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|; \qquad y = Ce^{-\int P(x)dx}, \tag{9}$$

де C – довільна стала і $C \neq 0$.

Розв'язок (9) є загальним розв'язком однорідного рівняння. А загальний розв'язок неоднорідного рівняння (8) шукаємо методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа). Тобто загальний розв'язок рівняння (8) має той же вигляд, що і однорідного (9), але замість довільної сталої розглядається функція *C(x)*, тобто вважається, що загальний розв'язок рівняння (8) має вигляд:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}\,. \tag{10}$$

Знайдемо функцію $C(x)$. Для цього вираз (10) підставляємо у рівняння (8)

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx},$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)\,.$$

Отже, функція $C(x)$ знаходиться з рівняння

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}\,.$$

Звідси, проінтегрувавши рівняння, знаходимо функцію *C(x)*.

Тоді загальний розв’язок (10) набуває вигляду:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \qquad (11)$$

Дійсно, вираз (11) є розв’язком рівняння (8) при довільному *C*. Це випливає із попередніх перетворень. Можна показати, що довільний розв’язок рівняння (8) можна записати у вигляді (11) при деякому значенні сталої *C*.

Зауваження. Перепишемо розв’язок (11) у вигляді:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx .$$

Тоді можна зробити висновок, що загальний розв’язок неоднорідного рівняння дорівнює сумі двох доданків, з яких перший доданок $Ce^{-\int P(x)dx}$ є загальним розв’язком відповідного однорідного лінійного рівняння, а другий доданок є частинним розв’язком даного неоднорідного рівняння (одержуємо з (11) при $C = 0$).

Метод Бернуллі. Розв’язок рівняння (8) шукаємо у вигляді добутку двох функцій, тобто

$$y = u(x) \cdot v(x). \qquad (12)$$

В результаті розв’язування рівняння (8) зводиться до розв’язування двох рівнянь з відокремлюваними змінними відносно функцій $u(x)$ і $v(x)$.

Підставимо вираз (12) у рівняння (8):

$$y' = u'v + uv' ; \qquad u'v + uv' + Puv = Q .$$

У лівій частині останнього рівняння згрупуємо перший і третій доданки або другий і третій. Виносимо спільний множник за дужки.

$$v\,du/dx + u(dv/dx + Pv) = Q . \qquad (13)$$

Вибираємо функцію $v(x)$ так, щоб:

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0 .$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Знаходимо $v(x)$

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx .$$

Проінтегрувавши рівняння, отримаємо:

$$\ln|v| = -\int P(x)dx + C ,$$

або
$$|v| = e^{-\int P(x)dx + C} , \qquad v = \pm e^{-\int P(x)dx + C} .$$

Вибираємо найпростіший вигляд функції $v(x)$, тобто візьмемо

$$v = e^{-\int P(x)dx} .$$

Підставляємо $v(x)$ у (13) і отримуємо:

$$\frac{du}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x) .$$

Це теж рівняння з відокремлюваними змінними. Звідси знайдемо функцію $u(x)$:

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx, \qquad u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Отже, функції *u(x*) і *v(x)* знайдено, перемноживши їх, отримаємо розв'язок рівняння (8)

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Одержаний розв’язок збігається з розв’язком (11), що був знайдений за методом Лагранжа.

Зауваження. При інтегруванні лінійного рівняння (8) можна користуватися формулою загального розв’язку (11), але доцільніше загальний розв’язок знаходити, користуючись методом Лагранжа або методом Бернуллі.

8. Диференціальні рівняння в повних диференціалах. Розглянемо диференціальну форму рівняння $y' = f(x, y)$:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{14}$$

В деяких випадках ліва частина рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ є повним диференціалом функції двох змінних $U(x, y)$ в деякій області *D,* тобто $M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y)$. Рівняння (14) називається рівнянням в повних диференціалах в області *D*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції. Отже, рівняння (14) запишеться у вигляді: $dU(x,y)=0$.

Нехай функції *M(x,y)* і *N(x,y),* а також їх частинні похідні $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ неперервні в області *D*. В математичному аналізі доводиться, що для того, щоб вираз $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ був повним диференціалом, необхідно і достатньо, щоб в області *D* виконувалась умова:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{15}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

9. Загальні поняття. Нагадаємо, що диференціальним рівнянням *n*-го порядку в загальній формі називається співвідношення

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0, \tag{16}$$

яке зв'язує незалежну змінну *x* ($x \in (a,b)$), шукану функцію *y(x)* та її похідні до *n*-го порядку включно. *Кожне ДР, порядок якого вище першого, називається ДР вищого порядку.*

Якщо рівняння (16) можна розв'язати відносно старшої похідної, то його записують у вигляді :

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}). \tag{17}$$

Таке рівняння називають ДР порядку n, розв'язаним відносно похідної; або говорять, що воно записано в нормальній формі.

Надалі розглядатимемо диференціальні рівняння вигляду (17).

Розв'язком диференціального рівняння (17) на інтервалі (a,b) називається будь-яка неперервна і n разів диференційована на цьому інтервалі функція , якщо вона це рівняння перетворює в тотожність

$$\varphi^{(n)}(x) \equiv f(x,\varphi(x),\varphi'(x),\ldots,\varphi^{(n-1)}(x)), \quad \forall x \in (a,b).$$

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння (17) називають інтегруванням цього рівняння.

Задача Коші для рівняння (17) полягає в тому, щоб знайти розв'язок

$$y = y(x), \tag{18}$$

що задовольняє початкові умови :

$$y = y_0, \;\; y' = y_0', \;\; \ldots, \;\; y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \qquad \text{при } x = x_0, \tag{19}$$

де $x_0, \; y_0, \; y_0', \; \ldots, \; y_0^{(n-1)}$ – задані числа (початкові дані розв'язку (18)).

Наведемо одну із достатніх умов (без доведення) існування і єдиності розв'язку задачі Коші.

10. Теорема Коші. *Якщо права частина в рівнянні* (17) *функція та її частинні похідні за аргументами неперервні в області D, то для довільної точки із області D існує єдиний розв'язок* (3)*, визначений на деякому інтервалі (x_0 - h, x_0 + h), який задовольняє початкові умови* (19).

Слід відмітити, що єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння *n*-го порядку ($n > 1$) не означає, що через дану точку (x_0 , y_0) площини *Oxy* проходить лише одна інтегральна крива $y = y(x)$, як це мало місце для рівняння першого порядку в нормальній формі.

Для рівняння другого порядку з початковими даними єдиність розв'язку задачі Коші слід розуміти в тому плані, що через точку

$(x_0, y_0) \in R_2$ проходить єдина інтегральна крива рівняння, дотична до якої має деякий кутовий коефіцієнт. Проте через точку (x_0, y_0) проходить ще нескінченна множина інтегральних кривих рівняння з іншим нахилом дотичної в цій точці.

11. Поняття про загальний і частинний розв'язки рівняння (17)

Нехай в кожній точці деякої області зміни змінних має місце існування і єдиність розв'язку задачі Коші, наприклад, виконуються умови теореми Коші.

Функція

$$y = \varphi\ (x, C_1, C_2, \dots, C_n), \tag{20}$$

що визначена в деякій області зміни змінних і має неперервні частинні похідні за x до порядку n включно, називається загальним розв'язком рівняння (17) *в області , якщо :*

1) систему рівнянь

$$\left.\begin{array}{l} y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y' = \varphi'(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad .. \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{array}\right\} \tag{21}$$

в області D *можна розв'язати відносно довільних сталих так, що ми маємо*

$$C_i = \psi_i(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})\ , \tag{22}$$

2) функція (20) *є розв'язком рівняння* (17) *при всіх значеннях довільних сталих* $C_1, C_2, \dots, C_n$ *, які задаються формулами* (22)*, коли точка*

$$(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \in D.$$

Загальний розв'язок (20) містить в собі всі розв'язки рівняння (17) з початковими даними з області .

Загальний розв'язок (20)*, записаний в неявному вигляді*

$$\Phi\, (x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

називається загальним інтегралом цього рівняння.

Розв'язок рівняння (17) *називається частинним, якщо в кожній точці зберігається єдиність розв'язку задачі Коші.*

Кожен розв'язок, що одержується із загального розв'язку (17) при допустимих числових значеннях довільних сталих, є *частинним розв'язком*.

12. Диференціальні рівняння другого порядку. Серед диференціальних рівнянь вищих порядків важливе місце займають ДР другого порядку, які в загальній формі мають вигляд :

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{23}$$

Геометричний зміст рівняння другого порядку та його розв'язків.

Рівняння (23) завжди можна записати у вигляді :

$$F(x, y, y', \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}(1+(y')^2)^{3/2}) = 0, \tag{24}$$

де $\dfrac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$ – кривизна кривої $y = y(x)$ в точці (x, y).

З рівняння (24) витікає, що *диференціальне рівняння другого порядку в кожній точці інтегральної кривої виражає залежність між координатами точки, нахилом дотичної до інтегральної кривої і кривизною кривої в цій точці.*

13. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку

Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку.

Одним із методів інтегрування диференціальних рівнянь другого порядку є заміна змінної, за допомогою якої диференціальне рівняння другого порядку зводиться до диференціального рівняння першого порядку. Таке перетворення диференціального рівняння називається зниженням порядку.

Випадок І. *Рівняння виду* $y'' = f(x)$, *яке не містить в явному вигляді шуканої функції* y *та її похідної* y', *шляхом заміни* $y' = z(x)$, *при цьому* $y'' = z'(x)$, *перетворюється в рівняння першого порядку* $z'(x) = f(x)$ *з шуканою функцією* $z(x)$. Проінтегрувавши його, знаходимо :

$z(x) = \int f(x)dx + C_1$. Оскільки $z(x) = y'$, то $y' = \int f(x)dx + C_1$.

Звідси $y = \int (\int f(x)dx)dx + C_1x + C_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Випадок ІІ. $F(x, y', y'') = 0$ ($y'' = f(x, y')$) .

Рівняння не містить в явному вигляді шуканої функції y. *Зниження порядку досягається шляхом заміни змінної, як і у випадку І, тобто* $z(x) = y'$. Тоді $z' = y''$ і рівняння переходить в рівняння першого порядку відносно $z(x)$: $F(x, z, z') = 0$ ($z' = f(x, z)$). Розв’язуючи його, знаходимо:

$z=\varphi(x,C_1)$. Повертаючись до підстановки $z(x)=y'$, одержимо: $y'=\varphi(x,C_1)$. Проінтегрувавши яке, маємо шуканий розв’язок :

$$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Випадок III. $F(y,y',y'')=0$, $(y''=f(y,y'))$. *Рівняння не містить в явному вигляді незалежну змінну.* Зниження порядку в цьому випадку досягається шляхом заміни $z(y)=y'$.

Слід звернути увагу, що нова невідома функція z є функцією старої невідомої функції y. Тому

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z'\cdot z.$$

Підставляючи в рівняння вирази для y і y', маємо рівняння 1-го порядку відносно z, як функції y:

$$F(y,z,z'\cdot z)=0\quad(z'\cdot z=f(y,z)).$$

Розв’язуючи його, одержимо $z=\varphi(y,C_1)$. Оскільки $z=dy/dx$, то $dy/dx=\varphi(y,C_1)$. Це ДР з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні, маємо $dy/\varphi(y,C_1)=dx$.

Звідси

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2,$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку

Покажемо, що підстановки попереднього пункту можна застосувати до рівнянь, порядок яких $n>2$.

1. *Рівняння типу*

$$y^{(n)} = f(x), \tag{25}$$

де f(x) - функція неперервна в інтервалі (a,b), розв'язується послідовним інтегруванням, оскільки кожне інтегрування знижує порядок рівняння на одиницю. Дійсно, оскільки $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, то рівняння (25) можна переписати у вигляді

$$(y^{(n-1)})' = f(x). \tag{26}$$

Звідси

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 . \tag{27}$$

Вчинимо з рівнянням (27) так само, як з рівнянням (26), будемо мати

$$y^{(n-2)} = \iint f(x)dxdx + C_1 x + C_2 .$$

Потім знайдемо

$$y^{(n-3)} = \iiint f(x)dxdxdx + C_1 x^2/2 + C_2 x + C_3,$$

$$. \; . \; . \qquad . \; . \; . \qquad . \; . \; .$$

$$y' = \iint \ldots \int f(x)dxdx \ldots dx + C_1 x^{n-2}/(n-2)! + C_2 x^{n-3}/(n-3)! + \ldots + C_{n-1} .$$

Нарешті, одержимо

$$y = \iint \ldots \int f(x)dxdx \ldots dx + C_1 x^{n-1}/(n-1)! + C_2 x^{n-2}/(n-2)! + \ldots + C_{n-1}x + C_n .$$

Це загальний розв'язок рівняння (25) в області D:

$$a < x < b, \; |y| < +\infty, \; |y'| < +\infty, \; \ldots, \; |y^{(n-1)}| < +\infty .$$

2. *Рівняння вигляду*

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \qquad (28)$$

зводиться до ДР 1-го порядку

$$F(z, z') = 0, \qquad (29)$$

якщо зробити заміну $z = y^{(n-1)}$.

а) Припустимо, що рівняння (29) розв'язується відносно z', тоді матимемо $\dfrac{dz}{dx} = \varphi(z)$, звідси знаходимо

$$\int \frac{dz}{\varphi(z)} = x + C_1 \quad , \qquad (30)$$

і якщо з (30) знайдемо z, то дістанемо

$$z = \phi(x, C_1) \qquad \text{або} \qquad y^{(n-1)} = \phi(x, C_1),$$

тобто рівняння типу 1.

Якщо (30) не розв'язується відносно z, то розглядаємо z як параметр. Тоді

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx = z dx = \frac{z dz}{\varphi(z)}.$$

Звідси

$$y^{(n-2)} = \int \frac{z dz}{\varphi(z)} + C_2 = \phi(z) + C_2 .$$

Тепер послідовно знаходимо $y^{(n-3)}$ і т. д.

б) Якщо (29) розв'язується в елементарних функціях відносно *z*, тобто $z=\varphi(z')$, то покладемо $z'=\theta$ і дістанемо $z=\varphi(\theta)$. З однієї сторони $dz=\theta dx$, а з іншої $dz=\varphi'(\theta)d\theta$, звідси

$$dx=\frac{\varphi'(\theta)}{\theta}d\theta \quad , \quad C_1+x=\int\frac{\varphi'(\theta)}{\theta}d\theta \qquad (31)$$

Якщо можливо, то знаходимо $\theta=\phi(x,C_1)$ і $z=\varphi(\theta)=\phi_1(x,C_1)$. Знову приходимо до рівняння типу 1.

Якщо з рівняння (31) не можна знайти θ, то дістаємо розв'язок рівняння в параметричній формі:

$$dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx=z\frac{\varphi'(\theta)}{\theta}d\theta=\varphi(\theta)\varphi'(\theta)\frac{d\theta}{\theta}.$$

Рівняння, які не містять в явному вигляді незалежну змінну, тобто рівняння вигляду $F(y,y',...,y^{(n)})=0$, *допускають зниження порядку на одиницю, якщо за незалежну змінну взяти функцію y, а за нову шукану функцію взяти* $z(y)=y'(x)$.

Дійсно, застосовуючи правило диференціювання складеної функції, одержимо:

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}z\ ,$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy}z\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}z\right)\frac{dy}{dx}=\left(\frac{d^2z}{dy^2}z+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)z \text{ і т. д.}$$

Нарешті одержимо

$$y^{(n)}=\omega\left(z,\frac{dz}{dy},...,\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)\ .$$

Тобто, кожна похідна від y за x порядку m $(1 \le m \le n)$ виражається через похідні від z за y порядку не вище $m-1$. Підставляючи їх значення в дане рівняння, одержимо відносно нової шуканої функції z ДР порядку $n-1$:

$$F_1(y, z, dz/dy, ..., d^{(n-1)}z/dy^{(n-1)}) = 0.$$

Якщо це рівняння зінтегрувати і $\Phi(y, z, C_1, C_2, ...C_{n-1}) = 0$ – сукупність його розв'язків, то для одержання розв'язку даного ДР залишається розв'язати ДР 1-го порядку $\Phi(y, y', C_1, C_2, ...C_{n-1}) = 0$.

14. Лінійні диференціальні рівняння n-ого порядку

Загальні поняття. Якщо рівняння *n*-го порядку $F(x, y, y', ...y^{(n)}) = 0$ лінійно залежить від шуканої функції $y(x)$ та її похідних $y', y'', ...y^{(n)}$, то воно називається лінійним.

Отже, диференціальне рівняння вигляду

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

називається лінійним диференціальним рівнянням *n-го* порядку. Вважається, що $a_0(x) \ne 0$.

Функції $a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ називаються коефіцієнтами рівняння.

Для тих x, де $a_0(x) \ne 0$ рівняння зводиться до еквівалентного шляхом ділення на $a_0(x)$, тоді отримаємо:

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + ... + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = g(x) . \qquad (32)$$

Вважаємо, що коефіцієнти $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$, а також права частина рівняння $g(x)$ неперервні на інтервалі *(a, b)*. Тоді в деякій області

$$\{a < x < b, -\infty < y < +\infty,\ -\infty < y' < +\infty ...,\ -\infty < y^{(n-1)} < +\infty \ \}$$

рівняння (32) задовольняє умови теореми Коші. Дійсно, рівняння (32) перепишемо у вигляді

$$y^{(n)} = g(x) - P_1(x) y^{(n-1)} - ... - P_{n-1}(x) y' - P_n(x) y.$$

Права частина рівняння – неперервна функція, частинні похідні:

$$\frac{df}{dy} = -P_n(x),\ \ \frac{df}{dy'} = -P_{n-1}(x),\ \dots,\ \ \frac{df}{dy^{(n-1)}} = -P_1(x)$$

теж неперервні функції. Отже, задовольняються умови теореми Коші і в точках x інтервалу $a < x < b$ існує єдиний розв'язок, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0{}',\ ...,\ \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0{}^{(n-1)}.$$

Якщо права частина рівняння (32) $g(x) \neq 0$, то воно називається лінійним неоднорідним рівнянням (або лінійним рівнянням з правою частиною).

Якщо $g(x) \equiv 0$, то рівняння (32) називається лінійним однорідним рівнянням (або лінійним рівнянням без правої частини).

Як вже відмічалось, лінійні диференціальні рівняння можуть бути математичними моделями різних за природою явищ і процесів механіки, електротехніки, біології і т. п. Отже, постійний інтерес практики з однієї сторони, особливості лінійних рівнянь, які дозволяють заглибитись в теорію, з іншої, спонукали розвиток теорії лінійних диференціальних рівнянь, і вони є найбільш розробленим типом диференціальних рівнянь.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0 \; . \qquad (33)$$

Нехай його коефіцієнти – неперервні функції при $a < x < b$.

Властивості розв’язків лінійного однорідного рівняння.

Для зручності розгляду теорії лінійних диференціальних рівнянь ліву частину рівняння (33) позначимо через *L(y),* тобто

$$L(y) = y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y \; . \qquad (34)$$

Отже, *L(y)* – результат застосування до функції *y(x)* сукупності операцій, які здійснюються в лівій частині рівняння (33), а саме, диференціювання, множення на функції $P_1(x),\ldots,P_n(x)$, додавання.

Вираз *L(y)* називається лінійним диференціальним оператором від функції *y(x)*.

Структура загального розв’язку лінійного однорідного диференціального рівняння

Розглянемо принципове питання теорії лінійних однорідних диференціальних рівнянь – побудову загального розв’язку.

Має місце основна **теорема про структуру загального розв’язку лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку.**

Теорема. Якщо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ система n лінійно незалежних розв'язків рівняння (2), то їх лінійна комбінація

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{35}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі, є загальним розв'язком даного рівняння.

Доведення базується на понятті загального розв'язку. Тобто, треба довести, що (35) задовольняє рівняння (33) при довільних $C_1, C_2, \ldots, C_n$ і що заданим початковим умовам завжди можна знайти відповідні значення сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, тобто (35) може описати довільний частинний розв'язок.

Покажемо, що за довільно заданими початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_{01}, \quad y''(x_0) = y_{02}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,\,n-1},$$

можна знайти єдину множину сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Використаємо першу початкову умову

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0.$$

Продиференціюємо (35) і задовольняємо другу початкову умову

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_{01},$$

і так далі, задовольняємо $(n-1)$ умову

$$C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{0,\,n-1}.$$

Одержимо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $C_1,\ C_2,\ldots,C_n$

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0.$$

$$C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_{01},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{0,\,n-1}.$$

Детермінант цієї системи (вронскіан) не дорівнює нулеві, тому що $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ лінійно незалежні функції. А така система має єдиний розв'язок відносно $C_1,\ C_2,\ldots,C_n$. Отже, вираз (35) є загальним розв'язком рівняння (33).

Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Якщо коефіцієнти $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ рівняння (33) сталі, то воно називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Його можна записати таким чином

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (36)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – сталі.

Із структури рівняння (36) витікає, що розв'язком може бути функція, похідні якої є подібними (в алгебраїчному розумінні) функціями.

Наприклад, $y = ae^{bx}$, $y = asinbx$.

Отже, розв'язок рівняння (36) шукаємо у вигляді $y = e^{rx}$. Знаходимо похідні $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$ … $y^{(n)} = r^n e^{rx}$. Зробимо підстановку у рівняння (36).

$$r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \ldots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx} = 0.$$

Виносимо e^{rx} за дужки

$$e^{rx}(r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n) = 0.$$

Оскільки $e^{rx} \neq 0$, то

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0. \qquad (37)$$

Отже, функція $y = e^{rx}$ буде розв’язком рівняння (36) в тому випадку, коли коефіцієнт r задовольняє рівняння (36).

Рівняння (37) називається характеристичним рівнянням диференціального рівняння (36).

Нехай **корені характеристичного рівняння дійсні різні.**

Розглянемо випадок рівнянь другого порядку

$$y'' + a_1 y'' + a_2 y = 0.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

Якщо його корені r_1 і r_2 дійсні різні, то можна записати два різні розв'язки $y_1 = e^{r_1 x}$ i $y_2 = e^{r_2 x}$. Доведемо, що вони утворюють фундаментальну систему.

$$W[e^{r_1 x}, e^{r_2 x}] = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_2 + r_1)x} \neq 0.$$

Отже, загальний розв’язок даного рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \qquad (38)$$

Розглянемо випадок, коли серед **коренів характеристичного рівняння є кратні корені.**

Знову розглянемо диференціальне рівняння другого порядку і нехай $r_1 = r_2 = r$. Тоді одержуємо один частинний розв'язок $y_1 = e^{rx}$. Знайдемо другий розв'язок.

При $y_1 = e^{rx},\ p_1(x) = -2r$.

Тоді,

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = W(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} 2r dx}, \quad e^{rx} y_2' - y_2 y_1' = W(x_0) e^{2r(x-x_0)}.$$

Розділимо ліву і праву частини на e^{2rx}, $(e^{rx} y_2' - y_2 r e^{rx}) / e^{2rx} = C$, де $C = W(x_0)$. Тоді в лівій частині одержимо похідну дробу $\left(y_2 / e^{rx}\right)' = C$. Зінтегрувавши цей вираз, отримаємо $y_2 = \left(Cx + C_1\right)e^{rx}$. Вибираємо найпростіший випадок $C = 1, C_1 = 0$. Отже, $y_2 = xe^{rx}$.

Фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння другого порядку у випадку кратних коренів характеристичного рівняння має вигляд

$$y_1 = e^{rx}, y_2 = e^{rx}.$$

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

у випадку, коли $r_1 = r_2$, має вигляд

$$y = \left(C_1 x + C_2\right)e^{rx}. \qquad (39)$$

Розглянемо випадок, коли **серед коренів характеристичного рівняння є комплексні.** Спочатку побудуємо загальний розв'язок для рівняння другого порядку. Коефіцієнти a_1 і a_2 характеристичного рівняння $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ дійсні числа.

В курсі вищої алгебри доводиться, що в рівнянні з дійсними коефіцієнтами комплексні корені завжди спряжені, тобто, коли $\alpha+\beta i-$ корінь рівняння, то комплексне число $\alpha-\beta i$ теж є коренем рівняння тієї ж кратності, що і $\alpha+\beta i$.

Отже, комплексними коренями квадратного рівняння будуть числа

$$r_1=\alpha+\beta i\,,\ \ r_2=\alpha-\beta i\,.$$

Тоді розв'язками диференціального рівняння $y''+a_1y'+a_2y=0$ будуть функції $\widetilde{y}_1=e^{(\alpha+\beta_i)x}$, $\widetilde{y}_2=e^{(\alpha-\beta_i)x}$. Скориставшись формулою Ейлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, функції $\widetilde{y}_1$ і $\widetilde{y}_2$ подамо у вигляді:

$$\widetilde{y}_1=e^{\alpha x}\left(\cos\beta x+i\sin\beta x\right),\quad \widetilde{y}_2=e^{\alpha x}\left(\cos\beta x-i\sin\beta x\right).$$

Комплекснозначні функції $\widetilde{y}_1$ і $\widetilde{y}_2$ дійсної змінної x можна записати у вигляді суми дійсної частини $U(x)$ та уявної частини $V(x)$

$$U(x)\ +\ iV(x).$$

Отже, функції

$$\widetilde{y}_{11}=e^{\alpha x}\cos\beta x\,,\ \ \widetilde{y}_{12}=e^{\alpha x}\sin\beta x\,,\ \ \widetilde{y}_{21}=e^{\alpha x}\cos\beta x\,,$$

$$\widetilde{y}_{22}=-e^{\alpha x}\sin\beta x$$

є частинними розв'язками заданого диференціального рівняння другого порядку.

Серед цих чотирьох розв'язків лінійно незалежними є такі пари: $\widetilde{y}_{11}$ і $\widetilde{y}_{12}$, $\widetilde{y}_{21}$ і $\widetilde{y}_{22}$, $\widetilde{y}_{11}$ і $\widetilde{y}_{22}$. Доведемо лінійну незалежність, наприклад, розв'язків $\widetilde{y}_{11}$ і $\widetilde{y}_{12}$.

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix}=\beta e^{\alpha x}\neq 0,$$

тому що $\beta \neq 0$.

Отже, фундаментальною системою розв'язків рівняння $y''+a_1y'+a_2y=0$ у випадку комплексних коренів є функції

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x .$$

Тоді загальний розв'язок рівняння матиме вигляд

$$y = e^{ax}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x). \tag{40}$$

15. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР)

Структура загального розв'язку. Як уже відмічалось, лінійним неоднорідним ДР n–го порядку називається рівняння вигляду:

$$L(y)\equiv y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x) \ . \tag{41}$$

Якщо функція $f(x)$, яка називається вільним членом, відмінна від тотожного нуля в інтервалі $(a\,;b)$.

Якщо коефіцієнти рівняння $L(z)=0$ ті, що і рівняння $L(y)=f(x)$, то однорідне рівняння $L(z)=0$ називається відповідним даному неоднорідному рівнянню.

Неперервність функцій, які є коефіцієнтами рівняння (41) $p_k(x)\ (k=\overline{1,n})$ і вільного члена $f(x)$ на інтервалі $(a\,;b)$ забезпечує існування та єдиність розв'язку задачі Коші з довільними числами

$y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ при кожному $x_0 \in (a;b)$.

Розглянемо теорему про структуру загального розв'язку ЛНДР.

Теорема. Якщо $\overline{y}$ – це який-небудь частинний розв'язок рівняння (41) і якщо

$$z = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) + ... + C_n z_n(x)$$

є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння $L(z) = 0$, то загальний розв'язок ЛНДР (41) дорівнює сумі частинного розв'язку неоднорідного рівняння і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння:

$$y = \overline{y} + z \tag{42}$$

або

$$y = \overline{y} + C_1 z_1 + C_2 z_2 + ... + C_n z_n .$$

Принцип суперпозиції

Суть принципу суперпозиції розв'язків розкриває така теорема.

Теорема. Якщо y_1 і y_2 – частинні розв'язки рівняння $L(y) = f_1(x)$ і $L(y) = f_2(x)$ в області D, то $y_1 + y_2$ – частинний розв'язок рівняння $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$ в тій же області.

Доведення випливає із відношень: $L(y_1) = f_1(x)$, $L(y_2) = f_2(x)$ і властивості адитивності оператора L:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = f_1(x) + f_2(x).$$

Метод варіацій довільних сталих (метод Лагранжа) для ЛНДР 2-го порядку

Нехай дано ЛНДР 2-го порядку

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{43}$$

де коефіцієнти $p(x)$, $q(x)$ і права частина $f(x)$ є функціями від x, неперервними в деякому інтервалі $(a;b)$.

Розглянемо відповідне йому ЛОДР

$$z'' + p(x)z' + q(x)z = 0 \ , \tag{44}$$

якщо z_1, z_2– фундаментальна система розв'язків рівняння (44), то, як відомо, його загальний розв'язок має вигляд

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2, \tag{45}$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Суть ідеї Лагранжа полягає в тому, що розв'язок ЛНДР (43) шукаємо в тому ж вигляді, що і загальний розв'язок відповідного ЛОДР (44), тобто у формі

$$y = C_1(x) z_1 + C_2(x) z_2, \tag{46}$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$— деякі диференційовані функції змінної x, які належить знайти.

Покажемо, що дані функції можуть бути знайдені за допомогою квадратур.

Диференціюванням обох частин рівності (46), яка є розв'язком рівняння (43), маємо:

$$y' = C_1'(x) z_1 + C_2'(x) z_2 + C_1(x) z_1' + C_2(x) z_2'. \tag{47}$$

Нам потрібно визначити дві функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$, тому одне із співвідношень між ними можна взяти довільним. Для того, щоб при обчисленні y'' не з'явилися похідні другого порядку від функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$, приймемо

$$C_1'(x)z_1 + C_2'(x) = 0.$$

Тоді (47) матиме вигляд

$$y' = C_1(x)z_1' + C_2(x)z_2'.$$

Диференціюючи це рівняння, дістанемо

$$y'' = C_1(x)z_1'' + C_2(x)z_2'' + C_1'(x)z_1' + C_2'(x)z_2'.$$

Підставляючи значення y, y', y'' дістанемо тотожність

$$C_1(x)(z_1'' + p(x)z_1' + q(x)z_1) + C_2(x)(z_2'' + p(x)z_2' + q(x)z_2) +$$
$$+(C_1'(x)z_1' + C_2'(x)z_2') = f(x)$$

Оскільки z_1 і z_2 є розв'язками рівняння (44), то вирази, що стоять у перших двох парах дужок у лівій частині цієї рівності, тотожно дорівнюють нулю, звідси

$$C_1'(x)z_1 + C_2'(x)z_2 = f(x).$$

Таким чином для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ ми одержали систему диференціальних рівнянь (СДР):

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)z_1 + C_2'(x)z_2 &= 0 \\ C_1'(x)z_1' + C_2'(x)z_2' &= f(x) \end{aligned}\right\}. \tag{48}$$

Оскільки визначник цієї системи є вронскіаном $W(x)$ фундаментальної системи розв'язків z_1 і z_2, то

$$W(x) = z_1 z_2' - z_2 z_1' \neq 0$$

і система (48) має єдиний розв'язок

$$C_1'(x) = -\frac{f(x) z_2}{W(x)} \quad \text{і} \quad C_2'(x) = \frac{f(x) z_1}{W(x)}, \tag{49}$$

які є ДР з відокремлюваними змінними. Зінтегрувавши їх, одержуємо шукані функції у вигляді квадратур.

$$C_1(x) = -\int \frac{f(x) z_2}{W(x)} dx + \overline{C}_1 \ ; \ C_2(x) = \int \frac{f(x) z_1}{W(x)} dx + \overline{C}_2 \,. \tag{50}$$

Якщо в рівностях (50) взяти $\overline{C}_1 = \overline{C}_2 = 0$, то при відповідних значеннях $C_1(x)$ і $C_2(x)$ рівність (46) дає частинний розв'язок рівняння (43), а при $\overline{C}_1 \neq 0$, $\overline{C}_2 \neq 0$ і підстановці (50) в (46) одержимо загальний розв'язок рівняння (43).

ЛНДР зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною. Метод невизначених коефіцієнтів

Метод варіації довільних сталих потребує знаходження квадратур, що часто призводить до складних обчислень. Тому в тих випадках, коли частинний розв'язок неоднорідного рівняння вдається знайти значно легше, цей метод не застосовують. Зокрема, для ЛНДР зі сталими коефіцієнтами

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{51}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – дійсні числа, а права частина $f(x)$ має спеціальний вигляд

$$f(x)=\left(P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x\right)e^{\alpha x}, \tag{52}$$

тут $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – задані многочлени відповідно степеня m і n, $\alpha,\beta\in R$, частинний розв'язок можна побудувати алгебраїчним шляхом (метод невизначених коефіцієнтів).

Нагадаємо, що загальний розв'язок ЛНДР (зокрема і для (51)) дорівнює сумі довільного частинного розв'язку цього рівняння ($\bar{y}$) і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (z), тобто

$$y=\bar{y}+z.$$

Відповідне однорідне рівняння для (51) записуємо у вигляді

$$z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}z^1+a_nz=0. \tag{53}$$

Структура загального розв'язку ЛОДР залежить від коренів характеристичного рівняння

$$R(k)=k^n+a_nk^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0. \tag{54}$$

Вигляд частинного розв'язку $\bar{y}$ залежить від того, чи є число $\alpha+i\beta$ коренем характеристичного рівняння (54) і для функції (52) набуває вигляду

$$\bar{y}=x^r(M_s(x)\cos\beta x+N_s(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}, \tag{55}$$

де $M_s(x)$, $N_s(x)$ – многочлени степеня $s=\max(m,n)$ з невизначиними коефіцієнтами, які визначаються із системи рівнянь, що одержуються в результаті підстановки (55) в рівняння (51), скороченням обох частин на $e^{\alpha x}$, прирівнювання многочленів при $\cos\beta x$ і $\sin\beta x$, і після цього коефіцієнтів при x з однаковими степенями; r – число коренів характеристичного рівняння (54), які дорівнюють $\alpha + i\beta$.

Зауважимо, що випадок, коли корінь $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння, носить назву "резонансу", якщо $\alpha + i\beta$ не є коренем рівняння (54), носить назву "нерезонансу".

Тестові завдання з дисципліни «Вища математика»

Тема: «Диференціальні рівняння»

1. Розв'язком якого з рівнянь $y' = \dfrac{x+3}{y+5}$ **або** $y' = \dfrac{y+5}{x+3}$ **є функція** $y = 5x/3$ **?**

A. $y' = \dfrac{x+3}{y+5}$.

B. $y' = \dfrac{y+5}{x+3}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

2. Розв'язком якого з рівнянь $y' = \dfrac{tg\, x}{y^2}$ **або** $y' = y\, ctg\, x$ **є функція** $y = \sin^2 x$ **?**

A. $y' = \dfrac{tg\, x}{y^2}$.

B. $y' = y\, ctg\, x$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

3. Розв'язком якого з рівнянь $y' = xy$ **або** $y' = xy^2$ **є функція** $y = 5e^{x^2/2}$ **?**

A. $y' = xy$.

B. $y' = xy^2$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

4. Розв'язком якого з рівнянь $y' = \frac{\sin^2 x}{y^2}$ **або** $y' = \frac{\sin x}{y}$ **є функція** $y = -2\cos(x/2)$ **?**

A. $y' = \frac{\sin^2 x}{y^2}$.

B. $y' = \frac{\sin x}{y}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

5. Розв'язком якого з рівнянь $y' = \frac{tg\, x}{y}$ **або** $y' = \frac{\sin x}{xy}$ **є функція** $y = x \sin x$ **?**

A. $y' = \frac{tg\, x}{y}$.

B. $y' = \frac{\sin x}{xy}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

6. Розв'язком якого з рівнянь $y' = \frac{y}{\sin x}$ **або** $y' = \frac{y^2}{\cos x}$ **є функція** $y = tg(x/2)$ **?**

A. $y' = \frac{y}{\sin x}$.

B. $y' = \frac{y^2}{\cos x}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

7. Розв'язком якого з рівнянь $y' = \frac{y^2}{x^2}$ **або** $y' = \frac{y^2}{x^3}$ **є функція** $y = \frac{x}{x+1}$ **?**

A. $y' = \frac{y^2}{x^3}$.

B. $y' = \frac{y^2}{x^2}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

8. Розв'язком якого з рівнянь $y' = \frac{yx + 4y^2}{x^2}$ **або** $y' = \frac{xy + 4y^2}{x^3}$ **є функція** $y = -\frac{x}{4\ln x}$ **?**

A. $y' = \frac{yx + 4y^2}{x^2}$.

B. $y' = \frac{xy + 4y^2}{x^3}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

9. Розв'язком якого з рівнянь $y' = \frac{y^2 + x^2}{xy}$ **або** $y' = \frac{y^2 + xy}{xy}$ **є функція** $y = x\sqrt{2\ln x}$ **?**

A. $y' = \frac{y^2 + x^2}{xy}$.

B. $y' = \frac{y^2 + xy}{xy}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

10. Розв'язком якого з рівнянь $y' = \dfrac{y^2 + 3x^2}{xy}$ **або** $y' = \dfrac{y^3 + x^3}{xy^2}$ **є функція** $y = x\sqrt{6\ln x}$ **?**

A. $y' = \dfrac{y^3 + x^3}{xy^2}$.

B. $y' = \dfrac{y^2 + 3x^2}{xy}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

11. Розв'язком якого з рівнянь $y' = \dfrac{yx + 2y^2}{x}$ **або** $y' = \dfrac{x^3 + xy^2}{x^2 y}$ **є функція** $y = \dfrac{x}{\ln x}$ **?**

A. $y' = \dfrac{yx + 2y^2}{x}$.

B. $y' = \dfrac{x^3 + xy^2}{x^2 y}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

12. Розв'язком якого з рівнянь $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$ **або** $y' - \dfrac{y}{x} = x$ **є функція** $y = x^2$ **?**

A. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$.

B. $y' - \dfrac{y}{x} = x$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

13. Розв'язком якого з рівнянь $y' - y\,tg\,x = 1$ **або** $y' - y\,tg\,x = x^2$ **є функція** $y = tg\,x$ **?**

A. $y' - y\,tg\,x = 1$.

B. $y' - y\,tg\,x = x^2$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

14. Розв'язком якого з рівнянь $y' + y\,ctg\,x = 1$ **або** $y' - y\cos x = x$ **є функція** $y = x\cos x$ **?**

A. $y' + y\,ctg\,x = 1$.

B. $y' - y\cos x = x$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

15. Розв'язком якого з рівнянь $y' - \frac{y}{x} = 2x^2$ **або** $y' - \frac{5y}{x} = -2x^2$ **є функція** $y = x^3$ **?**

A. $y' - \frac{y}{x} = 2x^2$.

B. $y' - \frac{5y}{x} = -2x^2$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

16. Розв'язком якого з рівнянь $y' - y\,ctg\,x = \frac{1}{\sin x}$ **або** $y' - y\,ctg\,x = \frac{x}{\sin x}$ **є функція** $y = -\cos x$ **?**

A. $y' - y\,ctg\,x = \frac{1}{\sin x}$.

B. $y' - y\,ctg\,x = \frac{x}{\sin x}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

17. Розв'язком якого з рівнянь $y' + y\,ctg\,x = \cos x$ **або** $y' - y\,ctg\,x = \sin x$ **є функція** $y = \cos^2 x$ **?**

A. $y' + y\,ctg\,x = \cos x$.

B. $y' - y\,ctg\,x = \sin x$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

18. Розв'язком якого з рівнянь $y' - y\,ctg\,x = \frac{tg\,x}{y}$ **або** $y' - yctg\,x = \frac{\cos x}{y^2}$ **є функція** $y = ctg\,x$ **?**

A. $y' - y\,ctg\,x = \frac{tg\,x}{y}$.

B. $y' - yctg\,x = \frac{\cos x}{y^2}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

19. Розв'язком якого з рівнянь $y' - y\,ctgx = \frac{tg^3 x}{y}$ **або** $y' - y\,ctgx = \frac{tg\,x}{y^2}$ **є функція** $y = tgx$ **?**

A. $y' - y\,ctgx = \frac{tg^3 x}{y}$.

B. $y' - y\,ctgx = \frac{tg\,x}{y^2}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

20. Розв'язком якого з рівнянь $y' + \frac{y}{x} = 3x$ **або** $y' - \frac{y}{x} = \frac{x^3}{y}$ **є функція** $y = x^2$ **?**

A. $y' + \frac{y}{x} = 3x$.

B. $y' - \frac{y}{x} = \frac{x^3}{y}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

21. Функція $y = -ctg\, x$ **є розв'язком якого з рівнянь** $y' + y\, tg\, x = \frac{ctg^4 x}{y^2}$ **або** $y' + y\, tg\, x = \frac{ctg\, x}{y^2}$ **?**

A. $y' + y\, tg\, x = \frac{ctg^4 x}{y^2}$.

B. $y' + y\, tg\, x = \frac{ctg\, x}{y^2}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

22. Розв'язком якого з рівнянь $y' + \frac{2y}{x} = \frac{x^7}{y^2}$ **або** $y' + \frac{2y}{x} = \frac{5x^8}{y^2}$ **є функція** $y = x^3$ **?**

A. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{x^7}{y^2}$.

B. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{5x^8}{y^2}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

23. Розв'язком якого з рівнянь $y' + y\,tg\,x = y\sin^2 x$ **або** $y' - y\,tg\,x = \dfrac{\cos^2 x}{y}$ **є функція** $y = ctg^2 x$ **?**

A. $y' + y\,tg\,x = y\sin^2 x$.

B. $y' - y\,tg\,x = \dfrac{\cos^2 x}{y}$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

24. Розв'язком якого з рівнянь $y'' = 2yy'$ **або** $y'' = y^2 y'$ **є функція** $y = tg\,x$ **?**

A. $y'' = 2yy'$.

B. $y'' = y^2 y'$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

25. Розв'язком якого з рівнянь $yy'' + (y')^2 = 0$ **або** $y'y'' + y = 0$ **є функція** $y = \sqrt{x}$ **?**

A. $yy'' + (y')^2 = 0$.

B. $y'y'' + y = 0$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

26. Яким є загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = (y')^2 / (4 + y)$ **?**

A. $y = C_2 e^{C_1 x} + x$.

B. $y = C_2 e^{C_1 x} - 4x$.

C. $y = C_2 e^{C_1 x} - x$.

D. $y = C_2 e^{C_1 x} - 4$.

27. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y'' = \dfrac{y'}{x}$ **або** $y'' = \dfrac{2y'}{x^2}$ **є функція** $y = C_1 x^2 + C_2$**?**

A. $y'' = \dfrac{y'}{x}$.

B. $y'' = \dfrac{2y'}{x^2}$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

28. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y'' = y' \, tg\, x$ **або** $y'' = y' \, ctg\, x$ **є функція** $y = C_2 + C_1 \cos x$ **?**

A. $y'' = y' \, tg\, x$.

B. $y'' = y' \, ctg\, x$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

29. Яким є загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = 3\sin 2x$ **?**

A. $y = \dfrac{3}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$.

B. $y = -\dfrac{3}{4}\sin 2x + C_1 x^2 + C_2 x$.

C. $y = -\dfrac{3}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$.

D. $y=\frac{3}{4}\sin 2x+C_1x^2+C_2x$.

30. Яким є загальний розв'язок диференціального рівняння $y''=(y')^2/y$?

A. $y=C_2e^{C_1x}$.

B. $y=C_2e^{C_1x^2}$.

C. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x^2}$.

D. $y=C_2e^{C_1x}-x$.

31. Яким є загальний розв'язок диференціального рівняння $y''=20x^3$?

A. $y=x^5+C_1x+C_2$.

B. $y=x^5+C_1x^2+C_2$.

C. $y=x^5+C_1x^3+C_2x$.

D. $y=x^5+C_1x^3+C_2x^2$.

32. Яким є загальний розв'язок диференціального рівняння $y''+2y'/x=3$?

A. $y=x^3-C_1/x+C_2$.

B. $y=-3x^2/2+C_1x^2+C_2$.

C. $y=x^2/2-C_1/x+C_2$.

D. $y=x^3/2-C_1/x+C_2$.

33. Яке рівняння називається характеристичним для лінійного однорідного диференціального рівняння $y''+py'+qy=0$ зі сталими коефіцієнтами?

A. $k^3 + pk^2 + qk + 1 = 0$.

B. $k^2 + pk + q = 0$.

C. $k^2 - pk + q = 0$.

D. $k^2 + pk + 1 = 0$.

34. Як формується загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЛНДР) другого порядку?

A. Загальний розв'язок ЛНДР дорівнює $y = \bar{y} + y_*$, де $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння; y_* – довільний частинний розв'язок ЛНДР.

B. Загальний розв'язок ЛНДР збігається із загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння $y = \bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

C. Загальний розв'язок ЛНДР збігається із деяким частинним розв'язком цього рівняння $y = y_*$.

D. Загальний розв'язок ЛНДР дорівнює $y = \bar{y} \cdot y_*$

35. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y'' - 7y' + 12y = 0$ **або** $y'' - 8y' + 15y = 0$ **є функція** $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}$ **?**

A. $y'' - 7y' + 12y = 0$.

B. $y'' - 8y' + 15y = 0$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

36. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y'' + 6y' - 7y = 0$ **або** $y'' - 4y' + 4y = 0$ **є функція** $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$ **?**

A. $y'' + 6y' - 7y = 0$.

B. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

37. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y''-7y'-8y=0$ **або** $y''-10y'+21y=0$ **є функція** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{7x}$ **?**

A. $y''-7y'-8y=0$.

B. $y''-10y'+21y=0$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

38. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y''-7y'+6y=0$ **або** $y''-7y'+12y=0$ **є функція** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$ **?**

A. $y''-7y'+6y=0$.

B. $y''-7y'+12y=0$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

39. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y''-8y'+12y=0$ **або** $y''-8y'+16y=0$ **є функція** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{6x}$ **?**

A. $y''-8y'+12y=0$.

B. $y''-8y'+16y=0$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

40. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y''-4y'+4y=0$ **або** $y''-4y'+3y=0$ **є функція** $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$ **?**

A. $y''-4y'+4y=0$.

B. $y'' - 4y' + 3y = 0$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

41. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y'' + 6y' + 9y = 0$ **або** $y'' - 4y' - 12y = 0$ **є функція** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$ **?**

A. $y'' + 6y' + 9y = 0$.

B. $y'' - 4y' - 12y = 0$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

42. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y'' - 2y' + y = 0$ **або** $y'' - 6y' + 9y = 0$ **є функція** $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ **?**

A. $y'' - 2y' + y = 0$.

B. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

43. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y'' - 4y' + 3y = 0$ **або** $y'' - 10y' + 25y = 0$ **є функція** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ **?**

A. $y'' - 4y' + 3y = 0$.

B. $y'' - 10y' + 25y = 0$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

44. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y'' + 2y' + 10y = 0$ **або** $y'' - 8y' + 16y = 0$ **є функція** $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$ **?**

A. $y'' + 2y' + 10y = 0$.

B. $y'' - 8y' + 16y = 0$.

C. Не є загальним розв’язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв’язком двох указаних рівнянь.

45. Загальним розв’язком якого з рівнянь $y'' + 2y' + 5y = 0$ **або** $y'' - 4y = 0$ **є функція** $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ **?**

A. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

B. $y'' - 4y = 0$.

C. Не є загальним розв’язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв’язком двох указаних рівнянь.

46. Загальним розв’язком якого з рівнянь $y'' + 4y = 0$ **або** $y'' + 4y' + 4y = 0$ **є функція** $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ **?**

A. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

B. $y'' + 4y = 0$.

C. Не є загальним розв’язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв’язком двох указаних рівнянь.

47. Загальним розв’язком якого з рівнянь $y'' + 2y' = 0$ **або** $y'' - 2y' + 2y = 0$ **є функція** $y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ **?**

A. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

B. $y'' + 2y' = 0$.

C. Не є загальним розв’язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв’язком двох указаних рівнянь.

48. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y''+5y'+4y=0$ **або** $y''-5y'+6y=0$ **є функція** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}$ **?**

A. $y''+5y'+4y=0$.

B. $y''-5y'+6y=0$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

49. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y''-6y'+9y=0$ **або** $y''-9y=0$ **є функція** $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ **?**

A. $y''-6y'+9y=0$.

B. $y''-9y=0$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

50. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y''+y=0$ **або** $y''+8y'-9y=0$ **є функція** $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ **?**

A. $y''+y=0$ **.**

B. $y''+8y'-9y=0$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

51. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y''-5y'-6y=0$ **або** $y''+4y'+4y=0$ **є функція** $y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$ **?**

A. $y''-5y'-6y=0$.

B. $y''+4y'+4y=0$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

52. Загальним розв'язком якого з рівнянь $y'' - 2y' + 3y = 0$ або $y'' - 2y' + 2y = 0$ є функція $y = e^{x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$?

A. $y'' - 2y' + 3y = 0$.

B. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

C. Не є загальним розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

53. Розв'язком якого з рівнянь $y'' - 5y' + 4y = 5x$ або $y'' - 5y' + 4y = x$ є функція $y = e^{x} + x/4 + 5/16$?

A. $y'' - 5y' + 4y = x$.

B. $y'' - 5y' + 4y = 5x$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

54. Розв'язком якого з рівнянь $y'' - 7y' + 6y = x$ або $y'' - 6y' - 7y = x$ є функція $y = e^{x} + x/6 + 7/36$?

A. $y'' - 7y' + 6y = x$.

B. $y'' - 6y' - 7y = x$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

55. Розв'язком якого з рівнянь $y'' - 2y' - 8y = x$ або $y'' + 10y' + 9y = x$ є функція $y = e^{4x} + \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$?

A. $y'' - 7y' + 6y = x$.

B. $y'' - 6y' - 7y = x$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

56. Розв'язком якого з рівнянь $y'' - 2y' + y = x$ або $y'' - 5y' + 4y = x$ є функція $y = e^{4x} + \frac{1}{4}x + \frac{5}{16}$?

A. $y'' - 2y' + y = x$.

B. $y'' - 5y' + 4y = x$.

C. Не є розв'язком жодного з указаних рівнянь.

D. Є розв'язком двох указаних рівнянь.

57. Враховуючи праву частину, в якому вигляді потрібно шукати відповідний частинний розв'язок y_* лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 5e^x$?

A. $y_* = Ax^2e^x$.

B. $y_* = Ae^x$.

C. $y_* = Ae^{3x}$.

D. $y_* = Axe^x$.

58. Враховуючи праву частину, в якому вигляді потрібно шукати відповідний частинний розв'язок y_* лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' - 5y' + 6y = 4e^{3x}$?

A. $y_* = Ae^{3x}$.

B. $y_* = Axe^{3x}$.

C. $y_* = Ae^{2x}$.

D. $y_* = Ax^2e^x$.

59. Враховуючи праву частину, в якому вигляді потрібно шукати відповідний частинний розв'язок y_* лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' - 10y' + 21y = 8e^{7x}$ **?**

A. $y_* = Ae^{7x}$.

B. $y_* = Axe^{3x}$.

C. $y_* = Axe^{7x}$.

D. $y_* = Ae^{2x}$.

60. Враховуючи праву частину, в якому вигляді потрібно шукати відповідний частинний розв'язок y_* лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' + 8y' + 15y = 3e^{-5x}$?

A. $y_* = Ae^{-3x}$.

B. $y_* = Ae^{-5x}$.

C. $y_* = Axe^{-5x}$.

D. $y_* = Ae^{3x}$.

61. Враховуючи праву частину, в якому вигляді потрібно шукати відповідний частинний розв'язок y_* лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' - 10y' + 25y = 2x$?

A. $y_* = Ax + B$.

B. $y_* = Axe^{5x}$.

C. $y_* = x(Ax + B)$.

D. $y_* = Ax^2 + Bx + C$.

62. Враховуючи праву частину, в якому вигляді потрібно шукати відповідний частинний розв'язок y_* лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' - 2y' = x^2 + 1$?

A. $y_* = Ax^2 + Bx + C$.

B. $y_* = Ax^2e^{2x}$.

C. $y_* = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)$.

D. $y_* = Ax + B$.

63. Враховуючи праву частину, в якому вигляді потрібно шукати відповідний частинний розв'язок y_* лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' + 4y = 3\cos 2x$?

A. $y_* = A\cos 2x + B\sin 2x$.

B. $y_* = Ax\cos 2x$.

C. $y_* = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$.

D. $y_* = A\sin 2x$.

64. Враховуючи праву частину, в якому вигляді потрібно шукати відповідний частинний розв'язок y_* лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' + 9y = 2\sin 4x$?

A. $y_* = x(A\cos 4x + B\sin 4x)$.

B. $y_* = A\sin 4x$.

C. $y_* = Ax\sin 4x$.

D. $y_* = A\cos 4x + B\sin 4x$.

ВІДПОВІДІ

на тестові завдання з дисципліни «Вища математика»

Тема: «Диференціальні рівняння»

№ тест. завдання	Варіанти відповіді				№ тест. завдання	Варіанти відповіді			
	A	B	C	D		A	B	C	D
1		+			21	+			
2			+		22		+		
3	+				23			+	
4		+			24	+			
5			+		25	+			
6	+				26				+
7		+			27	+			
8	+				28		+		
9	+				29			+	
10		+			30	+			
11			+		31	+			
12		+			32			+	
13	+				33		+		
14			+		34	+			
15				+	35		+		
16	+				36			+	
17			+		37		+		
18			+		38		+		
19	+				39	+			
20				+	40	+			
41			+		53	+			
42		+			54	+			
43			+		55			+	
44		+			56		+		
45	+				57				+
46		+			58		+		
47	+				59			+	
48	+				60			+	
49			+		61	+			
50	+				62			+	
51		+			63			+	
52		+			64				+

Література

1. Аванесов В. С. Классы и виды тестов [Электронный ресурс] / Аванесов В. С. – Режим доступа : http://www.usatic.narod.ru/issue-archive/issuel7.html

2. Бондаренко З. В. Курс вищої математики з комп’ютерною підтримкою. Диференціальні рівняння : навчальний посібник / З. В. Бондаренко, В. І. Клочко. – Вінниця : ВНТУ, 2004. – 130 с.

3. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1 : учебное пособие [для студентов втузов] / Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. – М. : Высшая школа, 1980. – 320 с.

4. Дубовик В. П. Вища математика : навчальний посібник [для студентів техн. і технолог. спец. вищ. навч. закл.] / Дубовик В. П., Юрик І. І. – К. : А. С. К., 2005. – 648 с.

Навчальне видання

Клочко Віталій Іванович
Бондаренко Злата Василівна
Кирилащук Світлана Анатоліївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Навчальний посібник

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет підготовлено С. Кирилащук

Підписано до друку 14.06.2012
Формат 29,7 × 42¼ . Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 5.25.
Наклад 500 прим.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.