ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

«СУЧАСНІ ЗАСТОСУВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НАУК У ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСАХ - 2013»

Матеріали II регіональної науково-практичної конференції молодих науковців

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ ТА ПРОДОВОЛЬСТВА УКРАЇНИ

ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕСИТЕТ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. М.КОЦЮБИНСЬКОГО
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра вищої математики, інформатики,
та математичних методів в економіці

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

«СУЧАСНІ ЗАСТОСУВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НАУК У ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСАХ – 2013»

Матеріали II регіональної науково-практичної конференції
молодих науковців

30 квітня 2013 року

Вінниця-2013

Збірник наукових праць «Сучасні застосування фундаментальних наук у виробничих процесах - 2013». Матеріали II регіональної науково-практичної конференції молодих науковців. - Вінниця: ВНАУ, 2013. - 293 с.

За точність викладення матеріалу та достовірність використаних фактів відповідальність несуть автори. Рукописи не рецензуються.

У збірнику подаються наукові статті та тези доповідей учасників II регіональної науково-практичної конференції молодих науковців «Сучасні застосування фундаментальних наук у виробничих процесах - 2013».

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету обліку та аудиту ННІ аграрної економіки ВНАУ, протокол № 8 від 20 березня 2013 року

*Відповідальний за випуск **Найко Д.А.***
Верстка Віталія Лисого

ЗМІСТ

Секція 1. МАТЕМАТИКА

прямокутній системі координат $Oxyz$ рівнянням $\varphi(x, y, z) = 0$, проведемо криву, що з'єднує дві точки A та B цієї поверхні і яка має найменшу довжину (рис. 5).

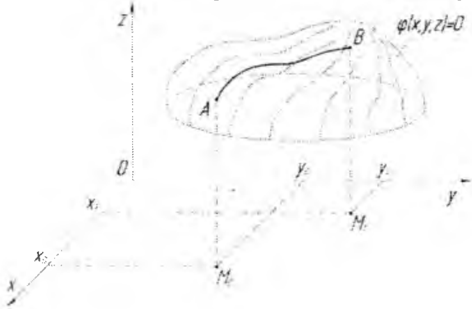

Рис. 5.

Найменші по довжині лінії між двома точками деякої поверхні є геодезичними лініями цієї поверхні. Якщо припустити, що шукана крива може бути задана рівняннями $y = y(x)$, $z = z(x)$, $x \in [a, b]$, то

$$l[y(x), z(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2}\, dx \to \min, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \varphi(x, y(x), z(x)) = 0; \\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1, \\ z(x_0) = z_0,\ z(x_1) = z_1. \end{gathered} \tag{10}$$

Оригінальність сформульованих задач у тому, що невідомими в них є функції, які повинні зробити значення інтеграла найменшим або найбільшим.

Література

1. Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление. – М.:Физматгиз, 1961. – 228 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Гостехиздат, 1957. – 424 с.

Краєвський В. О., к.ф.-м.н., доц.
Щербань Д. П., студент
Вінницький національний технічний університет

ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА ТА ПРИКЛАДИ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Анотація

У роботі розглянуто застосування необхідної умови існування екстремалей варіаційної задачі із закріпленими граничними точками – рівняння

Ейлера. Розв'язано задачі з визначення рівнянь кривої найменшої довжини, що з'єднує дві точки, поверхні обертання найменшої площі та кривої найшвидшого спуску

Необхідною умовою існування екстремуму функціонала [1]

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x))dx, \tag{1}$$

із закріпленими граничними точками допустимих кривих є рівняння

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0, \tag{2}$$

чи в розгорнутому вигляді

$$F_y-F_{xy'}-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0. \tag{3}$$

Це рівняння називається рівнянням Ейлера (воно вперше було ним опубліковане в 1744 році). Інтегральні криві рівняння Ейлера $y=y(x,C_1,C_2)$ називаються екстремалями. Тільки на екстремалях може досягатися екстремум функціонала (1).

Для знаходження кривої, що реалізує екстремум функціонала (1), інтегруємо рівняння Ейлера та визначаємо обидві сталі, що входять у загальний розв'язок цього рівняння, з крайових умов $y(x_0)=y_0$ і $y(x_1)=y_1$. Тільки на екстремалях може реалізовуватися екстремум функціонала. Однак, для того щоб встановити чи реалізується на них насправді екстремум, і визначити який саме екстремум – максимум чи мінімум, треба скористатися достатніми умовами екстремуму.

Крайова задача

$$\begin{cases} F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0, \\ y(x_0)=y_0, \\ y(x_1)=y_1 \end{cases} \tag{4}$$

не завжди має розв'язок, а якщо розв'язок існує, то він може бути не єдиним.

В багатьох варіаційних задачах існування розв'язку очевидне, виходячи з фізичного або геометричного змісту задачі, і якщо розв'язок рівняння Ейлера, що задовольняє крайові умови, єдиний, то ця єдина екстремаль і буде розв'язком розглянутої варіаційної задачі.

Приклад 1. На яких кривих може досягати екстремуму функціонал

$$\begin{aligned} &v[y(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(y')^2-y^2\right]dx; \\ &y(0)=0, \\ &y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1? \end{aligned} \tag{5}$$

Розв'язання: Рівняння Ейлера має вигляд $y''+y=0$; його загальним розв'язком є $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. Використовуючи граничні умови, одержуємо: $C_1=0$, $C_2=1$; отже, екстремум може досягатися лише на кривій $y=\sin x$.

Приклад 2. На яких кривих може досягати екстремуму функціонал

$$v\left[y(x)\right]=\int_0^1\left[(y')^2+12xy\right]dx,$$
$$y(0)=0, \qquad (6)$$
$$y(1)=1?$$

Розв'язання: Рівняння Ейлера має вигляд $y''-6x=0$, звідки $y=x^3+C_1x+C_2$.

Використовуючи граничні умови, одержуємо: $C_1=0$, $C_2=1$; отже, екстремум може досягатися лише на кривій $y=x^3$.

Приклад 3. Визначити криву найменшої довжини, що з'єднує точки (x_0,y_0) і (x_1,y_1), тобто знайти мінімум функціонала

$$l\left[y(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$
$$y(x_0)=y_0,$$
$$y(x_1)=y_1.$$

Розв'язання: Рівняння Ейлера має вигляд $\dfrac{y''}{\sqrt{\left(1-(y')^2\right)^3}}=0$, звідки $y=C_1x+C_2$.

Приклад 4. В площині Oxy з'єднати точки $A(a,y_A)$ і $B(b,y_B)$ кривою так, щоб бічна поверхня тіла, отриманого від обертання цієї кривої навколо осі Ox, мала найменшу площу.

$$S\left[y(x)\right]=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx,$$
$$y(a)=y_A, \qquad (7)$$
$$y(b)=y_B.$$

Розв'язання: В окремому випадку, коли функціонал (1) $F=F(y,y')$, тобто не містить у явному вигляді x, рівняння Ейлера має вигляд [2]:

$$F-y'F_{y'}=C_1. \qquad (8)$$

Тоді з (8) для (7) отримуємо

$$y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1 \qquad (9)$$

Після спрощень маємо $\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$. Це рівняння інтегрується за допомогою підстановки $y'=\operatorname{sh}t$. Тоді шукана поверхня утворюється обертанням кривої, рівняння якої в параметричній формі має вигляд:

$$\begin{cases} x=C_1t+C_2, \\ y=C_1\operatorname{ch}t. \end{cases} \qquad (10)$$

Виключивши параметр t, маємо $y=C_1\operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$ – сімейство ланцюгових ліній, від обертання яких утворюються поверхні, що називаються катеноїдами. Сталі C_1 і C_2 визначаються з умови проходження шуканої лінії через задані граничні точки (залежно від положення точок A та B може існувати один, два або жодного розв'язку).

Приклад 5. Задача про брахістохрону: у вертикальній площині через дві дані точки $O(0,0)$ та $B(b,y_B)$, що не лежать на одній вертикалі, провести криву (тобто знайти її рівняння), рухаючись по якій, матеріальна точка під дією сили тяжіння зміститься з верхньої точки в нижню за найкоротший час

$$\begin{aligned} &t\left[y(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b\frac{\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}}{\sqrt{y}}dx, \\ &y(0)=0, \\ &y(b)=y_B. \end{aligned} \qquad (11)$$

*Розв'язання:*З окремого випадку рівняння Ейлера (8) отримаємо

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}}=C, \qquad (12)$$

звідки після спрощень будемо мати $\frac{1}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}}=C$ або $y\left(1+y'^2\right)=C_1$.

Введемо підстановку $y'=\operatorname{ctg}t$. Тоді

$$y=\frac{C_1}{1+\operatorname{ctg}^2 t}=C_1\sin^2 t=\frac{C_1}{2}\left(1-\cos 2t\right);$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{2C_1\sin t\cos t dt}{\operatorname{ctg}t}=2C_1\sin^2 t dt=C_1\left(1-\cos 2t\right)dt;$$

$$x=C_1\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C_2=\frac{C_1}{2}\left(2t-\sin 2t\right)+C_2.$$

Отже, в параметричній формі рівняння шуканої лінії має вигляд:

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{2}\left(2t - \sin 2t\right) + C_2, \\ y = \dfrac{C_1}{2}\left(1 - \cos 2t\right). \end{cases} \tag{13}$$

Якщо перетворити параметр підстановкою $2t = t_1$ і взяти до уваги, що $C_2 = 0$, бо $y(0) = 0$, то одержимо рівняння сімейства циклоїд в звичайній формі:

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{2}\left(t_1 - \sin t_1\right), \\ y = \dfrac{C_1}{2}\left(1 - \cos t_1\right). \end{cases} \tag{14}$$

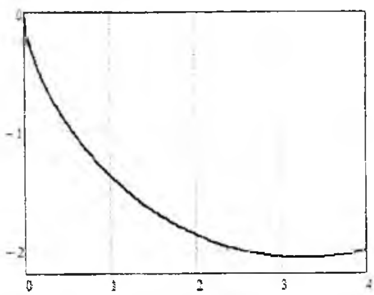

Рис. 1.

Отже, брахістохроною є циклоїда (рис. 1).

Література

1. Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.

2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Гостехиздат, 1957. – 424 с.

Краєвський В. О., к.ф.-м.н., доц.
Соловей Ю. К., студент
Вінницький національний технічний університет

ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ ІЗОПЕРИМЕТРИЧНОГО ТИПУ

Анотація

В роботі розглянуто варіаційні задачі ізопериметричного типу. Сформульовано необхідну умову існування екстремалей для відповідних задач