

**О. М. Васілевський, канд. техн. наук, доцент**

## **СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ВИЯВЛЕННЯ СИСТЕМАТИЧНИХ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ**

*Запропоновано статистичні методи виявлення систематичних похибок для визначення відхилень результатів вимірювань від середнього значення та тенденції цих відхилень на основі отриманих експериментальних даних.*

### **Вступ і постановка задачі**

Систематичні похибки під час повторних вимірювань залишаються постійними або прогнозовано змінюються за певним законом. Ці похибки в більшості випадків можуть бути визначені за допомогою експерименту. Для визначення, оцінки і вилучення систематичних похибок необхідно, по-перше, знати місце і причини їх виникнення, а по-друге – способи виявлення і вилучення цих похибок. На практиці широко застосовуються такі способи вилучення систематичних похибок: вилучення джерел похибок до початку вимірювань, дворазові спостереження, рандомізація і введення поправок [1 - 4]. Що стосується методів виявлення систематичних похибок, то в літературних джерелах з метрології [1 - 4] їм приділено недостатньо уваги. Тому розробка математичного апарату, який дозволить виявляти систематичні похибки за допомогою отриманих експериментальних даних є актуальною науковою задачею кожного точного вимірювання.

З огляду на вищесказане, *метою статті* є створення математичних моделей, які дозволять виявляти систематичні похибки вимірювань і тенденції їх відхилень за допомогою отриманих результатів вимірювань.

### **Викладення основного матеріалу**

Якщо систематична похибка є постійною і дисперсія невиправлених результатів відповідає дисперсії виправлених результатів, то постійні систематичні похибки не впливають на випадкові відхилення від середнього

значення і ніяке математичне опрацювання не дозволяє їх виявити. Виявлення цих похибок можливе тільки при повірці засобів вимірювальної техніки (ЗВТ) за допомогою точніших ЗВТ чи еталонів. Різниця в показах ЗВТ, що повіряється та точнішої міри дорівнює шуканій систематичній похибці.

Для виявлення змінних систематичних похибок можна використати статистичні методи. Для цього результати вимірювань, що досліджуються потрібно поділити на декілька груп та дослідити їх на однорідність середнього значення і дисперсії. При цьому вдається виявити відхилення результатів вимірювань від середнього значення, а також тенденцію цих відхилень.

*Метод послідовних різниць.* Одним з методів виявлення систематичних похибок є використання способу послідовних різниць. Він може використовуватися для виявлення випадкових змін центра розподілу результатів вимірювань. В цьому методі використовується той факт, що дисперсію результатів вимірювань можна оцінити двома способами: звичайним

$$S^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \quad (1)$$

де  $x_i$  –  $i$ -ий результат вимірювання;

$\bar{x}$  – середнє арифметичне значення;

$n$  – кількість проведених вимірювань;

та за допомогою розрахунку суми квадратів послідовних (в порядку проведення вимірювань) різниць  $(x_{i+1} - x_i)^2$

$$S^2_d = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2}{2(n-1)}. \quad (2)$$

Якщо в процесі вимірювань систематична похибка зміщувала середнє арифметичне значення, то буде мати місце нерівність  $S^2(x) > S^2_d$ . Відношення  $v = S^2_d / S^2(x)$  є критерієм для виявлення систематичних зміщень середнього

арифметичного значення результатів вимірювань. Критична межа цього критерію визначається як  $P(v < v_q) = q$ , де  $q$  – рівень значимості,  $q = 1 - P$ , а  $P$  – довірча ймовірність.

Якщо середнє арифметичне значення буде мати зміщення, то  $v < v_q$ . Якщо ж ні, то ця нерівність не виконуватиметься, і це означатиме, що систематична похибка в отриманих результатах вимірювань відсутня. Значення  $v_q$  в залежності від рівня значимості  $q$  ( $q = 0,001; 0,01; 0,05$ ) та кількості проведених вимірювань наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Значення критерію  $v_q$

n	$v_q$ при $q$ , що дорівнює		
	0,001	0,01	0,05
4	0,295	0,313	0,390
5	0,208	0,269	0,410
6	0,182	0,281	0,455
7	0,185	0,307	0,468
8	0,202	0,331	0,491
9	0,221	0,354	0,512
10	0,241	0,376	0,531
11	0,260	0,396	0,548
12	0,278	0,414	0,564
13	0,295	0,431	0,578
14	0,311	0,447	0,591
15	0,327	0,461	0,603
16	0,341	0,474	0,614
17	0,355	0,487	0,624
18	0,368	0,499	0,633
19	0,381	0,510	0,642
20	0,393	0,520	0,650

*Дисперсійний метод.* Другий метод виявлення систематичних похибок полягає в проведенні  $N$  вимірювань та розбитті цих вимірювань на  $L$  груп, по  $n_j$  результатів вимірювань в кожній групі ( $L > 3$ ), але так, щоб виконувалась

рівність  $N = \sum_{j=1}^L n_j$ . Потім потрібно проаналізувати зміну дисперсій в кожній із

груп вимірювань у порівнянні з середнім розсіюванням вимірювань всередині кожної із груп.

Оцінку внутрішньогрупової дисперсії (середнє розсіювання всередині груп) можна провести за такою формулою

$$S^2_{вр} = \frac{\sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{N-L} = \frac{\sum_{j=1}^L (n_j - 1) S_j^2}{N-L} = \frac{\sum_{j=1}^L k_j S_j^2}{\sum_{j=1}^L k_j}, \quad (3)$$

де  $\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_j}$  – середнє значення результатів вимірювань в  $j$ -й групі;

$x_{ij}$  – результат  $i$ -го вимірювання в  $j$ -й групі;

$S_j^2$  – дисперсія всередині кожної  $j$ -ї групі;

$$\sum_{j=1}^L k_j = N - L.$$

Якщо результати вимірювань містять систематичну похибку, то це перш за все відобразиться на зміні середньоарифметичного значення  $\bar{x}_j$  однієї із груп вимірювань. На дисперсії результатів вимірювань це відобразиться несуттєво, якщо вимірювання окремих груп будуть незначними. Внутрішньогрупову дисперсію (3) доцільно порівнювати з міжгруповою дисперсією, що розраховується за формулою

$$S^2_{мг} = \frac{\sum_{j=1}^L n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{L-1}, \quad (4)$$

де  $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^L \bar{x}_j}{L} = \frac{\sum_{j=1}^L 1/n_j \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{L} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$  – середньоарифметичне значення усіх результатів вимірювань.

Дисперсія (4) відображає вплив систематичного відхилення між групами вимірювань.

В якості критерію оцінки наявності систематичних похибок можна використати дисперсійний критерій Фішера

$$F = \frac{S_{\text{МГ}}^2}{S_{\text{ВГ}}^2}. \quad (5)$$

Значення  $F_q$  для різних рівнів значимості  $q$ , кількості вимірювань  $N$  та кількості груп  $L$  наведені у [5] при степенях вільності  $k_1 = L - 1$ ,  $k_2 = N - L$ . Якщо отримане значення критерію  $F$  буде більше за  $F_q$  (при заданих  $q$ ,  $N$ ,  $L$ ), то гіпотеза про відсутність систематичних зміщень результатів вимірювань за групами відкидається, тобто вважається, що зміщення середньоарифметичного значення обумовлене систематичною похибкою.

Цей дисперсійний метод є більш чутливим до зміни середньоарифметичних значень і його доцільно використовувати, якщо багаторазові вимірювання здійснюються на протязі тривалого часу, а самі вимірювання є рівноточними.

Якщо кількість груп є меншою за три, то використати такий дисперсійний метод визначення систематичних похибок неможливо. В цих випадках потрібно використовувати інші методи оцінки рівності математичних очікувань у групах.

Якщо потрібно встановити наявність зміщення у середньоарифметичних значеннях для двох груп вимірювань, а кількості даних в кожній із груп менше 30, то для перевірки гіпотези про рівність середніх значень можна використати таку величину

$$z_{1-2} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{(n_1 - 1)S_{x_1}^2 + (n_2 - 1)S_{x_2}^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}, \quad (6)$$

де  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  – середньоарифметичні значення першої та другої групи вимірювань, відповідно;

$n_1$ ,  $n_2$  – кількість вимірювань у першій та другій групі, відповідно;

$S_{x_1}^2$ ,  $S_{x_2}^2$  – значення дисперсій першої та другої групи вимірювань, відповідно.

Далі, задавшись певним рівнем значимості  $q$  або довірчою ймовірністю  $P=1 - q$ , і кількістю степенів вільності  $k = n_1 + n_2 - 2$  за таблицею Стюдента [5] знаходять відповідне значення  $z_p$ . Якщо  $z_{1-2} < z_p$ , то гіпотеза про рівність середньоарифметичних значень приймається. Таку оцінку можна використовувати і для великої кількості груп, попарно перевіряючи їх на однорідність.

### Висновки

Отже, в даній статті розроблено математичні моделі, які дозволяють виявляти зміщення середньоарифметичних значень та наявність систематичних похибок в результатах вимірювань. Розглянуті вище методи можуть використовуватись, якщо виконуються дві умови: розподіл результатів вимірювань є нормальним і результати вимірювань в групах є рівнорозподіленими, тобто дисперсії груп вимірювань можна вважати однаковими.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Метрологічне забезпечення вимірювань і контролю : [ навчальний посібник ] / Є. Т. Володарський, В. В. Кухарчук, В. О. Поджаренко, Г. Б. Сердюк. – Вінниця: ВДТУ, 2001. – 219 с.
2. Васілевський О. М. Нормування показників метрологічної надійності / О. М. Васілевський // Вісник Вінницького політехнічного інституту. - 2011. - № 4. - С. 9 - 13.
3. Основи метрології та вимірювальної техніки. Основи метрології. Т. 1 / [Дорожовець М., Мотало В., Стадник Б. та ін.]; за ред. Б. Стадника. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2005. – 532 с. - ISBN 966-553-311-8.
4. Поджаренко В. О. Оцінка статичних метрологічних характеристик вимірювальних каналів вібрації / В. О. Поджаренко, О. М. Васілевський, В. М. Севастьянов // Український метрологічний журнал. – 2005. – №2. – С. 60 - 65.
5. Володарський Є.Т. Статистична обробка даних : [ навчальний посібник ] / Є. Т. Володарський, Л. О. Кошева. – К.: НАУ, 2008. – 308 с. – ISBN 978-966-598-406-1.
6. Поджаренко В. О. Оцінка статичних метрологічних характеристик вимірювального каналу температури / В. О. Поджаренко, В. М. Дідич, О. М. Васілевський // II Міжнародна науково-практична конференція «Інтегровані інтелектуальні робото-технічні комплекси» (ІРТК-2009). – 2009. – С. 83 – 85.

Рекомендована кафедрою метрології та промислової автоматики

**Васілевський Олександр Миколайович** – начальник відділу інформаційно-комунікаційних технологій Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України, к. т. н., доцент кафедри метрології та промислової автоматики.