



# ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

«СУЧАСНІ ЗАСТОСУВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НАУК  
У ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСАХ - 2013»

---

*Матеріали II регіональної науково-практичної конференції  
молодих науковців*

*Матеріали II регіональної науково-практичної конференції молодих науковців*

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ ТА ПРОДОВОЛЬСТВА  
УКРАЇНИ**

ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. М.КОЦЮБІНСЬКОГО  
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

*Кафедра вищої математики, інформатики,  
та математичних методів в економіці*

**ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ**

**«СУЧАСНІ ЗАСТОСУВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НАУК  
У ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСАХ – 2013»**

Матеріали II регіональної науково-практичної конференції  
молодих науковців

30 квітня 2013 року

*Вінниця-2013*

Збірник наукових праць «Сучасні застосування фундаментальних наук у виробничих процесах - 2013». Матеріали II регіональної науково-практичної конференції молодих науковців. - Вінниця: ВНАУ, 2013. - 293 с.

*За точність викладення матеріалу та достовірність використаних фактів відповідальність несуть автори. Рукописи не рецензуються.*

У збірнику подаються наукові статті та тези доповідей учасників II регіональної науково-практичної конференції молодих науковців «Сучасні застосування фундаментальних наук у виробничих процесах - 2013».

*Голова редакційної колегії:*

**Найко Д.А.**, к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедри вищої математики, інформатики та математичних методів в економіці ВНАУ

*Члени редакційної колегії:*

**Мороз О.В.**, д.е.н., професор, директор ННІ «Аграрної економіки» ВНАУ

**Михалевич В.М.**, д.т.н., професор, завідувач кафедри вищої математики ВНТУ

**Заболотний В.Ф.**, д.пед.н., професор, завідувач кафедри методики викладання фізики ВДПУ ім. М. Коцюбинського

**Дзісь В.Г.**, к.т.н., доцент кафедри вищої математики, інформатики та математичних методів в економіці ВНАУ

**Левчук О.В.**, к.пед.н., доцент кафедри вищої математики, інформатики та математичних методів в економіці ВНАУ

**Коломісць А. М.**, д.пед.н., професор кафедри основ фундаментальних дисциплін

**Смілянecь О.Г.**, к.пед.н., доцент кафедри вищої математики, інформатики та математичних методів в економіці ВНАУ

**Шевчук О.Ф.**, к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої математики, інформатики та математичних методів в економіці ВНАУ

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету обліку та аудиту ННІ аграрної економіки ВНАУ,  
протокол № 8 від 20 березня 2013 року

*Відповідальний за випуск Найко Д.А.  
Вістка Віталія Лисого*

© Колегія авторів  
©ВНАУ-2013

**ЗМІСТ**

**Секція 1. МАТЕМАТИКА**

1. <i>Абрамчук В.С., д. пед. н., проф., Байдацький О.П., Войтовик О. В., студенти</i> ЗАСТОСУВАННЯ ЕРМІТОВОЇ СПЛАЙН-ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ КОНСТРУЮВАННЯ, ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ.....	4
2. <i>Бурдейна Л.І., к. пед.н., доц., Дрижук Н.В., студентка</i> МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ЕКОНОМІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ.....	8
3. <i>Бурдейна Л.І., к. пед.н., доц., Ковель О.О., студентка</i> ВИРОБНИЧА ФУНКЦІЯ ЯК ЕКОНОМІКО-СТАТИСТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ВИРОБНИЦТВА В ЕКОНОМІЧНІЙ СИСТЕМІ.....	10
4. <i>Дубчак В. М., к.т.н., доц., Прокопчук С. М., Поп'як О. Г., студенти</i> ІСТОРІЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛ $\pi$ ТА $e$ .....	13
5. <i>Дубчак В.М., к.т.н., доц., Василенко Т.С., студентка</i> МАТРИЧНА МОДЕЛЬ ПАРАЛЕЛЬНОГО ОБЧИСЛЕННЯ МНОЖИНИ МОМЕНТНИХ ОЗНАК ЦИФРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ.....	20
6. <i>Краєвський В. О., к.ф.-м.н., доц., Антонюк Л. Е., студент</i> ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ В СТРУКТУРІ НАУКОВОГО ЗНАННЯ.....	24
7. <i>Краєвський В. О., к.ф.-м.н., доц., Гаїна А. О., студент</i> З ІСТОРІЇ ВАРІАЦІЙНИХ ПРИНЦИПІВ.....	26
8. <i>Краєвський В. О., к.ф.-м.н., доц., Живелюк О. Л., студент</i> ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТТЯ ФУНКЦІОНАЛА.....	29
9. <i>Краєвський В. О., к.ф.-м.н., доц., Щербань Д. П., студент</i> ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА ТА ПРИКЛАДИ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ.....	33
10. <i>Краєвський В. О., к.ф.-м.н., доц., Соловей Ю. К., студент</i> ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ ІЗОПЕРИМЕТРИЧНОГО ТИПУ.....	37
11. <i>Найко Д.А., к. ф.-м. н., доц.</i> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІЖГАЛУЗЕВОГО ДИНАМІЧНОГО БАЛАНСУ.....	42
12. <i>Найко Д. А., к. ф.-м. н., доц.</i> СТАТИЧНА МАКРОЕКОНОМІЧНА МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА.....	49
13. <i>Найко Д.А., к. ф.-м. н., доц., Пацалюк О.А., студентка</i> ПРО ДЕЯКІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІКО-ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.....	55
14. <i>Наконечна Л.Й., к. пед. н., доц., Гнатюк І.І., студент</i> ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ, ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ТА РІЗНІ СПОСОБИ ДОВЕДЕННЯ.....	62
15. <i>Тимошенко О.З., к.ф.-м.н., доц., Романчук А.А., студентка Романчук О.А., студентка</i> ЧАСТИНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ НЬЮТОНА-ЛОРЕНЦА, ЯКІ ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО АБЕЛЕВИХ ТРІЙОК ОПЕРАТОРІВ.....	67
16. <i>Бубновська І.А., асистент, Чіков І., студент</i> СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА КОМП'ЮТЕРНОЇ	

127.

3. Полак Л.С. Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике. – М.: Физматгиз, 1960. – 600 с.

*Красевський В. О., к.ф.-м.н., доц.*

*Живелюк О. Л., студент*

*Вінницький національний технічний університет*

### ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТТЯ ФУНКЦІОНАЛА

#### Анотація

*У роботі розглянуто поняття функціонала. Наведено математичну формалізацію задач визначення максимальної площі, що обмежується лінією заданої довжини, про мінімальну поверхню обертання, про брахістохрону, про геодезичні лінії*

Функціоналами називаються змінні величини, значення яких визначаються вибором однієї або декількох функцій [1].

Наприклад, функціоналом є довжина  $l$  дуги плоскої (рис. 1) (або просторової) кривої, яка з'єднує дві задані точки  $A(x_0; y_0)$  і  $B(x_1; y_1)$ . Величина  $l$  може бути обчислена, якщо задане рівняння кривої  $y = y(x)$ ; тоді

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (1)$$

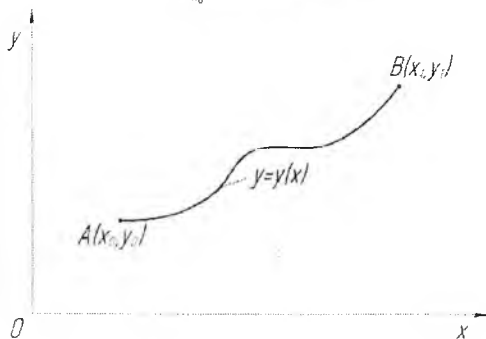


Рис. 1.

Площа  $S$  деякої поверхні також є функціоналом, бо вона визначається вибором поверхні, тобто вибором функції  $z(x, y)$ , що входить у рівняння поверхні,  $z = z(x, y)$ . Як відомо,

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \quad (2)$$

де  $D$  – проекція поверхні на площину  $Oxy$ .

Моменти інерції, статичні моменти, координати центру ваги деякої однорідної кривої або поверхні також є функціоналами, бо їхні значення визначаються вибором кривої або поверхні, тобто вибором функцій, що входять у рівняння цієї кривої або поверхні.

В усіх цих прикладах ми маємо характерну для функціоналів залежність: функції відповідає число, в той час як при визначенні функції  $z = f(x)$  числу відповідало число.

Варіаційне числення вивчає методи, які дозволяють знаходити максимальні та мінімальні значення функціоналів. Задачі, в яких потрібно досліджувати функціонал на максимум або мінімум, називаються варіаційними задачами.

Багато законів механіки та фізики зводяться до твердження, що деякий функціонал у розглянутому процесі повинен досягати мінімуму або максимуму. У такому формулюванні ці закони називаються варіаційними принципами механіки або фізики. До числа таких варіаційних принципів або найпростіших наслідків з них належать: принцип найменшої дії, закон збереження енергії, закон збереження імпульсу, закон збереження кількості руху, закон збереження моменту кількості руху, різні варіаційні принципи класичної й релятивістської теорії поля, принцип Ферма в оптиці, принцип Кастіліано в теорії пружності і т.д.

Різноманітність задач, що приводять до пошуку максимуму або мінімуму деякої інтегральної величини відображається у мудрому висловленні великого Ейлера: «У світі немає нічого, у чому не було б видно зміст якого-небудь максимуму або мінімуму» [2].

Приклади успішного розв'язування екстремальних проблем можна знайти вже в прадавній історії.

Приклад 1 (задача Дідони). В IX столітті до н.е. фінікійська царівна Дідона й декілька її супутників, рятуючись від переслідування тирської знаті, бігли з м.Тиру й висадилися на африканському березі Середземного моря. Вирішивши поселитися саме тут, Дідона впросила місцевих жителів віддати в її розпорядження ділянку землі, яку можна охопити шкірою бика. Простодушний правитель тих місць не зрозумів усієї глибини задуму й погодився віддати втікачам ділянку землі, яка, по його розумінню, повинна бути рівною площі розправленої шкіри бика. Дідона ж після укладання угоди розрізала шкіру бика на тонкі смужки, зв'язала їх у довгий ремінь і обмежила їм досить значну територію на березі моря. Так було закладено місто Карфаген.

Якщо вважати берег моря прямолінійним (рис. 2), то задача, яку поставила Дідона, може бути сформульована в такий спосіб: знайти таку криву  $y(x)$  заданої довжини  $l$ , яка обмежує на площині фігуру найбільшої площі:

$$S[y(x)] = \int_a^b y(x) dx \rightarrow \max, \quad (3)$$

$$\begin{cases} I = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx; \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

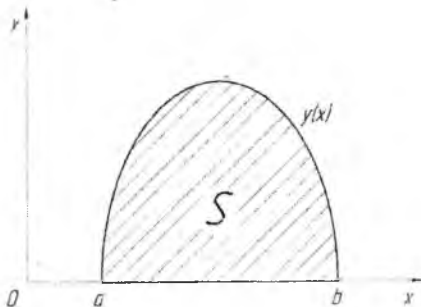


Рис. 2.

Задачі подібного типу ставили і розв'язували (своїми, оригінальними, способами) ще Аристотель та Архімед. Так, Архімед встановив чудову властивість кола: з усіх замкнених кривих, довжини яких дорівнюють деякому заданому значенню, коло охоплює найбільшу площу; з усіх замкнених кривих, які охоплюють задану площу, коло має найменшу довжину.

Незважаючи на наявність прадавніх прецедентів, моментом народження варіаційного числення як математичної дисципліни прийнято вважати 1696 рік, коли з'явився лист І. Бернуллі, в якому він писав: «Найрозумніших математиків усього світу вітаю я, Іоган Бернуллі! Людей високого розуму не можна нічим більш залучити до роботи, як указати їм важку й разом з тим корисну задачу, розв'язком якої можливо й славу придбати, і залишити по собі вічний пам'ятник. Я сподіваюсь, що заслужу дяку вченого світу, якщо я, за прикладом Паскаля, Ферма та інших великих, запропоную кращим математикам нашого часу задачу, яка дасть їм можливість визначити, чи гарні ті методи, якими вони володіють, і яка велика сила їх розуму. Якщо хто-небудь знайде розв'язок запропонованої задачі й сповістить про це мені, то я оголошу йому привселюдно заслужену хвалу».

Задача, запропонована І. Бернуллі така:

Приклад 2 (задача про брахістохрону). У вертикальній площині через дві дані точки  $O$  та  $B$ , що не лежать на одній вертикалі, провести криву (тобто шукати її рівняння), рухаючись по якій, матеріальна точка під дією сили тяжіння переміститься з верхньої точки в нижню за найкоротший час (рис. 3). Цю ж задачу можна сформулювати і так: як спроектувати дах будинку, щоб краплі дощу скочувалися з даху за найменший проміжок часу.

Розмістимо початок координат у точці  $O$ , вісь  $Ox$  спрямуємо горизонтально, вісь  $Oy$  – вертикально вниз. Швидкість руху матеріальної точки

$v = \sqrt{2gy}$ , звідки знаходимо час, що витрачається на переміщення точки з положення  $O$  у положення  $B$ . За умови, що початкова швидкість падаючої точки дорівнює нулеві, а сили тертя відсутні, отримаємо таку задачу

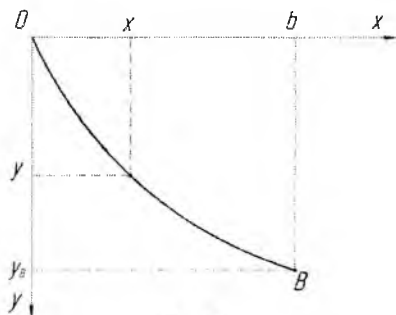


Рис. 3.

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{y}} dx \rightarrow \min, \quad (5)$$

$$y(0) = 0, y(b) = y_B. \quad (6)$$

**Приклад 3 (задача про мінімальну поверхню обертання).** В площині  $Ox$  з'єднати точки  $A(a, y_A)$  і  $B(b, y_B)$  кривою так, щоб бічна поверхня тіла, отриманого від обертання цієї кривої навколо осі  $Ox$ , мала найменшу площу (рис. 4).

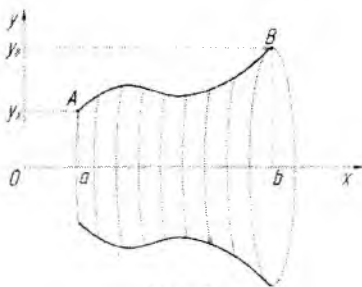


Рис. 4.

$$S[y(x)] = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+(y'(x))^2} dx \rightarrow \min, \quad (7)$$

$$y(a) = y_A, y(b) = y_B. \quad (8)$$

**Приклад 4 (задача про геодезичні лінії).** На поверхні, заданій в



прямокутній системі координат  $Oxyz$  рівнянням  $\varphi(x, y, z) = 0$ , проведемо криву, що з'єднує дві точки  $A$  та  $B$  цієї поверхні і яка має найменшу довжину (рис. 5).

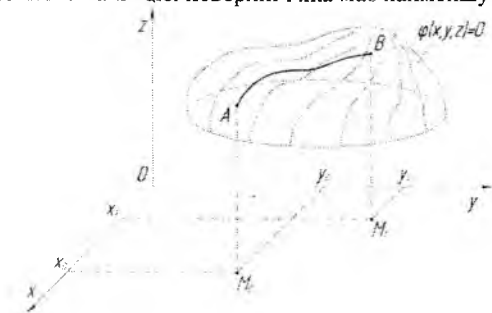


Рис. 5.

Найменші по довжині лінії між двома точками деякої поверхні є геодезичними лініями цієї поверхні. Якщо припустити, що шукана крива може бути задана рівняннями  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , то

$$l[y(x), z(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2} dx \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$\varphi(x, y(x), z(x)) = 0;$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad (10)$$

$$z(x_0) = z_0, \quad z(x_1) = z_1.$$

Оригінальність сформульованих задач у тому, що невідомими в них є функції, які повинні зробити значення інтеграла найменшим або найбільшим.

### Література

1. Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Гостехиздат, 1957. – 424 с.

*Кравецький В. О., к.ф.-м.н., доц.*

*Щербань Д. П., студент*

*Вінницький національний технічний університет*

### ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА ТА ПРИКЛАДИ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

#### Анотація

У роботі розглянуто застосування необхідної умови існування екстремалей варіаційної задачі із закріпленими граничними точками - рівняння