С. 13-16. **4.** *Савин В.* Деревянная авиация профессора Немана // Крылья Родины. – 1997. - № 3. – С. 21-23; № 4 – С. 26-29; № 5 – С. 17-19. **5.** *Савин В.* Калинин-4 // Аэрохобби. – 1994. - № 3. – С. 2-7. **6.** *Шавров В. Б.* История конструкций самолетов в СССР до 1938 г. – М.: Машиностроение, 1978. – 576 с. **7.** *Шавров В. Б.* История конструкций самолетов в СССР 1938-1950 гг. – М.: Машиностроение, 1978. – 440 с. **8.** *Маслов М. А.* Самый секретный истребитель // Авиация и время. – 1998. - № 5. – С. 4-12. **9.** *Мялица А. К.* 70 лет Харьковскому государственному авиационному производственному предприятию // Авиация и время. – 1996. - № 4. – С. 1, 13. **10.** *Нестеров А. Ф.*, Савин В. С., Совенко А. К. 75 лет Харьковскому государственному авиационному производственному предприятию. – К.: ИЦ АэроХобби. – 2001. – 40 с. **11.** *Центральний* державний архів вищих органів влади і управління України, ф. 184, оп. 1, спр. 6, арк. 4. **12.** *Котельников В. Р.* Летающая лодка Дорнье Валь. – С.-Пб.: Гангут. – 1995. – 40 с. **13.** *Грацианский А. Н.* 50 лет со дня начала испытаний самолета К-5 (1929 г.) // Из истории авиации и космонавтики. – Вып. 37. – 1980. – С. 104-106. **14.** *Грацианский А. Н.* О жизни и деятельности К.А. Калинина // Из истории авиации и космонавтики. – Вып. 26. – 1975. – С. 98-112. **15.** *Савин В. С.* 50 лет со дня первых летных испытаний самолета ХАИ-1 // Из истории авиации и космонавтики. – Вып. 48. – 1984. – С. 38-41. **16.** *Государственный* архив Российской Федерации (далі – ГАРФ), ф. 8418, оп. 4, спр. 178. **17.** *ГАРФ,* ф. 8418, оп. 5, спр. 172. **18.** *Российский* государственный военный архив (далі - РГВА), ф. 29, оп. 76, спр. 1121. **19.** *ГАРФ,* ф. 8148, оп. 11, спр. 65. **20.** *ГАРФ*, ф. 8148, оп. 10, спр. 55. **21.** *РГВА*, ф. 29, оп. 76, спр. 998. **22.** *ГАРФ*, ф. 8148, оп. 12, спр. 142. **23.** *РГВА,* ф. 29, оп. 38, спр. 45. **24.** *Мухин М. Ю.* Авиапромышленность СССР в 1921-1941 годах. – М.: Наука, 2006. – 320 с.

Надійшла до редколегії 14. 03. 08

УДК 51(091)

А. А. ЧЕРЕПАЩУК, Вінницький національний політехнічний університет

ІСТОРИЧНИЙ РОЗВИТОК ПОНЯТЯ ФУНКЦІЇ

У статті розкривається значення поняття “функція” та історія його розвитку в працях вчених-математиків. Показано який зміст у це поняття вкладали видатні математики Європи.

The sense of “function” conception and history of its development is illustrated. In scientific works of mathematicians it is shown that matter in this sense inputted the outstanding mathematicians of Europe.

Дана стаття присвячена включенню історичних аспектів у процес вивчення технічних дисциплін у вищих навчальних закладах освіти. Цією темою займалося чимало видатних науковців, чиї постаті відомі у світі науки. Серед них такі прізвища: В. Г. Бевз, Л. М. Бєсов, Г. О. Михалін, Л. М. Вивальнюк, О. І. Бородін, С. С. Завала, О. О. Требенко, Д. Я. Требенко, І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик та багато інших. Проблема вивчення історичних фактів у вищих навчальних закладах є важливою з кількох аспектів: *по-перше*, історичні факти як матеріал наукового характеру сприяє підвищенню інтелектуального рівня студентів, збільшенню інтересу до предмету, а отже, зростанню бажання до його вивчення, *по-друге*, залучення студентів до науково-дослідної роботи може відбуватися в процесі вивчення фактів історії науки, *по-третє*, вдало “вплетені” історизми можуть слугувати базою для створення у свідомості студентів чіткого уявлення про розвиток науки, її будову, структуру методи дослідження, тенденції розвитку.

Праці згаданих науковців займають широкий спектр досліджень в галузі історії науки, починаючи від історії теорії чисел і закінчуючи дослідженнями історії науки і техніки у самому широкому розумінні [1, 2]. Очевидно, що темі історизму присвячено досить багато уваги, однак дана стаття націлена на розкриття в певному розумінні вузького питання – питання розвитку поняття "функції", оскільки при вивченні технічних дисциплін ми пропонуємо перш за все розглядати історичний розвиток понять, які є загальновживаними і вивчаються в багатьох технічних дисциплінах. Так одним із таких понять є поняття *функції* (функціональної залежності). Функціональна залежність є предметом вивчення майже всіх технічних дисциплін, але у різних формах. Так, на уроках вищої математики студенти вивчають власне функції, способи їх задання та властивості. На уроках фізики, теорії основ електротехніки, вивчаючи енергетичні установки, математичні задачі електроенергетики, основи метрології та електровимірювальної техніки студенти сприймають функції не як об'єкт вивчення, а як носій певної інформації. Саме тому дана стаття може бути цікавою викладачам практично усіх технічних спеціальностей, оскільки в ній відображено хід думок науковців, котрі займалися цим питанням При вивченні цього поняття студентам бажано подати таку інформацію.

Хоча математики зустрічалися з конкретними функціями досить часто, однак мав бути пройдений тривалий шлях поступової кристалізації понять і їх узагальнення, поки вчені усвідомили необхідність загального означення функції і знайшли його.

Дослідження залежностей між змінними фізичними величинами розпочалося в XIV столітті. Серед філософів-схоластів виникла школа, представники якої стверджували, що якості можуть бути більш або менш інтенсивними.

Французький вчений Оресм (1323–1382) зображав інтенсивності довжиною відрізків. Він розміщував їх перпендикулярно деякій прямій. Кінці відрізків утворювали лінію, названу ним "лінією інтенсивностей" або "лінією верхнього краю". В сучасному розумінні це означало графік відповідної функціональної залежності. Оресм вивчав навіть "площинні" і "тілесні" якості, тобто функції двох або трьох змінних. У працях Оресма зустрічаються також поняття миттєвої швидкості і прискорення. Оресму вдалося за допомогою геометричних міркувань знайти шлях, пройдений тілом при рівноприскореному русі.

До кінця XVII століття загального означення поняття функції не було, тому що не було потреби в такому означенні. Зміст поняття функції в його початковому розумінні характеризується висловленнями типу "площа квадрата є функцією довжини його сторони", "шлях, пройдений тілом у вільному падінні, є функцією часу падіння”, “довжина металевого стержня є функцією температури оточуючого середовища”. Поняття функції явно і свідомо використовується лише з XVII століття у зв’язку з появою в математиці ідеї змінних.

Французькі математики Франсуа Вієт (1540–1603) і Рене Декарт (1596–1650) створили символіку, яка здобула загальне визнання. Невідомі позначалися останніми буквами латинського алфавіту – x, y, z, відомі – початковими буквами – a, b, c і т.д. Кожна буква могла означати не лише конкретні дані, але й бути змінною. З’явилася можливість записувати загальні формули. Увага математиків спрямовувалася на вивчення відповідностей між величинами. За допомогою координат вдалося зображати ці відповідності графічно. Декарт писав: ”Надаючи лінії y послідовно нескінченну множину різних значень, ми знайдемо також нескінченну кількість значень x і, таким чином, отримаємо нескінченну кількість різних точок, вони опишуть потрібну криву лінію“. Тут чітко виражена ідея функціональної залежності величин y і x, ідея геометричного зображення цієї залежності, або, як би ми сказали, графіка функції. Але Декарт, як і його сучасники, зміст поняття функції розкривали мовою геометрії та механіки. Адже запас функцій, які використовували в той час математики, був дуже бідним. Навіть логарифми сприймалися лише як засіб обчислення, а не як логарифмічна функція. Щоб описати з єдиної точки зору різні випадки залежності величин, знадобилося нове, загальніше поняття.

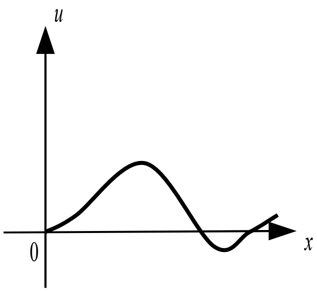
Поступово поняття функції почали ототожнювати з поняттям аналітичного виразу – формули.

Слово “функція” (від латинського functio – здійснення, виконання) вперше було використане німецьким математиком Готфрідом Вільгельмом Лейбніцем в 1673 році у листі до Гюйгенса. Він використав цей термін в дуже вузькому розумінні слова, пов’язуючи його з геометричними образами. Йшлося про відрізки дотичних до кривих, їх проекції на осі координат і про “іншого роду лінії, що виконували для даної фігури деяку функцію”. Таким чином, функцією Лейбніц вважав відрізок, довжина якого змінюється за яким-небудь конкретним законом. З 1698 року Лейбніц ввів також терміни "змінна" і "константа". Означення функції вперше з’явилося в одній з робіт учня і колеги Лейбніца – Йогана Бернуллі в 1718 р. Ним функція була означена як аналітичний вираз: «Функцією змінної величини називають кількість, утворену яким-небудь способом з цієї змінної величини і постійних». Це так звана аналітична точка зору на поняття функції.

Запропоноване Й.Бернуллі означення викликало захват у Лейбніца, який зрозумів, що відмова від геометричних образів розпочинає нову епоху у вивченні функцій.

Для позначення довільної функції від x Бернуллі використовував символ, називаючи його характеристикою функції. Означення Бернуллі грунтувалося не лише на роботах Лейбніца і його школи, але й на дослідженнях великого математика і фізика Ісаака Ньютона (1643–1727), який вивчив самі різноманітні функціональні залежності і їх властивості. Замість слова функція Ньютон застосовував термін «ордината». Учень Й. Бернуллі Леонард Ейлер застосував символ $f:x$. Французький математик Жан Лерон Даламбер зробив крок вперед на шляху до сучасних позначень і відкинув двокрапку Ейлера, записуючи *fx*, *ft*. Остаточне формулювання означення функції з аналітичної точки зору запропонував у 1748 р. Леонард Ейлер:

"*Функція змінної кількості є аналітичний вираз, що складений якимнебудь чином з цієї кількості і чисел або постійних кількостей".* Однак Ейлер не завжди дотримувався цього означення: в його роботах поняття функції досить динамічно розвивалось залежно від запитів математичного аналізу.



Але з таким означенням функції погоджувалися протягом майже всього XVIII століття відомі математики, зокрема Лагранж, Фур'є, Даламбер.

Першою проблемою, в якій математикам довелося зіткнутись з необхідністю загального означення функції, була проблема вивчення коливання струни. Нею займалися найсильніші математики середини XVIII ст.– Даламбер і Ейлер.

Пружній струні, що закріплена у двох точках осі абсцис x=0 і x=1, надають деяку початкову форму і потім відпускають без початкової швидкості. Струна починає коливатися. Потрібно визначити її форму в будь-який наступний момент часу.

Зараз нам відомо, що задача зводиться до відшукання функції $u(t,x)$, що задовольняє рівняння $$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},$$

за початкових умов $$u(0,x)=u_0(x),\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=0$$

Даламбер, а також Ейлер (роком пізніше) запропонували таке правило для розв'язання цієї задачі: функцію $u_0(x)$, що задає початкову формулу струни, потрібно формально продовжити з відрізка $0\le x\le l$ на відрізок $-l\le x\le 0$ як непарну функцію; потім отриману функцію, визначену вже на відрізку $-l\le x\le l$, потрібно продовжити на всю вісь x як на періодичну з періодом $2l$. Якщо отриману періодичну функцію позначити тим самим символом $u_0(x)$, то шуканий розв'язок $u(t,x)$ можна отримати за формулою:

$$u(t,x)=\frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2},\ x\le x\le l,\quad t\ge 0$$

Обидва вчені отримали результат в одній і тій же формі. Але кожен із них вважав, що його власний розв'язок має більш загальний характер, ніж у його колеги. Справа в тому, що розв'язок виражається через $u_0(x)$, початкову форму струни, яка є довільною функцією. А що таке довільна функція, кожен вчений розумів по-своєму. Для Даламбера, послідовника школи Й. Бернуллі, "довільна функція" означала "довільний аналітичний вираз", до того ж з самого початку непарний і який має період $2l$.

Для Ейлера "довільна функція" означала "довільно побудовану криву". Важко сказати, яке з понять – "довільно побудована крива" чи "довільний аналітичний вираз" – є більш загальніше, а яке більш вузьке. Між двома математиками протягом багатьох років продовжувалася дискусія.

Одним із аргументів Ейлера на користь власної точки зору було те, що кожен аналітичний вираз може бути зображений якою-небудь кривою, однак не кожна крива може бути представлена аналітичним виразом. У відповідь Даламбер наголошував, що перед тим, як перевіряти, чи є крива розв'язком, потрібно записати її аналітичним виразом.

В суперечку втрутився молодий математик Д. Бернуллі (син Й. Бернуллі). Він запропонував будь-яку криву Ейлера писати у формі ряду:

$$u_0(x)=a_1\sin\frac{x}{l}+a_2\sin\frac{2x}{l}+\ldots+a_n\frac{nx}{l}+\ldots \tag{6}$$

і тим самим представити її аналітичним виразом. Однак Й. Бернуллі і Ейлер не погодилися з пропозицією молодого вченого.

"Далеко не кожен аналітичний вираз може бути представлений у вигляді даного ряду" – сказав Даламбер. – "Сума такого ряду має бути неперервною і мати неперервну кривизну, а аналітичний вираз, наприклад $\sqrt[3]{\sin x}$ не обов'язково володіє такими властивостями". "Далеко не кожна крива, – сказав Ейлер, – може бути представлена даним рядом. Крива, яку я будую може піти довільно і вираз (6) не допускає ніякої довільності, зокрема, ще з початку воно представляє собою непарну і періодичну функцію. Далі дві криві можуть співпадати на одному проміжку і можуть не співпадати на іншому; аналітичні вирази Д. Бернуллі, що написані для двох цих кривих співпадали б на одному проміжку і відрізнялися (не співпадали) на іншому, що для аналітичного виразу неможливо".

Д. Бернуллі твердив, що в його розпорядженні є нескінченна кількість вільних коефіцієнтів: a_1, a_2,… Однак, оскільки він не вмів їх знаходити (обчислювати), його аргументація не дістала визнання. Таким чином, суперечка двох великих математиків не мала остаточного розв'язання .

Під впливом зауважень Даламбера Л. Ейлер у книзі "Диференціальне числення” (1755 р.) дає ще одне означення функції, яке було більш математичним по суті: “Коли деякі кількості залежать від інших таким чином, що при зміні останніх змінюються і перші, то перші називаються функціями других”. Коментуючи це означення, Ейлер наголошує, що воно має "надзвичайно загальний характер і охоплює всі способи, якими одна кількість визначається з допомогою інших".

Це нове формулювання містить у собі і означення Даламбера, і попереднє “механічне” означення самого Ейлера, водночас, оскільки воно не містило жодної інформації про характер залежності перших величин від других, то зміст цього означення ще залишався досить розмитим. Тому кожен з математиків XVIII ст. міг тлумачити його так, як вважав за потрібне.

В курсі диференціального і інтегрального числення, написаному французьким математиком С. Ф. Лакруа (1765–1843) для політехнічної школи в Парижі (1797 р.) прийняте, по суті, це ж означення. Додатково сказано, що характер залежності зазделегідь може і не бути відомим. “Всяка кількість, значення якої залежить від того, відомо чи не відомо, які саме дії (операції) потрібно здійснити, щоб прийти від неї до першої”.

Отже, мета доповнення Лакруа полягала, не в тому, щоб узагальнити поняття функції, а щоб дати право на існування задачам, у яких невідомою є функція. Питання, яке поняття є більш загальне – аналітичний вираз чи крива, залишалося відкритим . Водночас постало питання, чи можна одну функцію задавати кількома аналітичними виразами? Тому наприкінці XVIII століття математики, даючи означення функції, ухилялися від відповіді на питання, яким чином задана функція. Наприклад, французький математик Сильвестр Лакруа писав: ”Всяка кількість, значення якої залежить від однієї або багатьох кількостей, називається функцією цих останніх, незалежно від того, відомо чи ні, які операції потрібно здійснити, щоб перейти від них до попередньої“. Отже, Лакруа вже не ототожнював поняття функції і її аналітичного виразу.

Значний внесок у з’ясування змісту поняття функції, розв’язання конфліктів між Ейлером, Даламбером, Д. Бернулі стосовно того, як потрібно розуміти функцію, зробив французький математик Жан Батіст Жозеф Фур’є (1768–1830 рр.), який займався переважно математичною фізикою. В представлених ним до Паризької Академії наук у 1870 і 1811 рр. мемуарах з теорії поширення тепла в твердому тілі він навів перші приклади функцій, які задані на різних проміжках різними аналітичними виразами.

З праць Фур’є слідувало, що будь-яка крива, незалежно від того зі скількох і яких різнорідних частин вона складена, може бути представлена у вигляді єдиного аналітичного виразу і що існують також перервні криві, що зображаються аналітичним виразом. Зокрема, початкова форма струни, що коливається – ламана лінія – виражається єдиним тригонометричним рядом

(рядом Д. Бернулі). Фур'є вказав правило для обчислення коефіцієнтів у ряді Бернуллі:

$$a_n = \frac{1}{\pi l}\int_{-l}^{l} u_0(x)\sin nxdx, \quad n = 1,2,\ldots$$

Таким чином, навіть функції, що задані кількома виразами, можна представити у вигляді суми нескінченного числа тригонометричних функцій. Такі суми дістали назву рядів Фур'є. Хоча сам Фур'є не зміг належним чином обґрунтувати збіжність ряду (для цього йому не вистачало точних означень понять границі і неперервності), відкриття Фур'є нанесло руйнівний удар по догмах XVIII ст., якими оперували у своїй суперечці Даламбер та Ейлер.

Виявилося також, що значення функції на одних проміжках можуть бути пов'язані з її значеннями на інших проміжках, два різних аналітичних вирази можуть давати два однакові результати на одному проміжку, і різні – на іншому, крива, що відповідає аналітичному виразу, не обов'язково мусить бути неперервною і мати неперервну кривизну. У своєму "Курсі алгебраїчного аналізу", який був опублікований в 1721 р., французький математик О. Коші обґрунтував дослідження і висновки Фур'є.

Отже, фізикам і математикам доводиться користуватись і такими функціями, означити які дуже складно або навіть неможливо, обмежуючись лише аналітичним апаратом.

У 1834 р. М. І. Лобачевский (1792–1856), розвиваючи ейлерове розуміння функції, запропонував таке означення: "Загальне поняття вимагає, щоб функцією від x називати число, яке дається для кожного x і разом з цим x поступово міняється. Значення функції може бути дане або аналітичним виразом, або умовою, яка подає засоби випробовувати всі числа і вибирати одне з них; або, нарешті, залежність може існувати, але залишатись невідомою...Загальний погляд теорії допускає існування залежності лише у тому смислі, коли числа, одні з одними в зв'язку приймати якби разом". В сучасному розумінні означення функції за Лобачевским було таким: "Функція від x – це число, яке дається для кожного x і разом з x поступово змінюється. Значення функції може бути дано або аналітичним виразом, або умовою, яка визначає спосіб перевіряти всі числа".

До Лобачевского аналогічну точку зору на поняття функції висловив чеський математик Б. Больцано.

В 1837 р. німецький математик П. Л. Діріхле так сформулював означення поняття функції: "y є функцією від x, якщо кожному значенню x відповідає цілком визначене значення y, причому зовсім не важливо, яким саме чином встановлена вказана відповідність".

Діріхле відмовляється від правила, яким задається функція: "зовсім не важливо, яким саме чином встановлена вказана відповідність". Прикладом, який ілюструє це означення, може бути так звана функція Діріхле:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \; - \quad \text{ірраціональне число}, \\ 1, & \text{якщо} \quad x \; - \quad \text{раціональне число}. \end{cases}$$

З точки зору математика XVIII ст., така рівність не задає жодної функції, оскільки не вказана формула, за якою її можна обчислити. Означення Діріхле містило ключові слова: функція – це відповідність, і здавалося таким прозорим, що було без обговорення сприйнято усіма математиками. По суті, розвиток математики в XIX ст. визначався можливостями закладеними в цьому означенні.

Інтерес М. І. Лобачевского і Діріхле до поняття функції був пов'язаний з тим, що вони займалися питаннями про розклад функції в ряди Фур'є.

У другій половині XIX ст., після створення теорії множин, в поняття функції, крім ідеї відповідності, було включено також ідею множини. Таким чином, в повному обсязі означення поняття функції формулюється наступним чином: "якщо кожному елементу *x* множини *A* поставлено у відповідність деякий конкретний елемент у з множини *B*, то кажуть, що на множині *A* задано функцію *y=f(x)*, або, що множина *A* відображається на множину *B*. У першому випадку елементи *x* множини *A* називають значеннями аргумента, а елементи з множини *B* – значеннями функції; в другому випадку *x* – прообрази, *y* – образи".

Було виділено окремі класи функцій: неперервні, диференційовні, аналітичні; математичний аналіз отримав назву "теорія функцій".

Досить міцну основу набули теорія функцій комплексної змінної і теорія диференціальних рівнянь. Математики XIX ст. вважали, що означенням Діріхле межі розвитку математичного аналізу визначені раз і назавжди. Однак вони змушені були визнати, що означення Діріхле, яке здавалося ясним і доступним, містить в собі несподівані труднощі принципового характеру, настільки серйозні, що деякі науковці відмовилися визнавати в ньому зміст, віддаючи перевагу традиції.

Протягом 25 років після появи робіт Діріхле вивчення "патологічних" функцій не викликало особливого інтересу. Дослідженням подібних функцій зайнявся німецький математик Бернгардт Ріман (1826–1866). Він писав: "… область застосування рядів Фур'є не обмежується лише фізичними задачами; ці ряди застосовуються зараз з успіхом також виключно в галузі математики, а саме в теорії чисел, і можна думати, що тут якраз ті функції, представлення яких за допомогою тригонометричних рядів не було встановлено Діріхле, повинні відіграти важливу роль".

Науковий авторитет Рімана був дуже великим. Тому після появи його робіт виник інтерес до функцій типу:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \; - \quad \text{ірраціональне число}, \\ 1, & \text{якщо} \quad x \; - \quad \text{раціональне число}. \end{cases}$$

Прихильники класичного напрямку вважали, що наука не повинна цікавитись об'єктами настільки далекими від реального світу. Їх думку про дослідження функцій, подібних функції $D(x)$ або функцій, які не мають похідної в жодній точці, яскраво висловив один із найвпливовіших математиків того часу Анрі Пуанкаре (1854–1912): "Раніше, коли створювали нову функцію, то мали на меті якесь практичне завдання. Зараз їх створюють, не маючи з них жодної користі, а лише для того, щоб виявити недоліки у дослідженнях наших батьків".

Ще різкіше висловив свою думку на цю тему керівник французької математики кінця XIX ст. Шарль Ерміт (1802–1901), який написав своєму другу голландському математику Стільтьєсу (1856 – 1894), що він "з жахом і відразою відвертається від цієї язви, що розростається, – функції, яка не має похідних". Нову математику – математику розривних функцій класики називали "тераталогією функцій" (наукою про потворство функцій). Однак молоді математики дедалі більше захоплювались новими областями науки, не звертаючи уваги на застереження старших. У Франції читали лекції Жуль Таннері (1848–1910) і Камілл Жордан (1838–1922), які будували курс математичного аналізу на основі точних означень, бездоганних логічних доведень. Вони переконували що розривні функції (на зразок функції Діріхле) треба вивчати, тому що цього вимагають інтереси математики. Ці ідеї переходили у переконання і спонукали до наукової роботи. В 1898 р. молодий французький вчений Рене Бар (1874–1932) захистив дисертацію, в якій дав класифікацію розривних функцій. В цьому ж році з'явилася книга одного з найяскравіших лідерів молодих науковців – Еміля Бореля (1871–1956), присвячена новій теорії функцій. Змістовні роботи на тему інтегрування розривних функцій написав Анрі Лебег (1875–1941), який починав у той час свою наукову діяльність.

Інтерес до розривних функцій не обмежувався Францією. Активну роль в цих дослідженнях відіграли Д. Ф.Єгоров (1869–1931) і М. М. Лузін (1883 – 1950). Лузін став засновником московської школи теорії функцій дійсної змінної, яку її учасники назвали "Лузітанією".

Отже, математики розділилися на два табори – прихильники визначення функції, яке дав Діріхле, що не вимагає обов'язкового правила на встановлення відповідності між x і y (це означення охоплює вищезгадані розривні функції) і прихильники означення функції за Лобачевським, яке вимагало такого правила із скінченної кількості слів. Представники другого табору, названі інтуїціоністами, відмовлялися від більшої частини класичного аналізу і створювали власну математику – інтуїціоністську. Представники першого табору, не бажаючи поступатися досягненнями класичного аналізу, змирилися з існуванням багатьох парадоксальних фактів, які випливали з наявності "функцій без правил" (тобто функцій, які потрапляли під означення Діріхле).

Наступний розвиток математики не пішов шляхом інтуїціоністів, в кінцевому рахунку досягнення класичного аналізу залишилися непохитними. Підсумовуючи огляд розвитку поняття функції в період XVII–XIX ст., нагадаємо означення функції, які стали класичними.

Далі викладач наводить класичні означення функції.

Функція змінної величини - це аналітичний вираз, складений з цієї величини і постійних

Йоганн Бернуллі (1718)

Функція – це крива, накреслена вільним рухом руки.

Леонард Ейлер (1748)

Коли деякі кількості залежать від інших таким чином, що при зміні останніх змінюються і перші, то перші називаються функціями останніх

Леонард Ейлер (1755)

Всяка кількість, значення якої залежить від інших кількостей, називається функцією цих останніх, незалежно від того, відомо чи ні, які операції потрібно здійснити, щоб перейти від них до першої.

С. Лакруа (1797)

Функція від x - це число, яке дається для кожного x і разом з x поступово змінюється. Значення функції може бути дано або аналітичним виразом, або умовою, яка визначає спосіб перевіряти всі числа.

М. І. Лобачевський (1834)

Усе є функцією від x, якщо всякому значенню x відповідає цілком визначене значення y, причому зовсім не важливо, яким саме чином встановлена вказана відповідність.

Поль Діріхле (1837)

Дана стаття розкриває історичний розвиток поняття функції і може бути використана як допоміжний матеріал під час вивчення цієї теми як у вищих навчальних закладах освіти, так і в середній школі.

Список літератури: 1. *Бевз В. Г.* Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія. – К.: НПУ імені Драгоманова, 2005. – 360 с. **2.** *Бєсов Л. М.* Історія науки і техніки. - Харків: НТУ "ХПІ", 2005. – 376с. **3.** *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. – М., 1963. **4.** *Кучерук І. М., Горбатюк І. Т., Луцик П. П.* Загальний курс фізики у 3-х т. Т. 1: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка./ *І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик*. – 2-е вид., випр. – К.: Техніка, 2006. – 532с. 5. *Виленкин Н. Я.* Функции в природе и технике. – М.: Просвещение, 1978. – 192с. 6. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. Изд. 2-е. – М.: Наука, 1966. 7. *Колмогоров А. Н.* Что такое функция? // Математика в школе. – 1978.– № 2. – С 27–39. 8. *Шилов Г. Е.* Что такое функция? // Математика в школе. – 2003. – № 1.–С. 4-10.

Надійшла до редколегії 14. 03. 08