Клочко В. І., Кирилащук С. А.

ВИЩА МАТЕМАТИКА З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ. ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Клочко В. І., Кирилащук С. А.

ВИЩА МАТЕМАТИКА З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ. ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Вінниця - 2010

Рецензенти:

Абрамчук В. С. – к.ф-м. н., професор, професор кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Петух А. М. – д. т. н., професор,завідувач кафедри програмної інженерії Вінницького національного технічного університету

Клочко В. І., Кирилащук С. А.

Вища математика з комп'ютерною підтримкою. Теорія функцій комплексної змінної: Навчальний посібник. – Вінниця: ПП «Торговий дім Едельвейс і К», 2010. – 128 с.

Навчальний посібник містить методичні вказівки, набір задач та приклади розв'язання типових завдань з теорії функцій комплексної змінної. Також розглянуто застосування систем комп'ютерної математики під час розв'язання математичних завдань. Посібник може бути корисним студентам технічних університетів, які спеціалізуються за напрямком підготовки «Інженерія» та викладачам.

Затверджено і рекомендовано до друку рішенням кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету (протокол №12 від 23 лютого 2010 року).

ISBN 978-966-2462-18-0

ЗМІСТ

ВСТУП

Поняття числа, яке є одним із основних серед математичних понять, має свою багатовікову історію. Число, як і всі наукові поняття, виникло не як результат вільної творчої людської думки, а було створено для задоволення практичних потреб людей. Так як із часом практична діяльність людини розвивалась, то і поняття числа теж змінювалось та вдосконалювалось.

Поняття про число виникло в у зв’язку з необхідністю рахунку різноманітних предметів, тварин, рослин та інше. Тому першопочатково розглядали лише цілі та додатні числа, які нині називають натуральними числами. Лише після багатьох років потому виникли дробові числа як результат ділення об’єктів, для яких має зміст поділ одиниці на рівні долі.

Не дивлячись на те, що дробові числа згадуються у самих давніх із відомих рукописах, поняття ″дріб″ як число проникало у науку з великими труднощами і отримало визнання лише у XVI – XVII столітті після винаходу десяткових дробів та логарифмів. Особливо великі логічні труднощі викликало те, що при множенні на правильний дріб отриманий результат був не більший, а менший від початкового числа. Цілі та дробові додатні числа отримали назву раціональних.

Задачі виміру неперервних величин, тобто вираження всякого значення такої величини числом, привели до введення чисел ірраціональних. Історичний переказ приписує відкриття ірраціональних чисел Піфагору, який виявив, що відношення довжини діагоналі квадрата до довжини його сторони не може виражатись ніяким раціональним числом, тільки нескінченим дробом.

Значно пізніше почали з’являтись та використовуватись від’ємні числа. І лише у XVI столітті Декарт, розробляючи аналітичну геометрію, визначив геометричний зміст від’ємних чисел як напрямлених відрізків, який з тих часів і став загальноприйнятим.

У XVIII столітті числа раціональні та ірраціональні, додатні та від’ємні отримали загальну назву дійсних, або речових чисел.

Однак не встигло ще закріпитись нове розширене поняття числа, як у процесі подальшого розвитку математики виявилось, що і нове поняття не є задовільним. Зокрема, розв’язання квадратних рівнянь на самій початковій сходинці розвитку алгебри привело до неможливої у межах області дійсних чисел операції, а саме добування квадратного кореня з від’ємного числа. Тобто, корінь квадратний із від’ємної величини $\sqrt{-b^2}$ не може виражатись ніяким дійсним числом. Чи може це означати, що величина $\sqrt{-b^2}$ є ″уявною″,

″неможливою″? Звичайно, ні. Величина $\sqrt{-b^2}$ є такою, що реально існує, але яка не може бути виражена в межах поняття дійсного числа.

Отже, крім відомої ″дійсної″ одиниці, за допомогою якої виражаються всі дійсні числа, необхідно вести ще одну, нову одиницю, яку будемо позначати літерою i, та розуміти під цим позначенням величину

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{або} \quad i^2 = -1 .$$

Тоді

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{(-1)(b^2)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b^2} = b \cdot i .$$

За історичною традицією число i назвали уявною одиницею. А число виду $a + bi$ отримало назву комплексного числа, у якому розрізняють дійсну частину (a) та уявну частину (b).

Комплексні числа почали з'являтись у працях окремих математиків починаючи з XVI століття. Але широке визнання та розповсюдження вони отримали лише у XIX столітті, після того як на межі XVIII – XIX століть одночасно та незалежно один від одного К. Гаусом (у 1797 – 1799 рр.), К. Весселем (у 1798 – 1800 рр.) та Ж. Арганом (у 1806 р.) було дано геометричне тлумачення комплексних чисел як точок числової площини, і після того, як за допомогою комплексних чисел вдалося розв'язати ряд практичних важливих задач, які неможливо було розв'язати в області дійсних чисел.

До того часу до комплексних чисел відносились з великою недовірою і не розуміли їх суті навіть деякі видатні математики. Декарт був серед тих, хто не сприймав комплексні корені. Саме він запропонував термін ″уявне число″. У своїй ″Геометрії″ Декарт стверджував: ″Ні істинні, ні хибні (від'ємні) корені не бувають завжди дійсними, іноді вони стають уявними″. Декарт вважав, що від'ємні корені можливо зробити ″дійсними″, перетворюючи початкове рівняння в рівняння з додатними коренями, тоді як комплексні корені перетворити у дійсні не можливо. Отже, є підстави щоб комплексні корені вважати не справжніми, а уявними.

Ньютон не приділяв особливої уваги комплексним кореням, скоріше всього тому, що на ті часи комплексні корені не мали фізичного змісту. Так, у ″Всезагальній арифметиці″ (1728 р.) Ньютон говорить: ″Корені рівнянь мають бути неможливими (комплексними) тому, що вони існують для вираження неможливих випадків у задачі так, як би ті були можливі″. Тобто, задачі, які не мають розв'язку який має фізичний або геометричний зміст, мають мати комплексні корені.

Відсутність чіткості у питаннях, пов'язаних із комплексними числами, часто демонструють на прикладі відомого вислову Лейбніца: ″Дух божий нашёл тончайшую отдушину в этом чуде анализа, уроде из мира идей, двойственной сущности, находящейся между бытием и небытием, которую мы называем мнимым корнем из отрицательной единицы". Хоч Лейбніц формально і виконував дії над комплексними числами, він не розумів їх істинного призначення. Для того, щоб якось обґрунтувати ті використання, які він сам та Іоганн Бернулі знайшли комплексним числам у математичному аналізі, Лейбніц висловив надію, про те, що шкоди від цього не буде.

В області комплексних чисел завжди виконуються всі чотири дії арифметики та добування кореня будь-якого степеня з комплексного числа. В результаті виконання цих дій над комплексними числами знову отримуємо комплексне число.

Для комплексних чисел залишаються справедливі всі основні закони арифметики та алгебри, значення функції від комплексного аргументу є знову комплексним числом.

Крім того, ціла низка питань, які в області дійсних чисел не могли бути вирішені і часто розглядались як парадокси, отримали пояснення в області комплексних чисел. Наприклад, в області комплексної змінної алгебраїчне рівняння n-го степеня завжди має точно n коренів, в той час як в області дійсної змінної воно може мати і меншу кількість коренів і навіть жодного. В області комплексної змінної існує логарифм від від'ємних чисел, функції синус та косинус можуть приймати будь-які значення, а не тільки значення, які не перевищують одиницю і т.д.

РОЗДІЛ 1
КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА І ДІЇ НАД НИМИ. СТЕРЕОГРАФІЧНА ПРОЕКЦІЯ

Поняття комплексного числа можна задати, якщо розглядати число, яке задається двома дійсними числами.

Означення: *Комплексним числом* z *– називається упорядкована пара дійсних чисел* $(a;b)$, *для яких визначається дія додавання і множення згідно правил:*

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$$
$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2). \tag{1.1}$$

Якщо $b=0$, то $(a,0)=a$, наприклад $(0,0)=0$, $(1,0)=1$. Таким чином, множина дійсних чисел є підмножиною множини комплексних чисел. Комплексні числа $z_1=(a_1,b_1)$ і $z_2=(a_2,b_2)$ вважаються рівними, якщо $a_1=b_1$, $a_2=b_2$.

Поняття "більше" чи "менше" для комплексних чисел не існує.

Комплексні числа можна зобразити ***графічно***. Розглянемо Декартову систему координат на площині. Оскільки комплексне число z визначається як пара дійсних чисел, то його зображення на площині є точкою на площині з координатами $x=a$, $y=b$ (рис. 1.1). І навпаки, кожній точці площини з координатами $x=a$, $y=b$ відповідає одне комплексне число $z=(a,b)$. Розглянута вище площина називається ***комплексною площиною.***

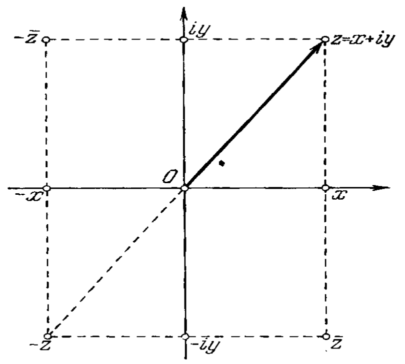


Рис. 1.1

Означення: *Добуток* n *комплексних чисел називається* n*-им степенем комплексного числа* z *і позначається* z^n,

$$z^n=z\cdot z\cdot\ldots\cdot z \quad n-раз.$$

Користуючись означенням, можна показати, що дії над комплексними числами мають асоціативну, комутативну і дистрибутивну властивості.

Комплексне число $(0,1)$ називається ***уявною одиницею***, позначається символом i : $i=(0,1)$.

Зауваження: В електротехнічних дисциплінах замість літери *i*, яка визначає силу струму, використовується літера *j*.

Приклад.

Обчислимо i^2:

$$i^2=(0;1)(0;1)=(0\cdot 0-1\cdot 1;0\cdot(-1)+0\cdot 1)=(-1;0)=-1\,.$$

Комплексне число $(0;b)$ називається ***уявним комплексним числом***.

Очевидні співвідношення:

$$z\cdot 1=(a;b)(1;0)=(a-b\cdot 0;a\cdot 0+b\cdot 1)=(a;b)=z\,,$$

тоді

$$(0;b)=(0;b)(1;0)=(0\cdot 1-b\cdot 0;0\cdot 0+b\cdot 1)=$$
$$(0\cdot b-1\cdot 0;0\cdot 0+b\cdot 1)=(0;1)(b;0)=ib.$$

оскільки $(0,1)=i,(b,0)=b.$

Виходячи з означення суми, комплексне число $z=(a;b)$ можна записати у такому вигляді: $(a;b)=(a;0)+(0;b)$ або $(a;b)=a+bi$.

Форма запису $a+bi$ комплексного числа z називається ***алгебраїчною***. Де a називається дійсною частиною комплексного числа, позначається $a=\mathrm{Re}\,Z$, b називається коефіцієнтом уявної частини $b\cdot i$ комплексного числа z та позначається $b=\mathrm{Im}\,Z$ (від латинських слів realis – дійсний та imaginarius - уявний). Число $a-b\cdot i$ ***називається комплексно спряженим*** до числа $a+b\cdot i$. Якщо $z=a+b\cdot i$, то число $a-b\cdot i$ позначається $\bar{z}$ (рис. 1.2).

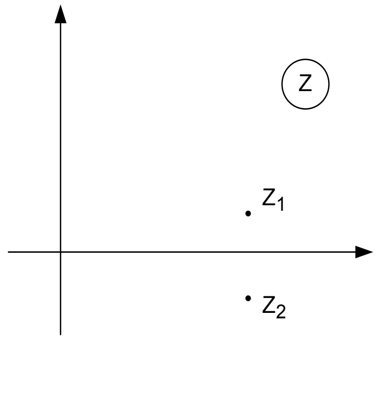


Рис. 1.2

Якщо комплексні числа задано в алгебраїчній формі, то дії над комплексними числами визначається наступним чином.

Означення: Сумою комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ *та* $z_2 = x_2 + iy_2$ *називається комплексне число*

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2, z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Для дії додавання справджуються закони:

а) комутативності $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$

б) асоціативності $Z_1 + (Z_2 + Z_3) = (Z_1 + Z_2) + Z_3$.

Операція ***віднімання комплексних чисел*** *виконується таким чином:*

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \qquad (1.2)$$

тобто

$$\operatorname{Re}(z_1 - z_2) = \operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im}(z_1 - z_2) = \operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2.$$

Графічно арифметична дія віднімання зображена на рис.1.3.

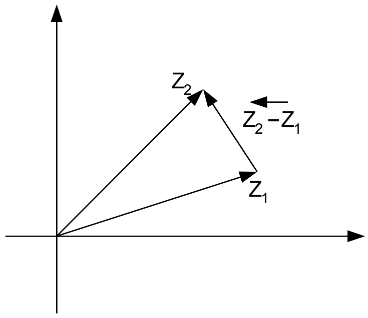


Рис. 1.3

Властивості модуля суми та різниці комплексних чисел:

$$|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|, \qquad |Z_1 - Z_2| \ge |Z_1| - |Z_2|.$$

Дамо геометричне тлумачення дії додавання комплексних чисел. Нехай задано числа z_1 та z_2, які геометрично зображуються радіусами-векторами. Тоді кожен радіус-вектор $z_1 + z_2$, зображаючи суму комплексних чисел z_1 та z_2, буде знаходиться у 4-й вершині $z_1 + z_2$ паралелограма з трьома іншими вершинами O, z_1, z_2 (рис. 1.4) .

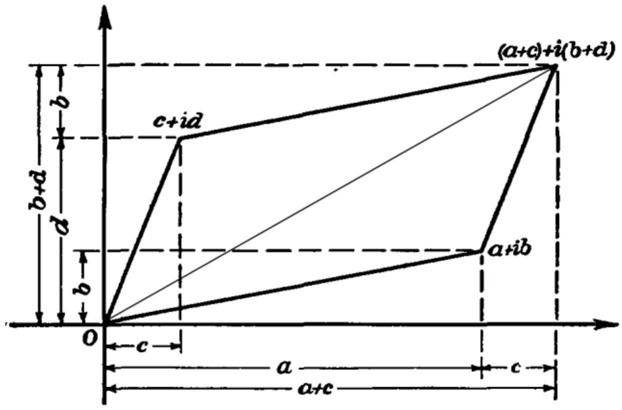


Рис. 1.4

Добуток комплексних чисел *z_1 та z_2 визначається за правилом*

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \qquad (1.3)$$

Також мають місце закони:

а) комунікативний $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

б) асоціативний $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;

в) розподільний відносно дії додавання $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

Зокрема, $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Означення: *Діленням комплексного числа z_1 на z_2 називається комплексне число z, яке задовольняє рівність $z \cdot z_2 = z_1$ та позначається* $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Частка від ділення чисел z_1 та z_2 знаходити за правилом

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}} i \qquad (1.4)$$

Це правило отримано шляхом використання комплексно-спряженого числа: чисельник і знаменник домножається на комплексне число $\bar{z}_2$ – спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}}.$$

Приклад.

$$\frac{1+2i}{3+4i}=\frac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{3+2i-8i^2}{9-16i^2}=$$
$$=\frac{3+2i+8}{9+16}=\frac{11+2i}{25}=\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i.$$

Комплексне число z можна зобразити не тільки точкою, але й радіусом-вектора (рис. 1.5), проекціями якого на вісі координат є a та b. Знаки чисел a та b визначається напрямом проекцій вектора на вісі.

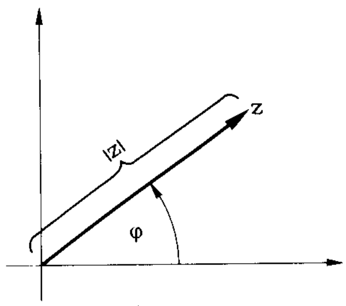


Рис. 1.5

Вектор $z=a+bi$ можна визначити не тільки прямокутними координатами a та b, його можна однозначно визначити полярними координатами r та φ. Враховуючи зв'язок між декартовими координатами $(a;b)$ та полярними координатами $(r;\varphi)$ точки z, можна записати:

$$a=r\cos\varphi,\ b=r\sin\varphi.$$

Отримаємо нову форму запису комплексного числа $z(a,b)$, яка називається ***тригонометричною****:*

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Число r – називається ***модулем*** комплексного числа z, кут φ – називається його ***аргументом***, та позначаються відповідно

$$r=|z|,\ \varphi=Argz.$$

Для комплексного числа $z=a+bi$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$tg\,\varphi = \frac{b}{a},$$

такий, що

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ;$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ .$$

Для довільного комплексного числа, модуль визначається однозначно, а аргумент φ (для $z \neq 0$) багатозначно, з точністю до 2π. Тому розглядають так зване головне значення аргументу комплексного числа z ($\arg z$), яке знаходиться у межах

$$-\pi < \arg z \le \pi \text{ (або } 0 \le \arg z < 2\pi\text{)}$$

і тоді

$$Argz = \arg z + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ .$$

Тому надалі доцільно використовувати формули

$$arg\ z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, \ \textit{якщо}\ x > o, \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, \ \textit{якщо}\ x < 0, y \ge 0, \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi, \ \textit{якщо}\ x < 0,\ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \quad \textit{якщо}\ x = 0,\ y < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \quad \textit{якщо}\ x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Якщо два комплексних числа заданих у тригонометричній формі рівні, то модулі їх рівні між собою, а аргументи відрізняються доданками кратними $\pm 2\pi$. Розглянемо множення, ділення, піднесення до степеня і знаходження кореня з комплексного числа, заданого тригонометричною формою.

Нехай

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

та

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\,.$$

Помножимо z_1 на z_2:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

Звідси слідує, що при множенні комплексних чисел заданих у тригонометричній формі, модулі комплексних чисел перемножуються, а аргументи додаються. Тобто

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$Arg(z_1 \cdot z_2) = Argz_1 + Argz_2.$$

Розглянемо ***степінь комплексного числа*** z.

$$z^n = z \cdot z \cdot ... \cdot z = r^n(\cos n\varphi + i\sin\varphi),$$

тобто

$$|z^n| = r^n = |z|^n, \quad Argz^n = n\varphi = nArgz \ .$$

*Розглянемо **ділення** z_1 **на** z_2**:***

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

З комплексними числами дію піднесення до n-го степеня доцільно виконувати, записавши їх у тригонометричній формі. Відповідна формула, як було вище зазначено, має вигляд:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad \text{де } k = 0,1,2,...,n-1.$$

Дана формула має назву формули Муавра.

Таким чином, при діленні комплексних чисел заданих у тригонометричній формі, модуль діленого ділиться на модуль дільника, а аргумент діленого віднімається від аргумент дільника.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$Arg\,\frac{z_1}{z_2} = Argz_1 - Argz_2$$

Розглянемо операцію добування кореня n-го степеня, де $n \in N$.

Означення: *Коренем n-го степеня $\sqrt[n]{z}$ з комплексного числа z називається таке комплексне число z_1, n-а степінь якого дорівнює підкореневому числу: $z^n = z$.*

Нехай

$$z = z(\cos\varphi + i\sin\varphi)\text{, а } z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,.$$

Тоді за означенням:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

або

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r_1^{\ n}(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1)\,.$$

Із рівності комплексних чисел слідує, що

$$r = r_1^{\ n}\,,$$

а $$\varphi = n\varphi_1 + 2k\pi\,, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Звідки $$r_1 = \sqrt[n]{r}\,,\ \varphi_1 = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\,.$$

Таким чином, маємо формулу:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

У отриманій формулі k може приймати довільне ціле число, проте різних значень $\sqrt[n]{z}$ буде лише n, вони будуть відповідати значенням $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, решта будуть повторюватись. Так,
якщо $k = n$, то

$$\varphi_{1,n} = \frac{\varphi + 2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$$

та $$\cos\varphi_{1,n} = \cos\frac{\varphi}{n} = \cos\varphi_{1,0}\,, \qquad \sin\varphi_{1,n} = \sin\frac{\varphi}{n} = \sin\varphi_{1,0}\,,$$

(як 2π-періодичні функції). Точки $\sqrt[n]{z_k}$ є вершинами правильного n-кутника (рис. 1.6).

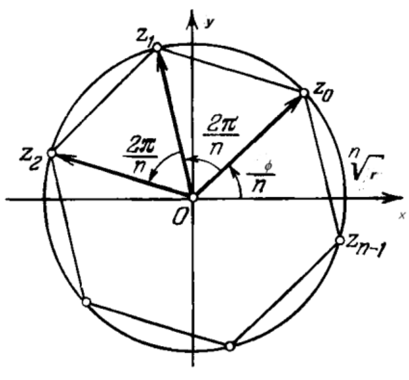


Рис. 1.6

Приклад.

Знайти $\sqrt[3]{1}$.

Розв’язання.

$$\sqrt[3]{1}_0 = 1,\ \sqrt[3]{1}_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \sqrt[3]{1}_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\ .$$

Означення: *Дія піднесення числа e в степінь $z = x + iy$ визначається рівністю* $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Це визначення справедливо:

1) при $y = 0$;

2) зберігає звичайні властивості:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \qquad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

Комплексні степені мають властивість, що відсутня для дійсних степенів:

$$e^{2k\pi i} = 1,\ k = 0, k = \pm 1, \pm 2, ...$$

Звідси

$$e^{z+2k\pi i} = e^z.$$

Нехай $x = 0, y = \varphi$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$ - ***формула Ейлера.***

Показникова форма комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z = re^{i\varphi}.$$

Приклади.

1. Довести:

а) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

б) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

в) $\left(\overline{z}\right)^n = \left(\overline{z^n}\right)$.

Доведення.

а) За означенням спряженого числа:

$$\overline{z_1 + z_2} = \left(\overline{x_1 + x_2, y_1 + y_2}\right) = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) = (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

б) Маємо:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)} = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, -x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) =$$
$$= (x_1, -y_1)(x_2, -y_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

в) Запишемо комплексне число z у тригонометричній формі

$$z = (r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$

тоді

$$\overline{z} = (r\cos(-\varphi), r\sin(-\varphi)).$$

Використовуючи формулу Муавра, маємо:

$$\left(\overline{z}\right)^n = \left(r^n \cos(-n\varphi), r^n \sin(-n\varphi)\right) = \left(r^n \cos n\varphi, -r^n \sin n\varphi\right) =$$
$$\overline{\left(r^n \cos n\varphi, r^n \sin n\varphi\right)} = \overline{\left(z^n\right)}.$$

2. Виконати дії:

а) $(2-i)(2+i)^2 - (3-2i) + 7$;

б) $(1+i)^4$;

в) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^6$.

Розв’язання.

а) $$(2-i)(2+i)^2 - (3-2i) + 7 = (2-i)(2+i)^2 + 4 + 2i =$$
$$= (2+i)((2-i)(2+i) + 2) = (2+i)(4+1+2) = 14 + 7i.$$

б) За формулою бінома Ньютона маємо:

$$(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$$

в) $$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^6 = \frac{27}{64} + i\frac{54\sqrt{3}}{64} - \frac{135}{64} - i\frac{60\sqrt{3}}{64} + \frac{45}{64} + i\frac{6\sqrt{3}}{64} - \frac{1}{64} = -1.$$

3. Знайти частку комплексних чисел:

а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1}{1+i}$; в) $\dfrac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Розв’язання.

Формулу для знаходження частки комплексних чисел z_1 та z_2 запишемо у наступному вигляді:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

За даною формулою знаходимо:

а) $\frac{1}{i}=\frac{-i}{|i|^2}=-i$;

б) $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{|1+i|^2}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$;

в) $\dfrac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2}=\dfrac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Записати наступні комплексні числа у тригонометричній формі:

а) -3; б) $-i$; в) $1+i$; г) $-1+i\sqrt{3}$.

Розв'язання.

а) $|-3|=3, \varphi=\pi, -3=3(\cos\pi+i\sin\pi)$;

б) $|-i|=1, \varphi=-\frac{\pi}{2}, -i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

в) $|1+i|=\sqrt{2}, \varphi=\frac{\pi}{4}, 1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$;

г) $\left|-1+i\sqrt{3}\right|=2, \varphi=\frac{2\pi}{3}, -1+i\sqrt{3}=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$.

5. Розв'язати рівняння $z^6+1=0$.

Розв'язання.

Маємо $z=\sqrt[6]{-1}$.

$$z_k=\sqrt[6]{-1}=\cos\frac{-\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi+2k\pi}{6}, k=\overline{0,5}.$$

Отже,

$$z_0=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$z_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

$$z_4 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},$$

$$z_5 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i.$$

Вправи для самостійної роботи

❖ Довести, що

а) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$; б) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

в) $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$, де $z \to P(z)$ – алгебраїчний многочлен із дійсними коефіцієнтами.

❖ Виконати дії:

а) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^6$; б) $\frac{2 + i4}{-3 + i5}$; в) $\frac{x + iy}{x - iy}$ $\left(x^2 + y^2 \neq 0\right)$.

❖ Знайти дійсну та уявну частину наступних комплексних чисел:

а) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\left(\frac{i^5 + 2}{i^{15} + 1}\right)^2$; в) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

❖ Знайти модуль та аргумент наступних комплексних чисел:

а) $(-4 + 3i)^3$; б) $(1+i)^8 \cdot \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-6}$; в) $1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$.

❖ Знайти всі значення наступних коренів:

а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[3]{-1+i}$; в) $\sqrt[6]{-64}$; г) $\sqrt[6]{64}$.

❖ Знайти корені рівняння:

а) $z^2 + (5 - i2)z + 5(1 - i) = 0,$

б) $z^2 + (1 - i2)z - i2 = 0,$

в) $(z + i)^n + (z - i)^n = 0$.

❖ Довести, що модуль комплексного числа $|z|$ задовольняє умовам:

а) $|z| \geq 0 \wedge (|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$;

б) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \forall z_1, z_2 \in C$, де C – множина комплексних чисел;

в) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \forall z_1, z_2 \in C$.

❖ Довести, що модуль комплексного числа задовольняє нерівність

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|.$$

Зображення комплексних чисел на сфері Рімана

Комплексну площину Z, доповнену нескінченно вилученою точкою, тобто точкою, що відповідає комплексному числу, модуль якого дорівнює нескінченності ($|z| = \infty$) та умовно позначуваної символом $z = \infty$, називають ***розширеною (замкнутою)*** комплексною площиною.

Дамо геометричне тлумачення комплексного числа $z = \infty$. Для цього побудуємо сферу, що лежить на площині *Oxy* та має точку дотику в початку координат (рис. 1.7).

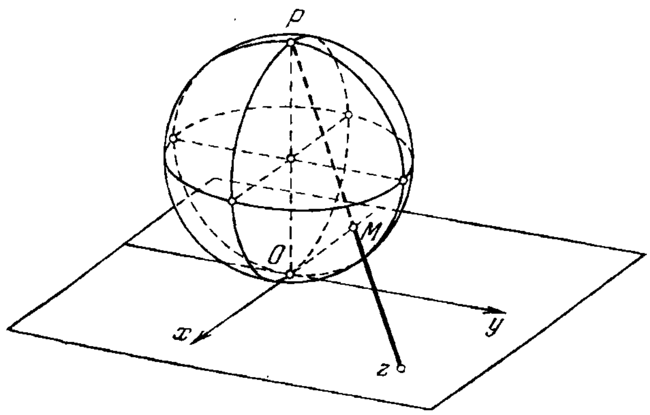


Рис. 1.7

Кожній точці Z площини *Oxy* поставимо у відповідність точку $M(z)$, що є перетином сфери з прямою, яка з'єднує точки P та z. Зазначимо, що між всіма точками сфери, крім точки P, встановлюється взаємно-однозначна відповідність з точками площини *Oxy*. Неважко помітити, що, коли $|z| \to \infty$, точка $M(z)$ прямує до точки P, отже, точці P сфери відповідає нескінченно віддалена точка розширеної комплексної площини Z. Розширену комплексну площину іноді називають ***комплексною сферою*** або ***сферою Рімана***.

На відміну від замкненої, площина з виключеною точкою $z=\infty$ називається ***відкритою комплексною площиною.***

Використання систем комп'ютерної математики

Приклад.

Різні форми представлення комплексного числа. Геометрична інтерпретація комплексних чисел.

Запишемо декілька комплексних чисел у алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Запишемо до них комплексно спряжені. Зобразимо числа на площині.

Розв'язок приклада у середовищі пакету Mathcad

Різні форми представлення комплексних чисел. Способи визначення комплексного числа

Комплексні числа в алгебраїчній формі. Перший спосіб:

$arl := 2$	$aim := 3$	$a := arl + aim \cdot i$	*Для того, щоб ввести уявну одиницю i, наберіть на клавіатурі 1i та клацніть мишкою поза виділеною рамкою*
$Rb := 0$	$Ib := 3$	$b := Rb + Ib \cdot i$	
$d1 := 2$	$d2 := -3$	$d := d1 + d2 \cdot i$	

$a \text{ complex } \rightarrow 2+3 \cdot i$
$b \text{ complex } \rightarrow 3 \cdot i$
$d \text{ complex } \rightarrow 2-3 \cdot i$

Для того, щоб відобразити комплексне число в робочому документі в алгебраїчній формі, клацніть у панелі Symbolic на ключовому слові complex та введіть у поміченій позиції ім'я комплексної змінної та клацніть мишкою поза виділеної рамкою

Комплексні числа в алгебраїчній формі. Другий спосіб:

$a := 2+3 \cdot i$	$a \text{ complex } \rightarrow 2+3 \cdot i$
$b := 3 \cdot i$	$b \text{ complex } \rightarrow 3 \cdot i$
$d := 2-3 \cdot i$	$d \text{ complex } \rightarrow 2-3 \cdot i$

Комплексні числа в алгебраїчній формі. Третій спосіб:

$a := 2+\sqrt{-9}$	$a \text{ complex } \rightarrow 2+3 \cdot i$
$b := \sqrt{-9}$	$b \text{ complex } \rightarrow 3 \cdot i$
$d := 2-\sqrt{-9}$	$d \text{ complex } \rightarrow 2-3 \cdot i$

Комплексні числа в тригонометричній формі.

$z := 3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$	$z \text{ complex } \rightarrow \frac{3}{2}\cdot\sqrt{3} + \frac{3}{2}\cdot i$

Комплексні числа в показниковій формі.

$z := \frac{3}{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}\cdot i}$	$z \text{ complex } \rightarrow \frac{3}{4}\cdot\sqrt{2} + \frac{3}{4}\cdot i\cdot\sqrt{2}$

Дійсна та уявна частини комплексного числа

$z := 1 - i$	$\mathrm{Re}(z) = 1$	$\mathrm{Im}(z) = -1$	$z \text{ complex } \rightarrow 1 - i$
$z := e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}$	$\mathrm{Re}(z) = 0$	$\mathrm{Im}(z) = 1$	$z \text{ complex } \rightarrow i$
$z := 5\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$	$\mathrm{Re}(z) = 2.5$	$\mathrm{Im}(z) = 4.33$	$z \text{ complex } \rightarrow \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3}$

Модуль та аргумент комплексного числа

$z := 1 - i$			
$\lvert z\rvert = 1.414$	$\lvert z\rvert \rightarrow \sqrt{2}$	*Для того, щоб знайти модуль комплексного числа, клацніть у панелі Calculator на символі модуля та введіть у поміченій позиції ім'я числа*	
$\arg(z) = -0.785$	$\arg(z) \rightarrow \frac{-1}{4}\cdot\pi$	*Для того, щоб знайти аргумент комплексного числа, введіть ім'я функції arg та вкажіть у дужках комплексне число (або його ім'я)*	
$z \text{ complex } \rightarrow 1 - i$			
$z := e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}$			
$\lvert z\rvert = 1$	$\lvert z\rvert \rightarrow 1$	$\arg(z) = 1.571$	$\arg(z) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\pi$
$z \text{ complex } \rightarrow i$			
$z := 5\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$			
$\lvert z\rvert = 5$	$\lvert z\rvert \rightarrow 5$	$\arg(z) = 1.047$	$\arg(z) \rightarrow \frac{1}{3}\cdot\pi$

$z\ \text{complex}\ \to \frac{5}{2}+\frac{5}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3}$

Обчислення комплексно спряженого числа

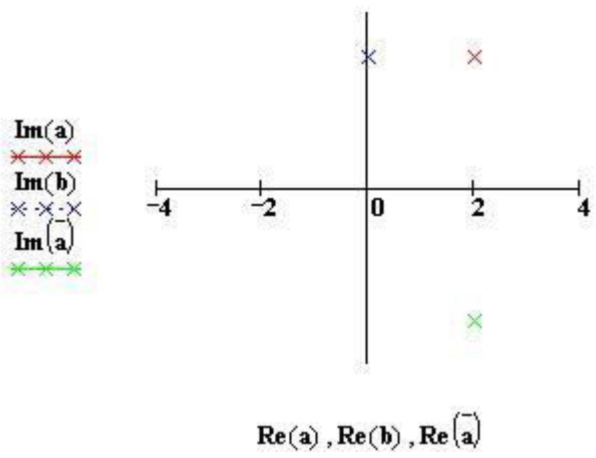
$z := 2+3\cdot i$	
$\bar{z} = 2-3i$	*Для того, щоб визначити комплексно спряжене до числа z, введіть із клавіатури z, а потім символ " (лапки)*

$z := 5\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$	$z = 2.5+4.33i$	$z \to \frac{5}{2}+\frac{5}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3}$
	$\bar{z} = 2.5-4.33i$	$\bar{z} \to \frac{5}{2}-\frac{5}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3}$

Зображення комплексних чисел на комплексній площині

Комплексні числа a, b та d визначені вище:

$a\ \text{complex}\ \to 2+3\cdot i$	$b\ \text{complex}\ \to 3\cdot i$	$\bar{a}\ \text{complex}\ \to 2-3\cdot i$



Для того, щоб відобразити комплексне число на комплексній площині,клацніть у панелі Graph на символі декартова графіка, у вікні графіків (яке відкрилось) введіть у поміченій позиції біля вісі абсцис, відокремлюючи комою,назву дійсних частин комплексних чисел, а в позиції біля вісі ординат – назву уявних частин, та клацніть поза полем графіків.
Для того, щоб встановити стиль зображення, клацніть на графіку двічі та подивіться позначки на полях вводу,щоб зрозуміти, як визначений стиль зображення для наведеного графіка.

Розв’язок приклада у середовищі пакету Mathematica

Різні форми представлення комплексних чисел. Арифметичні дії над комплексними числами.

Записати комплексні числа в алгебраїчній, тригонометричній та експоненціальній формах. Записати комплексно спряжені числа. Зобразити числа на площині.

Комплексна одиниця записується як I

In[1]:= `a = 2 + 3 I`

Out[1]= $2 + 3\,i$

Можна також ввести із палітри символ i

In[2]:= `b = 6 + 3 i`

Out[2]= $6 + 3\,i$

Число, записане в тригонометричній формі:

In[3]:= $c = 3\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{6}\right] + i\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{6}\right]$

Out[3]= $\frac{i}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Число, записане в експоненціальній формі:

In[4]:= $d = \frac{3}{2}\,e^{\frac{\pi}{4}\,i}$

Out[4]= $\frac{3}{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}$

Щоб перетворити це число в алгебраїчну форму, можна використати функцію `ExpToTrig`

In[5]:= $\frac{3}{2}\,e^{\frac{\pi}{4}\,i}$ `// ExpToTrig`

Out[5]= $\frac{\frac{3}{2} + \frac{3\,i}{2}}{\sqrt{2}}$

Функція `Re` знаходить дійсну частину числа

In[6]:= `Re[c]`

Out[6]= $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Функція `Im` знаходить уявну частину числа

In[7]:= `Im[d]`

Out[7]= $\frac{3}{2\sqrt{2}}$

Функція `Abs` знаходить модуль числа

In[8]:= `Abs[c]`

Out[8]= $\sqrt{7}$

Функція `Arg` знаходить аргумент комплексного числа

In[9]:= `Arg[c]`

Out[9]= $\mathrm{ArcTan}\left[\frac{1}{3\sqrt{3}}\right]$

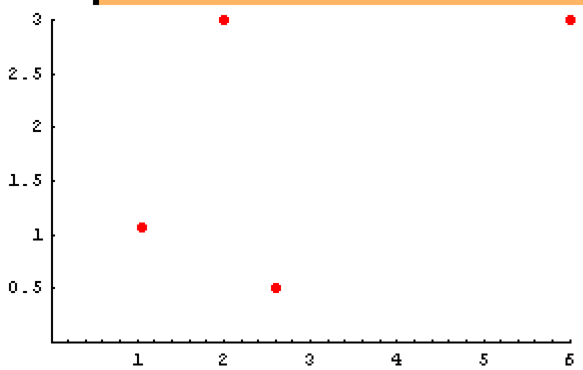
Функція `Conjugate` видає комплексно спряжене число

In[10]:= `Conjugate[4 + 6 ⅈ]`

Out[10]= `4 - 6 ⅈ`

Зобразити на графіку комплексні числа можна, наприклад, за допомогою графічної функції `Point`

In[11]:=
```
Show[Graphics[{PointSize[0.02], Hue[1], Point[{Re[a], Im[a]}],
   Point[{Re[b], Im[b]}], Point[{Re[c], Im[c]}], Point[{Re[d], Im[d]}]},
  Axes → True, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → {{0, 6}, {0, 3}}]]
```



Out[11]= `- Graphics -`

In[12]:= `Clear[a, b, c, d]`

Приклад.

Розглянемо виконання арифметичних дій над комплексними числами. Обчислимо суму, добуток та частку комплексних чисел.

Розв'язок приклада у середовищі пакету Mathcad

Арифметичні дії з комплексними числами

Додавання та його властивості

$a := 2 + 3 \cdot i$	$b := -3 + 5 \cdot i$	*Для того, щоб ввести уявну одиницю i, наберіть на клавіатурі 1i та клацніть мишкою поза виділеною рамкою*

$a \text{ complex } \rightarrow 2+3\cdot i$
$b \text{ complex } \rightarrow -3+5\cdot i$

$c := a+b$	$c = -1+8i$
$Re(a)+Re(b) = -1$	$Im(a)+Im(b) = 8$
$\overline{a}+a = 4$	*Для того, щоб визначити комплексно спряжене до числа а, введіть із клавіатури а та потім символ " (лапки)*
$\overline{a}-a = -6i$	

Множення та його властивості

$p := a\cdot b$	$p = -21+i$		
$\lvert a\rvert \rightarrow \sqrt{13}$	$\lvert b\rvert \rightarrow \sqrt{34}$	$\lvert p\rvert \rightarrow \sqrt{442}$	$\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert \rightarrow \sqrt{13}\cdot\sqrt{34}$
			$13\cdot 34 = 442$
$arg(a) = 0.983$	$arg(b) = 2.111$	$arg(p) = 3.094$	
		$arg(a)+arg(b) = 3.094$	
$a\cdot\overline{a} = 13$	$(\lvert a\rvert)^2 = 13$	$arg(a\cdot\overline{a}) = 0$	

Ділення та його властивості

$a \text{ complex } \rightarrow 2+3\cdot i$	$b \text{ complex } \rightarrow -3+5\cdot i$
$\frac{a}{b} \rightarrow \frac{9}{34}-\frac{19}{34}\cdot i$	$\frac{a}{b} = 0.265-0.559i$
$\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert} = 0.618$	$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert = 0.618$
$arg(a)-arg(b) = -1.128$	$arg\left(\frac{a}{b}\right) = -1.128$
$\frac{a}{\overline{a}} = -0.385+0.923i$	$\left\lvert\frac{a}{\overline{a}}\right\rvert = 1$

Розв'язок приклада в середовищі пакету Mathematica

Різні форми представлення комплексних чисел. Арифметичні дії над комплексними числами.

Обчислити суму, добуток та частку комплексних чисел.

Додавання:

In[1]:=
```
a = 2 + 3 I;
b = -3 + 5 I;
```

In[3]:=
```
a + b
```

Out[3]=
```
-1 + 8 ⅈ
```

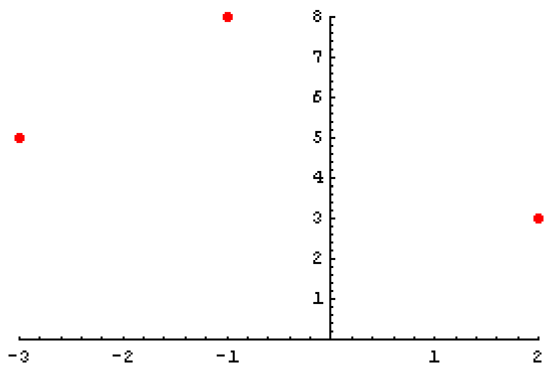
In[4]:=
```
Re[a] + Re[b]
```

Out[4]=
```
-1
```

In[5]:=
```
Im[a] + Im[b]
```

Out[5]=
```
8
```

In[6]:=
```
Show[Graphics[{PointSize[0.02], Hue[1], Point[{Re[a], Im[a]}],
   Point[{Re[b], Im[b]}], Point[{Re[a + b], Im[a + b]}]}, Axes → True,
  AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → {{-3, 2}, {0, 8}}]]
```



Out[6]=
```
- Graphics -
```

Множення

In[7]:=
```
a b
```

Out[7]= $-21+i$

Ділення

In[8]:= $\frac{a}{b}$

Out[8]= $\frac{9}{34}-\frac{19\, i}{34}$

In[9]:= `Clear[a, b]`

РОЗДІЛ 2
ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ. УМОВИ КОШІ-РІМАНА

Комплексні функції дійсного аргументу

Означення: На проміжку $t_1 < t < t_2$ задано комплексну функцію дійсного аргументу, якщо $\forall t \in (t_1, t_2)$ поставлено у відповідність комплексне число $z = f(t)$. Наприклад, $z = (t^2 + i)^2$, $z = Ae^{(\alpha + i\omega)t}$.

Задання функції комплексного аргументу еквівалентно двом заданим дійсним функціям $x(t)$ та $y(t)$, тобто $z = x(t) + iy(t)$.

Приклад.

$$z = (t^2 + i)^2 = t^2 + 2t \cdot i - 1 = t^2 - 1 + i2t .$$

Властивості:

1. Нехай $f_1 = u_1 + iv_1$, $f_2 = u_2 + iv_2$, тоді $f_1 + f_2 = u_1 + u_2 + i(v_1 + v_2)$, тобто $\mathrm{Re}(f_1 + f_2) = \mathrm{Re}\, f_1 + \mathrm{Re}\, f_2$, $\mathrm{Im}(f_1 + f_2) = \mathrm{Im}\, f_1 + \mathrm{Im}\, f_2$

2. Нехай α дійсне число, тоді $\alpha f(t) = \alpha \mathrm{u(t)} + \mathrm{i}\alpha \mathrm{v(t)}$.

3. Нехай $x(t)$, $y(t)$ диференційовані, тоді, якщо $z(t) = x(t) + iy(t)$, то $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dx}{dt} + i\dfrac{dy}{dt}$.

Застосування комплексних функцій до характеристики коливань

Розглянемо гармонійні коливання, які описано тригонометричними функціями

$$A_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{та} \quad A_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Замість двох функцій розглянемо одну

$$A(t) = A_0\left[\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi)\right] = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = Ae^{i\omega t}$$

$A_0 = |A|$, ω – частота, φ – фаза.

Це ***комплексна форма запису гармонійних коливань***. Тоді

$$A_0 \sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Im}\, Ae^{i\omega t}.$$

$$A_0 \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\, Ae^{i\omega t}.$$

Розглянемо складні гармоніки.

$$f_1(t) = A_{10}\sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$f_2(t) = A_{20}\sin(\omega t + \varphi_2)$$
$$f_1 + f_2 = \operatorname{Im} A_1 e^{i\omega t} + \operatorname{Im} A_2 e^{i\omega t} = \operatorname{Im}\left[A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{i\omega t}\right] = \operatorname{Im}\left[(A_1 + A_2)e^{i\omega t}\right],$$

тобто $A_3 = A_1 + A_2$.

При диференціюванні гармонійних функцій їх комплексне зображення множиться на $i\omega$.

Нехай,

$$Y(t) = \operatorname{Im} Ae^{i\omega t}, \quad \frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt}\operatorname{Im} Ae^{i\omega t} = \operatorname{Im} A\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = \operatorname{Im} Ai\omega e^{i\omega t},$$

$A_1 = Ai\omega$.

Функції комплексної змінної

Дамо ***означення функції комплексної змінної***. Якщо кожному комплексному числу z, що належить множині E, поставлено у відповідність цілком визначене комплексне число W, що належить множині K, то говорять, що задана однозначна функція $W = f(z)$, визначена на множині E.

Функція називається ***багатозначною***, коли одному $z \in E$ поставлено у відповідність декілька значень змінної W. Точку W називають ***образом*** точки z. Множиною E може бути точка, лінія, область, її називають ***множиною визначення функції***, а K – ***множиною змінювання (значень) функції.***

З геометричної точки зору задання функції $W = f(z)$ означає, що відомо перетворення, яке відображає деяку множину E, що належить площині комплексної змінної z, у множину K комплексної змінної W.

Слід відзначити, що задання функції комплексної змінної рівносильно заданню двох функцій двох дійсних змінних. Якщо $z = x + iy$, а $W = u + iv$, то

$$u + iv = f(x + iy) = u(x, y) + iu(x, y)$$
$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$

Розглянемо, наприклад, функцію $W = z^2$. Ця функція однозначна. Відповідно до описаних вище формул маємо:

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$
$$u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy \quad .$$

Дослідження функцій комплексної змінної можна зводити до розгляду властивостей двох функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$. Наприклад, неперервність функції $W = f(z)$ у точці $z = z_0$ означає, що виконується умова

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

З іншого боку, якщо функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ неперервні в точці $M_0(x_0, y_0)$, то функція $W = u(x, y) + iv(x, y)$ неперервна в точці $z_0 = x_0 + iy_0$.

Похідною функції $W = f(z)$ називається границя відношення приросту функції $\Delta W = \Delta u + i\Delta v$ до приросту незалежної змінної $\Delta z = z_1 - z = \Delta x + i\Delta y$, коли $\Delta z \to 0$, тобто

$$w' = f'(z) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (2.1)$$

При цьому передбачається, що ця границя існує, коли точка $z_1 \to z$ (тобто $\Delta z \to 0$). Тому вимога диференційовності (тобто, існування границі) для функції комплексної змінної значно "сильніша" відповідної вимоги для функції дійсної змінної.

Проте, з існування першої похідної функції комплексної змінної отримуємо існування її похідних будь-якого порядку.

З огляду на те, що $\Delta W = \Delta u + i\Delta v$, можемо визначити $f'(z)$ у такий спосіб

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \qquad (2.2)$$

тобто підійти до питання існування похідною з погляду досліджень функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$.

Це дозволяє встановити необхідні і достатні умови існування похідної.

Теорема. Для того щоб функція $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, визначена в деякій області *G,* була диференційовною в точці z цієї області, необхідно і достатньо, щоб функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ були диференційовні в точці (x, y) і щоб виконувались умови

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (2.3)$$

Ці умови називають ***умовами Коші-Рімана.***

Отже, для того, щоб установити, чи має функція $W = u + iv$ похідну в точці $z = z_0 = x_0 + iy_0$, потрібно перевірити виконання умов (2.3) для функцій u та v у точці $M_0(x_0, y_0)$. І, нарешті, можна одержати, базуючись на умовах (2.1) та (2.2), формули диференціювання

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad . \qquad (2.4)$$

Розглянемо **приклади**.

1. Функція $W = z^2$ диференційовна у всій площині комплексної змінної *z*, тому що умови (2.3) виконуються у всіх точках площини Z. Похідна від цієї функції дорівнює

$$\frac{d(z^2)}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=2z$$

або

$$\frac{dW}{dz}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)+i\frac{\partial}{\partial x}(2xy)=2x+i2y=2z$$

Отримані результати можна узагальнити на випадок функції $W=z^n$, причому $W'=nz^n$.

2. Розглянемо функцію $W=\operatorname{Re} z$, тобто $W=u+iv, \operatorname{Re} z=x, u=x, v=0, W=x$. Для цієї функції умови Коші-Рімана ніде не виконуються:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1, \frac{\partial v}{\partial y}=0, \frac{\partial u}{\partial y}=0, \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

Отже, функція $W=\operatorname{Re} z$ ніде не диференційовна.

3. Розглянемо функцію $W=z\operatorname{Re} z$. У цьому випадку $u=x^2$, а $v=xy$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \frac{\partial v}{\partial y}=x, \frac{\partial u}{\partial y}=0, \frac{\partial v}{\partial x}=y$$

Тобто умови Коші-Рімана для цієї функції виконуються тільки в одній точці $z=0$ $(x=y=0)$. Отже, функція $W=z\operatorname{Re} z$ диференційовна тільки в одній точці $z=0$.

Використання систем комп'ютерної математики

Приклад.

Дослідження диференційовності функції, обчислення похідної.
Дана функція $f(z)=e^z$.

Розв'язання.

Із рівності $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ знаходимо

$$u(x,y)=e^x\cos y, \qquad v(x,y)=e^x\sin y.$$

Знаходимо частині похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y.$$

Умови Коші-Рімана виконуються в будь-якій точці z, яка належить комплексній області, та частинні похідні неперервні. Отже, функція e^z диференційована в будь-якій точці комплексної області. Використовуючи знайдені частинні похідні, запишемо похідну функції: $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+i\cdot e^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cdot e^{iy}=e^z$.

Розв'язок приклада у середовищі пакету Mathcad

Дослідження диференційовності функції, обчислення похідної.
Дана функція $f(z)=e^z$.

Дослідження диференційованості функції

Визначимо функцію комплексної змінної

$z(x,y) := x + i\cdot y$	*Для того, щоб ввести уявну одиницю і, наберіть на клавіатурі 1і та клацніть мишкою поза виділеною рамкою*
$f(x,y) := \exp(x + i\cdot y)$	*Для того, щоб відобразити комплексне число у робочому документі в алгебраїчній формі, клацніть у панелі Symbolic на ключовому слові complex та введіть у зазначеній позиції ім'я комплексної змінної, та клацніть мишкою поза виділеною рамкою*

$f(x,y)$ complex $\rightarrow \exp(x)\cdot\cos(y) + i\cdot\exp(x)\cdot\sin(y)$

Знаходимо u(x, y) = Re f(z) и v(x, y) = Im f(z)

$u(x,y) := \mathrm{Re}(f(x,y))$	$u(x,y) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\exp(x+i\cdot y) + \frac{1}{2}\cdot\exp\left(\overline{(x+i\cdot y)}\right)$
$v(x,y) := \mathrm{Im}(f(x,y))$	$v(x,y) \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot i\cdot\left(\exp(x+i\cdot y) - \exp\left(\overline{(x+i\cdot y)}\right)\right)$

Визначимо частинні похідні:

$Dxu(x,y) := \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\cdot\exp(x+i\cdot y) + \frac{1}{2}\cdot\exp\left(\overline{(x+i\cdot y)}\right)\right)$	$Dyu(x,y) := \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}\cdot\exp(x+i\cdot y) + \frac{1}{2}\cdot\exp\left(\overline{(x+i\cdot y)}\right)\right)$
$Dxv(x,y) := \frac{d}{dx}\frac{-1}{2}\cdot i\cdot\left(\exp(x+i\cdot y) - \exp\left(\overline{(x+i\cdot y)}\right)\right)$	$Dyv(x,y) := \frac{d}{dy}\frac{-1}{2}\cdot i\cdot\left(\exp(x+i\cdot y) - \exp\left(\overline{(x+i\cdot y)}\right)\right)$

$Dxu(x,y) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot \exp(x+i\cdot y) + \frac{1}{2}\cdot \exp(x-i\cdot y)$

$Dyu(x,y) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot i\cdot \exp(x+i\cdot y) - \frac{1}{2}\cdot i\cdot \exp(x-i\cdot y)$

$Dxv(x,y) \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot i\cdot (\exp(x+i\cdot y) - \exp(x-i\cdot y))$

$Dyv(x,y) \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot i\cdot (i\cdot \exp(x+i\cdot y) + i\cdot \exp(x-i\cdot y))$

Перевіряємо умови Коші-Рімана: D xu = D yv, D yu = - D xv

Given

$Dxu(x,y) = Dyv(x,y)$

$Dyu(x,y) = -Dxv(x,y)$ $\quad Find(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Умови Коші-Рімана виконуються при всіх x, y, тобто при всіх z. Функція exp(z) диференційовна на всій комплексній площині, т. як частині похідні u(x,y) та v(x,y) неперервні у будь-якій точці комплексної площини та виконуються умови Коші-Рімана.

Обчислимо похідну exp' (z)

$f(x,y) := Dxu(x,y) + i\cdot Dxv(x,y)$

$f(x,y) \rightarrow \exp(x+i\cdot y)$

$Dxu(x,y) + i\cdot Dxv(x,y) \rightarrow \exp(x+i\cdot y)$

Тобто, як і для дійсної змінної exp'(z) = exp(z)

Розв'язок приклада в середовищі пакету Mathematica

Диференціювання функції комплексної змінної.
Дослідити на диференційованість функцію `f(z) = Exp[z]`.
Введемо функцію e^z

```
In[15]:= f[z_] := Exp[z]
```

Обчислимо `Re[f]`

```
In[16]:= u[x_, y_] = ComplexExpand[Re[f[x + I y]]]
Out[16]= e^x Cos[y]
```

Обчислимо `Im[f]`

```
In[17]:= v[x_, y_] = ComplexExpand[Im[f[x + I y]]]
Out[17]= e^x Sin[y]
```

Перевіримо умови Коші-Рімана

```
In[18]:= D[u[x, y], x] == D[v[x, y], y]
Out[18]= True
In[19]:= D[u[x, y], y] == -D[v[x, y], x]
Out[19]= True
```

Бачимо, що умови Коші-Рімана виконуються на всій комплексній площині. Так як частині похідні `u` та `v` неперервні, то функція `Exp[z]` дифференційовна на всій комплексній площині.

Обчислимо похідну функції `Exp[z]`

```
In[20]:= f'[z]
Out[20]= e^z
In[21]:= Clear[f, u, v]
```

РОЗДІЛ 3
АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ. АНАЛІТИЧНІСТЬ БАГАТОЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ. ЗВ'ЯЗОК АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ З ГАРМОНІЙНИМИ

Функція $W = f(z)$ називається ***аналітичною*** (інакше ***регулярною, голоморфною***) в області D, якщо вона в цій області однозначна і диференційовна в кожній точці. Аналітичність функції в точці передбачає виконання умов аналітичності в деякому околі цієї точки.

Так, наприклад, функція $W = z\operatorname{Re} z$, диференційовна в точці $z = 0$, але не є аналітичною. Іншими словами, поняття аналітичності і диференційовності в області збігаються. Умови ж аналітичності в точці є більш "жорсткими", ніж умови диференційовності.

Як тлумачити поняття аналітичності у випадку багатозначних функцій? Аналітичні функції складають основу ТФКЗ, стосовно них отримано важливі результати. Тому є необхідним введенняи поняття аналітичності і для багатозначних функцій. Якщо багатозначна функція диференційовна в деякій області, то для побудови аналітичної функції необхідно виділити з багатозначної функції її ***однозначну неперервну вітку*** в цій області. Для з'ясування цього поняття проаналізуємо конкретну задачу.

Розглянемо функцію $W = \sqrt[3]{z-a}$ ($a-$ комплексне число). Як відомо, ця функція є багатозначною. Кожному значенню z відповідають три значення W. Дійсно, якщо прийняти

$$z - a = re^{i\varphi},$$

то

$$w = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right), \quad (k = 0,1,2) \qquad (3.1)$$

причому під $\sqrt[3]{r}$ розуміється арифметичний (додатний) корінь. Виберемо зі значень k довільне, наприклад $k = 1$, отримємо:

$$w\big|_{k=1} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right) \qquad (3.2)$$

Якщо точка z обходить точку a по деякій замкненій кривій l, що оточує точку a, у додатному напрямку, то величина модуля r не зміниться, а φ – збільшиться на 2π. Таким чином, значення кореня, обумовлене формулою (3.2), прийме наступне значення при $k = 2$:

$$w\big|_{k=1} \to \sqrt[3]{r}(\cos\frac{\varphi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi+4\pi}{3}) \qquad (3.3\ )$$

Якби точка z обходила точку a, у протилежному напрямку, то значення кореня $w\big|_{k=1}$ перейшло б у $w\big|_{k=0}$, оскільки аргумент φ зменшився б на 2π.

Точка, при обході котрої спочатку обране значення багатозначної функції переходить у нове, називається ***точкою розгалуження*** багатозначної функції. Отже, для функції $w = \sqrt[3]{z-a}$ точкою розгалуження є точка $z = a$.

Якщо точка z обходить замкнутий контур l_1, що не включає в себе точку розгалуження $z = a$, то значення кореня не змінюється.

Отже, щоб зафіксувати на комплексній площині z яке-небудь значення кореня $w = \sqrt[3]{z-a}$, необхідно виключити можливість обходу точкою z точки розгалуження $z = a$. Цього можна досягти шляхом введення розрізу, що з'єднує точку $z = a$ з точкою $z = \infty$. Тоді точка z не зможе оминути точку $z = a$ і, отже, виключається можливість переходу від одного значення кореня до іншого. Тоді говорять, що на площині комплексної змінної z із розрізом від точки $z = a$ до точки $z = \infty$ виділена однозначна вітка багатозначної функції $w = \sqrt[3]{z-a}$. Точка $z = a$ називається ***алгебраїчною точкою*** розгалуження.

Встановимо тепер зв'язок між аналітичними функціями комплексної змінної z і гармонійними функціями двох дійсних змінних.

Гармонійною називають функцію $\varphi(x, y)$, якщо вона однозначна і задовольняє рівнянню Лапласа.

$$\nabla^2\varphi(x, y) = 0 \text{ або } \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad (3.4)$$

Якщо функція $W = u + iv$ є аналітичною, то функції u і v є гармонійними. Дійсно, за умовами Коші-Рімана, маємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Додамо почленно два останніх вирази, одержимо:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \; = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0.$$

Аналогічно можна показати, що $\nabla^2 v = 0$. Умови Коші-Рімана для функцій u і v є умовами спряженості гармонійних функцій. Отже, дійсна і уявна частини аналітичної функції є гармонійно спряженими функціями.

Це означає, що за даною гармонійною функцією $\varphi(x, y)$, ($\nabla^2\varphi = 0$) можна побудувати аналітичну функцію $f(z)$, для якої $\varphi(x, y)$ є дійсною частиною, тобто

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{3.5 }$$

причому

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x}dy\,. \tag{3.6}$$

Отже, для побудови $f(z)$ необхідно "відновити" функцію $\psi(x, y)$ за її повним диференціалом (3.6). Ця задача має декілька способів розв’язання. Розглянемо один із них на прикладі.

Приклад. Знайти аналітичну функцію, яка має уявну частину

$$v = e^x \sin y + 2xy + 5y\,.$$

Розв’язання.

Переконаємось спочатку в тому, що v є гармонійною функцією, знаходимо

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y + 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y + 2y + 5\,,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^x \sin y\,,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -e^x \sin y$$

та

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0\,.$$

За умовою Коші-Рімана

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}\,,$$

цьому відношенню має задовольняти шукана функція $u(x, y)$, одержимо

$$u(x, y) = \int\left(e^x \cos y + 2x + 5\right)dx + C(y) = e^x \cos y + x^2 + 5x + C(y).$$

Тут стала інтегрування $C(y)$ залежить від змінної y, тому що інтегрування здійснюється по x.

Тепер знаходимо $\frac{\partial u}{\partial y}$ і знайдений вираз прирівнюємо до $-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Одержимо

$$-e^x \sin y + C_y{}'(y) = -e^x \sin y - 2y .$$

Таким чином,

$$C(y) = -\int 2y dy + C .$$

Отже,

$$u(x, y) = e^x \cos y + x^2 + 5x - y^2 + C .$$

Шукана аналітична функція має вигляд

$$f(z) = (e^x \cos y + x^2 + 5x - y^2 + C) + i\left(e^x \sin y + 2xy + 5y\right).$$

Її зведемо до вигляду

$$f(z) = e^z + z^2 + 5z + C .$$

$$f(z) = \left(e^x \cos y + ie^x \sin y\right) + \left(x^2 + i2xy - y^2\right) + \left(5x + i5y\right) = e^z + z^2 + 5z + C ,$$

C – комплексна довільна стала.

Отже, за даною гармонійною функцією можна одержати нескінченну множину відповідних аналітичних функцій, що відрізняються на сталу.

РОЗДІЛ 4
ГЕОМЕТРИЧНЕ ТЛУМАЧЕННЯ АРГУМЕНТУ ТА МОДУЛЯ ПОХІДНОЇ. ПОНЯТТЯ ПРО КОНФОРМНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ. ТЕОРЕМА РІМАНА

Розглянемо аналітичну в деякій області G функцію $W = f(z)$, що відображає цю область на область G'. Нехай при цьому точка z_0 переходить у точку W_0, а криві γ_1, γ_2 – відповідно в криві Γ_1, Γ_2 (рис. 4.1).

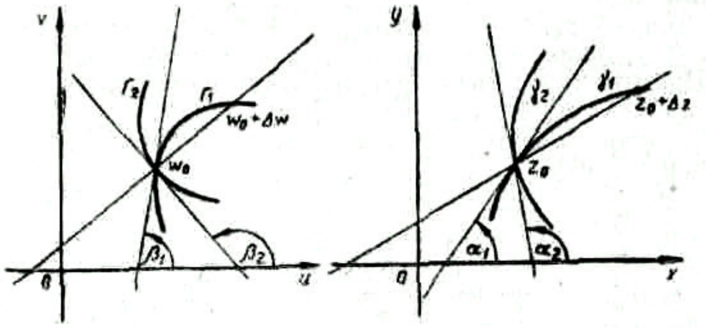


Рис. 4.1

Припустимо, що $f'(z_0) \neq 0$. Тоді із рівності

$$\lim_{\Delta z \leftarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = f'(z_0)$$

знаходимо:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta W}{\Delta z} \right| = \left| f'(z_0) \right|, \quad \lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta W}{\Delta z} = \arg f'(z_0)$$

Оскільки
$$\arg \frac{\Delta W}{\Delta z} = \arg \Delta W - \arg \Delta z,$$

то

$$\lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta W - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \arg f'(z_0).$$

Вектори $\Delta W, \Delta z$, направлені вздовж хорд кривих Γ_1 і γ_1. Тому $\arg \Delta W$ та $\arg \Delta z$ – кути, утворені січними цих ліній з додатними напрямками відповідних дійсних осей. Границі $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \Delta W, \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z$ дорівнюють відповідно кутам β_1, α_1 між дотичними до кривих Γ_1 і γ_1 у точках W_0 та z_0, додатними напрямками відповідних дійсних осей. Отже, $\arg f'(z_0) = \beta_1 - \alpha_1$.

Якщо тепер точка $z_0 + \Delta z$ належить кривій γ_2, то відповідна їй точка $W_0 + \Delta W$ буде належати Γ_1. Як і в попередньому випадку, переконаємося, що

$\arg f'(z_0) = \beta_1 - \alpha_1$, де β_1, α_1 – кути, утворені дотичними до ліній Γ_2 і γ_2 у точках W_0 і z_0 з додатними напрямами осей Ou, Ox.

Таким чином,

$$\beta_1 - \alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2 \quad \text{та} \quad \beta_1 - \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1.$$

З огляду на те, що кут між дотичними до γ_1, γ_2 у точці z_0 дорівнює $\alpha_2 - \alpha_1$, а кут між дотичними до Γ_1 і Γ_2 у точці W_0 дорівнює $\beta_1 - \beta_2$, отримаємо висновок: відображення за допомогою аналітичної функції $f(z)$ має властивість збереження кутів у всіх точках, де похідна $f(z)$ не дорівнює нулю.

Для з'ясування геометричного змісту аргументу похідної $f'(z_0)$ співставимо площини z і W так, щоб точка W_0 збіглася з точкою z_0, а вісь Ou була паралельною до осі O_X. Тоді, скориставшись, наприклад, рівністю $\arg f'(z_0) = \beta_1 - \alpha_1$ робимо висновок про те, що аргумент похідної дорівнює куту між дотичними до кривих γ_1 і Γ_1. Тому говорять, що в точці, де $f'(z_0) \neq 0$, аргумент похідної дорівнює куту повороту дотичної.

Розглянемо тепер рівність

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta W}{\Delta z} \right|.$$

Оскільки $|\Delta W|$ – відстань між W_0 і $W_0 + \Delta W$, а $|\Delta z|$ – відстань між z_0 і $z_0 + \Delta z$, то відношення $\left| \frac{\Delta W}{\Delta z} \right|$ – вказує на те, у якому відношенні при відображенні $f(z)$ змінюється відстань між образами точок z_0 та $z_0 + \Delta z$. На підставі цього $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta W}{\Delta z} \right|$ називають ***коефіцієнтом розтягу*** (взагалі вважають при цьому і розтяг і стиск в залежності від того $|f'(z_0) > 1|$ чи $|f'(z_0)| < 1$) в точці z_0 при відображенні за допомогою функції $f(z)$. Значення $f'(z)$ не залежить від того, за яким законом $z_0 + \Delta z$ наближається до точки z_0. Отже, коефіцієнт розтягу в даній точці сталий і дорівнює модулю похідної $f'(z)$. Це означає, що при $|f'(z_0)| > 1$ в околі точки z_0 початкова відстань між точками площини Z збільшується для відображених точок $W = f(z)$, тобто $|\Delta W| > |\Delta z|$. Відбувається розтяг площини в околі точки z_0. Якщо $|f'(z_0)| < 1$, то відображення $W = f(z)$ призводить до стиску площини Z.

Іноді ще говорять, що при відображенні всі нескінченно малі дуги, що виходять із точки z_0, одержують один і той же розтяг, рівний $|f'(z_0)|$.

Таким чином, якщо в точці z_0 похідна аналітичної функції не дорівнює нулю, то всі нескінченно малі дуги, що виходять із z_0, при відображенні повертаються на один і той самий кут, що дорівнює значенню аргументу похідної в точці z_0, і одержують один і той самий розтяг, що дорівнює модулю похідної в точці z_0.

Відображення однієї області G на іншу область G' називають ***конформним*** у точці z_0 області G, якщо воно в цій точці має властивість сталості кутів і властивість сталості коефіцієнта розтягу. У випадку, коли відображення конформне в кожній точці області G, його називають ***конформним відображенням*** G на G'.

Отже, якщо аналітична в області G функція $f(z)$ має в кожній точці області відмінну від нуля похідну, то відображення, здійснюване нею, буде конформним, тобто характеризується *сталістю розтягів і консерватизмом кутів*. При цьому, нескінченно мала фігура площини Z при аналітичному відображенні перейде в площині W у фігуру, що із точністю до нескінченно малих більш високого порядку подібна вихідній.

Отже, у достатньо малому околі кожної точки, де $f'(z_0) \neq 0$ аналітичне відображення є відображенням подібності або конформним відображенням.

Розглянемо конформне відображення за допомогою лінійної функції $W = az + b$ (a, b – комплексні числа). Цю функцію можна розглядати як суперпозицію трьох функцій

1) $t = kz, k = |a|, a = ke^{i\varphi}$, (4.1)

2) $\xi = te^{i\varphi}, \varphi = te^{i\varphi}, \varphi = Arga,$ (φ – дійсне число), (4.2)

3) $W = \xi + b$. (4.3)

Перше перетворення називається ***перетворенням розтягу***. Дійсно, з (4.1), приймаючи

$$z = re^{i\psi},$$

одержимо
$$t = kre^{i\psi} ,$$
тобто
$$|t| = kr, a Argt = Argz = \psi .$$

Отже, модуль змінився в k раз, а аргумент залишився незмінним. Тому точка t будується шляхом переміщення точки z вздовж променя, який з’єднує її з початком координат так, щоб відстань від початку координат змінилась у k раз.

Друге перетворення називається ***перетворенням обертання***.
Приймаючи у (4.2)

$$t = \rho e^{i\theta},$$

знайдемо $\xi = \rho e^{i(\theta+\psi)}$,

тобто $|\xi| = |t| = \rho$, $Arg\xi = Argt + \psi = \psi + \theta$.

Отже, при переході від t до ξ модуль не змінюється, а аргумент збільшується на кут ψ .

Точка ξ утворюється з t шляхом повороту навколо початку координат на кут ψ.

Третє перетворення називається ***перетворенням переносу***. Якщо $W = \xi + b$, то це означає, що W утворюється із ξ шляхом зсуву на величину b.

Отже, при відображенні лінійною функцією відбудеться розтяг, поворот і паралельне перенесення фігури, заданої в площині Z. Звідси слідує, що при такому відображенні прямі площини Z перейдуть у прямі площини W, а коло – в коло.

Розглянемо тепер ***дробово-лінійне перетворення***. Це перетворення вигляду (a, b, c, d – комплексні числа)

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0. \tag{4.4}$$

Якщо $ad - bc = 0$, то в цьому випадку вся площина Z переходить в одну точку площини W.

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k \qquad w = \frac{ckz + dk}{cz+d} = k$$

Перетворимо формулу (4.4)

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{acz+bc}{c(cz+d)} = \frac{acz+ad+bc-ad}{c(cz+d)} = \frac{a(cz+d)+(bc-ad)}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{z+d/c}$$

Звідси отримаємо, що дробо-лінійне перетворення є суперпозицією трьох:

1) $t = z + \dfrac{d}{c}$ (4.5)

2) $\xi = \dfrac{a}{t}, a = \dfrac{bc-ad}{c^2}$ (4.6)

3) $W = \xi + \dfrac{a}{c}$ (4.7)

Відображення (4.5) і (4.7) є лінійними. Перетворення (4.6) називається перетворенням ***інверсії***. Розглянемо його геометричний зміст.

Нехай

$$W = \frac{R^2}{z},$$

тоді прийнявши $$z = re^{i\varphi},$$
отримаємо

$$w = \frac{R^2}{r} e^{-i\varphi}, \quad |w| = \frac{R^2}{r} = \frac{R^2}{|z|}, \qquad \arg w = -\varphi = -\arg z.$$

Таким чином, при цьому перетворенні аргумент змінює знак на протилежний, а між модулями w і z існує співвідношення $|W| \cdot |z| = R^2$, що у геометрії означає симетрію точок w і z відносно кола радіуса R. Побудова точки w, симетричній точці z відносно кола $|z| = R$, називається ***інверсією точки z.***

Отже, перетворення $W = \frac{R^2}{z}$ є інверсія точки в колі $|z| = R$ із наступним дзеркальним відображенням у дійсній осі.

Наведемо **теорему Рімана,** що є основою теорії конформних відображень.

Довільну однозв'язну область, що лежить у розширеній комплексній площині (Z), границя якої складається більш ніж з однієї точки, можна конформно відобразити на круг $|W| < 1$, причому нескінченною кількістю різних способів.

Приклади.

1. Відобразимо верхню півплощину $\operatorname{Im} z > 0$ на внутрішність одиничного круга $|W| < 1$ так, щоб точка півплощини $z = a$ перейшла в центр круга.

Скористаємося принципом симетрії дробово-лінійного перетворення, згідно з яким точки, симетричні до кола (або прямої) площини Z при дробово-лінійному перетворенні переходять у точки, симетричні відносно образу цього кола (або прямої) у площині W.

У площині Z точки a і $\bar{a}$ симетричні відносно дійсної осі. Оскільки точка a повинна перейти в точку $w = 0$, то точка $\bar{a}$ (за принципом симетрії) – у $w = \infty$.

Отже, шукане перетворення має вигляд

$$w = k\frac{z-a}{z-\bar{a}},$$

де k – комплексний коефіцієнт, обумовлений відповідністю границь.

2. Знайти дробово-лінійне перетворення, що переводять точки $z=-1,-1,$ ∞ у точки $w=0$*, 1, -1*.

Розв'язання.

$$\frac{w-0}{w-1}:\frac{-1-0}{-1-1}=\frac{z+1}{z-1}:\frac{\infty+1}{\infty-1}$$

$$\frac{2w}{w-1}=\frac{z+1}{z-1}$$

звідки отримуємо $$w=\frac{z+1}{-z+3}.$$

3. Відобразити комфорно площину Z на площину W так, щоб точки *-1, i, 1* перейшли у точки *-1, 0, 1*.

Розв'язання.

Шукане відображення має вигляд $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$

Визначимо коефіцієнти a, b, c, d. Точці $z=-1$ відповідає точка $w=-1$. Після підстановки отримали:

$$-1=\frac{-a+b}{-c+d}.$$

Аналогічно точці $z=i$ відповідає $w=0$.

$$0=\frac{ai+b}{ci+d}.$$

При $z=1$, $w=1$

$$1=\frac{a+b}{c+d}.$$

З цієї системи визначаємо коефіцієнти

$$b=-ai, c=-ia, d=a.$$

$$w=\frac{az-ai}{-ai+a}\,i\,,$$

отже,

$$w=i\frac{z-i}{z+i}.$$

Вправи для самостійної роботи

❖ Подати перетворення $w=(1+i)z-1$ через найпростіші. Виконати перетворення, знайти зображення:

1) точки $z = 1 - i$;

2) відрізка, що сполучає точки $z_1 = 1 - i$ та $z_2 = -i$;

3) кола $|z - (1 + i)| = 2$.

❖ Знайти загальну форму цілого лінійного перетворення такого, що переводить:

1) верхню півплощину на себе;

2) верхню півплощину на нижню напівплощину;

3) праву півплощину на себе.

❖ Для функції $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ знайти зображення наступних ліній:

1) сімейства кіл $x^2 + y^2 = ax$;

2) пучка паралельних прямих $y = x + b$;

3) параболи $y = x^2$.

❖ Знайдіть образ квадрата $x > 0$, $y > 0$ при відображенні функцією $w = \dfrac{z - i}{z + i}$.

❖ Знайдіть образ півкола $1 < |z|$ $\operatorname{Im} z > 0$ при відображенні функцією $w = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$.

❖ Знайти лінійно-дробові функції, що переводять точки *-1; i; 1+i* відповідно у точки:

1) $0; 2i; 1 - i$ 2) $i; \infty; 1$.

❖ Знайти загальний вигляд дробово-раціонального перетворення

1) верхньої півплощини на себе;

2) верхньої півплощини на нижню півплощину;

3) верхньої півплощини на праву півплощину.

❖ Знайти функцію, що відображає взаємно однозначно одиничний круг на себе і таку, що:

1) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ $\arg f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$;

2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \quad \arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$;

3) $f(0)=0 \quad \arg f'(0)=-\frac{\pi}{2}$.

❖ Верхнє півколо $|z|=1, \quad \operatorname{Im} z>0$ відобразити на перший квадрант $\operatorname{Re} w>0 \ \operatorname{Im} w>0$.

❖ Функція $w=e^{i\alpha}\frac{z-\beta}{z-\beta}(\beta=a+ib, b>0)$ відображає верхню напівплощину на одиничний круг.

1) Знайти $\arg w(x)=\Theta(x)$.

2) Знайти $w'(\beta)$.

3) З’ясувати, яка частина верхньої півплощини при цьому відображенні стискається і яка розтягується.

❖ Знайти лінійно-дробову для дробу функцію за наступними умовами:

1) точки *1* та *i* нерухомі, а точка *0* переходить у точку *-1*;

2) точки $\frac{1}{2}$ та *2* нерухомі, а точка $\frac{5}{4}+\frac{3}{4}i$ переходить у ∞.

Перетворення $W=Z^{\alpha}$

(α - дійсне)

Перетворення $w=z^{\alpha}$ кута з вершиною в початку координат площини Z взаємно однозначно відображає в кут з вершиною в початку координат площини W, розміром в α раз більшого, якщо тільки розмір не перевищує 2π.

Перетворення $W=e^{Z}$

Функція $w=e^{z}$ конформно відображає смугу, паралельну осі *OX*, шириною h не більше 2π, в кут із вершиною в початку координат величиною h.

Логарифмічна функція

Головне значення логарифма $w=\ln z$ відображає повну площину Z на смугу $-\pi<y<\pi$.

Приклади.

1. Знайти відображення $w = f(z)$ напівсмуги $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $y > 0$ на півплощині, таке, щоб $f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$ $f(0) = 0$.

Розв'язання.

Повернемо напівсмугу на прямий кут проти годинникової стрілки і застосуємо відображення $\omega = e^{iz}$. Отримаємо внутрішність правої половини одиничного круга. Поворотом $V = i\omega$ отримаємо верхнє півколо. Функція $\xi = \left(\frac{1+V}{1-V}\right)^2$ відобразить половину круга на верхню напівплощину. Отже, задана півсмуга відображається у верхню напівплощину за допомогою функції $\xi = \left(\frac{1+iw}{1-iw}\right)^2 = \left(\frac{1+ie^{iz}}{1-i^{iz}}\right)^2$. При цьому точки $z = -\frac{\pi}{2}$; *0*; $\frac{\pi}{2}$ перейдуть у точки *-1*, $\xi = \infty$,*0*.

Відобразимо верхню півплощину на верхню півплощину так, щоб точки *-1*, $\xi = \infty$, *0* перейшли в точки *w*=*-1*, 0, 1.

Розглянемо відображення

$$w = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}.$$

Коефіцієнти визначаємо із системи рівнянь:

$$-1 = \frac{a}{c}\ 0 = \frac{-a+b}{-c+d}\ 1 = \frac{b}{a}\ b = a\ c = -a\ d = a \text{ і } w = \frac{\xi+1}{\xi-1}.$$

Остаточне перетворення має вигляд:

$$w = \frac{1 + \left(\frac{1+ie^{iz}}{1-ie^{iz}}\right)^2}{1 - \left(\frac{1+ie^{iz}}{1-ie^{iz}}\right)^2} = \frac{1-e^{2iz}}{-2ie^{iz}} = \sin Z.$$

Вправи для самостійної роботи

❖ Знайти область, на яку півкруг $|z| < 1$, $\operatorname{Re} z > 0$ відображається за допомогою функції $w = z + z^2$.

❖ Знайти функцію, яка область, що знаходиться поза колом $x^2 + y^2 + 2x = 0$ конформно відображає на круг $|w| < 1$ так, щоб точки *-1*, $z = 0$, $i - 2$ перейшли в w = *1-i, -1*.

❖ Відобразити верхню площину в одиничне коло так, щоб точка α півплощини перейшла в центр кола.

❖ Відобразити одиничне коло в себе, щоб точка α перейшла в центр кола.

❖ Відобразити верхню півплощину на себе так, щоб точки z = *0*, *-1*, ∞ перешли в точки w = *-1*, *0*, *1*.

❖ Верхнє півколо $|z| < 1 \ \mathrm{Im}\, z > 0$ конформно відобразити на верхню півплощину так, щоб точки z = *-1*, *0*, *1* перейшли в точки w = *-1*, *0*, *1*.

❖ Відобразити смугу $-\dfrac{\pi}{4} < \mathrm{Re}\, z < \dfrac{\pi}{4}$ на круг $|z| < 1$ із відповідністю трьох граничних точок $f\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right) = \pm 1 \ f(i\infty) = i$ ($i\infty$ позначає верхню нескінченно

віддалену точку смуги).

❖ Знайти область, отриману при відображенні півкруга $|z| < 1$, $\mathrm{Im}\, z > 0$ функцією $w = \dfrac{1}{z^2 + 1}$.

❖ З'ясувати, в що переходять при відображенні : $w = e^z$

1) прямокутна сітка $x = e$, $y = e$;

2) прямі $y = kx + b$;

3) смуга між прямими $y = x$, $y = x + 2\pi$;

4) смуга $x < 0$, $0 < y < 2 \leq 2\pi$.

❖ З'ясувати, в що перетворяться при відображенні : $w = \ln z$

1) полярна сітка $|z| = R$, $\arg z = \theta$;

2) кут $0 < \arg z < 2$;

3) сектор $|z| < 1$, $0 < \arg z < 2$.

❖ З’ясувати, в що перетворяться при відображенні $w = \cos z$:

1) прямокутна сітка $x = c$, $y = c$;

2) напівсмуга $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y < 0$;

3) напівсмуга $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$;

4) смуга $0 < x < \pi$.

Використання системи комп’ютерної математики

Приклад.

Знайдемо зображення заданих функцій-оригіналів $f(x) = ax$ та $f(x) = \exp(-x)$. Для перевірки правильності розрахунків виконаємо зворотне перетворення.

Знайдемо оригінали заданих зображень $F(p) = {}^{a}\!/_{p^2}$ та $F(p) = {}^{1}\!/_{p+1}$.

Розв’язок приклада в середовищі пакету Mathcad

Обчислимо зображення функцій $f(t) = at$, $f(t) = exp(-t)$,
та оригінали для отриманих зображень $F(s) = a/s$^2, $F(s) = 1/(s+1)$

	Перший спосіб

$a \cdot t$	$\frac{a}{s^2}$	*Для того, щоб обчислити зображення, виділіть змінну t, у меню Symbolics, виберіть разділ Transform та виконайте (клацніть на рядку) операцію Laplace*

$a \cdot t$		$a \cdot t$	*Для того, щоб перевірити правильність розрахунків, виділіть у знайденому зображені змінну s, у меню Symbolics виберіть розділ Transform та виконайте (клацніть на рядку) операцію Inverse Laplace*

Другий спосіб:

$\exp(-t)\ \text{laplace}, t \rightarrow \frac{1}{(s+1)}$	*Для того, щоб обчислити зображення, клацніть у панелі Symbolic на ключовому слову laplace, видаліть зліва від ключового слова одну позначку, введіть вираз для функції-оригінала, після ключового слова введіть кому, потім ім’я змінної*

	та клацніть поза рамкою
$\frac{1}{s+1}$ invlaplace, s $\rightarrow$ exp(−t)	*Для того, щоб перевірити правильність розрахунків, дійте так само, як при обчисленні зображення, але використовуйте ключове слово invlaplace*
exp(−t) laplace, t $\rightarrow \frac{1}{(s+1)}$	

Розв'язок приклада в середовищі пакету Mathematica

Розв'язання задачі Коші операційним методом.

Для функцій $f(x) = a x$ та $f(x) = e^{-x}$ знайти перетворення Лапласа.

Знайдемо перетворення Лапласа функції $a x$

In[1]:= `LaplaceTransform[a x, x, s]`

Out[1]= $\frac{a}{s^2}$

Знайдемо перетворення Лапласа функції e^{-x}

In[2]:= `LaplaceTransform[`e^{-x}`, x, s]`

Out[2]= $\frac{1}{1+s}$

Знайдемо зворотне перетворення Лапласа функції $\frac{a}{s^2}$

In[3]:= `InverseLaplaceTransform[`$\frac{a}{s^2}$`, s, x]`

Out[3]= $a x$

Знайдемо зворотне перетворення Лапласа функції $\frac{1}{1+s}$

In[4]:= `InverseLaplaceTransform[`$\frac{1}{1+s}$`, s, x]`

Out[4]= e^{-x}

Інтеграл Крістоффеля – Шварца

Інтеграл Крістоффеля – Шварца:

$$W = A\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}dz + B$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha j = n-2$$

Відображає конформно верхню напівплощину $y>0$ у внутрішність площини W, контур многокутника відповідає дійсній вісі, вершини $w_1, w_2, ...,$ w_n відповідають різним точкам. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ осі 0X і внутрішній кут многокутника в вершині w_j рівний $\alpha_j\pi$ ($j = 1,2,...,n$). При даних три довільно вибраних значеннях. Решта параметрів існує єдиним способом.

Якщо вершині многокутника відповідає нескінченно віддалена точка, наприклад $a_n = \infty$, то формула Крістоффеля – Шварца приводиться до вигляду:

$$w = A'\int_{z_0}^{z}(z-a_1')^{2_1-1}(z-a_2')^{2_2-1}\cdots(z-a'_{n-1})^{2_{n-1}-1}dz + B',$$

де A', B' – сталі параметри, $a_1'\ a_2', \ldots, a_{n-1}'$ – певні точки осі *0X.*

Приклади.

1. Відобразити верхню півплощину на смугу $-\frac{\pi}{2} \le w \le \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re} w > 0$.

Розв’язання.

Кути трикутника в радіанах $\pi/2 = \alpha_1\pi, \quad -\pi/2 = \alpha_2\pi$ але $\alpha_2 = 1/2, \quad 0\pi, \quad \alpha_3 = 0$, отже для цього трикутники будуть $\alpha_1 = 1/2\ \alpha_2 = 1/2\ \alpha_3 = 0$.

Оскільки три константи інтеграла Крістоффеля – Шварца можна вибрати довільно, то покладемо $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$.

Тоді

$$w = A\int_{0}^{z}(z+1)^{\frac{1}{2}-1}(Z-1)^{\frac{1}{2}-1}dz + B,$$

або

$$w = A\int_{0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}dz + B$$

і

$$w = A\arcsin z + B.$$

Визначимо константи *A* і B.

Точці $z = -1$ відповідає

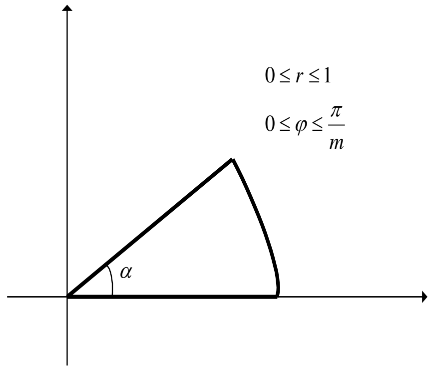
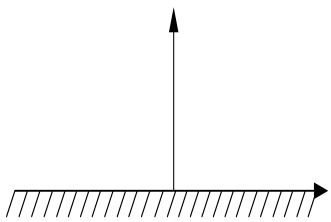
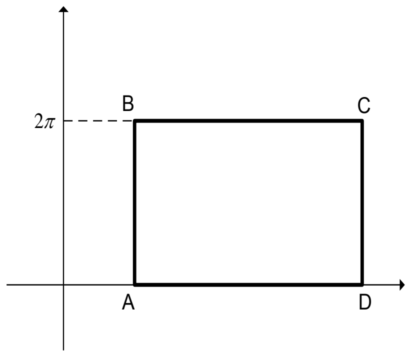
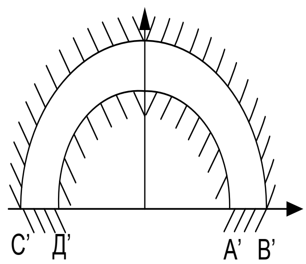
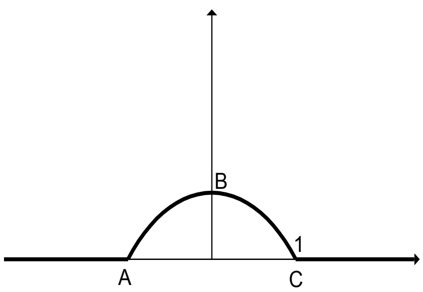
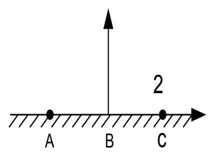
$$w = -\frac{\pi}{2} \text{ і } -\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}A + B$$

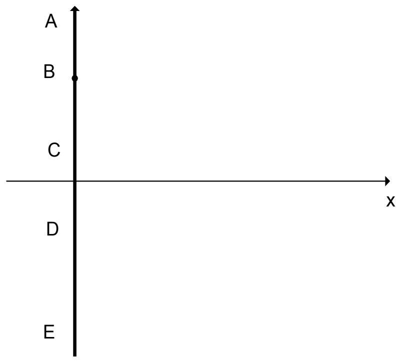
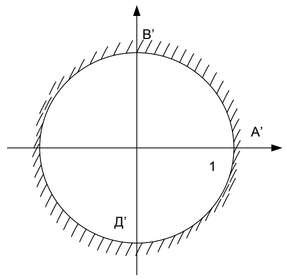
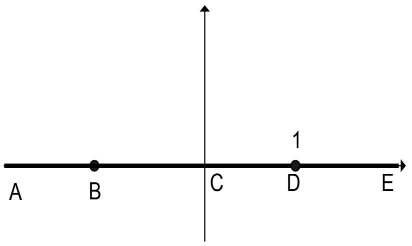
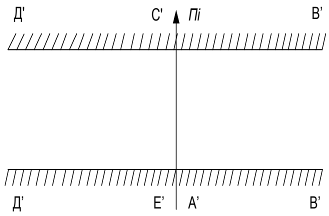
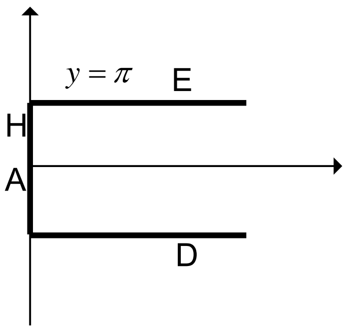
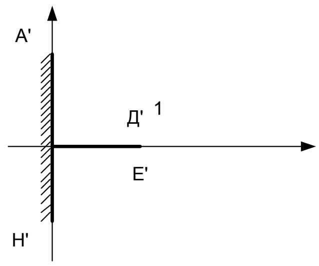
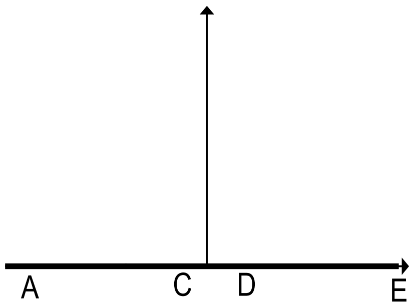
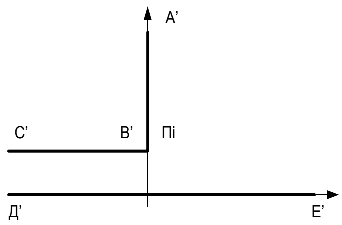
Точці $w = \frac{\pi}{2}$ відповідає

$$z = 1 \text{ і } \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}A + B\,.$$

Розв’язавши отриманні рівняння, маємо $B = 0$, $A = 1$.

Отже, $$w = \arg\sin z\,.$$

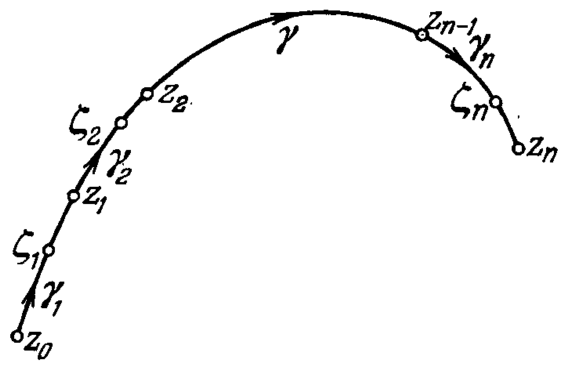
<table>
<tr><th colspan="3">Таблиця відображень</th></tr>
<tr><td>Z - площина</td><td>Формула відображення</td><td>W - площина</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$W \equiv \left(\frac{Z^m + 1}{Z^m - 1}\right)^2$</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>$W = e^Z$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$W = Z + \frac{1}{Z}$</td><td>
</td></tr>
</table>

	$$W=\frac{Z-1}{Z+1}$$	
	$$W=\ln\frac{Z-1}{Z+1}$$	
	$$W=\frac{e^{Z}+1}{e^{Z}-1}$$	
	$$W=2(Z+1)^{\frac{1}{2}}+\ln\frac{(Z+1)^{\frac{1}{2}}-1}{(Z+1)^{\frac{1}{2}}+1}$$	

РОЗДІЛ 5
ІНТЕГРАЛ ВІД ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ОБЧИСЛЕННЯ КОНТУРНИХ ІНТЕГРАЛІВ. ТЕОРЕМА КОШІ

Інтеграли в комплексній області.

Введемо поняття інтеграла від функції комплексні змінної. Нехай на площині Z задано дугу $z_0 z_n$ кривої l, рівняння якої $z = x(t) + iy(t)$, де $a \le t \le b$. Нехай на кривій задано напрямок таким чином: при зростанні параметра t точка переміщується з положення z_0 до положення в точці z_n. Якщо обирається протилежний напрямок, то будемо позначати $-l$. Нехай на кривій задано однозначну і неперервну функцію комплексної змінної $f(z)$.



Дугу $z_0 z_n$ розіб'ємо на елементарні дуги точками поділу $z_0, z_1, z_2, ..., z_n$, що відповідають значенням параметра

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b.$$

На кожній елементарній дузі виберемо по точці ζ_k і утворимо суму

$$S_n = f(\zeta_1)(z_1 - z_0) + f(\zeta_2)(z_2 - z_1) + ... + f(\zeta_n)(z_n - z_{n-1}),$$

яку називають інтегральною сумою функції $f(z)$. Коротко її позначають так

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)(\mathrm{z}_k - \mathrm{z}_{k-1}). \qquad (5.1)$$

Зауважимо, що сума (5.1) не є функцією дискретного аргументу n; так само вона не є функцією неперервного аргументу z. Ця сума є змінною величиною складнішої природи. Це питання розглядається у спеціальних курсах ТФКЗ. Розглянемо дане поняття оглядово. Позначимо $\lambda = \max_{k} |\mathrm{z_k} - \mathrm{z_{k-1}}|$. Нехай λ прямує до нуля, тоді n прямуватиме до нескінченності.

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} S_n,$$

що не залежить від способу ділення відрізка $[a,b]$ (або дуги $z_0 z_n$) на елементарні дуги і не залежить від добору точок ζ_k, то таку границю називають ***інтегралом функції комплексної змінної*** $f(z)$ по дузі l і позначають

$$\int\limits_{l} \mathrm{f}(z)dz .$$

Відзначимо, що для існування інтеграла необхідна неперервність підінтегральної функції $f(z)$ в області D, що містить лінію інтегрування l. Лінія l повинна бути кусково-гладкою та орієнтованою в додатному напрямку. З огляду на подання функції комплексної змінної через дійсні функції двох змінних, можна одержати вираження інтеграла через два криволінійних інтеграли другого роду (по координатам)

$$\int\limits_{l} f(z)dz = \int\limits_{l} udx - vdy + i\int\limits_{l} vdx + udy \tag{5.2}$$

Якщо крива l описується параметричним рівнянням $x = g(t)$ і $y = h(t)$, $(t_A \le t \le t_B)$, то формула для обчислення контурного інтеграла запишеться у вигляді

$$\int\limits_{l} f(z)dz = \int\limits_{t_A}^{t_B} \{u[g(t),h(t)] + iv[g(t),h(t)]\}[g'(t) + ih'(t)]dt \tag{5.3}$$

або

$$\int\limits_{l} f(z)dz = \int\limits_{t_A}^{t_B} f[g(t) + ih(t)]d[g(t) + ih(t)], \tag{5.4}$$

де t_A, t_B – значеиия параметра t, що відповідають початковій і кінцевій точкам інтегрування на кривій l.

Наведемо найпростіші ***властивості інтеграла***.

1. Якщо функція $f(z)$ неперервна на кусково-гладкій дузі *AB*, то

$$\int\limits_{AB} \mathrm{f}(z)dz = -\int\limits_{BA} \mathrm{f}(z)dz .$$

2. За умови властивості 1 справедлива властивість

$$\int\limits_{AB} c\,\mathrm{f}(z)dz = c\int\limits_{AB} \mathrm{f}(z)dz ,$$

тобто сталий множник *c* можна виносити за знак інтеграла.

3. Якщо функції $f(z)$ і $g(z)$ – неперервні функції на кусково-гладкій дузі *AB,* то

$$\int\limits_{AB} [\mathrm{f}(z) \pm \mathrm{g}(z)]dz = \int\limits_{AB} \mathrm{f}(z)dz \pm \int\limits_{AB} \mathrm{g}(z)dz .$$

4. За умови, що виконується властивість 1, справедлива рівність

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AA_1} f(z)dz + \int\limits_{A_1A_2} f(z)dz + \ldots + \int\limits_{A_{n-1}B} f(z)dz.$$

5. За умови, що виконується властивість 1, справедлива нерівність

$$\left|\int\limits_{AB} f(z)dz\right| \le \mathrm{M}1,$$

де $|f(z)| \le \mathrm{M}$ для $z \in AB$, l – довжина дуги AB.

Приклади.

1. Обчислити інтеграл від функції $w = 1/z$, коли контур інтегрування C – коло $|z| = R$, що обходиться в додатному напрямку (проти годинникової стрілки)

$$I_1 = \int\limits_C \frac{dz}{z} = \int\limits_{|z|=R} \frac{dz}{z}$$

Параметричні рівняння кола C:

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,$$

причому $(0 \le t \le 2\pi)$, отже, приймаючи

$$z = R(\cos t + i\sin t),$$

отримуємо

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(-R\sin t + iR\cos t)dt}{R(\cos t + i\sin t)} = i\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i\ .$$

2. Обчислити інтеграл від функції $w = 1/(z-a)^m$, де m – ціле додатне число, а контур інтегрування коло $|z-a| = R$, орієнтоване в додатному напрямку.

Враховуючи те, що

$$z - a = \mathrm{Re}^{it} \le 0 \quad (t < 2),$$

знаходимо $$dz = i\,\mathrm{Re}^{it}\,dt\ .$$

Отже, маємо:

$$I_2 = \int\limits_{|z-a|=R} \frac{dz}{(z-a)^m} = i\int\limits_0^{2\pi} \frac{R.e^{it}dt}{R^m e^{imt}} = \frac{i}{R^{m-1}}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(1-m)t}dt \qquad (5.5)$$

Інтеграл у (5.4) при $m = 1$ дорівнює $2\pi i$, а при $m \ne 1$ нулю, дійсно

$$I_2 = \frac{i}{R^{m-1}} \cdot \frac{e^{i(1-m)2\pi} - 1}{i(1-m)} = 0,\ \text{якщо}\ m \ne 1,$$

оскільки

$$\left(e^{i(1-m)2\pi}-1\right)=\cos((1-m)2\pi)+i\sin((1-m)2\pi)-1=1+i\cdot 0-1=1.$$

Таким чином, остаточно можемо записати

$$I_2=\int\limits_{|z-a|=R}\frac{dz}{(z-a)^m}=\begin{cases}0, & \textit{якщо } m\neq 1,\ m>0,\\ 2\pi\mathrm{i}, & \textit{якщо} \quad m=1.\end{cases} \tag{5.6}$$

3. Обчислити $\int\limits_c \operatorname{Im} z dz$, де C – ламана з вершинами в точках O(0;0), A(1;1), B(2;1).

Розв’язання:

$$\int\limits_C \operatorname{Im} z dz=\int\limits_{OA}\operatorname{Im} z dz+\int\limits_{AB}\operatorname{Im} z dz.$$

Рівняння OA $y=x$ у параметричній формі

$$x=t,\ y=t \ \ 0\le t\le 1.$$

$$z=x+iy=(1+i)t,\ dz=(1+i)dt$$

$$I_1=\int\limits_{OA}\operatorname{Im} z dz=\int\limits_{OA} y dz=\int\limits_0^1 t(1+i)dt=(1+i)\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Рівняння AB $y=1$ у параметричній формі

$$x=t,\ y=1\ \ 1\le t\le 2,\ z=t+i,\ dz=dt$$

$$I_2=\int\limits_{AB}\operatorname{Im} z dz=\int\limits_{AB} y dz=\int\limits_1^2 dt=1 \quad \int\limits_c \operatorname{Im} z dz=I_1+I_2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Використання систем комп’ютерної математики

Приклад.

Обчислити інтеграл

$$\int\limits_l \operatorname{Re}(z)dz,$$

де:

а) l - пряма, яка з’єднує точки $z_1=0$ та $z_2=1+i$;

б) l - ламана OBA, $O(0,0)$, $B(1,0)$, $A(1,1)$.

Розв’язання.

а) Шлях інтегрування l – пряма, яка з’єднує точки $z_1=0$ та $z_2=1+i$. Застосуємо до обчислення інтеграла 1-й спосіб. Підінтегральний вираз має вигляд:

$$\operatorname{Re} z dz=x(dx+idy)=xdx+ixdy.$$

Тому:

$$\int_l \operatorname{Re}(z)dz = \int_l xdx + i\int_l xdy \,.$$

Рівняння відрізку прямої, яка з'єднує точки $z_1 = 0$ та $z_2 = 1 + i$ має вигляд $y = x$, $0 \le x \le 1$.

Отримаємо:

$$\int_l \operatorname{Re}(z)dz = \int_l xdx + i\int_l xdy = \int_0^1 xdx + i\int_0^1 xdx = \frac{1+i}{2}.$$

б) Шлях інтегрування l – ламана OBA, $O(0,0)$, $B(1,0)$, $A(1,1)$. Так як шлях інтегрування складається з двох відрізків, запишемо інтеграл у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int_l \operatorname{Re}(z)dz = \int_{OB} \operatorname{Re} zdz + \int_{BA} \operatorname{Re} zdz$$

кожний з цих двох інтегралів обчислюємо, як зазначено вище.

Для відрізку OB маємо:

$$y = 0,\ 0 \le x \le 1,$$

а для відрізку BA:

$$x = 1,\ 0 \le y \le 1.$$

Тоді:

$$\int_l \operatorname{Re}(z)dz = \int_{OB} xdx + ixdy + \int_{BA} xdx + ixdy = \int_0^1 xdx + i\int_0^1 1dy = 1/2 + i.$$

Зазначимо, що підінтегральна функція в даному прикладі – функція не аналітична, тому інтеграли за двома різними кривими, які з'єднують дві задані точки, можуть мати різні значення, що і продемонстровано в цьому прикладі.

Розв'язок приклада у середовищі пакету Mathcad

Обчислення інтеграла від функції Rez

а) по відрізку прямої, яка з'єднує точки z_1=0 и z_2=1+i;

б) по ламаній ОВА, О(0,0), В(1,0), А(1,1) .

а) По відрізку прямої, яка з'єднує точки z_1 =0 и z_2 = 1+i.

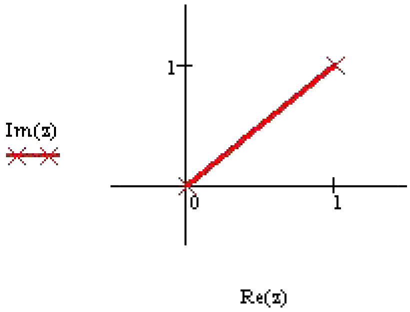
Зобразимо шлях інтегрування – відрізок, який з'єднує точки z_1 та z_2 на комплексній площині

Для того, щоб ввести уявну одиницю і, наберіть на клавіатурі 1і та клацніть мишкою поза виділеною рамкою

$z_2 := 1 + i$

$z_1 := 0$

Для того, щоб побудувати відрізок прямої, визначіть координати його кінців, клацніть на кнопку Graph та виберіть кнопку декартова графіка. Потім введіть у вікні графіків, у зазначеній позиції біля вісі абсцис дійсну частину змінної, яка містить координати кінців, а біля вісі ординат - уявну частину цієї змінної та клацніть поза виділеною рамкою



Видно, що рівняння прямої: y = x.

Обчислимо підінтегральний вираз Rezdz як функцію x та проінтегруємо по відрізку [0, 1]

$y(x) := x \qquad z(x) := x + i\cdot y(x) \qquad z(x) \rightarrow x + i\cdot x \qquad \mathrm{Re}(z(x)) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot i\cdot x + \frac{1}{2}\cdot\overline{(x + i\cdot x)}$

$\left(\frac{d}{dx}z(x)\right)\cdot dx \rightarrow (1 + i)\cdot dx \qquad \int_0^1 \mathrm{Re}(z(x))\cdot(1 + i)\,dx = 0.5 + 0.5i$

Інтеграл дорівнює 0.5+0.5i.

б) По ламаній OBA, O(0,0), B(1,0), A(1,1).

Зобразимо шлях інтегрування - ламану OBA

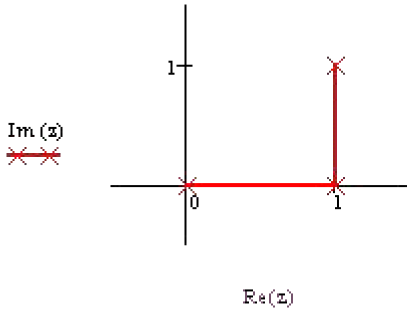
Для того, щоб ввести уявну одиницю і, наберіть на клавіатурі 1і та клацніть мишкою поза виділеною рамкою

$z_1 := 0$

$z_2 := 1$

$z_3 := 1 + i$

Для того, щоб побудувати відрізок прямої, визначіть координати його кінців, клацніть на кнопку Graph та виберіть кнопку декартова графіка. Потім введіть у вікні графіків, у зазначеній позиції біля вісі абсцис дійсну частину змінної, яка містить координати кінців, а біля вісі ординат - уявну частину цієї змінної та клацніть поза виділеною рамкою



Бачимо, що інтегрувати потрібно спочатку по x - по відрізку y = 0, тоді z = x, Rez = x, dz = dx, x із [0,1],

а потім потрібно інтегрувати по y - по відрізку x = 1, тоді z = 1+iy, Rez = 1, dz = idy, y із [0,1]

$$\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 1 \cdot i\,dy = 0.5 + i$$

Інтеграл дорівнює 0.5 + i.

Розв'язок приклада в середовищі пакету Mathematica

Інтеграли в комплексній площині.

Обчислити інтеграл від функції $\mathrm{Re}(z)$

a) по відрізку прямої, яка сполучає точки $z_1 = 0$ та $z_2 = 1 + i$

b) по ламаній OBA, $O = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $A = (1, 1)$.

Обчислимо інтеграл по прямій, яка сполучає точки $z_1 = 0$ та $z_2 = 1 + i$

In[1]:= $\int_0^{1+I} \mathrm{Re}[z]\,dz$

Out[1]= $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

Обчислимо інтеграл по ламаній, яка сполучає точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ та $z_3 = 1 + i$

In[2]:= $\int_0^{1} \mathrm{Re}[z]\,dz + \int_1^{1+I} \mathrm{Re}[z]\,dz$

Out[2]= $\frac{1}{2} + i$

Вправи для самостійної роботи

❖ Обчислити інтеграли $\int_c xdz$, $\int_c ydz$ за таких умов:

а) від точки O до точки $2+i$ по радіусу-вектору;
б) по колу $|z-1|=2$;
в) по колу $|z|=1,\ 0\le \arg z\le \pi$ (початок шляху в точці $z=1$).

❖ Обчислити $\int_c |z|dz$ за таких умов:

а) від точки O до точки $2-i$ по радіусу-вектору;
б) по півколу $|z|=1$ від точки $z=1$ до точки $z=-1$;
в) по півколу $|z|=1,\ -\frac{\pi}{2}\le \arg z\le \frac{\pi}{2}$ (початок шляху в точці $z=-i$);
г) по колу $|z|=R$.

❖ Обчислити інтеграл $\int_c z^2dz$, де C – ламана з вершинами в точках O (0;0), А(1;1), В(2;1).

❖ Обчислити інтеграли $\int_c \operatorname{Re} zdz$, $\int_c |z|dz$ по ламаній, вказаній у попередньому прикладі.

❖ Обчислити інтеграл $\int_c zdz$ по ламаній, яка утворюються при з'єднані точок А(-2;0), В(-1;1), С(1;1), Д(2;0).

❖ Обчислити $\int_c \frac{dz}{z-i}$, де C– контур, складений з півкола $|z-i|=1$, розташованого праворуч від осі Oy, та відрізка АВ: А(0;2), В(0;3).

❖ Обчислити $\int_c (x-y)dx+iydy$, де C – одиничне коло $|z|=1$.

❖ Обчислити $\int_c \frac{dz}{(z-a)^m}$, де C – коло $|Z-a|=R$, m – ціле число.

❖ Обчислити $\int\limits_c e^z dz$ вздовж ламаної з вершинами у точках O(0;0), A(1;0), B(1;1).

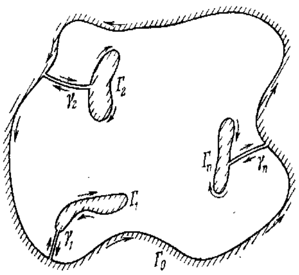
❖ Який геометричний зміст інтегралу $\int\limits_c |dz|$?

Теорема Коші

Розглянемо тепер одну з основних теорем теорії аналітичних функцій – ***теорему Коші.***

Якщо функція $w = f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то інтеграл від цієї функції по будь-якому кусково-гладкому контуру l, що повністю лежить у області D дорівнює нулю

$$\int\limits_l f(z)dz = 0 \tag{5.7}$$



Теорема Коші узагальнюється на випадок багатозв'язної області. Наслідком її для багатозв'язної області D є рівність інтеграла, взятого по зовнішньому контуру Γ_0 (що обходиться в додатному напрямку: проти годинникової стрілки), сумі інтегралів по внутрішніх контурах, якщо обхід останніх здійснюється за годинниковою стрілкою

$$\int\limits_{\Gamma_0} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz + ... + \int\limits_{\Gamma_n} f(z)dz \tag{5.8}$$

У окремому випадку двозв'язної області можна записати, що інтеграли по контурах Γ_1 і Γ_2 рівні, якщо обходити їх в одному напрямку.

Теорема Коші застосовується також для обчислення деяких контурних інтегралів. Наприклад, інтеграл у прикладі 2 при $m < 0$ дорівнює нулю, тому що функція $w = (z-a)^m$ у цьому випадку аналітична у всій комплексній площині Z.

Отже:

$$I_2 = \int\limits_{|z-a|=R} \frac{dz}{(z-a)^m} = \begin{cases} 0, & якщо\ m \neq 1,\ m - ціле\ число, \\ 2\pi i, & якщо\ \quad m = 1. \end{cases} \tag{5.9}$$

Теорема Коші має численні застосування і є одним з найбільш фундаментальних результатів у теорії аналітичних функцій.

Справедлива і обернена **<u>теорема Морера</u>**:

Якщо функція $f(z)$ неперервна в однозв'язній області D та $\int\limits_c f(\varsigma)d\varsigma = 0$ для будь-якого замкнутого контуру C, що лежить в D, то $f(z)$ аналітична в цій області.

Це дає можливість по іншому визначити розуміння аналітичної функції.

Аналітичною функцією в однозв'язній області D називається будь-яка неперервна функція $f(z)$ комплексної змінної, для якої інтеграл $\int f(z)dz$, взятий вздовж будь-якого замкнутого контуру цієї області, дорівнює нулю.

Приклади.

1. Інтеграл $\int\limits_C (z^2 - z)dz = 0$ по будь-якій замкнутій кривій C, оскільки функція $z^2 - z$ аналітична на всій Z - площині.

2. Інтеграл $\int\limits_C \frac{(2+z)dz}{z^2 - z} = 0$, якщо C відсікає область, не маючи ні в середині, ні на границі точки розриву підінтегральної функції. Визначимо точки розриву $z^2 - z = 0$, $z = 0$, $z = 1$. Тоді інтеграл дорівнює нулю, якщо C – коло $|z-2| = \frac{1}{2}$. Якщо C– коло $|z-1| = \frac{1}{2}$, то теорему Коші застосувати не можна, тому що в середині кола $|z-1| < \frac{1}{2}$ лежить точка розриву $z = 1$ Якщо крива C проходить хоча б через одну з точок $z = 0$ або $z = 1$, то інтеграл не існує, тому що на C підінтегральна функція перетворюється в нескінченність.

3. Нехай C – коло $|z-1| = 1$. Пояснити, чому до інтегралів $\int\limits_C (z^2 - 1)dz$, $\int \frac{dz}{z^2+1}$; $\int\limits_c [(x-y) + i(x+y)]dz$ можна застосувати теорему Коші та стверджувати, що вони дорівнюють нулю, а до інтегралів $\int\limits_C \frac{dz}{z^2 - 1}$ та $\int\limits_C [(x+y) + i(x+y)]dz$ можна застосовувати теорему Коші , але не можна стверджувати, що вони дорівнюють нулю.

Вправи для самостійної роботи

❖ За допомогою інтегральної теореми Коші обчислити інтеграл $\int\limits_C \frac{\sin z}{e^z+1}dz$, де $C-$ еліпс $9x^2+16y^2=144$.

❖ Пояснити, чому можна стверджувати, що інтеграли $\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z(z^2-9)}$ та $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z(z^2-9)}$ рівні, але не можна стверджувати, що вони рівні інтегралу $\int\limits_{|z|=4} \frac{dz}{z(z^2-9)}$.

Інтегральна формула Коші

Основна теорема Коші дозволяє вивести формулу, яка є важливою в теорії функцій комплексної змінної.

Якщо замкнута крива C обмежує однозв'язну область D, а функція $f(z)$ аналітична в області D, яка містить у собі D та її границю C, то для всіх внутрішніх точок z області D справедлива формула:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}dz\,,\ \ \varsigma\in C\,.$$

Використовуючи інтегральну формулу Коші, можна довести, що аналітична функція $f(z)$ диференційована довільну кількість разів, причому справедлива формула:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z)^{n+1}}\,.$$

Звідси слідує, що для функції комплексної змінної з існування в кожній точці деякої області похідної першого порядку отримуємо існування в області похідних будь-якого порядку та, відповідно, неперервність всіх похідних, також отримуємо неперервність похідної першого порядку $f'(z)$. В цьому відношенні функції комплексної змінної суттєво відрізняються від функцій дійсного аргументу, які не мають таких властивостей.

Приклади.

1. Інтеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{z^2dz}{z+1}=(-1)^2$, якщо $C-$ коло $|z|=2$ та

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^2dz}{z+1}=0, \text{ якщо } C - \text{коло } |z|=\frac{1}{2}.$$

Розв’язання.

Дійсно, функція $f(z)=z^2$, $z=-1$, точка, в якій знаменник підінтегральної функції дорівнює нулю. У першому випадку: точка $z=-1$ лежить у середині кола $|z|<2$, а в другому – поза колом $|z|<\frac{1}{2}$.

2. Інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sin z}{z+i}dz = \sin(-i), \text{ якщо } C - \text{коло } |z+i|=1,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sin z}{z+i}dz = 0, \quad \text{якщо } C \text{ - коло } |z-i|=1.$$

Вправи для самостійної роботи

❖ Обчислити за допомогою інтегральної формули Коші $\int_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz$, де C – коло $x^2+y^2-2x=0$.

❖ Обчислити інтеграл $\int_C \frac{dz}{z^2+9}$, якщо:

а) точка $3i$ лежить у середині контуру C, а точка $-3i$ поза контуром;

б) точка $-3i$ лежить у середині контуру C, точка $3i$ поза контуром;

в) точки $\pm 3i$ лежать у середині конуру C.

❖ Обчислити $\int_C \frac{dz}{z^2+5}$ при різних положеннях точки $\pm\sqrt{5}i$:

а) обидві точки $\pm\sqrt{5}i$ лежать поза замкнутим контуром C.

б) точка $\sqrt{5}i$ лежить в середині контуру C, а точка $-\sqrt{5}i$ - поза контуром;

в) обидві точки $\pm\sqrt{5}i$ лежать у середині контуру C.

❖ Обчислити всі можливі значення $\int_C \frac{dz}{z(z+1)}$ при різних положеннях контуру C, який не проходе через точки 0 та -1.

❖ Обчислити інтеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz$, де C – коло $|z-1|=1$.

❖ Довести, що інтеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^3 dz=\frac{3}{2}$, C – $|z-1|=1$.

❖ Обчислити інтеграл $\frac{2}{2\pi i}\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{iz}dz}{(z+i)^5}$.

❖ Обчислити $\int\limits_C \frac{dz}{(z^2+9)^2}$, якщо:

а) C – коло радіуса 2 з центром у точці $2i$;
б) C – коло радіуса 2 з центром у точці $-2i$.

❖ Обчислити $\int\limits_C \frac{e^z dz}{(z+2)^4}$, якщо точка $z=-2$ знаходиться у середині замкнутого контуру C.

❖ Обчислити $\int\limits_C \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$, якщо:

а) C – коло радіуса $R<2$ з центром в точці $z=1$;
б) C – коло радіуса $R<2$ з центром в точці $z=-1$;
в) C – коло радіуса $R>1$ з центром в точці $z=0$.

РОЗДІЛ 6
РЯДИ ТЕЙЛОРА І ЛОРАНА. КЛАСИФІКАЦІЯ ІЗОЛЬОВАНИХ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Ряди з комплексними членами

Розглянемо ряд с комплексними членами $U_1 + U_2 + ... + U_n + ...$ ***ряд називається збіжним***, якщо існує границя суми його перших n членів:

$$S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n, \text{ при } n \to \infty.$$

Ця границя ***називається сумою ряду***:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(U_1 + U_2 + ... + U_n).$$

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, то ***ряд називається розбіжним***.

Мають місце наступні ***ознаки збіжних рядів***.

1. Якщо ряд збігається, то його $n-$й член (загальний член) прямує до нуля при $n \to \infty$.
2. Ряд з комплексними членами збігається тоді і тільки тоді, коли збігається і ряд, складений з членів дійсної частини, так і ряд, складений з членів уявної частин. Причому, якщо сума даного ряду дорівнює S, сума ряду, складеного з дійсної частини, дорівнює σ, а сума ряду, складеного з уявної частин, дорівнює τ, то $S = \sigma + i\tau$
3. Ряд з комплексними членами збігається, якщо збігається ряд, складений з модуля членів даного ряду.

Приклад.

Дослідити на збіжність ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{i}{n^2}].$$

Розв'язання.

Ряд, складений з дійсних частин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ та ряд складений з уявних частин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n^2}$ збігаються, отже, і заданий ряд збігається.

***Вправи* для самостійної роботи**

❖ Довести збіжність рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{i}{\sqrt[3]{n}})$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi+i\sin n\varphi}{n^2}$.

❖ Дослідити на збіжність ряд.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\varphi}}{n}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+i)^n}{2^n}$, е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+i}$,

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2i-1)^n}{3^n}$, з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$, и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[n+(2n-1)i]^2}$, к) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$.

Степеневі ряди

Степеневим рядом називається ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n=C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+...+C_n(z-a)^n+... \qquad (6.1),$$

де z – комплексна змінна, C_n та a – сталі, причому C_n – називається коефіцієнтом, a – називається центром ряду.

Теорема Абеля

Якщо степеневий ряд (6.1) збігається в точці z_0, то він збігається у крузі $|z-a|<|z_0-a|$.

Якщо ряд (6.1) розбігається в точці $z_0=z$,то він розбігається і у будь-якій точці z, для якої $|z-a|>|z_0-a|$. Область збіжності степеневого ряду (6.1) є круг $|z-a|<R$ деякого радіуса R, що визначається в залежності від коефіцієнтів ряду. В найпростіших прикладах для знаходження радіуса збіжності достатньо застосувати ознаки збіжності Даламбера або Коші.

Сума степеневого ряду (6.1) є функцією аналітичною в середині круга збіжності, причому, похідну суми можна знайти шляхом диференціюванням ряду.

Приклад.

1. Знайти радіус збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$.

Розв’язання.

Застосуємо ознаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{n+1}:\frac{z^n}{n}\right|=|z|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|z|,$$

при $|z|<1$ ряд збіжний,

при $|z|>1$ розбіжний.

Звідси отримуємо радіус збіжності $R=1$.

2. Чи збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1+i)^n}{2^n+n}$ в точці $z=i$?

Розв’язання.

Визначимо область збіжності. Застосуємо ознаку Коші.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|z-1+i|^n}{2^n+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\ z-1+i\ |}{\sqrt[n]{2^n+n}}=\frac{|z-1+i|}{2\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{n}{2^n}}}=\frac{|z-1+i|}{2}.$$

Ряд збігається, якщо

$$\frac{|z-1+i|}{2}<1,$$

тобто

$$|z-1+i|<2,$$

розбігається, якщо

$$|z-1+i|>2.$$

В точці $z=i$,

$$|i-1+i|=|-1+2i|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5},$$

$$\sqrt{5}>2.$$

Отже, в точці $z=i$ ряд розбіжний.

Вправи для самостійної роботи

- Визначити радіуси збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2^n+3^n}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^{3n}}{3^n+n}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n$;

д) $\sum\left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ln n}z^n$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+i\sin n\ \ )(z-1+2i)^n$.

- Визначити круг збіжності рядів:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n \cdot 3^n}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+ni) z^n$;

г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

❖ Чи збігаються ряди у вказаних точках:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} (3+ni)(z+1-i)^n$ в точці $z = -1 + \frac{1}{2} i$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{5^n - n}$ в точці $z = 2 - 3i$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-2i)^{2n}}{5^n - 3^n}$ в точці $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} i$.

❖ Радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ дорівнює R $(0 < R < \infty)$. Визначити радіуси збіжності рядів.

а) $\sum_{n=0}^{\infty} n^k C_n z^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) C_n z^n$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} z^n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n C_n z^n$.

❖ Дослідити поведінку степеневого ряду на границі круга збіжності.

а) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{np}}{n}$ (p – натуральне).

Ряд Тейлора

Аналітичну функцію в кожній внутрішній точці області, можна розвинути в ряд Тейлора

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots ,$$

радіус збіжності якого не менший найкоротшої відстані від точки z_0 до границі області аналітичності функції.

Точка $z = z_0$ називається ***регулярною точкою*** функції, якщо в деякому околі її функція аналітична.

Точка $z = z_0$ називається ***особливою точкою*** функції, якщо в жодному її околі, який би він не був малим, функція не аналітична.

Радіус збіжності ряду Тейлора функцій $f(z)$ за степенями $z - z_0$ дорівнює найкоротшій відстані від точки z_0 до найближчої особливої точки функції.

Наведемо приклади рядів Тейлора деяких елементарних функцій:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots ,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots ,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots .$$

Ці ряди збігаються при всіх скінчених z, тобто збігаються в крузі $|z| < \infty$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots ,$$

ряд збігається в крузі $|z| < 1$.

Ряд Тейлора головної частини елементарної функції $f(z) = (1+z)^m$, де

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \ldots ,$$

збігається лише в крузі $|z| < 1$.

Приклади.

1. Знайти перші два члена ряду Тейлора функції

$$f(z) = \frac{\ln(1+z^2) - z}{\sqrt{1+z}} \text{ за степенями } z-1$$

та визначити радіус збіжності ряду (вибрати ті частини логарифма та кореня, які при $z = 1$ приймають додатні значення).

Розв’язання:

Ряд Тейлора заданої функції має вигляд

$$f(z) = f(1) + f'(1)(z-1) + \ldots$$

знаходимо похідну та її значення при $z = 1$

$$f'(z)=\frac{\left(\frac{2z}{1+z^2}-1\right)\sqrt{1+z}-\left[\ln(1+z^2)\right]\frac{1}{2\sqrt{1+z}}}{(1+z)}$$

$$f(1)=\frac{\ln 2-1}{\sqrt{2}} \qquad f'(1)=\frac{1-\ln 2}{4\sqrt{2}}.$$

Тоді перші члени ряду Тейлора матимуть вигляд:

$$\frac{\ln(1+z^2)-z}{\sqrt{1+z}}=\frac{\ln 2-1}{\sqrt{2}}+\frac{1-\ln 2}{4\sqrt{2}}(z-1)+...$$

Визначимо радіус збіжності цього ряду. Знаходимо особливі точки функції. Прирівнюємо до нуля підкореневий вираз, та підлогарифмічний вираз. Отримуємо $z=1$, $z=i$ та $z=-i$.

Відстань від точки $z=1$ до точки $z=-1$ дорівнює 2, а до особливих точок $z=\pm i$ дорівнює $\sqrt{2}$; найкоротша відстань дорівнює $\sqrt{2}$, це і є радіус збіжності ряду.

Використання систем комп’ютерної математики

Приклад.

Розкласти за степенями z функцію

$$f(z)=\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}.$$

Дріб правильний. Розкладаємо його на елементарні дроби:

$$\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z+2}.$$

Розкладаємо елементарні дроби за степенями z:

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n, \quad |z|<1.$$

$$\frac{1}{(z-1)^2}=-\frac{1}{(z-1)'}=\sum_{n=0}^{\infty}(z^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n, \quad |z|<1.$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}, \quad |z|<2.$$

Для початкового дробу отримаємо розклад:

$$\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)} = -\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$$

або, додаємо ряди:

$$\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left[6(n+1) - 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right]z^n.$$

Остаточна відповідь:

$$\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left[6n + 5 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right]z^n, \quad |z|<1.$$

Розв'язок приклада у середовищі пакету Mathcad

Розклад раціонального дробу в ряд Тейлора за степенями z.

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}.$$

1-й спосіб. Визначимо функцію та знайдемо її розклад за степенями z

Для того, щоб знайти розклад функції f(z) за степенями z, введіть вираз для обчислення функції, виділіть рамкою змінну z, потім виберіть у меню Symbolic процедури Variable - Expand to Series ... , введіть у поле вводу Order of Approximation кількість членів ряду, яке буде введено в робочий документ, та клацніть на кнопку OK

$$\frac{z+1}{(z-1)^2\cdot(z+2)}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{4}\cdot z + \frac{15}{8}\cdot z^2 + \frac{41}{16}\cdot z^3 + \frac{103}{32}\cdot z^4 + \frac{249}{64}\cdot z^5 + O\left(z^6\right)$$

2-й спосіб. Визначимо функцію, знайдемо її розклад на прості дроби, а потім знайдемо її розклад за степенями z

Для того, щоб знайти розклад раціонального дробу на суму простих дробів, введіть вираз для обчислення функції, виділіть його рамкою, потім виберіть у меню Symbolic процедури Variable - Convet to Partial Fraction

$$\frac{z+1}{(z-1)^2\cdot(z+2)}$$

$$\frac{2}{\left[3\cdot(z-1)^2\right]}+\frac{1}{[9\cdot(z-1)]}-\frac{1}{[9\cdot(z+2)]}$$

Знайдемо розклад за степенями z

Для того, щоб знайти розлад функції f(z) за степенями z, введіть вираз для обчислення функції, виділіть рамкою змінну z, потім виберіть у меню Symbolic процедури Variable - Expand to Series ... , введіть у поле вводу Order of Approximation кількість членів ряду, яка буде виведена в робочий документ, та клацніть на кнопку OK

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\cdot z+\frac{15}{8}\cdot z^2+\frac{41}{16}\cdot z^3+\frac{103}{32}\cdot z^4+\frac{249}{64}\cdot z^5+O\left(z^6\right)$$

Вправи для самостійної роботи

❖ Розвинути в степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n Z^n$ функції та знайти радіус збіжності ряду.

а) $\sin^2 z$; б) $\cos^2 z$.

❖ Написати перші чотири члена розкладу в ряд Тейлора в околі нульової точки функції:

а) $e^{\frac{1}{1-z}}$; б) $\sin\frac{1}{1-z}$; в) $\ln(1+e^z)$.

Які радіуси збіжності ?

❖ Розвинути в ряд за степенями $(z-1)$ наведені нижче функції та знайти радіус збіжності отриманих рядів:

а) $\frac{z}{z+2}$; б) $\frac{z}{z^2-2z+5}$; в)* $\frac{z^2}{(z+1)^2}$.

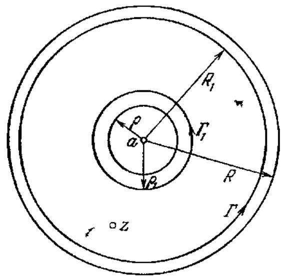
❖ Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу функції $\ln\sin z$ за степенем $z-\dfrac{\pi}{2}$ та визначити радіус збіжності ряду.

Ряд Лорана

Довільна функція $f(z)$, аналітична в крузі $|z-a|<r$, може бути розвинена в цьому крузі єдиним чином у степеневий ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_{(a)}^{(n)}}{n!}(z-a)^n \tag{6.2}$$

Проте часто розглядають функції, аналітичні в деякому околі точки a, за винятком самої точки a, тобто аналітичні в кільцевій області $r<|z-a|<R$. У цьому випадку функції характеризуються двосторонніми рядами, що містять як додатні, так і від'ємні ступені двочлена $(z-a)$.



Якщо функція $f(z)$ аналітична в кільці $r<|z-a|<R$, тоді їй можна поставити у відповідність ***ряд Лорана***, що має вигляд:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{6.3}$$

Перший із двох рядів у (6.3) – звичайний степеневий ряд, що збігається у крузі $|z-a|<R$. Цей ряд називається ***правильною (або регулярною)*** частиною ряду Лорана. Другий ряд у (6.3) збігається зовні круга $|z-a|<r$, тобто в області $|z-a|<r$ та називається ***головною частиною*** ряду Лорана. Сума цих рядів, тобто ряд Лорана збігається в кільці $r<|z-a|<R$.

Коефіцієнти, ряду Лорана обчислюються за формулою:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}},(n=0,\pm1,\pm2,\ldots), \tag{6.4}$$

де l – коло, що обходиться проти годинної стрілки та $r<|z-a|<R$. Якщо функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z-a|<R$, то всі $C_{-n}\equiv 0$ і ряд Лорана (6.3) переходить у ряд Тейлора (6.2). Дійсно, функція $f(z)\cdot(z-a)^{n-1}$ аналітична в зазначеному крузі й інтеграл у (6.4) дорівнює нулю згідно теореми Коші.

Будувати ряд Лорана (6.3) шляхом безпосереднього обчислення коефіцієнтів C_n складно, тому будемо розглядати лише випадки розвинення заданої функції в ряд Лорана, використовуючи формули рядів Тейлора основних функцій:

1. $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + ... \quad (|z|<1)$

2. $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}z^n + ... \ (|z|<1)$

3. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^n}{n!} \quad (|z|<\infty).$

4. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... \quad (|z|<\infty).$

5. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ... \quad (|z|<\infty).$

Приклади.

1.Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Розв'язання.

Функція аналітична у кільці $1<|z|<2$.

Для отримання ряду Лорана подамо її у вигляді

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} .$$

Перший дріб аналітичний у колі $|z|<2$,

він розглядається за додатними степенями:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+...\right)$$

використовуємо ряд геометричної прогресії, знаменник якої $|q|<1$:

$$1+q+q^2+...+q^n+... = \frac{1}{1-q}.$$

Другий дріб аналітичний поза колом $|z|>1$,

його розкладаємо за від'ємними степенями:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...\right).$$

Таким чином, ряд Лорана, заданої функції, має вигляд:

$$\frac{1}{(z-2)(z-1)} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+...\right) - \left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+...\right).$$

2.Розвинути у ряд Лорана в околі точки $z=-1$ функцію $f(z) = e^{\frac{z-1}{z+1}}$.

Розв'язання.

Функція $f(z)$ не є аналітичною в точці $z=-1$, тому вона не розкладається в околі цієї точки у ряд Тейлора. Але її можна розвинути в околі точки у ряд Лорана за степенями $z+1$, оскільки область аналітичності (вся комплексна площина за винятком точки $z=-1$) можна подати у вигляді кільця з центром в точці $z=-1$ та радіусами $r=0$ та $R=\infty$.

Для розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана за степенями $z+1$ виконаємо тотожні перетворення:

$$e^{\frac{z-1}{z+1}}=e^{\frac{(z+1)-2}{z+1}}=e\cdot e^{\frac{-2}{z+1}}.$$

Використаємо ряд Тейлора функції e^{z}:

$$e^{z}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\ \left(0<|z|<\infty\right).$$

Замінимо z на $-\dfrac{2}{z+1}$:

$$e^{-\frac{2}{z+1}}=1-\frac{2}{z+1}+\frac{2^2}{(z+1)^2 2!}-\ldots+\frac{(-1)^n 2^n}{(z+1)^n n!}+\ldots$$

Отже, ряд Лорана має вигляд:

$$e^{\frac{z-1}{z+1}}=e\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n}{(z+1)^2 n!}.$$

Ряд збігається до даної функції на всій комплексній площині, з якої виключається точка $z=-1$.

Використання систем комп'ютерної математики

Приклад.

Розкласти функцію

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2-2z-3}$$

в ряд Лорана за степенями z.

Розв'язання.

Так як функція є раціональним дробом, то особливі точки є нулі знаменника, тобто $z_1=-1$ та $z_2=3$. Запишемо функцію у вигляді

$$f(z)=\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}.$$

Кільця аналітичності $|z|<1, 1<|z|<3, |z|>3$.

Розкладемо дріб на елементарні дроби:

$$f(z)=\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{z-3}$$

При $|z|<1$ маємо:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, |z|<1;$$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{-1/3}{1-\left(z/3\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}, |z|<3.$$

Таким чином, у колі $|z|<1$ функція розкладається в ряд Тейлора:

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2-2z+3}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left[(-1)^{n+1}-\frac{5}{3^{n+1}}\right]z^n, |z|<1.$$

У кільці $1<|z|<3$:

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\left(1/z\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^n}, |z|>1$$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{-1/3}{1-\left(z/3\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}, |z|<3.$$

Отже,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5z^n}{4\cdot 3^{n+1}}, 1<|z|<3.$$

При $|z|>3$:

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^n}, |z|>1;$$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(3/z\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}, |z|>3.$$

Отже,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4z^n}+\frac{5}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+5\cdot 3^{n-1}}{4}\cdot\frac{1}{z^n}, |z|>3.$$

Розв'язок приклада в середовищі пакету Mathcad

Розклад раціонального дробу в ряд Лорана за степенями z у всіх областях аналітичності

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2-2z-3}$$

Визначимо функцію, знайдемо її розклад на прості дроби, а потім знайдемо її розклад за степенями z

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3}$$

Для того, щоб знайти розклад раціонального дробу на суму простих дробів, введіть вираз для обчислення функції, виділіть його рамкою, потім виберіть у меню Symbolic процедури Variable - Convet to Partial Fraction

$$\frac{-1}{[4\cdot(z+1)]}+\frac{5}{[4\cdot(z-3)]}$$

Знайдемо розклад у колі $|z|<1$.

Для цього знайдемо однакову кількість членів розкладу за степенями z для кожного дробу та складемо їх

$$\frac{-1}{[4\cdot(z+1)]}.$$

Для того, щоб знайти розклад функції f(z) за степенями z, введіть вираз для обчислення функції, виділіть рамкою змінну z, потім виберіть у меню Symbolic процедури Variable - Expand to Series ... , введіть у поле вводу Order of Approximation кількість членів ряду, яка буде виведена в робочий документ, та клацніть на кнопку OK

$$\frac{-1}{4}+\frac{1}{4}\cdot z-\frac{1}{4}\cdot z^2+\frac{1}{4}\cdot z^3-\frac{1}{4}\cdot z^4+\frac{1}{4}\cdot z^5+O(z^6)$$

$$\frac{5}{[4\cdot(z-3)]}$$

$$\frac{-5}{12}-\frac{5}{36}\cdot z-\frac{5}{108}\cdot z^2-\frac{5}{324}\cdot z^3-\frac{5}{972}\cdot z^4-\frac{5}{2916}\cdot z^5+O(z^6)$$

$$\frac{-1}{4}+\frac{1}{4}\cdot z-\frac{1}{4}\cdot z^2+\frac{1}{4}\cdot z^3-\frac{1}{4}\cdot z^4+\frac{1}{4}\cdot z^5+O\left(z^6\right)+$$
$$+\left[\ \frac{-5}{12}-\frac{5}{36}\cdot z-\frac{5}{108}\cdot z^2-\frac{5}{324}\cdot z^3-\frac{5}{972}\cdot z^4-\frac{5}{2916}\cdot z^5+O\left(z^6\right)\ \right]$$

Для того, щоб звести подібні, виділіть вираз рамкою, потім виберіть у меню Symbolic процедуру Simplify та клацніть поза виділеною рамкою

$$\frac{-2}{3}+\frac{1}{9}\cdot z-\frac{8}{27}\cdot z^2+\frac{19}{81}\cdot z^3-\frac{62}{243}\cdot z^4+\frac{181}{729}\cdot z^5+2\cdot O\left(z^6\right)$$

Отримали розклад у колі $|z|<1$

$$\frac{-2}{3}+\frac{1}{9}\cdot z-\frac{8}{27}\cdot z^2+\frac{19}{81}\cdot z^3-\frac{62}{243}\cdot z^4+\frac{181}{729}\cdot z^5+2\cdot O\left(z^6\right).$$

Знайдемо розклад у кільці $1<|z|<3$.

Для цього розкладемо перший дріб за степенями $1/z$ та складемо отриманий розклад із розкладом другого дробу за степенями z.

Перетворимо перший дріб, розкладемо $1/(1+t)$ за степенями t та потім зробимо заміну $t=1/z$.

$$\frac{-1}{[4\cdot(z+1)]}=\frac{-1}{4\cdot z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}.$$

Розкладемо $1/(1+t)$ за степенями t

$$\frac{1}{1+t}$$

$$1-1\cdot t+1\cdot t^2-1\cdot t^3+1\cdot t^4-1\cdot t^5+O\left(t^6\right)$$

Зробимо заміну $t=1/z$

Для того, щоб зробити заміну, скопіюйте в буфер вираз для t, виділіть рамкою змінну t та потім виберіть у меню Symbolic процедуру Variable - Substitute

$$1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^5}+O\left(\frac{1}{z^6}\right)$$

Для того, щоб скопіювати вираз у буфер, виділіть його рамкою та клацніть у панелі інструментів на кнопку Copy

$$\frac{-1}{4\cdot z}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^5}+O\left(\frac{1}{z^6}\right)\right)$$

Для того, щоб розкрити дужки, виділіть вираз рамкою та виберіть у меню Symbolic процедуру Simplify

$$\frac{-1}{(4\cdot z)}+\frac{1}{(4\cdot z^2)}-\frac{1}{(4\cdot z^3)}+\frac{1}{(4\cdot z^4)}-\frac{1}{(4\cdot z^5)}+\frac{1}{(4\cdot z^6)}-\frac{1}{(4\cdot z)}\cdot O\left(\frac{1}{z^6}\right)$$

Складемо отриманий розклад першого дробу за степенями $1/z$ із розкладом другого дробу за степенями z

$$\frac{-1}{(4\cdot z)}+\frac{1}{(4\cdot z^2)}-\frac{1}{(4\cdot z^3)}+\frac{1}{(4\cdot z^4)}-\frac{1}{(4\cdot z^5)}+\frac{1}{(4\cdot z^6)}-\frac{1}{(4\cdot z)}\cdot O\left(\frac{1}{z^6}\right)+$$
$$+\left[\ \frac{-5}{12}-\frac{5}{36}\cdot z-\frac{5}{108}\cdot z^2-\frac{5}{324}\cdot z^3-\frac{5}{972}\cdot z^4-\frac{5}{2916}\cdot z^5+O\left(z^6\right)\ \right]$$

Отримано розклад у кільці $1<|z|<3$

$$\frac{-1}{(4\cdot z)}+\frac{1}{(4\cdot z^2)}-\frac{1}{(4\cdot z^3)}+\frac{1}{(4\cdot z^4)}-\frac{1}{(4\cdot z^5)}+\frac{1}{(4\cdot z^6)}-\frac{1}{(4\cdot z)}\cdot O\left(\frac{1}{z^6}\right)+$$
$$+\left[\ \frac{-5}{12}-\frac{5}{36}\cdot z-\frac{5}{108}\cdot z^2-\frac{5}{324}\cdot z^3-\frac{5}{972}\cdot z^4-\frac{5}{2916}\cdot z^5+O\left(z^6\right)\ \right]$$

Знайдемо розклад в області $|z|>3$.

Для цього розкладемо другий дріб за степенями $1/z$ та складемо отриманий розклад із розкладом першого дробу за степенями $1/z$.

Перетворимо другий дріб, розкладемо $1/(1-t)$ за степенями t та потім зробимо заміну $t=1/z$.

$$\frac{5}{[4\cdot(z-3)]}=\frac{5}{4\cdot z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}.$$

Розкладемо $1/(1-t)$ за степенями t

$$\frac{1}{1-t}$$

$$1+1\cdot t+1\cdot t^2+1\cdot t^3+1\cdot t^4+1\cdot t^5+O\left(t^6\right)$$

Зробимо заміну $t=3/z$.

Для того, щоб зробити заміну, скопіюйте в буфер вираз для t, виділіть рамкою змінну t та потім виберіть у меню Symbolic процедуру Variable - Substitute

$$1+\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+\frac{27}{z^3}+\frac{81}{z^4}+\frac{243}{z^5}+O\left(\frac{729}{z^6}\right)$$

Для того, щоб скопіювати вираз у буфер, виділіть його рамкою та клацніть у панелі інструментів на кнопку Copy

$$\frac{5}{4\cdot z}\cdot\left(1+\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+\frac{27}{z^3}+\frac{81}{z^4}+\frac{243}{z^5}+O\left(\frac{729}{z^6}\right)\right)$$

Для того, щоб розкрити дужки, виділіть вираз рамкою та виберіть у меню Symbolic процедуру Expand

$$\frac{5}{4\cdot z}+\frac{15}{\left(4\cdot z^2\right)}+\frac{45}{\left(4\cdot z^3\right)}+\frac{135}{\left(4\cdot z^4\right)}+\frac{405}{\left(4\cdot z^5\right)}+\frac{1215}{\left(4\cdot z^6\right)}+\frac{5}{\left(4\cdot z\right)}\cdot O\left(\frac{729}{z^6}\right).$$

Складемо отриманий розклад першого дробу за степенями $\frac{1}{z}$ із розкладом другого дробу за степенями $\frac{1}{z}$.

$$\frac{-1}{(4z)}+\frac{1}{\left(4z^2\right)}-\frac{1}{\left(4z^3\right)}+\frac{1}{\left(4z^4\right)}-\frac{1}{\left(4z^5\right)}+\frac{1}{\left(4z^6\right)}-\frac{1}{(4z)}\cdot O\left(\frac{1}{z^6}\right)+$$
$$+\left[\frac{5}{(4z)}+\frac{15}{\left(4z^2\right)}+\frac{45}{\left(4z^3\right)}+\frac{135}{\left(4z^4\right)}+\frac{405}{\left(4z^5\right)}+\frac{1215}{\left(4z^6\right)}+\frac{5}{(4z)}\cdot O\left(\frac{729}{z^6}\right)\right]$$

$$\frac{-1}{4}\cdot\frac{\left(-4\cdot z^5-16\cdot z^4-44\cdot z^3-136\cdot z^2-404\cdot z-1216+O\left(\frac{1}{z^6}\right)\cdot z^5-5\cdot O\left(\frac{729}{z^6}\right)\cdot z^5\right)}{z^6}$$

$$\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{11}{z^3}+\frac{34}{z^4}+\frac{101}{z^5}+\frac{304}{z^6}-\frac{1}{(4\cdot z)}\cdot O\left(\frac{1}{z^6}\right)+\frac{5}{(4\cdot z)}\cdot O\left(\frac{729}{z^6}\right).$$

Отримали розклад у області $|z|>3$

$$\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{11}{z^3}+\frac{34}{z^4}+\frac{101}{z^5}+\frac{304}{z^6}-\frac{1}{(4\cdot z)}\cdot O\left(\frac{1}{z^6}\right)+\frac{5}{(4\cdot z)}\cdot O\left(\frac{729}{z^6}\right)$$

Розв'язок приклада в середовищі пакету Mathematica

Розкласти функцію $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$ в ряд Лорана за степенями z.

Введемо функцію f

In[1]:=
```
f[z_] := (z + 2)/(z^2 - 2 z - 3)
```

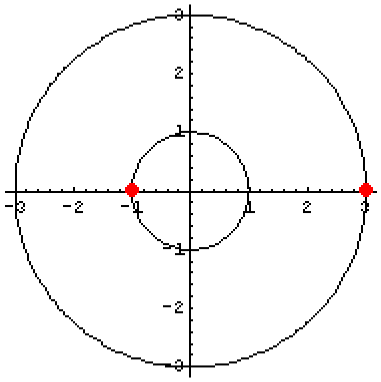
Розкладемо функцію f на прості дроби

In[2]:=
```
f[z] // Apart
```

Out[2]= $\dfrac{5}{4(-3+z)} - \dfrac{1}{4(1+z)}$

Бачимо, що функція має два полюси першого порядку: -1 та 3. Відповідно, є три області аналітичності функції f: $|z|<1$, $1<|z|<3$, $|z|>3$

In[3]:=
```
Show[Graphics[{Circle[{0, 0}, 1], Circle[{0, 0}, 3], Hue[1],
   PointSize[0.04], Point[{-1, 0}], Point[{3, 0}]}], AspectRatio → Automatic,
 Axes → True]
```



Out[3]= - Graphics -

У області $|z|<1$ обидва дроби, на які розкладається функція f, потрібно розкладати у точці 0 за степенями z. Отже, функція f у області $|z|<1$ має розклад

In[4]:=
```
Series[f[z], {z, 0, 6}]
```

Out[4]= $-\dfrac{2}{3}+\dfrac{z}{9}-\dfrac{8z^2}{27}+\dfrac{19z^3}{81}-\dfrac{62z^4}{243}+\dfrac{181z^5}{729}-\dfrac{548z^6}{2187}+O[z]^7$

У області $1<|z|<3$ дріб $5/4(z-3)$ потрібно розкладати у точці 0 за степенями z, а дріб $1/4(z+1)$ – у нескінченності. Отже, функція f у області $1<|z|<3$ має розклад

In[5]:=
```
Series[5/(4 (-3 + z)), {z, 0, 6}] - Series[1/(4 (1 + z)), {z, ∞, 6}]
```

```
Series::icm :
 Series in z to be combined have unequal expansion points 0 and ∞.
```

Out[5]= $\left(-\frac{5}{12}-\frac{5z}{36}-\frac{5z^2}{108}-\frac{5z^3}{324}-\frac{5z^4}{972}-\frac{5z^5}{2916}-\frac{5z^6}{8748}+O[z]^7\right)+$
$\left(-\frac{1}{4z}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}\right)^4-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}\right)^5+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}\right)^6+O\left[\frac{1}{z}\right]^7\right)$

У області $|z|>3$ обидва дроби, на які розкладається функція f, потрібно розкладати в нескінченності за степенями z. Отже, функція f в області $|z|>3$ має розклад

```
In[6]:= Series[f[z], {z, ∞, 10}]
```

Out[6]= $\frac{1}{z}+4\left(\frac{1}{z}\right)^2+11\left(\frac{1}{z}\right)^3+34\left(\frac{1}{z}\right)^4+101\left(\frac{1}{z}\right)^5+304\left(\frac{1}{z}\right)^6+$
$911\left(\frac{1}{z}\right)^7+2734\left(\frac{1}{z}\right)^8+8201\left(\frac{1}{z}\right)^9+24604\left(\frac{1}{z}\right)^{10}+O\left[\frac{1}{z}\right]^{11}$

Вправи для самостійної роботи

❖ Розвинути функцію $f(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z-4)}$ в ряд Лорана в кільці $2<|z|<4$.

❖ Розвинути функцію $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+z-2}$

а) у кільці $1<|z|<2$;

б) в середині кола $|z|<1$;

в) поза колом $|z|=2$: $|z|>2$.

❖ Розвинути $f(z)=\dfrac{z}{(z^2+1)(z-3)}$ у кільці $1<|z|<3$.

❖ Розвинути в ряд Лорана функцію $\dfrac{1}{z-2}$ в околі точок $z=0$ та $z=\infty$.

❖ Розвинути в ряд Лорана функцію $\dfrac{1}{z(1-z)}$ в околі точок $z=0$, $z=1$, $z=\infty$.

❖ Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$ при $|z>1|$.

❖ Розвинути функцію $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ у області $2<|z|<\infty$.

❖ Розвинути в ряд Лорана:

а) функцію $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ в околі точки $z=0$;

б) функцію $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ в околі точки $z=2$.

❖ Знайти декілька перших членів розкладу функції $\sin\dfrac{1}{1-z}$ у ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки. Яка область збіжності цього розкладу?

Класифікація ізольованих особливих точок однозначного характеру

Точка а називається ***особливою точкою*** однозначного характеру, якщо існує окіл $0<|z-a|<R$ цієї точки (з виключеною точкою а), в якій функція аналітична.

В околі ізольованої особливої точки однозначного характеру $z=a$ функцію можна розкласти в ряд Лорана за додатними і від'ємними степенями різниці $(z-a)$, що виражає функцію в деякому крузі $0<|z-a|<R$ всюди, крім центру $z=a$.

Частина ряду за додатними степенями різниці $(z-a)$,

$a_0+a_1(z-a)+\ldots+a_n(z-a)^n+\ldots,$

називається ***регулярною (правильною) частиною***, а частина за від'ємними степенями різниці $(z-a)$,

$$\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots,$$

називається ***головною частиною*** ряду Лорана.

Ізольована особлива точка однозначного характеру називається:

•***Усувною***, якщо головна частина ряду Лорана відсутня.

•***Полюсом***, якщо головна частина містить скінчену кількість членів ряду.

•***Істотно особливою*** точкою, якщо головна частина містить нескінченну кількість членів ряду Лорана.

Порядком полюса називається число m, коли m - найнижча від'ємна степінь різниці.

Таким чином:

•В околі усувної особливої точки ряд Лорана має вигляд:

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+...+a_n(z-a)^n+...$$

$0<|z-a|<R$.

•В околі полюса порядку m ряд Лорана розклад має вигляд:

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+...+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+...+a_n(z-a)^n+...$$

$a_{-m}\neq 0, \qquad 0<|z-a|<R$;

•В околі істотно особливої точки розклад має вигляд:

$$f(z)=...+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+...+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+...$$

Головна частина містить нескінченну множину членів.

Якщо $z=a$ є нулем кратності m функції $f(z)$, то $z=a$ є полюсом порядку m функції $\frac{1}{f(z)}$.

Якщо $z=b$ є полюс порядку m функції $f(z)$, то $z=b$ є нулем кратності m функції $\frac{1}{f(z)}$.

Якщо $z=a$ усувна особлива точка функції $f(z)$, то $\lim\limits_{z\to a}f(z)=A$, $A-$ скінчене число.

Якщо $z=a$ полюс функції $f(z)$, то $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$

Якщо $z=a$ істотно особлива точка функції $f(z)$, то $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ не існує (тобто, границя приймає різні значення, в тому числі нескінченно велике, в залежності від шляху, по якому z наближається до a).

Типи особливих точок та форма ряду Лорана

Назва особливої точки	***Форма ряду Лорана***
Усувна особлива точка	Відсутні члени ряду з від'ємним показником степеня
Полюс	Кінцева кількість членів ряду з від'ємним показником степеня
Полюс порядку m	m членів ряду з від'ємним показником степеня
Істотно особлива точка	Нескінчена кількість членів ряду з від'ємним показником степеня

Тип особливої точки ∞ та форма ряду Лорана

Назва особливої точки	*Форма ряду Лорана*
Усувна особлива точка	Відсутні члени ряду з додатним показником степеня
Полюс	Кінцева кількість членів ряду з додатним показником степеня
Полюс порядку *m*	*m* членів ряду з додатним показником степеня
Істотно особлива точка	Нескінчена кількість членів ряду з додатним показником степеня

Приклади.

1. Функція $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ має особливу точку $z=0$.

В її околі:

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}...}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-...$$

Головна частина відсутня. Точка $z=0$ є усувна особлива точка.

2. Функція $f(z)=\dfrac{\cos z}{z}$ в околі точки $z=0$ задається рядом:

$$\frac{\cos z}{z}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{2!}+\frac{z^3}{4!}-...$$

Таким чином точка z = 0 є полюсом першого порядку.

3. Задано функцію

$$f(z)=\frac{(z+2i)^4}{(z+i)^3(z-5)^6}$$

Ця функція аналітична у всій площині z, за винятком точок $z_1=-i, z_2=5$. У силу останньої теореми ці точки є відповідно полюсами 3-го і 6-го порядків.

Дійсно, функція

$$F(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{(z+i)^3(z-5)^6}{(z+2i)^4}$$

має точки $z_1=-i, z_2=5$ – нулі відповідних порядків.

4. Функція $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ має точку $z=0$ істотно особливою точкою, тому що $\exp\frac{1}{z}\to 0$, коли z прямує до нуля по від'ємній частині дійсної осі, і $\exp\frac{1}{z}\to +\infty$, коли z прямує до нуля по додатній частині дійсної осі.

Якщо скористатись рядом Лорана для всіх $z\neq 0$

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots,$$

то він містить у головній частині нескінченну кількість членів ряду.

Використання систем комп'ютерної математики

Приклад.

Знайти всі скінчені особливі точки функції

$$f(z)=\frac{z^3-1}{(z^3+1)(z^3+i)}.$$

Розв'язання.

Так як чисельник та знаменник дробу – аналітичні функції, то особливими точками є нулі знаменника, тобто корені рівняння

$z^3+1=0$ та $z^3+i=0$ - шість точок

$$z_1=-1, z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_4=i, z_5=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i, z_6=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

Очевидно, що всі ці точки ізольовані є полюсами, так як для кожної з них справедливо

$$\lim_{z\to z_k} f(z)=\infty, k=0,1,2,3,4,5,6$$

Розв'язок приклада в середовищі пакету Mathcad

Знайти всі скінчені особливі точки функції

$$f(z)=\frac{z^3-1}{(z^3+1)(z^3+i)}.$$

Особливі точки функції f (z) = (z ^{3} - 1)/(z ^{3} + 1)(z ^{3} + i) .

Визначимо знаменник та знайдемо його нулі

Для того щоб ввести уявну одиницю і, наберіть на клавіатурі 1і та клацніть мишкою поза виділеною рамкою

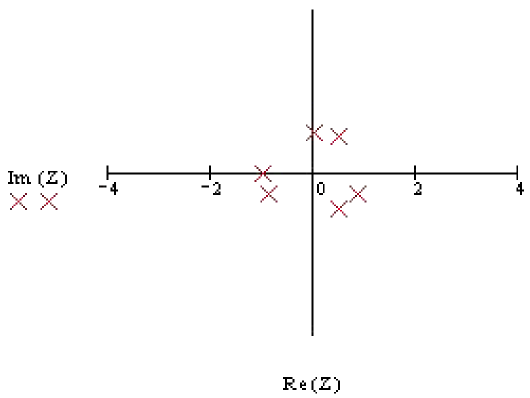
$$\left(z^3+1\right)\cdot\left(z^3+i\right)$$

$$Z := \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3} \\ i\cdot\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3}\right) \\ i\cdot\left(\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3}\right) \\ i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3} \\ i\cdot\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3}\right) \\ i\cdot\left(\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3}\right) \\ i \end{bmatrix}$$

Зобразимо знайдені шість нулів на комплексній площині

Для того щоб зобразити комплексне число на комплексній площині, клацніть у панелі Graph на символі декартова графіка, у вікні графіків, яке відкрилось, введіть у зазначеній позиції біля вісі абсцис, відокремлюючи комою, імена дійсних частин комплексних чисел, а в позиції біля вісі ординат - імена уявних частин, та клацніть поза полем графіків. Для того щоб установити стиль зображення, клацніть на графіку двічі та подивіться позначки в полях вводу, щоб зрозуміти, як визначений стиль зображення для наведеного графіка.



Отже, всі шість точок - ізольовані. Оскільки вони - прості нулі знаменника, то всі вони - полюси функції.

Розв'язок приклада в середовищі пакету Mathematica

Ізольовані особливі точки функції комплексної змінної.

Знайти всі скінчені особливі точки функції

$$(z^3-1)/(z^3+1)\,(z^3+i).$$

Введемо функцію $(z^3-1)/(z^3+1)\,(z^3+i)$

In[1]:=
```
f[z_] := (z^3 - 1)/((z^3 + 1) (z^3 + i))
```

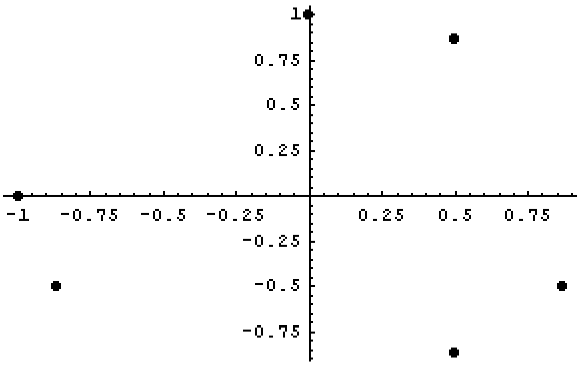
Знайдемо всі нулі знаменника

In[2]:=
```
a = z /. Solve[Denominator[f[z]] == 0, z]
```

Out[2]= $\{-1,\ i,\ -(-1)^{1/6},\ (-1)^{1/3},\ -(-1)^{2/3},\ -(-1)^{5/6}\}$

Зобразимо ці точки на площині

In[3]:=
```
Show[Graphics[Prepend[Point /@ Transpose[{Re[a], Im[a]}],
   PointSize[0.02]]], Axes → True]
```



Out[3]= - Graphics -

Всі ці точки є полюсами функції $(z^3-1)/(z^3+1)\,(z^3+i)$

In[4]:=
```
Clear[f, a]
```

Розв'язок приклада в середовищі пакету Mathcad

Визначити тип особливої точки $z=0$ для функції $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

Розв'язання.

Особливі точки функції f (z) = exp (1/z)

Особлива точка z = 0

$$\lim_{z\to 0} \exp\left(\frac{1}{z}\right) \to \text{undefined}$$

$$\lim_{z\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{z}\right) \to \infty$$

$$\lim_{z\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{z}\right) \to 0$$

Точка z = 0 є істотно особлива точка, так як не існує границі f (z) при наближені z до нуля.

Розв'язок приклада в середовищі пакету Mathematica

Ізольовані особливі точки функції комплексної змінної.

Визначити тип особливої точки $z = 0$ для функції $e^{1/z}$.

Введемо функцію $e^{1/z}$

In[9]:=
```
f[z_] := Exp[1/z]
```

In[10]:=
```
Limit[f[z], z → 0, Direction → -1]
```

Out[10]= ∞

In[11]:=
```
Limit[f[z], z → 0, Direction → 1]
```

Out[11]= 0

Точка $z = 0$ є істотно особливою точкою, так як у цій точці функція немає границі.

In[12]:=
```
Clear[f]
```

Вправи для самостійної роботи

❖ Знайти особливі точки функцій, з'ясувати їх характер і дослідити поведінку функції на нескінченності:

а) $\dfrac{1}{z-z^3}$; б) $\dfrac{1}{1+z^4}$; в) ze^{-z}; г) $e^{\frac{1}{z^2}}$; д) $ze^{\frac{1}{z}}$;

е) $\dfrac{\cos z}{z^2}$; ж) $\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$; з) $ctgz$; и) tgz .

❖ Які особливості має функція

$$f(z)=\frac{1}{1-e^{z}} \text{ , якщо } z=2\pi i \text{ ?}$$

❖ Знайти всі скінченні особливі точки функції і визначити їх характер (для полюсів вказати порядок):

а) $\frac{z+2}{(z-1)^3 z(z+1)}$; б) $\frac{1}{(i+z^2)^3}$; в) $e^{\frac{1}{z-zi}}$;

г) $\cos\frac{1}{z+i}$; д) $\frac{1-\cos z}{z^2}$; е) $\frac{\sin z}{z^4}$.

❖ Дослідити поведінку функції в околі нескінченно віддаленої точки:

а) $\frac{z}{5-z^4}$; б) e^{-z} ; в) $e^{\frac{1}{z}}+z^2-4$; г) $e^{\frac{1}{1-z}}$; д) $e^{-z}+z^3+z-2$.

❖ Знайти загальний вигляд функції, що має в розширеній площині тільки наступні особливості:

- один простий полюс;
- один полюс порядку n ;
- полюс другого порядку в точці $z=0$ з головною частиною розкладу $\frac{1}{z^2}$.

❖ Чи є точка $z=0$ ізольованою особливою точкою для функції:

а) $tg\frac{1}{z}$; б) $\sin\frac{1}{z}$?

❖ Яка різниця між поведінкою в околі точки $z=0$ функцій:

- Дійсної змінної

$$y=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$

- Комплексної змінної

$$w=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}}, z\neq 0, \\ 0, z=0 \end{cases} \text{ ?}$$

РОЗДІЛ 7
ПОНЯТТЯ ПРО ЛИШКИ, ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛИШКІВ

Лишки

Одне із найбільш важливих застосувань ТФКЗ у математичному аналізі, а також у науках із технічною спрямованістю, грунтується на понятті лишків функції комплексної змінної відносно ізольованої особливої точки.

Лишком функції $f(z)$ відносно ізольованої особливої точки $z=a$ однозначного характеру називається поділений на $2\pi i$ інтеграл від цієї функції по довільній замкненій кривій C, що містить всередині себе розглянуту особливу точку і не містить ніяких інших особливих точок функції $f(z)$.

$$\operatorname{Res} f(z)|_{z=a} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz,$$

a – особлива точка функції;
C – замкнена крива, що обходить точку a проти годинникової стрілки.

Лишок функції відносно полюсу чи істотно особливої точки дорівнює коефіцієнту при першій від'ємній степені при розкладанні функції в ряд Лорана в околі особливої точки.

$$\operatorname{Res} f(z)|_{z=a} = C_{-1},$$

якщо

$$f(z) = \ldots + \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + C(z-a)^2 + \ldots$$

Якщо a – простий полюс, то:

$$C_{-1} = \operatorname{Res} f(z)|_{z=a} = \lim_{z\to a}[f(z)(z-a)].$$

Знаходження лишку спрощується, якщо f(z) має вигляд:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \text{ де } \varphi(a) \neq 0,$$

а $\psi(z)$ має простий нуль, якщо $z=a$.

$$C_{-1} = \operatorname{Res} f(z)|_{z=a} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Якщо a – полюс кратності k ($k > 1$), то:

$$C_{-1} = \operatorname{Re} sf(z)|_{z=a} = \frac{1}{(k-1)!}.$$

Лишок функції $f(z)$ у нескінченно віддаленій точці $z = \infty$ знаходиться за формулою:

$$\operatorname{Re} sf(z)|_{z=\infty} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\xi)d\xi,$$

де інтегрування вздовж контуру C виконується у від'ємному напрямку. Контур C містить всередині себе всі особливі точки функції $f(z)$, що лежать у скінченій частині площини.

Слід також зазначити, що

$$\operatorname{Re} sf(z)|_{z=\infty} = -c_{-1}.$$

Якщо існує границя

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=\infty} = \lim_{z\to\infty}[-zf(z)].$$

Приклади.

1. Знайти лишок функції $\dfrac{z^2}{(1+z^2)(z+3)}$ відносно полюсів.

Розв'язання.

Нулями функції є точки $z = -2, z = i, z = -3$.

$$\operatorname{Re} sf(z)\Big|_{z=-i} = \lim_{z\to -i}\frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+3)}(z+i) = \lim_{z\to -i}\frac{z^2}{(z-i)(z+3)} = \frac{1-3i}{20}.$$

$$\operatorname{Re} sf(z)\Big|_{z=i} = \lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+3)}(z-i) = \frac{1+3i}{20}.$$

$$\operatorname{Re} sf(z)\Big|_{z=-3} = \lim_{z\to -3}\frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+3)}(z+3) = \frac{9}{10}.$$

2. Знайти лишок функції $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{(z+1)^4}$ відносно полюса.

Розв'язання.

Функція має полюс $z = -1$ четвертого порядку.

$$\operatorname{Re} sf(z)\Big|_{z=-1} = \frac{1}{3!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{\sin 2z}{(z+1)^4}(z+1)^4\right)\right] = \frac{1}{6}\lim_{z\to -1}[-8\cos 2z] = -\frac{4}{3}\cos 2.$$

Використання системи комп'ютерної математики

Приклад.

Обчислити лишок функції

$$f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z^3}.$$

Розв'язання.

Так як

$$\frac{1}{f(z)} = z^2 \cdot \frac{z}{\ln(1+z)} = z^2 \cdot \varphi(z), \quad \lim_{z\to 0} \varphi(z) = 1,$$

то $z = 0$ для $f(z)$ - полюс другого порядку.

Отже,

$$\operatorname*{Res}_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{\ln(1+z)}{z^3}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\ln(1+z)}{z}\right)' = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{z}{1+z} - \ln(1+z)}{z^2} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{z-(1+z)\ln(1+z)}{(1+z)z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{z-(1+z)\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots\right)}{(1+z)z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots}{(1+z)z^2} = \frac{1}{2}.$$

Розв'язок приклада в середовищі пакету Mathcad

Обчислення лишку функції ln(1+z)/z ^{3} у точці z=0.

Єдина особлива точка підінтегральної функції - полюс другого порядку z = 0.

Обчислимо лишок f (z) у полюсі другого порядку z = 0 як границя при z, яке наближається до нуля від функції (f (z) z2) '

$$f(z) := \frac{\ln(1+z)}{z^3}$$

$$g(z) := \frac{d}{dz} f(z)\cdot z^2$$

$$g(z) \rightarrow \frac{1}{[(1+z)\cdot z]} - \frac{\ln(1+z)}{z^2}$$

Mathcad погано обчислює границю. Для того, щоб обчислити границю при z = 0, розкладемо функцію за формулою Тейлора за степенями z.

$$\frac{1}{[(1+z)\cdot z]} - \frac{\ln(1+z)}{z^2}$$

$$\frac{-1}{2}+\frac{2}{3}\cdot z-\frac{3}{4}\cdot z^2+\frac{4}{5}\cdot z^3+O(z^4)$$

Для того щоб знайти розклад функції f (z) за степенями z, введіть вираз для обчислення функції, виділіть рамкою змінну z, потім виберіть у меню Symbolic процедури Variable - Expand to Series ... , введіть у поле вводу Order of Approximation вищу степінь z у формулі Тейлора та клацніть на кнопку OK

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{-1}{2}+\frac{2}{3}\cdot z-\frac{3}{4}\cdot z^2+\frac{4}{5}\cdot z^3+O(z^4)\right)\to\frac{-1}{2}$$

Лишок дорівнює - ½.

Розв'язок приклада в середовищі пакету Mathematica

Обчислити лишок функції $f(z) = \ln(1+z)/z^3$.

Введемо функцію f

In[9]:= $f[z\_] := \frac{\text{Log}[1+z]}{z^3}$

Точка 0 є полюсом другого порядку функції f. Розкладемо функцію f у точці 0 в ряд Лорана.

In[10]:= `Series[f[z], {z, 0, 4}]`

Out[10]= $\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+\frac{1}{3}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{5}-\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{7}+O[z]^5$

Лишок функції f у точці 0 дорівнює коефіцієнту при z^{-1} у розкладі Лорана, тобто $-1/2$.

Можна обчислити лишок по іншому. Знайдемо границю при $z\to 0$ функції $(f[z]\,z^2)'$

In[11]:= `Limit[D[f[z] z^2, z], z -> 0]`

Out[11]= $-\frac{1}{2}$

Можливо обчислити лишок за допомогою функції Residue

In[12]:= `Residue[f[z], {z, 0}]`

Out[12]= $-\frac{1}{2}$

In[13]:= `Clear[f]`

Вправи для самостійної роботи

❖ Знайти лишок функції $ctgz$ відносно полюсу $z = \pi$.

❖ Знайти лишок функції $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ відносно полюсів $z=\pm i$.

❖ Знайти лишок функції відносно кожного з полюсів:

а) $\dfrac{z^2+1}{z-2}$; б) $\dfrac{e^{\pi z}}{z-i}$; в) $\dfrac{1}{z^3-z^5}$; г) $\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$ ($n>0$ і ціле);

д) $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$; е) $\dfrac{1}{(z^2+1)^n}$; ж) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$.

❖ Знайти лишок функції $\dfrac{e^z}{z^2-a^2}$ відносно точки $z=a$.

❖ Знайти лишок функції $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$ відносно кратного полюса $z=i$.

Основна теорема про лишки

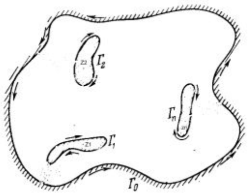
Нехай функція $f(z)$ однозначна і аналітична в будь-якій точці області G, крім скінченої кількості особливих точок $a_1,a_2,a_3...,a_k$. Позначимо через C довільний кусково-гладкий замкнутий контур, що містить всередині себе точки $a_1,a_2,a_3...,a_k$ і цілком належить області G. За цих умов інтеграл від функції $f(z)$, взятий по контуру C дорівнює:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Re}sf(z)\,\Big|_{z=a_{j...}}$$

Зазначимо також, що якщо функція $f(z)$ однозначна й аналітична на всій комплексній площині (включаючи $z=\infty$ за виключенням скінченої кількості ізольованих особливих точок), то сума всіх її лишків дорівнює нулю.

Застосування теорії лишків до обчислення визначених інтегралів засновано на ***теоремі про лишки***: якщо функція $f(z)$ аналітична в області D і на замкненому контурі Γ_0, що її обмежує, за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок $a_1,a_2,...,a_n$, що лежать усередині Γ_0, то інтеграл від $f(z)$ уздовж Γ_0 у додатному напрямку дорівнює добуткові $2\pi i$ на суму лишків функції $f(z)$ у всіх точках $a_k\,(k=1,2,...,n)$, тобто

$$\int\limits_{\Gamma_0} \mathrm{f}(z)dz = 2\pi\,\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}s\,\mathrm{f}(\mathrm{a}_k) \qquad (7.1)$$



Теорема про лишки може бути застосована до обчислення контурних інтегралів від функцій комплексної змінної, якщо обчислення звичайним способом викликає труднощі. Покажемо цю операцію на прикладі.

1. Обчислити інтеграл

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma_0} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_0} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z+3)}\,,$$

де Γ_0 – коло $|z|=2$, що обходиться проти годинної стрілки.

Розв’язання.

Щоб застосувати теорему про лишки, потрібно визначити особливі точки підінтегральної функції, що лежать усередині контуру інтегрування. Прирівнюючи до нуля знаменник функції $f(z)$, знаходимо, що

$$z_1 = i,\, z_2 = -i,\, z_3 = -3$$

є простими полюсами, причому усередині контуру лежать z_1, z_2. Отже:

$$\int\limits_{\Gamma_0} f(z)dz = 2\pi i\left[\operatorname{Re}sf(z_1) + \operatorname{Re}sf(z_2)\right]$$

Обчислимо лишки:

$$\operatorname{Re}sf(z_1) = \lim_{z\to z_z}\frac{z^2(z-i)}{(z^2+1)(z+3)} = \frac{1+3i}{20},\operatorname{Re}sf(z_2) = \frac{1-3i}{20}$$

Тепер можемо записати

$$I_1 = 2\pi i\left[\frac{1+3i}{20} + \frac{1-3i}{20}\right] = \frac{1}{5}\pi i\,.$$

2. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+4}dz\,.$$

Розв’язання.

Підінтегральна функція $z^2+4=(z-2i)(z+2i)$ в області D, що обмежена колом радіуса 1 з центром у точці $z_0=2i$, має лише дану точку $z_0\in D$ (область D – круг $|z-2i|\le 1$). Застосуємо інтегральну формулу Коші до функції $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z+2i}$ (що залишається після перетворення даної підінтегральної функції $\dfrac{e^{iz}}{z^2+4}$ до структури підінтегральної функції в інтегралі типу Коші). Тоді

$$\int\limits_{|z-2i|=1}\frac{e^{iz}}{z^2+4}dz=\int\limits_{|z-2i|=1}\frac{\dfrac{e^{iz}}{z+2i}}{z-2i}dz=2\pi i\left.\frac{e^{iz}}{z+2i}\right|_{z=2i}=2\pi i\frac{e^{2i^2}}{4i}=\frac{\pi}{2}e^{-2}.$$

Використання системи комп'ютерної математики

Приклад.

Обчислити інтеграл

$$\oint\limits_{|z|=1}z^3e^{\frac{1}{z}}dz.$$

Розв'язання.

Єдина особлива точка підінтегральної функції – істотно особлива точка $z=0$. Вона належить області, обмеженої контуром інтегрування.

Обчислимо лишок у істотно особливій точці функції $f(z)$:

$$\underset{z=0}{res}\,z^3e^{\frac{1}{z}}=\frac{1}{24},$$

так як

$$z^3e^{\frac{1}{z}}=z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\frac{1}{5!z^5}+\ldots\right)=$$

$$=z^3+z^2+\frac{z}{2!}++\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!z^2}+\ldots,\ c_{-1}=\frac{1}{24}.$$

Тоді

$$\oint\limits_{|z|=1}z^3e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\frac{1}{24}=\frac{\pi i}{12}.$$

Розв'язок приклада в середовищі пакету Mathematica

Обчислення інтегралів по замкнутому контуру.

Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=1}z^3e^{\frac{1}{z}}dz$.

Введемо підінтегральну функцію `f`

In[5]:=
```
f[z_] := z^3 Exp[1/z]
```

Єдина особлива точка функції `f` – точка `z = 0` – належить до області `|z| < 1`. Отже, інтеграл дорівнює:

In[6]:=
```
2 π i Residue[f[z], {z, 0}]
```

Out[6]=
$$\frac{i\pi}{12}$$

In[7]:=
```
Clear[f]
```

Вправи для самостійної роботи

- Обчислити

$$\int_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz,$$ де контур C – коло $|z| = 2$.

- Обчислити

$$\int_C \frac{\cos z}{z^3}dz,$$ де контур C – коло $|z| = 1$.

- Обчислити

$$\int_C \frac{\sin z}{\left(z^3+4z\right)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}dz,$$ де контур C – коло $|z| = 1$.

- Обчислити

$$\int_C \frac{e^{2z}}{z-\frac{\pi i}{2}}dz,$$ де контур C – коло $|z| = 2.$

- Обчислити

$$\int_C \frac{dz}{\left(z^2+9\right)^2},$$ де контур C – коло радіусом 2 з центром в точці $2i$.

❖ Обчислити

$$\int_C \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz, \text{ де контур } C \text{ – коло } |z-i|=1.$$

Обчислення невласних інтегралів за допомогою лишків

В основі застосування теорії лишків до обчислення визначених інтегралів лежить теорема про зображення значення інтеграла сумою лишків. Способи обчислення не є універсальними. Розглянемо декілька типів інтегралів.

І тип. Інтеграли вигляду:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin Q, \cos Q)dQ,$$

де R – раціональна функція, що не має полюсів на колі $x^2+y^2=1$. За формулами Ейлера виражаємо $\sin Q, \cos Q$, далі робимо заміну $e^{iQ}=z$.

Отримаємо,

$$\sin Q = \frac{z-z^{-1}}{2i}, \quad \cos Q = \frac{z+z^{-1}}{2}.$$

Підставляючи ці вирази в підінтегральну функцію, отримаємо раціональну функцію:

$$R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}; \frac{z+z^{-1}}{2}\right), dQ = \frac{1}{i}\frac{dz}{z}.$$

Коли Q змінюється від 0 до 2π, z описує одиничне коло. Відповідно інтеграл дорівнює добутку $2\pi i$ на суму лишків функції:

$$\frac{1}{iz}R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}; \frac{z+z^{-1}}{2}\right)$$

в полюсах, що лежать в одиничному колі.

Приклад.

Обчислити $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dQ}{a+\sin Q}$, де a – дійсне число, $a>1$.

Розв’язання.

$$\sin Q = \frac{z^2 - 1}{2iz}, dQ = \frac{dz}{iz}.$$

Тоді

$$I = \int_C \frac{1}{a + \frac{z^2 - 1}{2iz}} \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{2dz}{z^2 + 2iaz - 1},$$

де C – одиничне коло.

Підінтегральна функція має єдиний полюс, що знаходиться в одиничному колі:

$$z^2 + 2iaz - 1 = 0,$$

$$z = -ia \pm \sqrt{-a^2 + 1} = -ia \pm \sqrt{a^2 - 1},$$

$$z_0 = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}.$$

Знаходимо лишок функції в полюсі z_0:

$$\operatorname{Re} sf(z) \Big|_{z_0 = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}} =$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{2\left(z + ia - i\sqrt{a^2 - 1}\right)}{\left(z + ia - i\sqrt{a^2 - 1}\right)\left(z + ia + i\sqrt{a^2 - 1}\right)} = \frac{2}{-ia + i\sqrt{a^2 - 1} + ia + i\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Тоді $I = 2\pi i$, $\operatorname{Re} sf(z) \Big|_{z = z_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

II тип. Інтеграл вигляду

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx,$$

де $R(x)$ – раціональна функція без дійсних полюсів.

Щоб інтеграл був збіжним, степінь чисельника $R(x)$ повинна бути нижче знаменника, принаймні на дві одиниці.

Теорію лишків застосовують так. Підінтегральну функцію не змінюють і беруть від неї інтеграл по замкнутому контуру C, що утворений верхнім півколом C_R радіусом R і діаметром $(-R; R)$. Радіус R вибирається настільки великим, щоб всі полюси дробу $R(z)$, розміщені у верхній півплощині, лежали б всередині півкола.

Тоді:

$$\int_{k_R} R(z) dz + \int_{-R}^{R} R(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Re} sf(z) |_{z=0},$$

Границя першого інтегралу $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_{KR} R(z) dz = 0$, якщо $\lim\limits_{z \to \infty} R(z) Q = 0$.

Приклад.

Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$

Розв’язання.

Підінтегральна функція $\frac{1}{1+z^2}$ у верхній півплощині має полюс $z=i$.

Лишок функції в полюсі:

$$\operatorname{Re}s\frac{1}{1+z^2}\Big|_{z=i}=\lim_{z=i}\frac{z-i}{(z+i)(z-i)}=\frac{1}{2i}$$

До інтеграла $\int_{k_R}\frac{dz}{1+z^2}$ застосуємо вище наведеній критерій $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{1+z^2}z=0.$

Тоді $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i\frac{1}{2i}=\pi.$

ІІІ тип. Інтеграл вигляду:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\,.$$

Лемма Жордана

Нехай C_k - дуга, що лежить у верхній півплощині, кола радіусом R з центром в деякій фіксованій точці z_0, а функція $f(z)$ має вигляд $f(z)=e^{itz}\,F(z)$, при чому $t>0$. Якщо $F(z)$ аналітична на дійсній осі, а у верхній півплощині має лише скінчене число особливих точок і $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$, то:

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{CR}f(z)dz=0.$$

Лему зручно застосовувати при знаходженні інтегралів:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(x)\cos mxdx,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}F(x)\sin mxdx.$$

Приклад.

Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx.$$

Розв’язання.

Функція $f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+9}$ задовольняє умови лемми Жордана.

Тут $t=1$ і $F(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$.

Особливі точки функції $f(z)$ – це полюси першого порядку $z_1=-3i$; $z_2=3i$.

У верхній півплощині знаходиться єдина особлива точка $z_2=3i.$

Лишок функції відносно цієї точки :

$$\operatorname{Re}sf(z)\Big|_{z=3i}=\frac{e^{iz}}{\left(z^2+1\right)'}\Big|_{z=3i}=\frac{e^{-3}}{6i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+9}dx=2\pi i\cdot\frac{e^{-3}}{6i}=\frac{\pi e^{-3}}{3},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x+i\sin x}{x^2+9}dx=\frac{1}{3}\pi e^{-3},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx=\frac{\pi}{3e^{-3}}\quad\text{і}\quad\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx=\frac{\pi}{3e^{-3}}.$$

IV. Інші приклади обчислення інтегралів.

Приклад.

Обчислити інтеграл Діріхле.

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Розв’язання:

Розглянемо інтеграл: $\displaystyle\int_C\frac{e^{iz}}{z}dz$.

Контур C обираємо наступним чином: він складається з відрізка дійсної вісі від $\mathrm{z}=\rho$ до $z=R$, це $0<\rho<R$, із півплощини Γ радіусом R з центром в точці $z=0$, що лежить у верхній півплощині, із відрізка дійсної вісі від $-R$ до $-\rho$ і, нарешті, з дуги кола γ радіусом ρ з центром в початку координат (рис. 7.1).

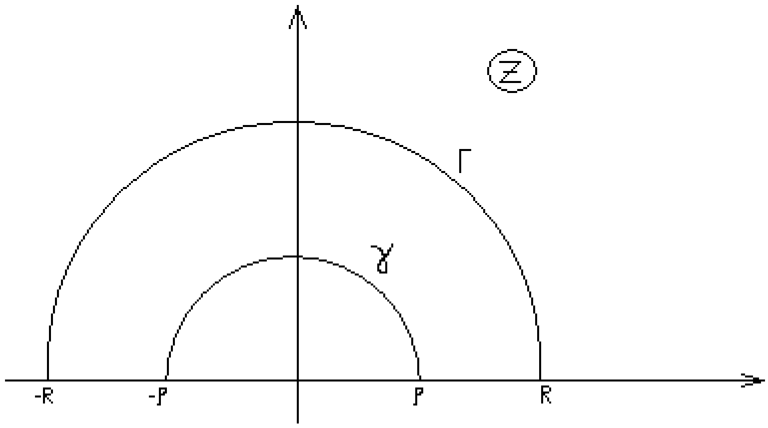


Рис. 7.1

В отриманій області функція $\frac{e^{iz}}{z}$ аналітична, відповідно

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

і

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_\rho^R \frac{e^{ix}}{x} dx = 0.$$

Об'єднаємо другий і четвертий інтеграли:

$$\int_\rho^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_\rho^R \frac{e^{ix} - e^{ix}}{x} dx = 2i \int_\rho^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

Можна показати, що:

$$\lim_{R \to \infty} \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 .$$

Обчислимо границю третього інтегралу при $\rho \to 0, z = \rho e^{i\varphi}$.

$$\lim_{\rho \to 0} \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{\rho \to 0} \int_\pi^0 \frac{e^{i\rho(\cos\phi\varphi + i\sin\phi\varphi)}}{\rho e^{i\phi\varphi}} \rho e^{i\phi\varphi} i d\phi =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} i \int_\pi^0 e^{i\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} d\varphi = i \int_\pi^0 d\varphi = -i\pi .$$

Відповідно, вважаючи, що $\rho \to 0$, $R \to \infty$, отримаємо:

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = i\pi;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Зауваження.

Метод контурного інтегрування може давати головне значення інтегралу по контуру для $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, коли сам інтеграл у звичайному значенні не існує.

Вправи для самостійної роботи

Обчислити за допомогою лишків інтеграли:

- ❖ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx;$
- ❖ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4x+20} dx;$
- ❖ $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + a} (a > 1);$
- ❖ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1};$
- ❖ $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx;$
- ❖ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2};$
- ❖ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}.$

РОЗДІЛ 8
ДЕЯКІ ПИТАННЯ ЗАСТОСУВАННЯ ТФКЗ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНЖЕНЕРНИХ ЗАДАЧ

Розглянемо найпростіші приклади застосування теорії функцій комплексної змінної до розв'язання інженерних задач.

Зупинимося спочатку на гідромеханічному тлумаченні аналітичної функції та її похідної. Розглянемо плоско-паралельний рух рідини (наприклад, рух води у річці). Нехай вільна поверхня рідини являє собою площину *XoY,* а вектор швидкості $\vec{v}$ частинок рідини утворює поле швидкостей у цій площині. Будемо вважати, що функції $v_x(x;y)$ і $v_y(x;y)$ є проекціями на вісі координат вектора швидкості $\vec{v}$ частинок рідини.

Взагалі під терміном "поле" розуміють частину простору або весь простір, у якому розглядається деяке явище, що характеризується скалярною або векторною величиною. Наприклад, припускаючи, що в кожній точці простору визначена деяка температура, ми будемо мати поле температур. Можна говорити також, про поле тиску, електростатичне поле, про поле швидкостей і т.п. Частіше за інші розглядаються поля, що не змінюються в часі. Їх називають стаціонарними полями. Якщо величина, що характеризує поле, є скалярної (температура, тиск), то поле називається ***скалярним***. Векторне поле описує векторна величина (сила, швидкість).

Важливе місце серед векторних полів займає плоско-паралельне поле. В площинах, паралельних до деякої площини α вигляд його не змінюється. Найчастіше плоско-паралельне поле ілюструють потоком рідини. Під час руху всі частинки рідини залишаються в одній площині, а рух у всіх площинах, паралельних до α, збігається з рухом у площині α. Вивчення плоско-паралельного поля зводиться до вивчення його лише в площині α.

Введемо у площині α декартові координати *Oxy* і візьмемо замкнуту криву Жордана Γ (рис. 8.1). Будемо вважати, що поле в α визначається вектором-швидкістю $v(x;y)$, і назвемо ***циркуляцією*** поля (або вектора швидкості $\vec{v}$) вздовж кривої Γ криволінійний інтеграл

$$Ц = \int_{\Gamma} (\upsilon, \tau) ds = \int_{\Gamma} \upsilon_x dx + \upsilon_y dy .$$

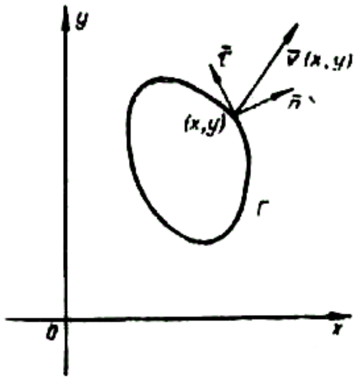


Рис. 8.1

Тут τ - орт дотичної до Γ, $(v;\tau)$ - скалярний добуток v і τ, v_x, v_y – проекції вектора-швидкості відповідно на осі *Ox*, *Oy*.

Вектор $\vec{v}$ спрямований по дотичній до траєкторії прямування частинок рідини.

Потоком вектора швидкості $\vec{v}$ через дугу *AB* називається інтеграл

$$N = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$$

Цей інтеграл виражає потік рідини, що протікає за одиницю часу через дугу *AB*.

Рух рідини в деякій частині площини називається ***безвихровим*, якщо в ній циркуляція *Ц* вектора швидкості $\vec{v}$ вздовж будь-якого замкненого контура дорівнює нулю. Якщо при цьому дорівнює нулю потік *N*, то рух рідини називається ***соленоїдним*.** Отже, безвихровий і соленоїдний рух рідини визначається рівностями

$$\int_c v_x dx + v_y dy = 0 \qquad \int_c -v_y dx + v_x dy = 0 \qquad (8.1)$$

де Γ – будь-який замкнений контур в області безвихрового соленоїдного руху. З математичного аналізу відомо, що з рівності нулю криволінійного інтеграла по будь-якому замкненому контуру слідує, що підінтегральний вираз є повним диференціалом.

Отже, відповідно до формул (8.1), можна записати

$$v_x dx + v_y dy = d\varphi \qquad -v_y dx + v_x dy = d\varphi,$$

причому

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad -v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}. \qquad (8.2)$$

Із співвідношень (8.2) отримаємо, що

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (8.3)$$

Таким чином, якщо ми будемо розглядати функцію комплексної змінної

$f(z)=\varphi(x;y)+i\psi(x;y)$, то за (8.3) вона буде аналітичною. Ця функція в гідромеханіці називається ***комплексним потенціалом*** або ***характеристичною функцією***. Дійсна частина цієї функції $\varphi(x;y)$ називається ***потенціалом швидкості***, тому що її частинні похідні рівні проекціям вектора швидкості на вісі координат. Функція $\psi(x;y)$ називається ***функцією току***, тому що рівняння траєкторій частинок рідини, що рухаються, мають вигляд

$$\varphi(x;y)=k,\quad k \text{ - стала} \tag{8.4}$$

Отже, безвихревий соленоїдний рух рідини може бути схарактеризованим аналітичною функцією комплексної змінної

$$f(z)=\varphi(x;y)+i\psi(x;y).$$

Знайдемо похідну цієї функції

$$f'(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=v_x-iv_y \tag{8.5}$$

причому комплексно-спряжена функція, для (8.5) має вигляд

$$\overline{f'(z)}=v_x+iv_y \tag{8.6}$$

Отже, проекції вектора швидкості на координатні осі дорівнюють дійсній та уявній частинам спряженої похідної характеристичної функції. Модуль похідної дорівнює величині швидкості

$$|f'(z)|=\left|\overline{f'(z)}\right|=|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2} \tag{8.7}$$

Нехай, наприклад, $f(z)=az$ ($a>0-$ дійсне число) $f(z)=a$ і $\bar{f}'(z)=a$. Значить $v_x=a$, $v_y=0$. Функція $f(z)=az$ характеризує рух рідини паралельно до дійсної осі зі сталою швидкістю *a* за додатним її напрямом.

Поставимо задачу: знайти характеристичну функцію плоско-паралельного потоку, що обтікає круговий циліндр радіуса R, за додаткової умови, що рідина тече на нескінченності зі сталою швидкістю v_∞.

Математично задача зводиться до пошуку функції $f(z)$, яка є аналітичною зовні круга $|z|>R$ і яка задовольняє умову $|f'(\infty)|=v_\infty$.Функція має вигляд:

$$f(z) = v_\infty (z + \frac{R^2}{z}) \qquad (8.8)$$

Якщо нам необхідно побудувати характеристичну функцію обтікання плоско-паралельним потоком деякого контуру l, то застосовують ***метод конформних відображень***. Якщо $t = h(z)$ реалізує конформне відображення зовнішності контуру l на зовнішність кола $|t| = R$, то шуканою характеристичною функцією буде функція:

$$F(z) = v_\infty \left[h(z) + \frac{R^2}{h(z)} \right] \qquad (8.9)$$

Відзначимо, що за теоремою Рімана відображення $t = h(z)$ майже завжди можливо, причому $h(z)$ буде аналітичною функцією.

Наприклад, можна показати, що функція

$$t = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b}, c = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad (8.10)$$

відображає зовнішність еліпса площини Z на зовнішність одиничного кола площини t. Тому характеристична функція обтікання еліпса має відповідно до (8.9) вигляд:

$$F(z) = 2v_\infty \frac{z^2 + z\sqrt{z^2 - c^2} + b^2 + ab}{(a + b)(z + \sqrt{z^2 - c^2})} \qquad (8.11)$$

Наведемо приклад застосування теорії лишків до розв'язання задачі про згинання балки нескінченної довжини, що лежить на пружній основі. Для цього скористаємось поняттям ***перетворення Фур'є***. Якщо функція $f(x)$ має скінченну кількість екстремумів (максимумів або мінімумів), а також скінченну кількість точок розриву першого роду на всій осі ($-\infty < x < \infty$) та існує інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

то перетворенням Фур'є функції $f(x)$ є функція $F(z)$, що подається інтегралом

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{izx} dx \ . \qquad (8.12)$$

Доводиться, що справедлива обернена формула, що дозволяє знаходити $f(x)$ за її перетворенням Фур'є $F(z)$, тобто:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(z) e^{-izx} dz \qquad (8.13)$$

Нехай балка нескінченної довжини, завантажена довільним навантаженням $q(x)$, лежить на ***вінклерівській*** основі. Ця основа моделюється системою пружин, що мають однакову жорсткість k. Математично ця задача формулюється у вигляді диференціального рівняння для шуканої функції прогинів балки

$$EIy^{IV}(x) = q(x) - ky(x), \; (-\infty < \times < \infty), \qquad (8.14)$$

де EI – жорсткість балки.

Шукана функція $y(x)$ повинна також задовольняти умовам на нескінченності

$$y(x), y'(x), y''(x), y'''(x) \to 0, x \to \infty \qquad (8.15)$$

Ці умови означають, що для навантаження $q(x)$, прикладеного на кінцевій ділянці балки, прогини, кути повороту перетинів і внутрішні зусилля в балці зникають на нескінченності. Будемо розв'язувати цю задачу за допомогою перетворення Фур'є. Домножимо ліву і праву частини рівняння (8.14) на e^{izx} і проінтегруємо в інтервалі від $-\infty$ до $+\infty$. Введемо позначення:

$$Q(z) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x)e^{izx}dx, \quad Y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)e^{izx}dx \; . \qquad (8.16)$$

Тоді рівняння (8.14) перепишемо у вигляді

$$EI\int_{-\infty}^{\infty} y^{IV}(x)e^{izx}d(x) = Q(x) - kY(z) \qquad (8.17)$$

До інтеграла, що залишився, у рівнянні (8.17) застосуємо інтегрування частинами, з урахуванням того, що в результаті інтегрування члени, що не містять інтегралів згідно умов (8.15) прямують до нуля.

У результаті отримаємо алгебраїчне рівняння функції $Y(z)$, що є перетворенням Фур'є шуканої функції $y(x)$.

$$z^4 EIY(z) + kY(z) = Q(z)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$Y(z) = \frac{1}{EI}Q(z)(z^4 + a^4)^{-1}, \quad a^4 = \frac{k}{EI}$$

Застосувавши тепер формулу оберненого перетворення Фур'є (8.13), можемо записати розв'язок поставленої задачі

$$y(x) = \frac{1}{2\pi EI}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(z)e^{-izx}dz}{z^4 + a^4} \qquad (8.18)$$

Інтеграл у (8.18) береться за допомогою теорії лишків. Покажемо цю операцію на окремому випадку навантаження у вигляді зосередженої сили P. Знайдемо спочатку перетворення Фур'є для навантаження, тобто від функції

$$q(x) = \begin{cases} q, & |x| \le b, \\ 0, & |x| > b, \end{cases} \qquad Q(z) = q\int_{-b}^{b} e^{izx}dx = 2q\frac{\sin bz}{z}. \tag{8.19}$$

Отже, для навантаження (8.19) прогини балки визначаються формулою

$$y(x) = \frac{q}{\pi EI}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin bz e^{-izx}dz}{z(z^4+a^4)} \tag{8.20}$$

Використовуючи розв’язок (8.20), за допомогою граничного переходу, одержимо розв’язок задачі у випадку навантаження у вигляді зосередженої сили. Для цього спрямуємо у формулі (8.20) $b \to 0$, приймаючи $2qb = P$. У результаті одержимо, шуканий розв’язок

$$y(x) = \frac{P}{2\pi EI}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-izx}dz}{z^4+a^4}. \tag{8.21}$$

Інтеграл (8.21) обчислюємо за допомогою теорії лишків. Підінтегральна функція має чотири особливих точки – полюси першого порядку:

$$z_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}(1+i),\ z_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i),\ z_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}(-1-i),\ z_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}(1-i).$$

Причому z_1 і z_2 лежать у верхній півплощині, а z_3 і z_4 – у нижній. Розглянемо випадок, коли $x < 0$. Замкнувши контур у верхній півплощині, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{izx}dz}{z^4+a^4} = i\left[\mathrm{Re}\,s\frac{e^{iz_1x}}{z_1^4+a^4} + \mathrm{Re}\,s\frac{e^{iz_2x}}{z_2^4+a^4}\right]$$

Обчислимо лишки:

$$\mathrm{Re}\,s\frac{e^{iz}k^x}{z_k^4+a^4} = \frac{e^{iz_kx}}{4z_k^3}, \quad (k = 1,2).$$

Тепер можна записати інтеграл таким чином:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{izx}dz}{z^4+a^4} = \frac{i}{8\lambda^3}\left[\frac{e^{i\lambda(1+i)x}}{-1+i} + \frac{e^{i\lambda(-1+i)x}}{1+i}\right] = \frac{e^{-\lambda x}}{8\lambda^3}(\cos\lambda x + \sin\lambda x),$$

де позначено $\lambda\sqrt{2} = a$.

Якщо тепер у формулі (8.21) прийняти $x > 0$, то, замкнувши контур інтегрування в нижній півплощині, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-izx}dz}{z^4+a^4} = \frac{e^{-\lambda x}}{8\lambda^3}(\cos\lambda x + \sin\lambda x).$$

Отже, розв’язок задачі про вигин балки нескінченної довжини, що лежить на вінклерівській основі та завантаженої зосередженою силою P, має вигляд:

$$y(x) = \frac{P}{8EI\lambda^3}e^{\lambda|x|}(\cos\lambda|x| - \sin\lambda|x|), \quad (-\infty < x < \infty).$$

РОЗДІЛ 9
ТЕСТИ

І-А. Комплексні числа.

1. Чи вірно, що

$$\arg(\cos 4 + i\sin 4) = 4\,?$$

2. Чи співпадають множини значень:

$$(z^{\frac{1}{4}})^2 \text{ та } (z^2)^{\frac{1}{4}};$$

$$Argz^2 \text{ та } 2Argz\ ?$$

3. Якою особливістю повинні володіти радіуси-вектори точок z_1, z_2, щоб:

$$|z_1 - z_2| = \big||z_1| - |z_2|\big|\,?$$

а) $\overline{z_1} \perp \overline{z_2}$; б) $\overline{z_1} \uparrow\downarrow \overline{z_2}$; в) $\overline{z_1} \uparrow\uparrow \overline{z_2}$; г) $|z_1| = |z_2|$; д) довільні.

4. Чи можна через три точки z_1, z_2, z_3 провести коло, якщо

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} > 0\,?$$

5.Чи для всіх $z \in C$ виконуються нерівності:

а) $\left|\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}\right| \ge 1;$

б) $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \le |\arg z|\,?$

І - Б. Комплексні числа.

1. Чи вірно, що

$$\arg(\cos 3 + i\sin 3) = 3\,?$$

2.Чи співпадають множини значень:

$$(z^{\frac{1}{4}})^3 \text{ та } (z^3)^{\frac{1}{4}};$$
$$Arg(z_1 z_2) \text{ та } Arg z_2 + Arg z_1?$$

3.Якою особливістю повинні володіти радіуси-вектори точок z_1, z_2, щоб:

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|?$$

а) $\overline{z_1} \perp \overline{z_2}$; б) $\overline{z_1} \uparrow\downarrow \overline{z_2}$; в) $\overline{z_1} \uparrow\uparrow \overline{z_2}$; г) $|z_1| = |z_2|$; д) довільні.

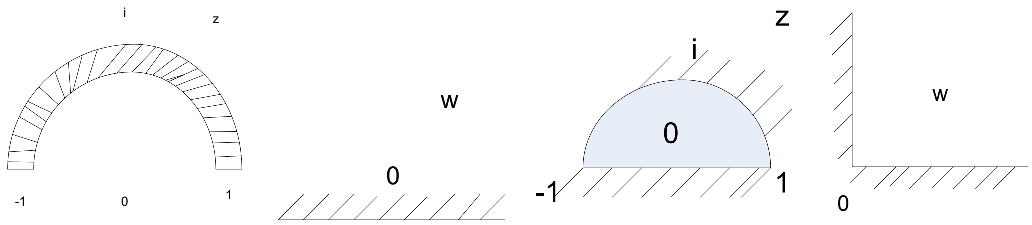
4. Вкажіть, яке з перелічених ліній при відображенні $w = \dfrac{1}{z}$ переходить у пряму:

а) $x^2 + y^2 = ax;$

б) $y = x + b, b \neq 0;$

в) $y = x^2$.

5. Вкажіть, які із наступних областей дробово-лінійно-ізоморфні:



ІІ. Дробово-лінійні перетворення.

1.Чи обов'язково суперпозиція однолистих функцій є функцією однолистою?

2. Скільки прямих входить в сімейство ліній рівня модуля дробово-лінійної функції?
а) одна; б) нескінченна множина; в) жодна.

3. Вкажіть, які із наступних ліній при відображенні $w = \dfrac{1}{z}$ переходять в прямі:

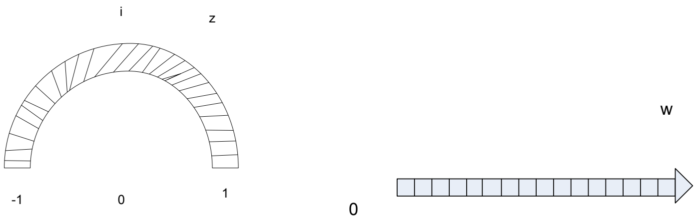
а) $x^2 + y^2 = a^2$;

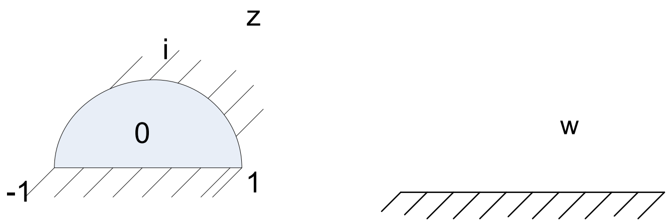
б) $y = bx$;

в) $x = y^2$

4. Чи є лінійно-ізоморфними будь-які подібні трикутники?

5. Вкажіть, які з наступних областей дробово-лінійно-ізоморфні:

а) 

б) 

III-А. Степеневе функція. Радикал.

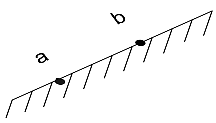
1.Чи може область однолистності функції $w = z^n$ містить точку z = 0?

2.Чи будуть однолистими в області D функції:

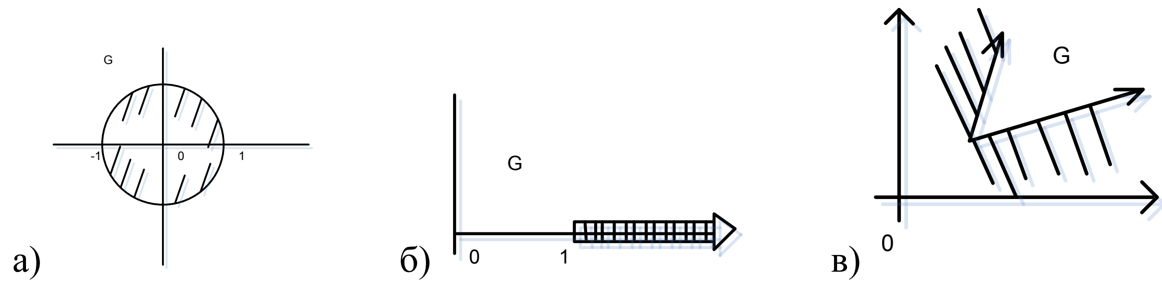
а) $w = z^2$, $(D: 1 < |z+2| < 2)$;

б) $w = z^2$, $(D: 1 < |z| < 2)$;

в) $w = \left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^2$.



3.Вкажіть, в яких областях G можна виділити однозначні вітки функції $w = \sqrt[n]{z}$.



III-Б. Степенева функція. Радикал.

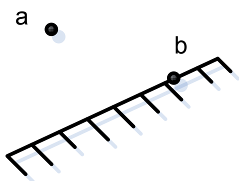
1. Чи вірно, що $w = z^2$ однолиста в області D тоді і тільки тоді, коли $D \cap (-D) \neq 0$, де $-D : z; z \in D$?

2.Чи будуть однолистими в області D функції:

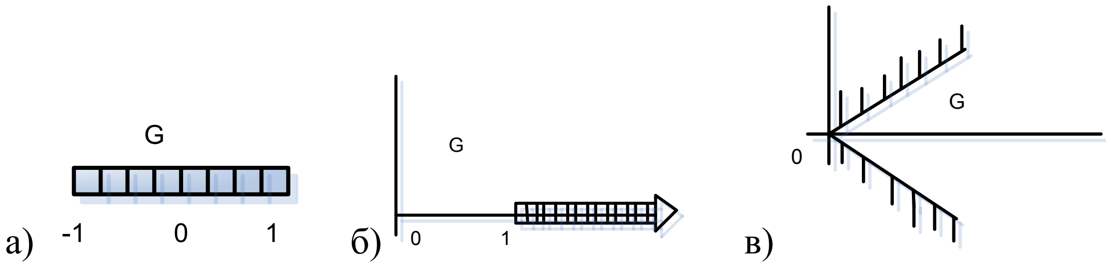
а) $w = z^2 \quad D: 1 < |z+2| < 3$

б) $w = (z-3)^2 \quad D: 1 < |z| < 3$

в) $w = \left(\dfrac{z-a}{z-b} \right)^2$.



3. Вкажіть в яких областях G можна виділити однозначні вітки функції $w = \sqrt[n]{z-1}$.



IV. Дії над комплексними числами.

Для заданих чисел z_1 та z_2 виконати вказані дії:

а) знайти значення z_3;

б) числа z_1 та z_2 записати в показниковій та тригонометричній формах;

в) для числа z_1 знайти всі корені степеня m та зобразити їх на комплексній площині; зробити перевірку одного з коренів;

г) число z_2 піднести до степеня k.

1. $z_1 = 3+3i$, $z_2 = 4$,

$$z_3 = \frac{2z_1 + 3iz_2}{(\overline{z}_1 z_2 - 4)^2 + 2i}, \quad m = 4, \quad k = 8.$$

2. $z_1 = -4i$, $z_2 = 2+2i$,

$$z_3 = \frac{4z_1 + 5iz_1\overline{z}_2}{(2i\overline{z}_1 + 1 - 4i)^2}, \quad m = 5, \quad k = 6.$$

3. $z_1 = 3$, $z_2 = -1+i$,

$$z_3 = \frac{4i(z_1 + 2z_2)^2}{z_1 + \overline{z}_2(5+3i)}, \quad m = 4, \quad k = 4.$$

4. $z_1 = 3+3i$, $z_2 = 1-i$,

$$z_3 = \frac{z_1(z_2 - 3 + 2i)^2}{5i(3\overline{z}_1 + 45z_2)}, \quad m = 4, \quad k = 5.$$

V-A. Функція Жуковського.

1. Чи обов'зково сума однолистих функцій в області D є там однолистою функцією?

2. Чи вірно, що $w = (z + \frac{1}{z})$ однолиста в D тоді і тільки тоді, коли $D \cap \frac{1}{D} \neq \not\subset$, де $\frac{1}{D} : \frac{1}{z}, z \in D$?

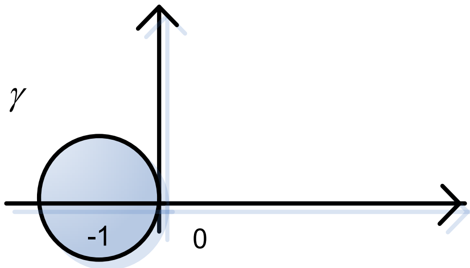
3.Чи будуть однолистими в D функції:

а) $w = (z + \frac{1}{z})^2$, $D : |z| < 1, 0 < \arg z < \pi$;

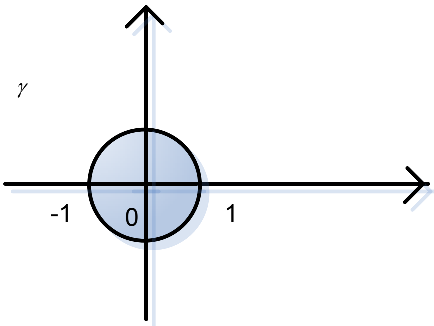
б) $w = (z + \frac{1}{z}), D$ - деякий круг,

границя якого проходить через точки $z = \pm 1$?

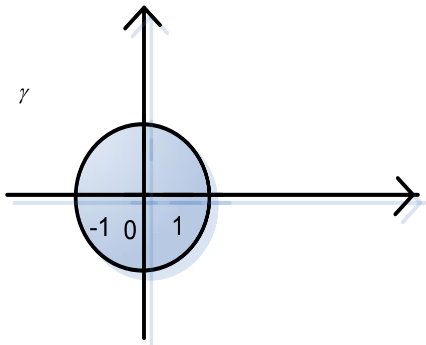
4. Укажіть криву γ, обхід по якій не зміню значення $\sqrt{z^2 - 1}$.



а)



б)



в)

V-Б. Функція Жуковського.

1. Чи обов'язково добуток однолистих функцій в D є там однолистою функцією?

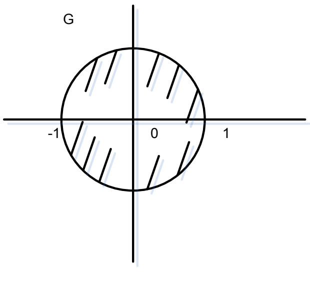
2. Чи може область однолистої функції Жуковсього містити точку $z = 1, z = -1$?

3. Чи будуть однолистими в області D функції:

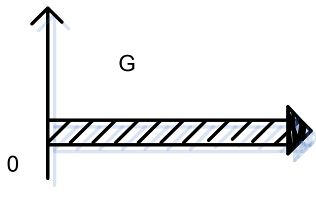
$$\text{а) } w = (z + \frac{1}{z})^2, (D : |z| < 1);$$

$$\text{б) } w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), (D : |z - i| < \sqrt{2} .$$

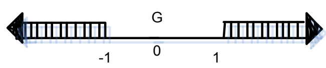
4. Укажіть, в яких із наступних областей можна виділити однозначні вітки функції $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$.



а)



б)



в)

VI. Теорема Коші, інтеграл Коші.

1. Чи залежить інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dz}{z}$ від форми шляху?

2. Чи залежить інтеграл $\oint_C\frac{dz}{z^2}$ від форми шляху?

3. Чи залежить інтеграл $\oint_C\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$ (n –ціле) від форми шляху, якщо для $z\in C$ $|a|<|z|<|b|$?

4. Чи має функція $f(z)=\frac{1}{z}$ зображення в області $D:\{\operatorname{Im} z>0\}$?

5. Чи має зображення в своїй площині $f(z)=\frac{1}{z}$?

6. Чи залежить інтеграл $\oint\limits_{|z|=r}\frac{dz}{z}$ від величини r?

7. Чи залежить інтеграл $\oint\limits_{|z-i|=r}\frac{dz}{z^2+1}$ від $r(r\neq 2)$?

8. Яке число різних значень може приймати інтеграл $\oint_C\frac{dz}{z^2+9}$ при різних положеннях контура C? C не проходить через точки $\pm 3i$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

9. З'ясувати чи є два наступних інтеграли інтегралами Коші:

$$\text{а) } \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi(\xi-2)};$$

$$\text{б) } \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=2}\frac{d\xi}{\xi(\xi-1)}.$$

VII. Ряди Тейлора і Лорана.

1.Чи допускає функція $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}$ розклад в ряд Тейлора чи Лорана в околі точок:

I. $z=0$;

II. $z=\infty$;

III. $z=\pi$;

IV. В околі $\frac{1}{2} < |z| < 1$?

а) ні; б)в ряд Тейлора; в) в ряд Лорана.

2. Чи можна функцію $w = |z|$ розкласти в ряд Тейлора чи Лорана в деякому околі точки $z = 0$?

3.Укажіть радіуси максимальних кругів $|z - z_0| < R$ і кілець $r < |z - z_0| < R$, в яких функція $w = \frac{z^2(z^2+2)}{(z-1)(z^2+1)}$ представлена рядом Тейлора чи Лорана, коли

I. $z_0 = 0$;
II. $z_0 = i$.

а) 0; б) 1; в)2; г) $\sqrt{2}$; д) ∞.

4. Чи можна коефіцієнти ряду Лорана $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-a)^k$ представити у вигляді $C_к = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (k \geq 0)$?

5. У $|z| < 1$ маємо $w = \frac{1}{z^2+1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k$.Чому дорівнює:

I. C_{11};
II. C_{-10}.

а) 0; б)1; в) $\frac{1}{11!}$; г) $-\frac{1}{10!}$.

VIII-А. Особливі точки.

1.Визначити порядок полюса функції $f(z)$ в точці z_0:

I. $f(z) = \frac{z^3 - 6z^2 + 12z}{(z-2)^2 sh(z-2)}, z_0 = 2$;
II. $f(z) = \frac{1}{\sin z - z}, z_0 = 0$.

а) 0; б)1; в) 2; г) 3; д) 4.

2. $f(z)$ голоморфна в точці $z=\infty$ і має там нуль порядку m. Визначити порядок нуля функції $f^{(z)}(z)$ в точці $z=\infty$.

а) m; б) n; в) $m\cdot n$; г) $m+n$; д) $m-n$; е) $n-m$.

3.Який характер особливої точки $z=0$ для функцій:

I. $f(z)=tg\frac{1}{z}$;

II. $f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{\sin z}$.

а) усувна; б) полюс; в) суттєво особлива; г) неізольована.

4. Функція $f(z)\neq const$ голоморфна в $0<|z-a|<r$ і має нуль в будь-якому околі точки a. Який характер особливої точки?
а) усувна; б) полюс; в) суттєво особливо.

5. z_0-особлива ізольована точка функції $f(z)$. $\operatorname{Re} f(z)>0$ в деякому околі цієї точки. Чи може точка z_0 бути суттєво особливою для $f(z)$?

6. $f(z)$ голоморфна і $|f(\mathrm{z})|<M$ в $0<|z-a|<r$. Чи може вона не мати границі в точці a?

7. Чи існують цілі функції, які відрізняються від const і мають в точці $z=\infty$ усувну особливість?

8. $f(z)=z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^k}+...$
Чи слідує з цього, що $z=0$ суттєво особлива точка для $f(z)$?

VIII-Б. Особливі точки.

1.Визначити порядок полюса функції $f(z)$ в точці z_0:

I. $f(z)=\frac{(z-2)^2 sh(z-2)}{z^3-6z^2+12z-8}, z_0=2$;

II. $f(z)=\frac{1}{\sin z}+\frac{1}{z}, z_0=0$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.

2. $f(z)$ має в кінцевій точці полюс порядку m. Визначити порядок полюса функції $f^{(n)}(z)$ в цій точці.

а) m; б) n; в) $m\cdot n$; г) $m+n$; д) $m-n$; е) $n-m$.

3.Який характер особливості функції $f(z)$ в точці z_0

I. $f(z)=\cos\frac{1}{z}, z_0=0$;

II. $f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{\sin z}, z_0=\pi$.

а) усувна; б) полюс; в) суттєво особлива; г) неізольована.

4. Функція $f(z)$ голоморфна в $0<|z|<r$ в точках послідовності $z_n\to 0$ приймає значення 1, 2, 1, 3, …1, 100, ..,… . Який характер особливості точки O?

а) усувна; б) полюс; в) суттєво особлива.

5. z_0-особлива ізольована точка функції $f(z)$. $\operatorname{Re} f(z)>0$ в деякому околі цієї точки. Чи може точка z_0 бути полюсом для $f(z)$?

6. $f(z)$ голоморфна і $|f(\mathrm{z})|>M\neq 0$ в $0<|z-a|<r$. Чи може вона не мати границі в точці a?

7. Чи існують голоморфні в області C функції з нескінченним числом полюсів у $|\mathrm{z}|<R$?

8. $|f(\mathrm{z})|=z+1+\frac{1}{2!z^2}+...$

Чи слідує звідси, що $z=0$ – суттєво особлива точка функції $f(z)$?

IX. Лишки.

1.Знайти:

I. $\underset{z=0}{res}\ln(\frac{z-n}{z-m}) \quad n\neq 0, m\neq 0$;

II. $\underset{z=\infty}{res}\ln(\frac{z-n}{z-m})$;

III. $\underset{z=a}{res}\, m\frac{f'(\mathrm{z})}{\mathrm{f(z)}}, a\neq\infty$- нуль порядку n функції $f(z), m-const$;

IV. $\underset{z=\infty}{res}\left[\frac{f'(x)}{f(z)}+n\right], \infty$- полюс порядку m функції $f(z)$.

а) m; б) n; в) $m\cdot n$; г) $m+n$; д) $m-n$; е) $n-m$.

5. $z=\infty-$правильна точка функції $f(z)$.

Чи обов’язково $resf(z)=0$?

6.Скільки коренів рівняння $z''-5z+1$ знаходиться:

I. В колі $|\mathrm{z}|<1$;

II. В кільці $1<|\mathrm{z}|<2$?

а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4.

7.Чому дорівнюють інтеграли:

I. $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{|z|=3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$, де $f(z)=\frac{\sin^2 z}{(z^3+8)(z+4)}$;

II. $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{|z|=3}\frac{dz}{(z^2+1)^2}$;

III. $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{|z|=3}\sin\frac{1}{z}dz$.

а) -1; б) 0; в)1; г) 3; д) 4; е) 8.

Література

1. Долженко Є. П. Теорія функцій комплексної змінної та деякі її застосування : [навч. посібн.] / Є. П. Долженко, А. І. Єрмаков. – Луганськ, 2003. – 192 с.

2. Краснов М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М. Л. Краснов, А. И. Кисилев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1981.

3. Кручкович Г. И. Сборник задач и упражнений по специальнім главам высшей математики / Г. И. Кручкович, Г. М. Мордасов и др. – М. : Высшая школа, 1970.

4. Леонтьева Т. А. Задачи по теории функций комплексного переменного / Т. А. Леонтьева, В. С. Панфёров, В. С. Серов. – М. : изд-во МГУ, 1992.

5. Пак В. В. Высшая математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецк : Сталкер, 1997.

6. Пантелеев А. В. Теория функций комплексного переменного и операционне исчисление в примерах и задачах / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова – М. : Высшая школа, 2001.

7. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Специальные разделы математического анализа. Под ред. А. И. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1986.

8. Шунда Н. М. Практикум з математичного аналізу: Інтегральне числення. Ряди : [навч. посібн.] / Н. М. Шунда, А. А. Томусяк . – К. : Вища школа, 1995. – 541 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Клочко Віталій Іванович

Кирилащук Світлана Анатоліївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ. ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ