

В.В. Хом'юк
Вінницький національний технічний університет

Чисельна стійкість алгоритму мультипідсумовування елементів векторного масиву із застосуванням методу різницевих зрізів

Відомо, що чисельні алгоритми мають дві характеристики, за якими оцінюють їх ефективність:

- складність (час, що витрачається на обчислення);
- чисельна стійкість (мала чуттєвість до похибок округлення).

Результати виконання чисельних алгоритмів на реальних ЕОМ містять похибки округлення різних типів. За означенням алгоритм є чисельно стійким, якщо похибки виконання кожної операції на реальних ЕОМ не перевищують похибки вхідних даних, які призводять до похибки результату навіть і в тому випадку, коли всі проміжні дії виконуються точно.

Існує два методи аналізу чисельної стійкості алгоритму – обернений і прямий аналіз похибок.

Прямий аналіз. Нехай для алгоритму із використанням різницевих зрізів:

$\varepsilon_{a_{ij}}$ - відносна похибка початкових даних;

ε - відносна накопичена похибка округлення;

R - кількість операцій додавання і віднімання, тобто $R = (n-1) + n$.

Тоді, за т. Рьонша будемо мати $\varepsilon \leq \varepsilon_{a_{ij}} \cdot R$ або $\varepsilon \leq \varepsilon_{a_{ij}} \cdot (2n-1)$.

$$\varepsilon_{\text{н\ddot{o}i} \grave{a}} \rightarrow \frac{\varepsilon_{p_{j-1}}}{\varepsilon_{p_{j-1}} + \varepsilon_{p_j}} \cdot \varepsilon_{p_{j-1}} + \frac{\varepsilon_{p_j}}{\varepsilon_{p_{j-1}} + \varepsilon_{p_j}} \cdot \varepsilon_{p_j}, \quad (1)$$

а отже, $\varepsilon_{\text{н\ddot{o}i} \grave{a}} \rightarrow 0$.

Обернений аналіз. З математичної точки зору обернений аналіз полягає у трансформуванні похибок округлення в похибки вхідних (початкових) даних.

$$\begin{aligned} fl(x+y) &= x(1+\varepsilon_1) + y(1+\varepsilon_2), \\ fl(x \cdot y) &= x \cdot y \cdot (1+\varepsilon_3), \end{aligned} \quad (2)$$

причому $|\varepsilon_i| \leq 4 \cdot \bar{\varepsilon}$, де $\bar{\varepsilon}$ - машинна точність.

При використанні методу різницевих зрізів, рухаючись в зворотному порядку виконання мультипідсумовування і враховуючи відносні похибки заокруглення отримаємо

$$fl(E) = E(F, q_j, p_j) \rightarrow E(a_{ij}), \quad (3)$$

тобто мультипідсумовування елементів векторного масиву за методом різницевих зрізів, який не використовує операції ділення, є чисельно стійким за означенням.