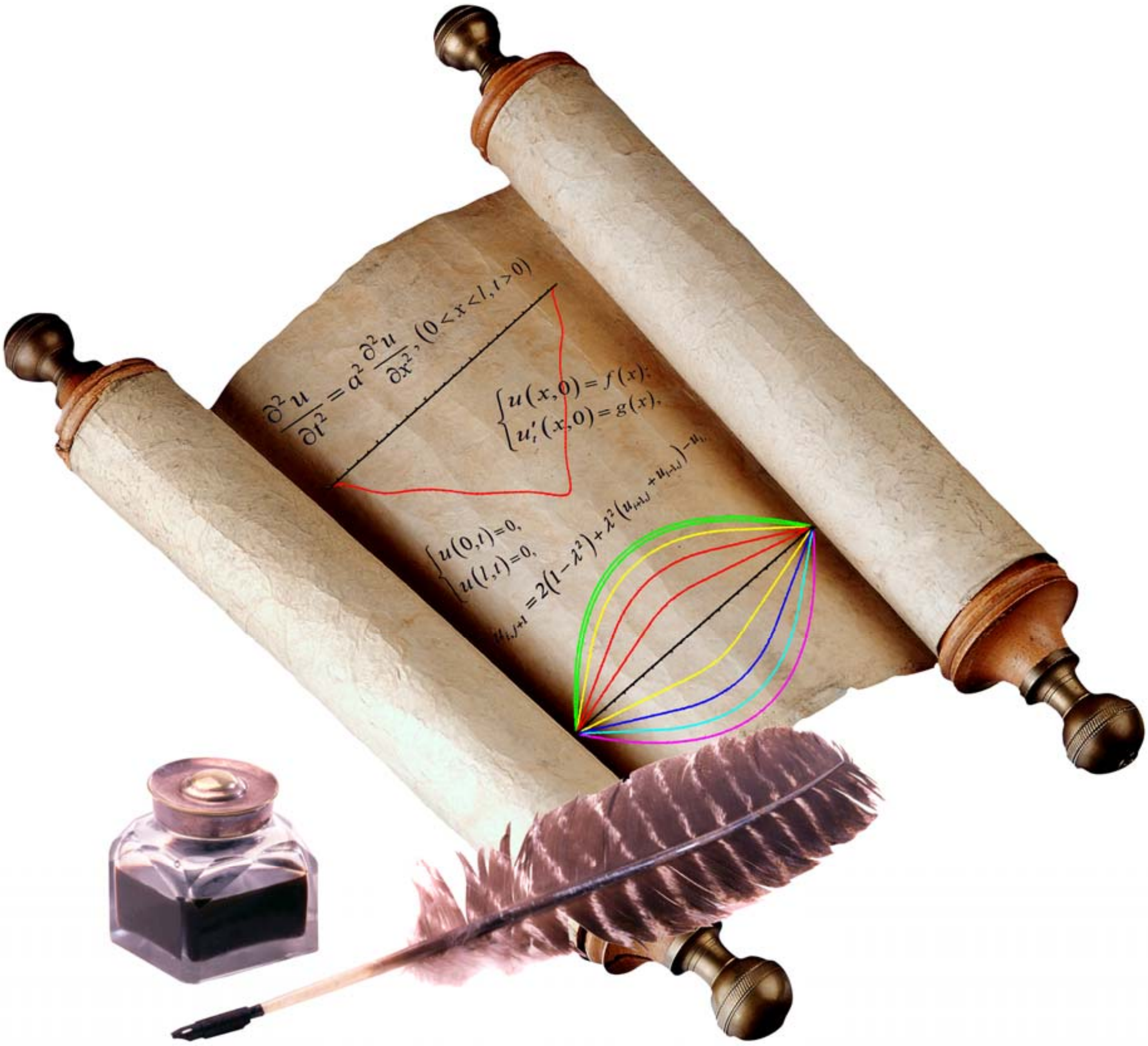
В. О. Краєвський

Спецкурс математичного аналізу



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. О. Краєвський

СПЕЦКУРС МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей та форм навчання. Протокол №11 від 24 квітня 2008р.

Вінниця ВНТУ 2009

УДК 517.958 (075)
К 78

Рецензенти:

І.О. Сивак, доктор технічних наук, професор
В.І. Клочко, доктор педагогічних наук, професор
Д.А. Найко, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Краєвський В. О.
К 78 **Спецкурс математичного аналізу.** Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2009. - 178 с.

У навчальному посібнику наведено основні поняття і означення теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними, викладено класифікацію та зведення до канонічного вигляду квазілінійних рівнянь. Розглянуто низку фізичних процесів, які приводять до диференціальних рівнянь із частинними похідними. Підібрано достатню кількість задач для розв'язання на практичних заняттях та для самостійної роботи студентів. Розглянуто розв'язання прикладів з кожної теми, надається 100 варіантів завдань для типових розрахунків та контрольних робіт. Розглянута можливість застосування математичного додатка Maple для розв'язання відповідних задач.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК 517.958 (075)

ЗМІСТ

Вступ 5
1 КЛАСИФІКАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ 6
1.1 Постановка задачі 6
1.2 Основні означення 7
1.3 Лінійні однорідні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку 9
1.4 Класифікація квазілінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку із двома незалежними змінними та зведення їх до канонічного вигляду 12
Запитання для самоперевірки 17
2 ОСНОВНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ 18
2.1 Постановка задач математичної фізики 19
2.2 Математична модель процесу поширення тепла у стержні 20
2.2.1 Виведення диференціального рівняння теплопровідності 20
2.2.2 Постановка початкової та крайових умов 22
2.2.3 Розв’язання однорідного рівняння теплопровідності при нульових крайових умовах 23
2.2.4 Розв’язання неоднорідного рівняння теплопровідності при ненульових крайових умовах 28
2.3 Математична модель коливання струни 30
2.3.1 Виведення хвильового рівняння 30
2.3.2 Постановка мішаних задач і задачі Коші для хвильового рівняння 34
2.3.3 Знаходження розв'язку математичної моделі коливання струни, що закріплена на кінцях 36
2.3.4 Знаходження розв'язку математичної моделі коливання необмеженої струни 41
2.4 Диференціальні рівняння Пуассона і Лапласа 45
2.4.1 Крайова задача для рівнянь Пуассона і Лапласа 47
2.4.2 Рівняння Лапласа в полярних координатах 47
2.4.3 Внутрішня задача Діріхле для круга 49
Запитання для самоперевірки 54

3 ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ 55
3.1 Скінченнорізницеві наближення 55
3.2. Метод сіток для розв'язання задач математичної фізики 57
3.3 Метод сіток для задачі Діріхле 59
3.3.1 Рівняння Лапласа при скінченнорізницевих наближеннях 59
3.3.2 Розв'язання задачі Діріхле методом сіток 60
3.4 Метод сіток для математичної моделі поширення тепла у стержні 61
3.4.1. Явна різницева схема 62
3.4.2 Неявна різницева схема 63
3.5 Метод сіток для математичної моделі вільних коливань струни 65
3.5.1 Рівняння вільних коливань струни при скінченнорізницевих наближеннях 65
3.5.2 Явна різницева схема 66
Запитання для самоперевірки 67
4 ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ 68
5 ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ 110
ЛІТЕРАТУРА 175
СЛОВНИК НАЙБІЛЬШ ВЖИВАНИХ ТЕРМІНІВ 176

ВСТУП

У посібнику розглядається розділ математичного аналізу, який вивчає диференціальні рівняння із частинними похідними, що описують різні фізичні явища. Цей розділ математичного аналізу отримав назву математична фізика. Інтенсивне розроблення методів математичної фізики почалось після опублікування 1687р. «Математичних начал натуральної філософії» І. Ньютона й було зумовлене дослідженням проблем всесвітнього тяжіння й теорії світла. Найвищі досягнення в розвитку методів класичної математичної фізики пов'язані з іменами Ж. Л. Лагранжа, Л. Ейлера, Ж. Л. Д'Аламбера, П. С. Лапласа, Д. Бернуллі, Ж. Фур'є, К. Ф. Гаусса, О. Л. Коші, Г. Рімана, М. В. Остроградського, О. М. Ляпунова, В. А. Стеклова та багатьох інших учених.

Методи математичної фізики застосовуються для розв'язання задач теплопровідності, дифузії, пружності, оптики, електродинаміки, газової динаміки, фізики плазми, теорії потенціалу, квантової фізики, теорії відносності та ін. Основними математичними засобами дослідження усіх цих задач є теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій, функціональний аналіз, теорія ймовірностей, наближені методи та обчислювальна математика.

Постійний розвиток математичної фізики зумовлений її тісним зв'язком із фундаментальними напрямками досліджень у суміжних областях природничих наук.

Посібник складається з п'яти розділів. Перших три розділи є теоретичною частиною посібника, де подані основні формули, теореми, означення, які підкріплюються великою кількістю прикладів. Четвертий розділ містить короткі теоретичні відомості та завдання, які необхідні для проведення практичних занять. Серед завдань цього розділу є завдання, виконання яких передбачає застосування інформаційних технологій. Зокрема акцент зроблений на застосуванні математичного додатка Maple. В п'ятому розділі подано 100 варіантів для контрольних робіт з кожної теми.

У посібнику вміщено значну кількість докладних розв’язань прикладів, що дає змогу використовувати їх для самостійного вивчення спецкурсу математичного аналізу, зокрема студентами заочної форми навчання.

1 КЛАСИФІКАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

1.1 Постановка задачі

Для розв'язання багатьох фізичних задач необхідно знайти ту чи іншу функціональну залежність, наприклад, залежність деякої фізичної величини від часу, від координат точки простору тощо. Безпосередньо визначити таку залежність буває складно або й неможливо; в такому разі ставиться задача: знайти зв'язок між шуканою функцією та її похідними, тобто скласти диференціальне рівняння, яке задовольняє ця функція.

Приклад. *Згідно із законом Ньютона, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла та навколишнього середовища. Знайти закон зміни температури тіла в залежності від часу.*

Розв'язання

Позначимо шукану функцію через $T = T(t)$. *Отже, це є функція від однієї незалежної змінної. Відповідно швидкість зміни температури – це є перша похідна від даної функції за часом* $\frac{dT}{dt}$. *Згідно з умовою задачі отримаємо*

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_{i.\tilde{n}.}),$$

де k *– коефіцієнт пропорційності;* $T_{i.\tilde{n}.}$ *– температура навколишнього середовища. Тоді*

$$\int \frac{dT}{T - T_{i.\tilde{n}.}} = k \int dt + C;$$

$$\ln\left|T - T_{i.\tilde{n}.}\right| = kt + C;$$

$$T = e^{kt+C} + T_{i.\tilde{n}.}.$$

Відповідь: $T = e^{kt+C} + T_{i.\tilde{n}.}$.

А якщо нам необхідно визначити розподілення температури у тілі. Відповідно температура тоді залежить від часу, а також від координати точки тіла, яку ми розглядаємо. Тобто шукана функція залежить від двох або більшого числа незалежних змінних. У даному випадку диференціальне рівняння містить, крім самої невідомої функції, також її частинні похідні за незалежними змінними. Таке рівняння називають диференціальним рівнянням із частинними похідними.

1.2 Основні означення

Диференціальним рівнянням із частинними похідними *(partial differential equation)* називають рівняння, яке пов'язує незалежні змінні, їх функції та частинні похідні від цієї функції. Наприклад,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

де u – шукана функція; x, y, z – незалежні змінні.

Найвищий порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння, називають порядком диференціального рівняння *(degree of differential equation)* із частинними похідними.

Кількістю змінних *(amount of variables)* диференціального рівняння називають кількість незалежних змінних.

Загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку з двома незалежними змінними такий

$$F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0. \tag{1.1}$$

Диференціальне рівняння з частинними похідними називають лінійним *(linear)*, якщо воно лінійне відносно невідомої функції та її частинних похідних.

Лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними має такий загальний вигляд:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Gu=F, \tag{1.2}$$

де $A=A(x,y)$, $B=B(x,y)$, ..., $F=F(x,y)$ – задані функції незалежних змінних x і y.

Якщо в рівнянні (1.2) $F(x,y)=0$, то таке диференціальне рівняння з частинними похідними називають лінійним однорідним *(homogeneous)*. Якщо коефіцієнти A, B, C, D, E, G рівняння сталі, то рівняння (1.2) називають лінійним диференціальним рівнянням із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

Диференціальне рівняння з частинними похідними називають **квазілінійним** *(quasilinear)*, якщо воно лінійне відносно похідних найвищого порядку.

Згідно з означенням загальний вигляд квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними такий:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0. \qquad (1.3)$$

Розв'язком *(solution)* диференціального рівняння з частинними похідними називають усяку функцію, яка при підставленні в диференціальне рівняння замість шуканої функції перетворює його на тотожність за незалежними змінними.

Приклад. *Розглянемо рівняння*

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f(y), \qquad (1.4)$$

де $f(y)$– відома функція, а шукана функція u залежить від двох змінних x і y.

Розв'язання

Усі функції $u(x,y)$, які задовольняють рівняння (1.4), мають вигляд

$$u(x,y)=\int f(y)dy+\psi(x), \qquad (1.5)$$

($\psi(x)$ — довільна функція від x). Це можна перевірити, продиференціювавши обидві частини рівності (1.5) за y.

Розв'язок (1.5) рівняння (1.4) містить довільну функцію $\psi(x)$. У цьому полягає докорінна відмінність розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку (1.4) від загального розв'язку відповідного звичайного диференціального рівняння $\frac{du}{dy}=f(y)$, який має вигляд $u(y)=\int f(y)dy+C$ і містить лише довільну сталу.

Приклад. *Розв'язати диференціальне рівняння*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

де $u=u\left(x,y\right)$.

Розв'язання

Враховуючи означення другої похідної $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$, *дане рівняння можна подати у вигляді* $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0$. *Такий запис рівняння дає змогу встановити, що* $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ *не залежить від y, тобто* $\dfrac{\partial u}{\partial y}=C_1$, *де* C_1 *– довільна величина, яка не залежить від* y. *Проте* C_1 *може залежати від* x, *оскільки шукана функція* u *за умовою залежить від двох змінних:* x *і* y. *Отже,* $\dfrac{\partial u}{\partial y}=C_1(x)$, *де* $C_1\left(x\right)$ *– довільна функція від* x.

Інтегруючи за y *цю рівність, знайдемо:* $u=C_1\left(x\right)y+C_2$, *де* C_2 *– величина, яка не залежить від* y. *З огляду на залежність* u *від* x *і* y *величина* C_2 *може бути функцією від* x. *Таким чином, розв'язок даного рівняння* $u=C_1\left(x\right)y+C_2\left(x\right)$ *містить дві довільні функції.*

У розглянутих прикладах ми мали справу з найпростішими диференціальними рівняннями з частинними похідними, розв'язки яких майже очевидні. Для розв'язання складніших диференціальних рівнянь з частинними похідними потрібні інші методи.

1.3 Лінійні однорідні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними, загальний вигляд якого такий:

$$X_1\frac{\partial u}{\partial x}+X_2\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{1.6}$$

де $u(x,y)$ – шукана функція; X_1, X_2 – відомі функції незалежних змінних x і y.

Для відшукання розв'язку рівняння (1.6) розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{X_1} = \frac{dy}{X_2}. \tag{1.7}$$

Це рівняння запишемо відносно похідної

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X_2}{X_1}. \tag{1.8}$$

Нехай

$$\varphi(x,y) = C \tag{1.9}$$

– загальний розв'язок рівняння (1.7). Тоді функція $y(x)$ задана неявно. Її похідна обчислюється за формулою

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

Підставивши вираз похідної у рівняння (1.8) отримаємо

$$-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = \frac{X_2}{X_1};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}X_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}X_2 = 0. \tag{1.10}$$

Порівнюючи вирази (1.6) та (1.10), помічаємо, що рівняння (1.6) перетворюється на тотожність у разі підставлення функції $\varphi(x,y)$ замість $u(x,y)$. Отже, функція $\varphi(x,y)$ є розв'язком рівняння (1.6).

Висновок сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Якщо $\varphi(x,y) = C$ – загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння (1.7), то функція $\varphi(x,y)$ є розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними (1.6).

Справедливе й обернене твердження: якщо $u = \varphi(x,y)$ – будь-який розв'язок рівняння (1.6), то $\varphi(x,y) = C$ – загальний розв'язок рівняння (1.7).

У результаті проведеного дослідження маємо правило: для того, щоб знайти розв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними (1.6), потрібно скласти еквівалентне йому звичайне диференціальне рівняння (1.7) і визначити його загальний розв'язок $\varphi(x,y)=C$. Тоді $u=\varphi(x,y)$ буде розв'язком рівняння (1.6).

***Приклад**. Розв'язати рівняння*

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{1.11}$$

Розв'язання

Складаємо еквівалентне заданому рівнянню звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

Це рівняння із відокремленими змінними.

Інтегруючи його, отримаємо

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}+C_1;$$

$$\ln|y|=\ln|x|+\ln C;$$

$$\frac{y}{x}=C.$$

Звідси розв'язком рівняння (1.11) є функція $u=y/x$.

Неважко переконатись: якщо $u=\varphi(x,y)$ є розв'язком рівняння (1.6), то $u=F(\varphi(x,y))$, де F – будь-яка функція, також є розв'язком рівняння (1.6). Можна показати, на чому ми не зупиняємося, що при виконанні деяких умов цією формулою виражається будь-який розв'язок рівняння (1.6). Звідси отримаємо ще одне правило інтегрування цього рівняння: для того, щоб знайти загальний розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними (1.6), потрібно скласти еквівалентне йому звичайне диференціальне рівняння (1.7) і визначити його загальний розв'язок $\varphi(x,y)=C$. Тоді $u=F(\varphi(x,y))$, де F – довільна функція, буде загальним розв'язком *(general solution)* рівняння (1.6).

Таким чином, для рівняння (1.11) загальним розв'язком буде функція $u=F\left(\frac{y}{x}\right)$, де F – довільна функція.

1.4 Класифікація квазілінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку із двома незалежними змінними та зведення їх до канонічного вигляду

Згідно з класифікацією, яка введена в підрозділі 1.2, загальний вигляд квазілінійного диференціального рівняння із частинними похідними другого порядку із двома незалежними змінними

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\,. \tag{1.12}$$

Перейдемо у рівнянні (1.12) до нових незалежних змінних

$$\xi=\varphi(x,y)\,,\ \eta=\psi(x,y)\,. \tag{1.13}$$

Вибір функцій $\xi=\varphi(x,y)$ і $\eta=\psi(x,y)$ будемо проводити з метою надання рівнянню (1.12) найпростішого (канонічного) вигляду.

Для цього, насамперед, необхідно визначити, як зміниться рівняння (1.12), якщо ми введемо нові незалежні змінні ξ і η. Для відповіді на це запитання перетворимо усі частинні похідні функції u за незалежними змінними x і y і запишемо їх через нові змінні ξ і η, використовуючи при цьому формули диференціювання складних функцій:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}; \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}; \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}; \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\\&+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y};\end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}. \tag{1.18}$$

Підставивши вирази (1.14) – (1.18) в рівняння (1.12), отримаємо

$$\overline{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\overline{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\overline{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\overline{F}=0\,, \tag{1.19}$$

де

$$\overline{A} = A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2;$$

$$\overline{B} = A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y};$$

$$\overline{C} = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2.$$

а $\overline{F}$ не залежить від похідних 2-го порядку. Як бачимо рівняння (1.19) є квазілінійним диференціальним рівнянням із частинними похідними другого порядку із двома незалежними змінними, тобто при переході до нових незалежних змінних тип диференціального рівняння не змінюється.

Очевидно, щоб надати диференціальному рівнянню (1.19) найпростішого вигляду, необхідно так підібрати функції $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \psi(x, y)$, щоб хоча б один з коефіцієнтів $\overline{A}$, $\overline{B}$ або $\overline{C}$ дорівнював би нулеві.

Розглянемо допоміжне рівняння з частинними похідними 1-го порядку:

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0. \qquad (1.20)$$

Якщо $z = \varphi(x, y)$ є деякий частинний розв'язок рівняння (1.20), тоді при $\xi = \varphi(x, y)$ будемо мати $\overline{A} = 0$.

Отже, поставлена задача про вибір нових незалежних змінних зв'язана з розв'язками рівняння (1.20). Мають місце такі дві теореми:

Теорема 1. Якщо $\varphi(x, y) = C$ є загальним розв'язком рівняння

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0, \qquad (1.21)$$

то функція $z = \varphi(x, y)$ задовольняє рівняння (1.20).

Теорема 2. Якщо $z = \varphi(x, y)$ є частинним розв'язком рівняння (1.20), то співвідношення $\varphi(x, y) = C$, де C – довільна стала, є загальним розв'язком звичайного диференціального рівняння (1.21).

Оскільки нас більше цікавить, як шукати розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними (1.20), то доведемо першу теорему.

Запишемо рівняння (1.21) у звичайній формі, тобто через похідні

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0.$$

Якщо $\varphi(x,y)=C$ є загальним розв'язком цього рівняння, то ми маємо неявну залежність y від x. Тоді похідна функції $y(x)$ обчислюється за формулою

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

Підставимо її у звичайну форму запису диференціального рівняння (1.21), отримаємо

$$A\left(\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right)^2+2B\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}+C=0.$$

Помножимо ліву і праву частини цього рівняння на $\left(\varphi'_y\right)^2$. Тоді отримаємо

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0.$$

Порівнявши отримане співвідношення із диференціальним рівнянням (1.20) ми бачимо, що функція $z=\varphi(x,y)$ перетворює його на тотожність. Отже, $z=\varphi(x,y)$ є розв'язком даного диференціального рівняння. Теорему доведено.

Звичайне диференціальне рівняння $Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0$ називається р і в н я н н я м х а р а к т е р и с т и к *(equation of characteristics)* для диференціальних рівнянь з частинними похідними (1.12), а його загальні розв'язки називаються х а р а к т е р и с т и к а м и *(characteristic)* диференціального рівняння (1.12).

Знайдемо розв'язки диференціального рівняння (1.21). Перейдемо до звичайної форми запису диференціального рівняння

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2B\frac{dy}{dx}+C=0.$$

Відносно похідної ми маємо квадратне рівняння, розв'язком якого будуть

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{\Delta}}{A}; \tag{1.22}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{\Delta}}{A}. \tag{1.23}$$

де

$$\Delta = B^2 - AC. \tag{1.24}$$

Знак підкореневого виразу Δ визначає тип диференціального рівняння з частинними похідними (1.12).

Якщо $\Delta > 0$ в деякій точці М, то диференціальне рівняння з частинними похідними (1.12) будемо називати рівнянням гіперболічного *(hyperbolic)* типу.

Якщо $\Delta = 0$, то диференціальне рівняння з частинними похідними (1.12) будемо називати рівнянням параболічного *(parabolic)* типу.

Якщо $\Delta < 0$, то диференціальне рівняння з частинними похідними (1.12) будемо називати рівнянням еліптичного *(elliptic)* типу.

Встановимо канонічний вигляд диференціального рівняння з частинними похідними в кожному із цих трьох типів.

1. Для рівняння гіперболічного типу $\Delta > 0$, тому праві частини рівнянь (1.22) і (1.23) дійсні і різні. Тоді їх загальні розв'язки $\varphi(x, y) = C$, $\psi(x, y) = C$, визначають дві різні дійсні характеристики.

Тоді при перетвореннях $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \psi(x, y)$ рівняння (1.12) прийме вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{1.25}$$

Це і є канонічний вигляд рівняння гіперболічного типу.

2. Для рівняння параболічного типу $\Delta = 0$, тоді диференціальні рівняння (1.22) і (1.23) збігаються і ми матимемо один інтеграл диференціального рівняння (1.21) $\varphi(x, y) = C$. Тоді $\xi = \varphi(x, y)$, а $\eta = \psi(x, y)$, де $\psi(x, y)$ – довільна функція, лінійно незалежна з функцією $\varphi(x, y)$. В цьому випадку матимемо, що $\overline{A} = 0$ і $\overline{B} = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{1.26}$$

Це канонічний вигляд рівняння параболічного типу.

3. Для рівняння еліптичного типу $\Delta < 0$ праві частини рівнянь (1.22) і (1.23) є комплексні, тоді загальні розв'язки є комплексно-спряжені функції $\alpha(x, y) \pm i\beta(x, y) = C$.

Тоді $\xi = \alpha(x, y)$ $\eta = \beta(x, y)$. В цьому випадку $\overline{A} = \overline{C}$ і $\overline{B} = 0$,тоді рівняння (1.12) прийме вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad (1.27)$$

Це і є канонічний вигляд рівняння еліптичного типу.

Отже, щоб звести диференціальне рівняння з частинними похідними (1.12) до канонічного вигляду, треба визначити тип рівняння, скласти його рівняння характеристик і знайти його загальний розв'язок. Виходячи з типу диференціального рівняння з частинними похідними, знайти відповідні формули $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$.

Приклад. *Звести до канонічного вигляду рівняння*

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (1.28)$$

Розв'язання

Визначимо тип диференціального рівняння (1.28).

$$A=\frac{1}{x^2},\ B=0,\ C=\frac{1}{y^2}.$$

$$\Delta=B^2-AC=-\frac{1}{x^2\cdot y^2}<0 \text{ – \textit{рівняння еліптичного типу.}}$$

Знайдемо характеристики диференціального рівняння (1.28)

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x^2 i}{xy},\quad ydy=\pm ixdx;$$

$$\int ydy=\pm i\int xdx+\frac{C}{2}\ \Rightarrow \frac{y^2}{2}=\pm i\frac{x^2}{2}+\frac{C}{2};$$

$$y^2\mp ix^2=C;$$

$$\xi=y^2,\quad \eta=x^2.$$

Підставимо знайдені характеристики у вихідне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 2x\right)=2\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}+$$

$$+2x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=2x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 2x\right)+2\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}=4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}\left(4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{1}{y^2}\left(4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=$$

$$=4\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{2}{x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}+4\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2}{y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$ *– канонічний вигляд рівняння.*

Запитання для самоперевірки

1. Яка основна відмінність звичайних диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь із частинними похідними?

2. Що визначає кількість змінних диференціального рівняння із частинними похідними?

3. Як визначається порядок диференціального рівняння із частинними похідними?

5. Що є розв'язком диференціального рівняння із частинними похідними?

6. Який загальний вигляд лінійного однорідного диференціального рівняння із частинними похідними першого порядку?

7. Сформулюйте алгоритм пошуку частинного розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння із частинними похідними першого порядку.

8. Сформулюйте алгоритм пошуку загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння із частинними похідними першого порядку.

9. Який загальний вигляд квазілінійного диференціального рівняння із частинними похідними другого порядку із двома незалежними змінними?

10. Якого виду диференціальне рівняння отримаємо при заміні незалежних змінних в квазілінійному диференціальному рівнянні із частинними похідними другого порядку із двома незалежними змінними?

11. Як класифікуються квазілінійні диференціальні рівняння із частинними похідними другого порядку із двома незалежними змінними?

12. Як визначаються характеристики та який канонічний вигляд квазілінійних диференціальних рівнянь гіперболічного, параболічного та еліптичного типів?

2 ОСНОВНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Теорія математичного моделювання за допомогою диференціальних рівнянь із частинними похідними й методи досліджень таких моделей є предметом розділу вищої математики, який називається «Рівняння математичної фізики».

Своєю назвою математична фізика завдячує тому, що рівняння з частинними похідними, які вивчає ця дисципліна, виникли з деяких задач фізики.

У наш час коло задач, які розв'язують методами математичної фізики, надзвичайно широке. До них належать багато задач гідромеханіки, теорії фільтрації, геофізики, теорії пружності, електродинаміки, теорії коливань, теплопровідності тощо. При цьому виявляється, що одне й те саме рівняння може описувати абсолютно різні за своєю природою явища й процеси. Тому при дослідженні багатьох задач потрібно порівняно небагато видів диференціальних рівнянь із частинними похідними. Ці рівняння часто називають основними рівняннями математичної фізики. До них належать:

- хвильове рівняння *(wave equation)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t), \tag{2.1}$$

де a – сталий коефіцієнт; f – задана функція своїх аргументів; до розв'язання цього рівняння приходять при вивченні хвиль різних видів – пружних, звукових, електромагнітних тощо, а також інших коливальних явищ;

- рівняння теплопровідності *(heat conduction equation)*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t). \tag{2.2}$$

До розв'язання цього рівняння приходять вивчаючи процеси поширення тепла, явища дифузії, фільтрації тощо.

- рівняння Пуассона *(Poisson equation)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g(x,y,z) \tag{2.3}$$

і Лапласа *(Laplace equation)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (2.4)$$

До розв'язання цих рівнянь приходять при вивченні стаціонарних (незалежних від часу) процесів поширення тепла, явищ стаціонарної дифузії, фільтрації тощо; потенціали поля тяжіння й стаціонарного електричного поля, в яких відсутні відповідно маси й електричні заряди, задовольняють рівняння Лапласа.

2.1 Постановка задач математичної фізики

Досліджуючи фізичні явища (процеси) за допомогою диференціальних рівнянь із частинними похідними, вивчають не саме реальне явище (процес), а деяку його математичну модель, від якої потребується збереження основних рис розглядуваного явища (процесу); крім того, вона має бути настільки простою, щоб її можна було вивчати існуючими математичними методами.

Можна виділити такі основні етапи побудови математичної моделі.

1. Вибір основної величини (або кількох величин), що характеризує явище (процес). Як правило, ця величина (позначимо її u) є функцією просторових координат (у випадку тривимірного простору — координат x, y, z) і часу t.

2. Виведення диференціального рівняння з частинними похідними відносно функції u на основі теоретичних передумов, за допомогою яких визначається модель.

3. Визначення додаткових співвідношень для функції u, які характеризують явище (процес), що моделюється; вони випливають із його фізичного змісту й дають змогу з нескінченної множини розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними вибрати єдиний – саме той, що моделює дане явище (процес). Такими додатковими співвідношеннями найчастіше є межові (крайові) умови *(boundary conditions)*, котрі має задовольняти шукана функція u на межі області, в якій вивчається явище (процес), і початкові умови *(entry conditions)*, що визначають функцію u в момент часу, з якого починається дослідження явища (процесу).

Сукупність диференціального рівняння з частинними похідними й додаткових умов (межових і початкових) становить математичне формулювання фізичної задачі й називається задачею *математичної фізики (mathematical physics)*.

Природно, що основною проблемою теорії «Рівнянь математичної фізики» є відшукання розв'язку задачі математичної фізики у вигляді, зручному для практики. Знаючи цей розв'язок, можна дістати кількісну характеристику процесу в будь-якій точці середовища й у будь-який момент часу.

2.2 Математична модель процесу поширення тепла у стержні

2.2.1 Виведення диференціального рівняння теплопровідності

Розглянемо однорідний стержень довжиною l, відносно якого зробимо такі припущення:

а) стержень виготовлено з одного однорідного матеріалу;

б) бічна поверхня стержня теплоізольована (тепло може розповсюджуватися лише вздовж осі стержня);

в) стержень настільки тонкий, що в будь-який момент часу температура в усіх точках кожного поперечного перерізу стержня однакова.

Якщо вісь стержня прийняти за вісь абсцис Ox (рис. 2.1), то температура u буде функцією координати x та часу t, тобто $u = u(x,t)$.

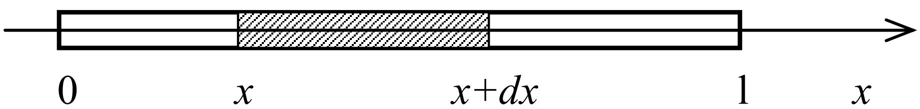


Рисунок 2.1 – Поширення тепла у стержні

За законом Фур'є, якщо температура тіла нерівномірна, в ньому виникають теплові потоки, напрямлені з місць з більш високою температурою в місця з менш низькою температурою. Кількість тепла, що протікає через поперечний переріз x за проміжок часу $[t, t+dt]$ (тобто за момент dt) пропорційна площі S цього перерізу, швидкості зміни температури в напрямі, перпендикулярному до цього перерізу, тобто величині $\frac{\partial u}{\partial x}$ та проміжку часу dt, тобто

$$Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}dt,$$

де k – коефіцієнт теплопровідності, що може залежати від x. Якщо стержень однорідний, то $k = const$. Величина $q = -k\frac{\partial u}{\partial x}$ – називається густиною теплового потоку, що дорівнює кількості тепла, яка протікає за одиницю часу через площу в 1 см^2.

Знайшовши різницю вхідного та вихідного теплових потоків, тобто теплових потоків, що проходять через перерізи x та $x + dx$, ми одержимо кількість тепла dQ, що надано цій ділянці стержня за час dt:

$$dQ = Q_1 - Q_2 = -kS\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dt - \left(-kS\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x}dt\right) =$$

$$= kSdt\left(\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = kSdt\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx.$$

Отже, матимемо

$$dQ = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dtdx,$$

де $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ обчислено в початковій точці.

Оскільки стержень теплоізольований, усе тепло, яке надається ділянці стержня dx, повністю витрачається на зміну температури даної ділянки. Кількість тепла, яку необхідно надати однорідному тілу, щоб підвищити його температуру на величину du визначаємо за формулою

$$dQ = cmdu = c\rho Vdu,$$

де c – питома теплоємність, m – маса тіла, ρ – його густина, V – об'єм тіла.

За проміжок часу dt температура змінилася на величину $du = \frac{\partial u}{\partial t}dt$ (з точністю до нескінченно малих вищого порядку), тому кількість тепла, що витрачається на зміну температури ділянки стержня dx дорівнює

$$dQ = c\rho Sdx\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Прирівнюючи одержані вирази для dQ, отримаємо

$$c\rho Sdx\frac{\partial u}{\partial t}dt = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dtdx.$$

Скоротивши на спільний множник $Sdtdx$, одержимо

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ввівши позначення $\frac{k}{c\rho}=a^2$, отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.5}$$

Це є основне рівняння теплоповідності для однорідного стержня без теплових джерел всередині стержня. Число $a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ – називають коефіцієнтом теплопровідності.

2.2.2 Постановка початкової та крайових умов

Переходимо до останнього етапу побудови математичної моделі процесу поширення тепла у тонкому однорідному теплоізольованому стержні – визначення додаткових (крайових та початкових) умов, які дозволять із безлічі розв'язків диференціального рівняння (2.5), визначити один єдиний, який описує даний процес.

В нашому випадку краями є торцеві перерізи стержня, тобто поперечні перерізи стержня $x=0$ та $x=l$. Крайові умови показують, що відбувається на кінцях стержня в будь-який момент часу. Крайові умови можуть бути різних типів:

а) найпростіший випадок крайових умов той, коли кінці стержня підтримуються при сталій температурі

$$u(0;t)=T_1,\ u(l;t)=T_2;$$

б) кінці стержня підтримуються при температурі, що залежить від часу

$$u(0;t)=g_1(t),\ u(l;t)=g_2(t),$$

де $g_1(t)$ і $g_2(t)$ – задані функції;

в) більш загальними є крайові умови, при яких на торцевих перерізах відбувається теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона, згідно з яким потік тепла через одиницю поверхні за одиницю часу пропорційний різниці температур тіла і навколишнього середовища, тобто дорівнює $h(u-\overline{u})$, де h – коефіцієнт пропорційності, який називається коефіцієнтом теплообміну, u – температура кінця стержня , $\overline{u}$ – температура навколишнього середовища.

Початковою умовою є функція $\varphi\left(x\right)$, яка показує розподілення температури у стержні у початковий момент часу, тобто

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\ 0<x<l.$$

2.2.3 Розв'язання однорідного рівняння теплопровідності при нульових крайових умовах

Постановка задачі

Знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$(\text{ДРЧП})\ \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \left(0<x<l, 0<t<\infty\right), \tag{2.6}$$

що задовольняє крайові умови

$$(\text{КУ})\ \begin{cases} u(0,t)=0, \\ u(l,t)=0, \end{cases}\ \left(0<t<\infty\right); \tag{2.7}$$

і початкову умову

$$(\text{ПУ})\ u(x,0)=\varphi(x),\ (0<x<l), \tag{2.8}$$

де $\varphi(x)$ – задана неперервна функція, що має кусково-неперервну похідну.

Розв'язання задачі

Розв'язувати цю задачу будемо методом відокремлення змінних *(method of separation of variable)* (методом Фур'є).

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді добутку двох функцій

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t), \tag{2.9}$$

де $X(x)$ – функція тільки змінної x , а $T(t)$ – функція лише змінної t.

Підставимо (2.9) в диференціальне рівняння (2.6). Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial t}=X(x)\cdot T'(t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)\cdot T(t),$$

то матимемо

$$X(x)\cdot T'(t)=a^2\cdot X''(x)\cdot T(t).$$

Звідси, поділивши на $a^2\cdot X(x)\cdot T(t)$, отримаємо

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=k, \qquad (2.10)$$

де $k=const$, оскільки x і t не залежать одне від одного, ліва частина рівності залежить лише від t, а права – лише від x. Звідси одержимо два рівняння

$$\begin{cases} T'(t)-ka^2T(t)=0, \\ X''(x)-kX(x)=0. \end{cases} \qquad (2.11)$$

Звернемо увагу на ту важливу обставину, що константа k повинна бути від'ємною, тобто $k<0$. Якби k було додатним, тобто $k>0$ то, з рівняння $\frac{T'(t)}{T(t)}=ka^2$ проінтегрувавши його за t, матимемо

$$\int\frac{T'(t)}{T(t)}dt=\int ka^2dt+\ln C; \ln T(t)=ka^2t+\ln C.$$

Тоді $T(t)=C\cdot e^{ka^2t}$, де C – довільна стала, буде загальним розв'язком. При $k>0$ матимемо, що $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=C\cdot\lim\limits_{t\to\infty}e^{ka^2t}=\infty$, тоді при $t\to\infty$ випливатиме, що $u(x,t)=X(x)T(t)\to\infty$, що суперечить тому, що в жодному поперечному перерізі стержня, тобто ні при жодному фіксованому х температура не може необмежено зростати за абсолютною величиною. Отже, константа $k<0$. Позначимо її через $-\lambda^2$, тобто $k=-\lambda^2$(в цьому випадку k буде від'ємним при $\forall\lambda\neq 0$). Тоді звичайні диференціальні рівняння запишуться так:

$$\begin{cases} T'(t)+\lambda^2a^2T(t)=0, \\ X''(x)+\lambda^2X(x)=0. \end{cases}$$

Розв'яжемо ці рівняння. Загальним розв'язком 1-го із них є функція

$$T(t)=Ce^{-\lambda^2a^2t}, \qquad (2.12)$$

де C – довільна стала. Друге із них є лінійним однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку із сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння $r^2+\lambda^2=0$ має чисто уявні корені $r_{1,2}=\pm\lambda i$, його фундаментальною системою розв'язків є, функції $\cos\lambda x$ і $\sin\lambda x$, а загальним розв'язком є функція

$$X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x \qquad (2.13)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Тоді $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)=Ce^{-\lambda^2a^2t}\left(C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x\right)$ або

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t)=e^{-\lambda^2a^2t}\left(Ac\,\mathrm{os}\,\lambda x+B\sin\lambda x\right), \qquad (2.14)$$

де A,B,λ – довільні числа, оскільки C_1,C_2,C – довільні сталі, λ – теж деяке число, поки що довільне.

Отже, ми отримали нескінченну кількість функцій (2.14), які задовольняють ДРЧП (2.6).

Серед нескінченної множини розв'язків (2.14) даного рівняння виберемо ті, що задовольняють крайові умови (2.7). Якщо $x=0$, то

$$u(0,t)=e^{-\lambda^2a^2t}\left(Ac\,\mathrm{os}\left(\lambda\cdot 0\right)+B\sin\left(\lambda\cdot 0\right)\right)=0,$$

$$u(0,t)=Ae^{-\lambda^2a^2t}=0,$$

звідки

$$A=0.$$

Отже, $u(x,t)=e^{-\lambda^2a^2t}\cdot B\sin\lambda x.$

При $x=l$ отримаємо

$$u(l,t)=e^{-\lambda^2a^2t}\cdot B\sin\left(\lambda l\right)=0.$$

Оскільки $B\neq 0$, то звідси випливає, що $\sin(\lambda l)=0$. Тоді $\lambda l=\pi n$, де $n\in Z$, $n\neq 0$, $\lambda\neq 0$, звідки

$$\lambda=\frac{\pi n}{l}, \text{ де } n=\pm 1,\pm 2,\ \dots$$

Отже, щоб задовольнити умову $u(l,t)=0$, необхідно, щоб числа λ приймали значення числової послідовності

$$\lambda_n=\frac{\pi n}{l}, \qquad (2.15)$$

де $n=1,2,3,...$

Тоді кожному натуральному n буде відповідати розв'язок ДРЧП (2.4), що задовольняє крайові умови, вигляду

$$u_n(x,t)=B_n\cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),\ (n=1,2,...). \qquad (2.16)$$

Отже, маємо послідовність функцій (2.16), що є частинними розв'язками задачі (2.6)-(2.7).

Оскільки рівняння (2.6) лінійне і однорідне, то сума частинних розв'язків рівняння теж задовольняє це рівняння та задані крайові умови (2.7), бо кожна із функцій (2.16) задовольняє ці умови.

Складемо формально функціональний ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \tag{2.17}$$

де $u(x,t)$ є його сумою. Сума цього ряду функція $u(x,t)$ теж задовольнятиме ДРЧП (2.6), бо кожен його член задовольняє рівняння (2.6) та крайові умови (2.7).

Підберемо коефіцієнти B_n ряду так, щоб функція $u(x,t)$, що є сумою цього ряду, задовольняла початкову умову $u(x,0) = \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ задана неперервна кусково-диференційовна функція на проміжку $\left[0;l\right]$. При $t=0$ з рівності (2.17) маємо

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Оскільки $u(x,0) = \varphi(x)$ згідно з початковою умовою, то матимемо

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \tag{2.18}$$

Оскільки функція $\varphi(x)$ неперервна на проміжку $\left[0;l\right]$ і має на ньому кусково-неперервні похідні, то продовживши її на симетричний проміжок $\left[-l;0\right]$ непарним способом, а потім за періодичністю на всю числову пряму змінної x, функція $\varphi(x)$ буде розкладена єдиним способом в ряд Фур'є за синусами, причому коефіцієнти цього ряду Фур'є визначатимуться за відомими формулами

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)dx,\ (n = 1,2,3,...). \tag{2.19}$$

Висновок

Розв'язок першої крайової задачі для однорідного рівняння теплопровідності при нульових (однорідних) крайових умовах, а саме :

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \left(0 < x < l, 0 < t < \infty\right);$$

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0, \end{cases} \left(0 < t < \infty\right);$$

$$(\text{ПУ})\ u(x,0)=\varphi(x),\ (0<x<l)$$

знаходять у вигляді ряду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

де $B_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx$ – коефіцієнти розкладання заданої функції $\varphi(x)$ в ряд Фур'є за синусами на $[-l;0]$.

Приклад. *Розв'язати рівняння* $\frac{\partial u}{\partial t}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *при крайових умовах* $u(0,t)=u(8,t)=0$ *і початковій умові* $u(x,0)=\begin{cases}x/4, 0\le x\le 4,\\ 8-x, 4<x\le 8.\end{cases}$

Розв'язання

За умовою $a=3$, $l=8$. *Тоді розв'язок будемо шукати у вигляді ряду*

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

де

$$B_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx.$$

При $l=8$

$$B_n=\frac{1}{4}\int\limits_0^8\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx=\frac{1}{4}\cdot\left(\int\limits_0^4\frac{x}{4}\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx+\int\limits_4^8(8-x)\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx\right).$$

Кожен з інтегралів знайдемо за формулою інтегрування за частинами

$$\int\limits_0^4\frac{x}{4}\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx & v=-\frac{8}{n}\cos\left(\frac{\pi n}{8}x\right)\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{8x}{n}\cos\left(\frac{\pi n}{8}x\right)\Big|_0^4+\frac{8}{n}\int\limits_0^4\cos\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx\right)=\frac{16\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)-8\pi n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)}{\pi^2 n^2};$$

$$\int_4^8 (8-x)\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx = \frac{64\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+32\pi n\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-64\cdot\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2}.$$

Тоді

$$B_n = \frac{1}{4}\frac{16\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)-8\pi n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+64\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+32\pi n\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2}-$$

$$-\frac{16\cdot\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2}=\frac{20}{\pi^2 n^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)+\frac{6}{\pi n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right).$$

Отже,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{20}{\pi^2 n^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{6}{\pi n}\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]\cdot e^{-\left(\frac{3\pi n}{8}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right).$$

2.2.4 Розв’язання неоднорідного рівняння теплопровідності при ненульових крайових умовах

Постановка задачі

Знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ \left(0<x<l, 0<t<\infty\right), \tag{2.20}$$

що задовольняє крайові умови

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} u(0,t)=g_1(t), \\ u(l,t)=g_2(t), \end{cases} \left(0<t<\infty\right) \tag{2.21}$$

і початкову умову

$$\text{(ПУ)}\ u(x,0)=\varphi(x),\ (0<x<l). \tag{2.22}$$

Розв'язання задачі

Розв'язок шукають у вигляді

$$u(x,t)=v(x,t)+g_1(t)+\left(g_2(t)-g_1(t)\right)\frac{x}{l}. \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,t)-g_1'(t)+\left(g_1'(t)-g_2'(t)\right)\frac{x}{l},$$

При $f_1(x,t)=f(x,t)-g_1'(t)+\left(g_1'(t)-g_2'(t)\right)\frac{x}{l}$ отримаємо

$$\text{(ДРЧП)}\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f_1(x,t) \tag{2.24}$$

$$(\text{КУ})\begin{cases} u(0,t)=v(0,t)+g_1(t)+\left(g_2(t)-g_1(t)\right)\dfrac{0}{l}=g_1(t)\Rightarrow v(0,t)=0; \\ u(l,t)=v(l,t)+g_1(t)+\left(g_2(t)-g_1(t)\right)\dfrac{l}{l}=g_2(t)\Rightarrow v(l,t)=0; \end{cases} \quad (2.25)$$

$$u(x,0)=v(x,0)+g_1(0)+\left(g_2(0)-g_1(0)\right)\frac{x}{l}=\varphi(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x,0)=\varphi(x)-g_1(0)+\left(g_1(0)-g_2(0)\right)\frac{x}{l}.$$

При $\varphi_1(x)=\varphi(x)-g_1(0)+\left(g_1(0)-g_2(0)\right)\dfrac{x}{l}$ отримаємо

$$(\text{ПУ})\ v(x,0)=\varphi_1(x) \quad (2.26)$$

Ми звели вихідну задачу до розв'язку неоднорідного диференціального рівняння (2.24) з нульовими крайовими умовами (2.25). Розв'язок цієї задачі знаходиться у вигляді

$$v(x,t)=s(x,t)+w(x,t), \quad (2.27)$$

$s(x,t)$ є розв'язком такої задачі:

$$(\text{ДРЧП})\ \frac{\partial s}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 s}{\partial x^2},\left(0<x<l,0<t<\infty\right), \quad (2.28)$$

$$(\text{КУ})\begin{cases} s(0,t)=0, \\ s(l,t)=0, \end{cases} \left(0<t<\infty\right); \quad (2.29)$$

$$(\text{ПУ})\ s(x,0)=\varphi_1(x),\ (0<x<l). \quad (2.30)$$

$w(x,t)$ є розв'язком такої задачі:

$$(\text{ДРЧП})\ \frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f_1(x,t),\left(0<x<l,0<t<\infty\right), \quad (2.31)$$

$$(\text{КУ})\begin{cases} w(0,t)=0, \\ w(l,t)=0, \end{cases} \left(0<t<\infty\right); \quad (2.32)$$

$$(\text{ПУ})\ w(x,0)=0,\ (0<x<l). \quad (2.33)$$

Перша з цих задач розв'язується вже відомим методом Фур'є відокремлення змінних. Розв'язок останньої задачі знаходиться у вигляді:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad (2.34)$$

де $T_n(t)=\int\limits_0^t h_n(\tau)e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau$, $h_n(t)=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l f_1(x,t)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)dx$.

Після знаходження $s(x,t)$ та $w(x,t)$ шукана функція $u(x,t)$ матиме вигляд

$$u(x,t) = s(x,t) + w(x,t) + g_1(t) + \left(g_2(t) - g_1(t)\right)\frac{x}{l}. \qquad (2.35)$$

2.3 Математична модель коливання струни

2.3.1 Виведення хвильового рівняння

Розглянемо натягнену струну, закріплену на кінцях. Якщо її вивести з положення рівноваги, то вона коливатиметься. Побудуємо математичну модель цього процесу.

Моделюючи струну, нехтуватимемо її товщиною, вважаючи струну ниткою, а також силами, які виникають при її згинанні. Вважатимемо, що струна пружна — підлягає закону Гука: сила натягу струни прямо пропорційна її видовженню. Таким чином, моделлю струни є пружна й абсолютно гнучка нитка.

За основну величину, яка характеризуватиме процес коливання струни, вибираємо вектор зміщення точок струни від положення рівноваги.

Для простоти розглядатимемо так звані поперечні коливання, тобто такі, коли рух усіх точок струни відбувається в одній площині в напрямі, перпендикулярному до прямолінійного положення рівноваги струни. Якщо положення рівноваги взяти за вісь Ox, то процес характеризуватиметься однією скалярною величиною $u = u\left(x,t\right)$ – відхиленням від положення рівноваги точки струни з абсцисою x у момент часу t. При кожному фіксованому значенні t графік функції $u = u\left(x,t\right)$ даватиме форму струни в цей момент часу (рис. 2.2).

Розглянемо тільки малі коливання, тобто такі, при яких можна знехтувати величиною $\left(u'_x\right)^2$.

Виділимо довільну ділянку $\left(x_1, x_2\right)$ струни (див. рис. 2.2), яка при коливанні деформується в ділянку M_1M_2. Довжина дуги цієї ділянки в момент часу t становить

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x'^2}\,dx \approx x_2 - x_1.$$

Отже, за зроблених припущень видовжування струни під час її малих коливань не відбувається. Тоді на підставі закону Гука натяг T у кожній точці струни не змінюється з часом.

Знайдемо проекції на осі Ox і Ou сил натягу $\overline{T}\left(x_1\right)$, $\overline{T}\left(x_2\right)$, які діють на ділянку M_1M_2 і напрямлені по дотичних до струни в точках M_1 і M_2.

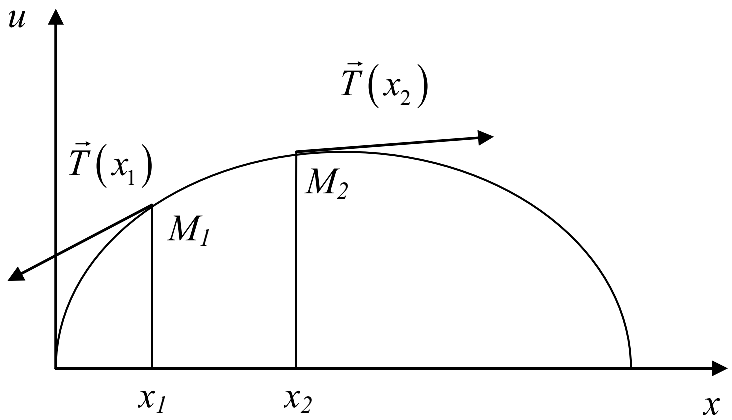


Рисунок 2.2 – Коливання струни

Позначимо через $\alpha(x)$ кут між додатним напрямом осі Ox і дотичною в точці з абсцисою x. Тоді

$$
\begin{aligned}
&\text{ï}\,ð_x\overline{T}\left(x_2\right)=T\left(x_2\right)\cos\alpha\left(x_2\right),\\
&\text{ï}\,ð_x\overline{T}\left(x_1\right)=-T\left(x_1\right)\cos\alpha\left(x_1\right);
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{ï}\,ð_u\overline{T}\left(x_2\right)=T\left(x_2\right)\sin\alpha\left(x_2\right),\\
&\text{ï}\,ð_u\overline{T}\left(x_1\right)=-T\left(x_1\right)\sin\alpha\left(x_1\right).
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Враховуючи малу амплітуду коливань, можна замінити в цих співвідношеннях $\cos\alpha(x)$ і $\sin\alpha(x)$ величинами

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+u_x'^2}}\approx 1; \tag{2.38}$$

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\ \alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{u_x'}{\sqrt{1+u_x'^2}}\approx u_x'. \tag{2.39}$$

На підставі принципу Д'Аламбера всі сили, які діють на ділянку струни M_1M_2, ураховуючи сили інерції, мають урівноважуватися або, інакше кажучи, суми проекцій усіх цих сил на осі Ox і Ou мають дорівнювати нулю.

Спроектуємо суму всіх сил, які діють на ділянку M_1M_2 струни, на вісь Ox. Оскільки розглядаються лише поперечні коливання, то сили інерції і зовнішні сили, які діють на струну, напрямлені перпендикулярно до осі Ox. Отже, їх проекція на вісь Ox дорівнює нулю. Тому, враховуючи тільки сили натягу, з (2.36), (2.38) на підставі принципу Д'Аламбера отримаємо

$$T(x_2) - T(x_1) \approx 0. \tag{2.40}$$

Звідси з огляду на довільність x_1 і x_2 випливає, що натяг струни не залежить від x. Таким чином, можна вважати, що $T = T_0$ (T_0 – стала величина) для всіх x і t.

Розглянемо проекції всіх сил, які діють на ділянку M_1M_2 струни, на вісь Ou.

Поклавши в (2.37) $T(x_2) = T(x_1) = T_0$, з урахуванням (2.39) запишемо суму проекцій на вісь Ou сил натягу у вигляді

$$Y = T_0\left[u'_x(x_2,t) - u'_x(x_1,t)\right].$$

Звідси, з огляду на те, що

$$u'_x(x_2,t) - u'_x(x_1,t) = \int_{x_1}^{x_2} u''_{xx}(x,t)\,dx,$$

остаточно дістанемо

$$Y = T_0 \int_{x_1}^{x_2} u''_{xx}(x,t)\,dx. \tag{2.41}$$

Позначимо через $p(x,t)$ щільність зовнішніх сил, які діють на струну паралельно осі Ou. Тоді проекція на вісь Ou зовнішніх сил, що діють на ділянку M_1M_2 струни, дорівнюватиме

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x,t)\,dx. \tag{2.42}$$

Нехай $\rho(x)$ – лінійна густина струни. Тоді сила інерції ділянки M_1M_2 струни становитиме

$$-\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) u''_{tt}(x,t)\,dx. \tag{2.43}$$

Прирівняємо за принципом Д'Аламбера до нуля суму проекцій сил (2.41)–(2.43) і отримаємо рівняння коливання елементу струни в інтегральній формі:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T_0 u''_{xx}(x,t) - \rho(x) u''_{tt}(x,t) + p(x,t) \right] dx = 0. \qquad (2.44)$$

Для переходу до диференціального рівняння припустимо існування й неперервність других похідних від $u(x,t)$, функції $\rho(x)$ і $p(x,t)$ вважатимемо неперервними і застосуємо до (2.44) теорему про середнє в інтегральному численні:

$$\left(T_0 u''_{xx}(x,t) - \rho(x) u''_{tt}(x,t) + p(x,t) \right)\Big|_{x=x_0} \Delta x = 0; \qquad (2.45)$$

тут $x_0 \in (x_1, x_2)$, $\Delta x = x_2 - x_1$.

Скоротимо рівняння (2.45) на Δx і виконаємо в ньому граничний перехід $x_2 \to x_1$. Враховуючи, що при $x_2 \to x_1$, значення x_0 також прямуватиме до x_1 і те, що значення x_1 є довільним, остаточно отримаємо

$$T_0 u''_{xx}(x,t) - \rho(x) u''_{tt}(x,t) + p(x,t) = 0$$

або

$$\rho(x) u''_{tt} = T_0 u''_{xx} + p(x,t) \qquad (2.46)$$

– шукане диференціальне рівняння коливання струни.

У випадку однорідної струни $(\rho = const)$ рівняння (2.46) зазвичай записується у вигляді

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + f(x,t), \qquad (2.47)$$

де $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$, $f(x,t) = \dfrac{p(x,t)}{\rho}$.

Рівняння (2.47) при $f(x,t) \neq 0$ називають рівнянням вимушених коливань струни *(equation of forced oscillationses of a string)*. При $f(x,t) = 0$ (зовнішні сили відсутні) приходимо до рівняння вільних коливань струни *(equation of free oscillations of a string)*

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}. \qquad (2.48)$$

До рівняння (2.47) приходять також при моделюванні багатьох інших хвильових процесів: поздовжніх коливань пружного стержня, крутильних коливань вала, коливання рідини й газу в тонкій трубці тощо. Всі ці хвильові процеси об'єднує те, що вони є одновимірними. Тому рівняння (2.47) називають також одновимірним хвильовим рівнянням. У загальному ж (тривимірному) випадку вивчення багатьох хвильових процесів приводить до тривимірного *(three-dimensional)* хвильового рівняння

$$u''_{tt} = a^2\left(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}\right) + f\left(x, y, z, t\right) \qquad (2.49)$$

Так, до рівняння (2.49) приводить математичне моделювання таких процесів: малих пружних коливань твердих тіл; коливань газу (звукові коливання); електромагнітних коливань тощо.

Рівняння (2.47) є окремим випадком рівняння (2.49). Другим окремим випадком цього рівняння є рівняння коливання мембрани *(equation of oscillation of a diaphragm)* або двовимірне *(two-dimensional)* хвильове рівняння

$$u''_{tt} = a^2\left(u''_{xx} + u''_{yy}\right) + f\left(x, y, t\right). \qquad (2.50)$$

До рівняння (15.69) приводять задачі про коливання двовимірних тіл, зокрема задача про малі коливання мембрани – пружної плівки, яка може вільно згинатися.

2.3.2 Постановка мішаних задач і задачі Коші для хвильового рівняння

Хвильове рівняння як диференціальне рівняння з частинними похідними визначає нескінченну множину розв'язків. Тому для однозначного моделювання конкретного коливального процесу необхідно разом із хвильовим рівнянням розглянути додаткові умови, які б дали змогу виділити єдиний розв'язок рівняння, що описує цей процес. Для цього, як і при моделюванні нестаціонарних теплових процесів, використовують межові (крайові) й початкові умови, які характеризують коливальний процес, що моделюється.

Для задачі про поперечні коливання струни областю розв'язання одновимірного хвильового рівняння (2.47), яке моделює цей коливальний процес, є інтервал $\left(0, l\right)$ осі Ox, де l – довжина струни. Межами області розв'язання є точки $x = 0$ і $x = l$. До математичного формулювання межових умов у цій задачі приводить той факт, що кінці струни закріплені нерухомо. Для шуканого зміщення $u = u(x;t)$ точок струни від положення рівноваги це приводить до крайових умов

$$u\left(0, t\right) = 0, \, u\left(l, t\right) = 0. \qquad (2.51)$$

Процес коливання істотно залежить також від того, яким способом струна виводиться з рівноваги. Припускається, що це досягається тим, що в початковий момент часу $t=0$ усім точкам струни надаються деякі зміщення й швидкості

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x); \\ u_t'(x,0)=g(x); \end{cases} \quad 0 \le x \le l, \tag{2.52}$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – задані функції.

Таким чином, фізична задача про коливання струни звелася до такої математичної задачі: знайти розв'язок рівняння (2.47) при $0 \le x \le l$, $t \ge 0$, який задовольняє крайові умови (2.51) і початкові умови (2.52).

Основними типами крайових умов для одновимірного хвильового рівняння (2.47) у математичній фізиці є

$$u(0,t)=\mu_1(t),\, u(l,t)=\mu_2(t); \tag{2.53}$$

$$u_x'(0,t)=\nu_1(t),\, u_x'(l,t)=\nu_2(t); \tag{2.54}$$

$$u_x'(0,t)-h_1u(0,t)=\omega_1(t),\, u_x'(l,t)-h_2u(l,t)=\omega_2(t), \tag{2.55}$$

де μ,ν,ω – відомі функції; h_1,h_2 – відомі додатні сталі.

Умови (2.53) справджуються у випадку, коли кінці об'єкта (струна, стержень тощо) переміщуються за заданим законом; умови (2.54) – у випадку, коли до кінців прикладені задані сили; умови (2.55) – у випадку пружного закріплення кінців.

Для одновимірного хвильового рівняння відповідно до типу крайових умов ставляться три основні мішані задачі: знайти розв'язок рівняння (2.47) при $0 \le x \le l$, $t \ge 0$, який задовольняє одну з крайових умов (2.53) – (2.55) і початкові умови (2.52).

Комбінуючи різні типи крайових умов (2.53) – (2.55) на межах $x=0$ і $x=l$ області розв'язання, можна дістати ще шість типів найпростіших крайових задач. Відомі також інші крайові умови, наприклад, нелінійні.

Для рівняння (2.47) можна поставити задачу Коші. Нехай струна досить довга, і нас цікавить коливання її точок, достатньо віддалених від її кінців, причому протягом малого інтервалу часу. В цьому випадку коливальний процес на кінцях струни не має суттєвого впливу, й тому його можна не враховувати; струну при цьому вважають нескінченною. Задача Коші ставиться так: знайти розв'язок рівняння (2.47) при $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, який задовольняє початкову умову

$$u(x,0)=f(x),\ u'_t(x,0)=g(x),\ -\infty<x<\infty. \qquad (2.56)$$

Таким чином, докладно розглянуто постановку мішаних задач і задачі Коші для хвильового рівняння у випадку однієї незалежної геометричної змінної x і часу t. Якщо число геометричних змінних $n>1$, наприклад $n=3$, то перша, друга й третя мішані задачі для хвильового рівняння ставляться так: знайти розв'язок $u(x,y,z,t)$ рівняння (2.49) в області V, який задовольняє на межі S області V одну з крайових умов

$$u\big|_S=\mu(x,y,z,t); \qquad (2.57)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\nu(x,y,z,t); \qquad (2.58)$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+h(x,y,z,t)u\right)\right|_S=\beta(x,y,z,t) \qquad (2.59)$$

відповідно для першої, другої та третьої мішаних задач і початкові умови

$$u\big|_{t=0}=f(x,y,z),\ u'_t\big|_{t=0}=g(x,y,z) \qquad (2.60)$$

в області V.

Функції μ, ν, β, h, f, g у (2.57)–(2.60) – це відомі функції своїх аргументів.

Умови (2.52)–(2.55) для одновимірного хвильового рівняння є окремим випадком умов (2.57)–(2.60).

Задача Коші для тривимірного хвильового рівняння (2.49) ставиться аналогічно розглянутій задачі для рівняння (2.47): знайти функцію $u(x,y,z,t)$, яка в будь-якій точці простору задовольняє хвильове рівняння (2.49) при $t>0$ і початкові умови (2.60).

Таким чином, область розв'язання задачі Коші для рівняння (2.49) – це весь простір.

2.3.3 Знаходження розв'язку математичної моделі коливання струни, що закріплена на кінцях

Постановка задачі

Знайти розв'язок рівняння коливання струни

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (0<x<l,\ t>0) \qquad (2.61)$$

що задовольняє нульові крайові умови

$$(\text{КУ})\ \begin{cases} u(0,t)=0, \\ u(l,t)=0, \end{cases} (t>0) \tag{2.62}$$

та початкові умови

$$(\text{ПУ})\ \begin{cases} u(x,0)=f(x); \\ u_t'(x,0)=g(x), \end{cases} \tag{2.63}$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – задані функції при $0<x<l$.

Розв'язання задачі

Розв'язок рівняння (2.61) шукаємо методом відокремлення змінних. Шукану функцію подаємо у вигляді

$$u(x,t)=X(x)T(t), \tag{2.64}$$

де $X(x)$ – функція змінної x, а $T(t)$ – функція змінної t.

Тоді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=X(x)T''(t), \tag{2.65}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)T(t), \tag{2.66}$$

Підставимо (2.65) і (2.66) в рівняння (2.61) отримаємо

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t),$$

звідки матимемо

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2. \tag{2.67}$$

Рівняння (2.67) еквівалентно сукупності двох звичайних диференціальних рівнянь

$$T''(t)+\lambda^2a^2T(t)=0, \tag{2.68}$$

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0. \tag{2.69}$$

Загальні розв'язки рівнянь (2.68) і (2.69) матимуть вигляд

$T(t)=A\cos\lambda at+B\sin\lambda at$, де A і B – довільні сталі,

$X(x)=C\cos\lambda x+D\sin\lambda x$, де C і D – довільні сталі.

Тоді, нескінченна множина розв'язків диференціального рівняння (2.61) описується співвідношенням

$$u(x,t)=(A\cos\lambda at+B\sin\lambda at)(C\cos\lambda x+D\sin\lambda x), \tag{2.70}$$

де A, B, C, D – довільні сталі.

При $x=0$ із співвідношення (2.70) матимемо

$$u(0,t)=\left(A\cos\lambda at+B\sin\lambda at\right)\left(C\cos 0+D\sin 0\right)= \\ =\left(A\cos\lambda at+B\sin\lambda at\right)C. \qquad (2.71)$$

Згідно з першою крайовою умовою $u\left(0,t\right)=0$, яка разом із (2.71) приведе нас до рівняння

$$\left(A\cos\lambda at+B\sin\lambda at\right)C=0\,. \qquad (2.72)$$

Оскільки $\left(A\cos\lambda at+B\sin\lambda at\right)$ не може дорівнювати нулю при всіх t, отримаємо єдиний розв'язок рівняння (2.72)

$$C=0\,.$$

Тоді розв'язки (2.70) приймуть вигляд

$$u(x,t)=D\sin\lambda x\left(A\cos\lambda at+B\sin\lambda at\right). \qquad (2.73)$$

При $x=l$ із виразу (2.73) отримаємо

$$u(x,t)=D\sin\lambda l\left(A\cos\lambda at+B\sin\lambda at\right). \qquad (2.74)$$

Скористаємося другою крайовою умовою $u\left(l,t\right)=0$. Тоді матимемо рівняння

$$D\sin\lambda l\left(A\cos\lambda at+B\sin\lambda at\right)=0$$

розв'язавши яке, отримаємо

$$\sin\lambda l=0\,;$$

$$\lambda l=\pi n\Rightarrow\lambda_n=\frac{\pi n}{l},\ \text{де}\ n=1,2,3... \qquad (2.75)$$

Зауважимо, що $\lambda\neq 0$, бо при $\lambda=0\ \Rightarrow\ u\left(x,t\right)=0$, що не задовольняє початкову умову.

Отже, константа розділення λ є числовою послідовністю (2.75).

Тоді кожному натуральному n відповідає числова послідовність $\lambda_n=\dfrac{\pi n}{l}$ (де $n=1,2,3...$), а кожному λ_n за формулою (2.73) відповідає послідовність функцій

$$u(x,t)=X_n\left(x\right)T_n\left(t\right)=D_n\sin\frac{\pi n}{l}x\left(A_n\cos\frac{\pi na}{l}t+B_n\sin\frac{\pi na}{l}t\right),$$

де A_n, B_n, D_n – послідовності довільних констант або ж після згортання

$$u(x,t)=\left(a_n\cos\frac{\pi na}{l}t+b_n\sin\frac{\pi na}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{2.76}$$

де a_n і b_n – довільні сталі.

Оскільки рівняння (2.61) є лінійним та однорідним, то будь-яка сума цих розв'язків (2.76) теж буде розв'язком ДРЧП (2.61) і буде задовольняти нульові крайові умови.

Тоді функція $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$, тобто функція, що є сумою функціонального ряду, теж задовольнятиме рівняння (2.61) і крайові умови (2.62).

Отже,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi na}{l}t+b_n\sin\frac{\pi na}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{2.77}$$

є розв'язком ДРЧП (2.61) і задовольняє нульові крайові умови (2.62).

Залишилось підібрати коефіцієнти цього ряду a_n і b_n так, щоб функція (2.77) ще задовольнила початкові умови (2.63).

Скористаємось першою із цих умов. При $t=0$ з рівності (2.77) матимемо

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{2.78}$$

звідки випливає, що функція $f(x)$, яка задана на проміжку $(0,l)$, розкладена в неповний ряд Фур'є за синусами, а як відомо, коефіцієнти a_n цього ряду Фур'є знаходяться за формулами

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,\ (n=1,2,...). \tag{2.79}$$

Скористаємось тепер другою із умов, що входить в (2.63). Продиференціювавши за t функціональний ряд (2.77) почленно, матимемо

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\pi na}{l}a_n\cos\frac{\pi na}{l}t+\frac{\pi na}{l}b_n\sin\frac{\pi na}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{2.80}$$

При $t=0 \Rightarrow \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi na}{l}b_n\sin\frac{\pi n}{l}x,$ що можна записати так

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi na}{l}b_n\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{2.81}$$

Отже, задана функція $g(x)$ $(0<x<l)$, що входить в склад (ПУ) (2.63), теж розкладена в неповний ряд Фур'є за синусами, тоді коефіцієнти цього ряду $\frac{\pi n a}{l}b_n$ будуть визначатися за формулами

$$\frac{\pi n a}{l}b_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx,$$

звідки маємо

$$b_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l g(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx. \qquad (2.82)$$

Отже, коефіцієнти a_n і b_n в ряді (2.77) треба обчислювати за формулами (2.79) і (2.82), тоді функція (2.64) задовольнить і рівняння (2.61), нульові крайові умови (2.62), і початкові умови (2.63).

Висновок

Розв'язок вказаної крайової задачі

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (0<x<l,\ t>0),$$

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} u(0,t)=0; \\ u(l,t)=0; \end{cases}$$

$$\text{(ПУ)}\ \begin{cases} u(x,0)=f(x); \\ u_t'(x,0)=g(x), \end{cases}$$

шукаємо за формулою

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n a}{l}t + b_n\sin\frac{\pi n a}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l g(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx.$$

2.3.4 Знаходження розв'язку математичної моделі коливання необмеженої струни

Постановка задачі

Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння коливання необмеженої струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < \infty. \tag{2.83}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x); \\ u'_t(x,0) = g(x), \end{cases} \tag{2.84}$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – задані неперервні функції.

Розв'язання задачі

Оскільки країв в необмеженої струни немає, тому крайові умови відсутні. Зведемо рівняння (2.83) до канонічного вигляду, що містить лише мішану частинну похідну, записавши рівняння (2.83) у вигляді

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{2.85}$$

Тоді $A = a^2, B = 0, C = -1$.

$\Delta = B^2 - AC = a^2 > 0$ – отже, це рівняння гіперболічного типу. Зведемо рівняння до канонічного вигляду. Характеристики знайдемо розв'язавши диференціальні рівняння

$$\frac{dt}{dx} = \frac{B^2 \pm \sqrt{\Delta}}{A} = \frac{\pm 1}{a}. \tag{2.86}$$

У результаті отримаємо два загальні розв'язки диференціального рівняння (2.86)

$$x - at = C_1;$$

$$x + at = C_2,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Перейдемо у диференціальному рівнянні (2.85) до нових незалежних змінних ξ і η за формулами

$$\begin{cases} \xi = x - at; \\ \eta = x + at. \end{cases} \tag{2.87}$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1;\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -a;\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = a;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} =$$
$$= a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

Тоді рівняння (2.85) буде зведено до вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \qquad (2.88)$$

Рівняння (2.88) розв'язуємо двома послідовними інтегруваннями, спочатку за ξ, а потім за η:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi(\eta),$$

де $\varphi(\eta)$ – довільна функція від η.

$$u(\xi,\eta) = \int \varphi(\eta)\,d\eta + \varphi_1(\xi),$$

де $\varphi_1(\xi)$ – довільна функція від ξ.

Позначимо $\varphi_2(\eta) = \int \varphi(\eta)\,d\eta$, тоді загальний розв'язок рівняння (2.88) запишеться у вигляді

$$u(\xi,\eta) = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta). \qquad (2.89)$$

Повернемось до старих змінних x та t. Оскільки рівняння (2.88) рівносильне рівнянню (2.83), то в загальний розв'язок замість ξ та η підставимо вирази (2.87), одержимо

$$u(x,t)=\varphi_1(x-at)+\varphi_2(x+at). \tag{2.90}$$

Це є загальний розв'язок рівняння (2.83), тут φ_1 та φ_2 є довільні функції своїх аргументів.

Знаючи, що функція (2.90) є загальним розв'язком рівняння (2.83), скористаємось початковими умовами (2.84) для того, щоб знайти конкретні вирази функцій φ_1 і φ_2 в формулі (2.90).

Для цього спочатку знайдемо частинну похідну за t функції (2.90) за правилом диференціювання складних функцій

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\cdot\varphi_1'(x-at)+a\varphi_2'(x+at).$$

Тоді при $t=0$ матимемо

$$u(x,0)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x);$$
$$u_t'(x,0)=-a\varphi_1'(x)+a\varphi_2'(x).$$

Враховуючи початкові умови (2.84), матимемо

$$\begin{cases}\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=f(x);\\ -a\varphi_1'(x)+a\varphi_2'(x)=g(x).\end{cases} \tag{2.91}$$

Проінтегруємо 2-е із рівнянь в межах від x_0 до x:

$$-a\int_{x_0}^{x}\varphi_1'(z)dz+a\int_{x_0}^{x}\varphi_2'(z)dz=\int_{x_0}^{x}g(z)dz;$$

$$-a\varphi_1(z)\Big|_{x_0}^{x}+a\varphi_2(z)\Big|_{x_0}^{x}=\int_{x_0}^{x}g(z)dz+C;$$

$$-\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}g(z)dz+\frac{C}{a}.$$

Із системи рівнянь

$$\begin{cases}\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=f(x);\\ -\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}g(z)dz+\dfrac{C}{a},\end{cases}$$

отримаємо

$$\begin{cases} \varphi_2(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int\limits_{x_0}^{x} g(z)\,dz + \frac{C}{2a}; \\ \varphi_1(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int\limits_{x_0}^{x} g(z)\,dz - \frac{C}{2a}. \end{cases} \tag{2.92}$$

Тоді шуканий розв'язок

$$u(x,t) = \varphi_1(x-at) + \varphi_2(x+at) = \frac{1}{2} f(x-at) - \frac{1}{2a} \int\limits_{x_0}^{x-at} g(z)\,dz +$$

$$+\frac{1}{2} f(x+at) + \frac{1}{2a} \int\limits_{x_0}^{x+at} g(z)\,dz.$$

Отже,

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} g(z)\,dz. \tag{2.93}$$

Формула (2.93) називається формулою Д'Аламбера.

Висновок

Розв'язок задачі Коші для необмеженої струни

$$\text{(ДРЧП)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ -\infty < x < \infty.$$

$$\text{(ПУ)} \quad \begin{cases} u(x,0) = f(x); \\ u_t'(x,0) = g(x), \end{cases}$$

шукається за формулою Д'Аламбера

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} g(z)\,dz.$$

Приклад. *Розв'язати задачу* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(-\infty < x < +\infty,\ 0 < t < \infty)$, *якщо* $u(x,0) = \sin 2x,\ u_t'(x,0) = 0$.

Розв'язання

За умовою $a = 2$, $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = 0$.

Тоді

$$u(x,t) = \frac{\sin 2(x-3t) + \sin 2(x+3t)}{2} + 0 = \sin 2x \cos 3t.$$

Відповідь: $u(x,t) = \sin 2x \cos 3t$.

2.4 Диференціальні рівняння Пуассона і Лапласа

Рівняння теплопровідності (2.5) ми отримали за умови, що стержень є теплоізольованим і надходження тепла можливе лише на торцях стержня. Якщо по довжині стержня є джерела тепла або навпаки є ділянки, на яких тепло відбирається, то диференціальне рівняння, яке описує процес поширення тепла при таких умовах прийме вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_1(x,t). \tag{2.94}$$

Рівняння (2.94) ще по-іншому називається одновимірним *(one-dimensional)* рівнянням теплопровідності. Якщо ми рівняння (2.94) узагальнимо на випадок, коли досліджується процес поширення тепла в середині пластини, то отримаємо двовимірне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_1(x,y,t). \tag{2.95}$$

Аналогічно виконуючи узагальнення на випадок, коли досліджується процес поширення тепла у об'ємному тілі отримаємо тривимірне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} \right) + f_1(x,y,z,t). \tag{2.96}$$

Всі ці рівняння описують нестаціонарне поле температур.

Введемо оператор Лапласа *(Laplace operator)* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}$ в просторі, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ на площині. Тоді двовимірне та тривимірне рівняння теплопровідності запишуться так

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f_1(x,y,t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f_1(x,y,z,t).$$

Скорочення запису диференціальних рівнянь це не єдине, і далеко не найважливіше використання оператора Лапласа (лапласіана). Він є узагальненням другої похідної функції однієї змінної на багатовимірний випадок і дозволяє оцінити значення функції через її значення у сусідніх точках.

1. Якщо $\Delta u > 0$ в точці (x, y), то значення $u(x, y)$ в цій точці менше середнього значення функції в сусідніх точках. Під середнім значенням функції в сусідніх точках розуміють середнє значення функції або по колу, або всередині круга з центром в точці (x, y).

2. Якщо $\Delta u = 0$ в точці (x, y), то $u(x, y)$ дорівнює середньому значенню функції в сусідніх точках.

3. Якщо $\Delta u < 0$ в точці (x, y), то $u(x, y)$ більше середнього значення функції в сусідніх точках.

Цю властивість лапласіана легко зрозуміти, якщо виходити із основних рівнянь матфізики. Наприклад, згідно з рівнянням теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$, для температури u швидкість зміни температури $\frac{\partial u}{\partial t}$ пропорційна величині Δu. Отже, якщо температура в точці (x, y) менша, ніж середня температура на колі, центр якого знаходиться в цій точці, то температура в цій точці буде зростати, тобто $\Delta u > 0$. Якщо ж в цій точці (x, y) температура вища, ніж середня температура в точках кола, що обмежує цю точку, де точка (x, y) є центром кола, то в цій точці температура буде зменшуватись, тобто $\Delta u < 0$. Якщо ж в точці (x, y) температура дорівнює середньому значенню температури в точках кола, що обмежує цю точку, то $\Delta u = 0$.

Розглянемо тепер стаціонарне теплове поле. Оскільки поле стаціонарне, тобто температура u не змінюється із зміною часу t, то $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, а також теплові потоки, що надходять від джерел тепла, які діють всередині тіла, не залежать від часу. Якщо ввести позначення $f = \frac{f_1}{a^2}$, то одержимо такі рівняння

$$\Delta u = -f(x, y), \Delta u = -f(x, y, z).$$

Ці рівняння називаються рівняннями Пуассона відповідно на площині і в просторі.

Якщо джерела чи стоки тепла всередині тіла відсутні, то ми отримаємо такі рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ або } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = 0.$$

Ці рівняння називаються рівняннями Лапласа відповідно на площині і в просторі. Або, якщо ввести лапласіан,

$$\Delta u = 0 .$$

2.4.1 Крайова задача для рівнянь Пуассона і Лапласа

Розглянемо деяку об'ємну область, обмежену деякою замкненою поверхнею Г, що є межею цієї області.

Нехай всередині цієї області температура u не залежить від зміни часу, тобто теплове поле стаціонарне.

Задача про розподіл температури $u(x, y, z)$ ставиться таким чином. Знайти функцію $u(x, y, z)$, що всередині тіла задовольняє рівняння $\Delta u = 0$ або $\Delta u = f(x, y, z)$ і крайову умову, яка може бути взята в одному із виглядів:

а) $u = f_1$ на Г (це перша крайова задача), тобто $u\Big|_{\Gamma} = f_1$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial n} = f_2$ на Г (це друга крайова задача), тобто $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = f_2$;

де $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – похідна за зовнішньою нормаллю до поверхні Г;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial n} = h(u - f_3)$ на Г (це третя крайова задача),

де f_1, f_2, f_3 – задані функції.

Першу крайову задачу називають задачею Діріхле *(Dirichlet's problem)*, а другу крайову задачу називають задачею Неймана *(Neumann problem)*. Третя крайова задача називається мішаною задачею, а крайові умови називають умовами Робена *(Roben's conditions)*.

2.4.2 Рівняння Лапласа в полярних координатах

Перехід від декартових координат x і y до полярних r і φ здійснюється за формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \text{ і } \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Знайдемо вираз $\Delta u = 0$ в полярних координатах, де $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Для цього знайдемо вирази $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ та $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ через r і φ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \quad (2.98)$$

З формули $r^2 = x^2 + y^2$ маємо:

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\varphi.$$

Отже,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi;$$

$$2r\frac{\partial r}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\varphi.$$

Тоді

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi.$$

З другої формули $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ маємо

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{r\cdot\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi}.$$

Отже,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r};$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{r\cos\varphi}.$$

Тоді

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{cos\varphi}{r}.$$

Знайдемо тепер частинні похідні 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\left(\cos\varphi\right)'_x=-\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\sin^2\varphi}{r};$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\left(\sin\varphi\right)'_y=\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos^2\varphi}{r};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{-\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}r-\frac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi}{r^2}=\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{-\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}r-\frac{\partial r}{\partial y}\cos\varphi}{r^2}=\frac{-2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}.$$

Підставимо усі отримані похідні у рівняння Лапласа. Отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\left(-\frac{\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{r}+\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{r}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{r^2}+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\cos^2\varphi}{r}+\frac{\sin^2\varphi}{r}\right)+ \qquad (2.99)$$
$$+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(\frac{2\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{r^2}-\frac{2\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{r^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial^2\varphi}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}=0.$$

Отже, рівняння Лапаласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в полярних координатах має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial^2\varphi}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}=0. \qquad (2.100)$$

2.4.3 Внутрішня задача Діріхле для круга

Постановка задачі

Знайти функцію u, що задовольняє рівняння Лапласа $\Delta u=0$ всередині круга радіусом a і крайову умову $u\Big|_{\tilde{A}}=f$, де f – задана неперервна функція, а Γ – коло, що є границею круга.

Розв'язання задачі

Будемо розв'язувати цю задачу в полярних координатах. Рівняння Лапласа прийме вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}=0 \text{ або } r^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi}=0, \qquad (2.101)$$

де $0 \le r < a$ і $0 \le \varphi < 2\pi$, а крайову умову можна записати так

$$u(a,\varphi)=f(\varphi),$$

де $f(\varphi)$ – задана неперервна функція.

Будемо розв'язувати цю задачу методом відокремлення змінних

$$u=\Phi(\varphi)\cdot R(r). \qquad (2.102)$$

Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\Phi(\varphi)\cdot R'(r),\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\Phi(\varphi)\cdot R''(r), \text{ а } \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=\Phi''(\varphi)\cdot R(r),$$

то, підставляючи ці вирази в рівняння (2.101), одержимо

$$r^2\Phi(\varphi)R''(r)+r\Phi(\varphi)R'(r)+\Phi''(\varphi)R(r)=0.$$

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\lambda^2. \qquad (2.103)$$

У результаті одержимо сукупність двох рівнянь

$$\begin{cases}\Phi''(\varphi)+\lambda^2\Phi(\varphi)=0,\\ r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda^2R(r)=0.\end{cases} \qquad (2.104)$$

Перше із рівнянь має загальний розв'язок функцію

$$\Phi(\varphi)=A\cos\lambda\varphi+B\sin\lambda\varphi,$$

де A і B – довільні сталі.

Зауважимо, що при зміні кута φ на величину 2π однозначна функція $u(r,\varphi)$ повинна повернутися до свого попереднього значення, бо це буде одна і та ж точка (точки (r,φ) і $(r,\varphi+2\pi)$ – збігаються), тобто $u(r,\varphi+2\pi)=u(r,\varphi)$, а це означає, що функція $\Phi(\varphi)$ повинна задовольняти таку рівність $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$, тобто $\Phi(\varphi)$ є періодичною функцією кута φ з періодом 2π, а це можливо лише тоді, коли λ є число ціле, тобто $\lambda=n$. Зауважимо, що якби ми спільне відношення (2.103) прирівняли до додатного числа, то періодичного розв'язку не отримали б.

Отже, при n цілому маємо функцію

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi. \qquad (2.105)$$

Друге рівняння системи (2.104) називається рівнянням Ейлера і його розв'язок шукаємо за допомогою відомої підстановки

$$R(r) = r^m, \qquad (2.106)$$

де m – деяке число.

Підставимо функцію (2.106) в друге рівняння системи (2.104), отримаємо

$$m(m-1)r^m + mr^m - \lambda^2 r^m = 0.$$

Звідси маємо

$$m^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\lambda.$$

Тоді при $m_1 = \lambda \Rightarrow R_1(r) = r^{\lambda}$, а при $m_2 = -\lambda \Rightarrow R_2(r) = r^{-\lambda}$. Тоді загальний розв'язок рівняння (2.104) має вигляд

$R(r) = Cr^{\lambda} + Dr^{-\lambda}$, де C і D – довільні сталі.

Оскільки $\lambda = n$, то для кожного n ми знайшли розв'язки другого рівняння (2.104):

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}. \qquad (2.107)$$

Тоді, підставляючи вирази (2.105) і (2.107) в (2.102), отримаємо

$$u_n(r,\varphi) = (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\cdot\left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right). \qquad (2.108)$$

У випадку, коли $\lambda = 0$, система (2.104) прийме вигляд

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) = 0, \\ r^2 R''(r) + rR'(r) = 0. \end{cases}$$

а) $\Phi'(\varphi) = B_0 = const \;\Rightarrow\; \Phi(\varphi) = B_0\varphi + A_0$. Оскільки функція $\Phi(\varphi)$ періодична, то $B_0 = 0$. Отже, $\Phi(\varphi) = A_0$;

б) $r\left(rR''(r) + R'(r)\right) = 0 \;\Rightarrow\; rR''(r) + R'(r) = 0$.

Нехай $R'(r) = p(r)$, то $R''(r) = p'(r) \;\Rightarrow\; r\cdot p'(r) + p(r) = 0$;

$$p'(r) = -\frac{p(r)}{r};$$

$$\ln|p| = -\ln|r| + \ln D_0;$$

$$p = \frac{D_0}{r} \;\Rightarrow\; R'(r) = \frac{D_0}{r};$$

$$R(r) = D_0 \ln r + C_0 \;\; (r > 0).$$

Отже, $u_0 = A_0\left(D_0 \ln r + C_0\right)$.

Оскільки ми шукаємо скінченний розв'язок в крузі, то в центрі круга (при $r = 0$) розв'язки повинні бути скінченними, тому повинно бути, що і $D_0 = 0$ і $B_0 = 0$ (бо $\ln r \to \infty$).

Отже, $u_0 = C_0 \cdot A_0$, позначимо його через $\frac{a_0}{2}$, тобто $u_0 = \frac{a_0}{2}$,

$$u_n = \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) \cdot C_n r^n = \left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right) r^n .$$

Оскільки рівняння Лапласа є однорідним, то розв'язком його буде функція

$$u\left(r,\varphi\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right) r^n , \tag{2.109}$$

де a_0, a_n, b_n – довільні сталі.

Підберемо тепер довільні сталі a_0, a_n, b_n – так, щоб виконувалась крайова умова, а саме $u\left(a,\varphi\right) = f\left(\varphi\right)$. З рівності (2.109) при $r = a$ матимемо:

$$f\left(\varphi\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right) a^n . \tag{2.110}$$

А це означає, що функція $f\left(\varphi\right)$ розкладена в ряд Фур'є в інтервалі $\left(-\pi,\pi\right)$, бо період її повинен дорівнювати 2π. Оскільки розкладання f(x) в ряд Фур'є на $\left[-\pi,\pi\right]$ має вигляд

$$f\left(x\right) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx\right),$$

де $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)dx$; $\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\cos nx dx$; $\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin nx dx$.

Тоді коефіцієнтами ряду Фур'є будуть числа $a_n \cdot a^n$ і $b_n \cdot a^n$, тобто

$$a_n \cdot a^n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\cos nx dx,\ b_n \cdot a^n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin nx dx,$$

звідки

$$a_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\cos nx dx,\ b_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin nx dx.$$

Тоді, об'єднавши у формулі (2.109) множники $\frac{1}{a^n}$ з r^n, матимемо

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right),$$

де

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi;\ A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi;\ B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Висновок

Розв'язком внутрішньої задачі Діріхле для круга буде така функція

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cdot\left(A_n\cdot\cos n\varphi+B_n\cdot\sin n\varphi\right),$$

де

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi,\ A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,\ B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Приклад. *Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа* $\Delta u=0$ *в крузі* $r<1$, *якщо* $u(1,\varphi)=\varphi^2+\varphi$.

Розв'язання

За умовою задачі $a=1$ *і* $f(\varphi)=\varphi^2+\varphi$. *Знайдемо коефіцієнти ряду*

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi^2+\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\varphi^3}{3}+\frac{\varphi^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{2\cdot\pi^3}{3}\right)=\frac{2\cdot\pi^2}{3};$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi^2+\varphi)\cos n\varphi d\varphi=\begin{vmatrix}u=\varphi^2+\varphi & du=(2\varphi+1)d\varphi\\ dv=\cos n\varphi d\varphi & v=\dfrac{1}{n}\sin n\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\varphi^2+\varphi}{n}\sin n\varphi\bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(2\varphi+1)\sin n\varphi d\varphi\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}u=2\varphi+1 & du=2d\varphi\\ dv=\sin n\varphi d\varphi & v=-\dfrac{1}{n}\cos n\varphi\end{vmatrix}=\frac{1}{\pi n}\left(\frac{2\varphi+1}{n}\cos n\varphi\bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\varphi d\varphi\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\left((2\pi+1)\cos\pi n-(1-2\pi)\cos\pi n\right)=\frac{(-1)^n4}{n^2};$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi^2+\varphi)\sin n\varphi d\varphi=\frac{-2\pi n^2\cos(\pi n)}{\pi n^3}=\frac{-2\cdot(-1)^n}{n}.$$

Тоді

$$u(r,\varphi)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cdot\left(\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}\cdot\cos n\varphi-\frac{2\cdot\left(-1\right)^n}{n}\cdot\sin n\varphi\right).$$

Запитання для самоперевірки

1. Які диференціальні рівняння із частинними похідними відносять до основних рівнянь математичної фізики?

2. Які основні етапи побудови математичної моделі фізичного процесу?

3. Які додаткові умови називаються початковими, а які крайовими?

4. Які теоретичні передумови побудови рівняння теплопровідності?

5. Сформулюйте початкові та крайові умови для математичної моделі поширення тепла у стержні.

6. Складіть математичну модель процесу поширення тепла у стержні із нульовими крайовими умовами.

7. В чому полягає метод Фур'є розв'язання диференціального рівняння із частинними похідними?

8. Яка величина характеризує процес коливання струни?

9. Опираючись на які фізичні закони будується одновимірне рівняння коливання струни?

10. Наведіть приклади процесів які описує рівняння $u''_{tt}=a^2u''_{xx}+f\left(x,t\right)$.

11. Яким рівнянням описуються малі коливання мембрани?

12. Які додаткові умови ставляться до хвильового рівняння?

13. Які особливості застосування методу Фур'є для знаходження розв'язку одновимірного рівняння вільних коливань при нульових крайових умовах?

14. Суть методу характеристик?

15. Як визначаються характеристики одновимірного рівняння коливання струни?

16. Який канонічний вигляд одновимірного рівняння коливання струни?

17. Які диференціальні рівняння описують нестаціонарні теплові поля і як з них отримати рівняння, що описують стаціонарні теплові поля?

18. Яка основна властивість оператора Лапласа (лапласіана)?

3 ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

3.1 Скінченнорізницеві наближення

Запишемо ряд Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^3 + \ldots$$

або, якщо ввести позначення $x - x_0 = h$ ($x = x_0 + h$), дістанемо іншу форму запису ряду Тейлора

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot h^2 + \frac{f'''(x_0)}{2!}\cdot h^3 + \ldots$$

Для довільного x ряд Тейлора матиме вигляд

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2!}\cdot h^2 + \frac{f'''(x)}{2!}\cdot h^3 + \ldots$$

Якщо це розкладання обірвати на другому члені, то отримаємо

$$f(x + h) \approx f(x) + f'(x)\cdot h, \tag{3.1}$$

звідки матимемо

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Вираз, що стоїть в правій частині, називається правою різницевою похідною *(right difference derivation)*, яка наближає першу похідну функції.

Якщо в ряді Тейлора h замінити на $-h$, то одержимо

$$f(x - h) = f(x) - f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2!}\cdot h^2 - \frac{f'''(x)}{2!}\cdot h^3 + \ldots$$

Обмежившись тільки двома першими членами, одержимо

$$f(x - h) \approx f(x) - f'(x)\cdot h, \tag{3.2}$$

звідки

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - h)}{h}.$$

Це наближення є лівою різницевою похідною *(left difference derivation)*.

Якщо відняти від рівності (3.1) рівність (3.2), то отримаємо

$$f(x + h) - f(x - h) \approx 2f'(x)\cdot h,$$

звідки

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 \cdot h}.$$

Вираз, що стоїть в правій частині, називається центральною різницевою похідною *(central difference derivation)*, що наближає першу похідну $f'(x)$.

Якщо в рядах Тейлора залишити на один член більше, то отримаємо наближені рівності

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f''(x)}{2!} \cdot h^2;$$

$$f(x-h) \approx f(x) - f'(x) \cdot h + \frac{f''(x)}{2!} \cdot h^2.$$

Додаючи почленно ці дві наближені рівності, отримаємо

$$f(x+h) + f(x-h) \approx 2f(x) + f''(x) \cdot h^2,$$

звідки матимемо

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Ми отримали центральну різницеву похідну 2-го порядку для наближення другої похідної $f''(x)$.

Розповсюдимо тепер поняття різницевих похідних для наближення частинних похідних функції двох змінних $u(x,y)$. Запишемо ряд Тейлора для функції $u(x,y)$ за змінною x

$$u(x+h,y) = u(x,y) + u'_x(x,y) \cdot h + \frac{u''_{xx}(x,y)}{2!} \cdot h^2 + \ldots;$$

$$u(x-h,y) = u(x,y) - u'_x(x,y) \cdot h + \frac{u''_{xx}(x,y)}{2!} \cdot h^2 - \ldots$$

Тоді матимемо:

$$u'_x(x,y) \approx \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h};$$

$$u'_x(x,y) \approx \frac{u(x,y) - u(x-h,y)}{h};$$

$$u'_x(x,y) \approx \frac{u(x+h,y) - u(x-h,y)}{2 \cdot h};$$

$$u''_{xx}(x,y) \approx \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2}.$$

Праві частини цих рівностей, називаються відповідно правою та лівою різницевою похідною за x, центральною різницевою частинними похідними за х 1-го та 2-го порядків. Аналогічно

$$u'_y(x,y) \approx \frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k};$$

$$u'_y(x,y) \approx \frac{u(x,y)-u(x,y-k)}{k};$$

$$u'_y(x,y) \approx \frac{u(x,y+k)-u(x,y-k)}{2\cdot k};$$

$$u''_{yy}(x,y) \approx \frac{u(x,y+k)-2u(x,y)+u(x,y-k)}{k^2}.$$

В правих частинах цих наближень записані відповідно права різницева, ліва різницева, центральна різницева похідні за змінною y.

3.2. Метод сіток для розв'язання задач математичної фізики

Ідея методу сіток або методу скінченних різниць для наближеного розв'язання задач для двовимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. В плоскій області G, в якій шукається розв'язок, будується сіткова область G_h, що складається з однакових комірок. Вибір сіткової області G_h здійснюється в залежності від конкретної задачі, але в усіх випадках контур Γ_h сіткової області G_h треба вибирати так, щоб він якомога краще наближав контур Γ_h заданої області G. Сіткова область може складатися із квадратних, прямокутних, трикутних і інших комірок. Вибір основного розміру комірки h (кроку побудови сітки) визначає величину похибки заміні диференціального рівняння з частинними похідними різницевим рівнянням.

Точки перетину ліній, що утворюють сіткову область називаються вузлами сітки *(mesh node)*. Вузли сітки S_h, називаються сусідніми *(neighboring node)*, якщо вони віддалені один від одного в напрямі осі Ox або осі Oy на відстань, що дорівнює кроку сітки h.

Вузол A_h сітки S_h називається внутрішнім *(internal node)*, якщо він належить області G, а всі чотири сусідні з ним вузли належать сітці S_h; в протилежному випадку вузол називається межовим *(boundary* *node)*. Внутрішні вузли будемо зарисовувати, а межові вузли будемо позначати зірочками. Межові вузли можуть належати області G, а можуть і не належати їй.

Межові вузли розрізняють двох типів: межовий вузол сітки S_h називається вузлом першого роду *(node of the first sort)*, якщо він має сусідній внутрішній вузол сітки; в протилежному випадку межовий вузол називається вузлом другого роду *(node of the second sort)*. Так, вузол B_h є межовим вузлом першого роду, а вузол C_h є межовим вузлом другого роду (рис. 3.1).

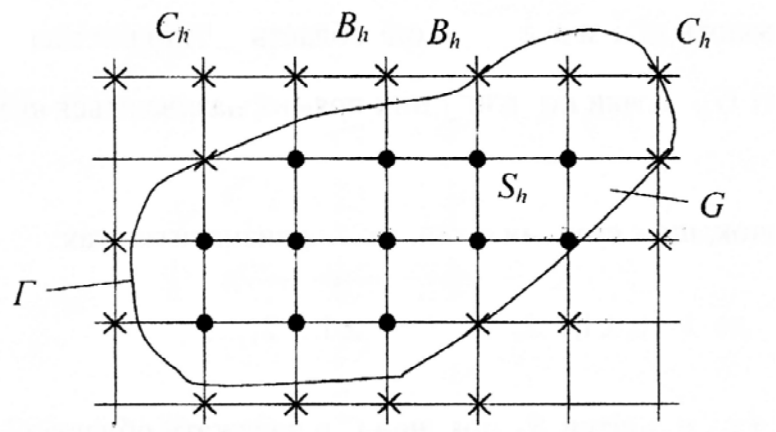


Рисунок 3.1 – Сіткова область

Внутрішні вузли і межові вузли першого роду називаються розрахунковими точками *(rated point)*. Межові вузли другого роду не входять в обчислення, тому вони можуть бути відкинуті.

2. На основі заданих крайових та початкових умов визначається значення шуканого розв'язку в межових вузлах першого роду області G_h.

3. Дане диференціальне рівняння з частинними похідними замінюється у вузлах побудованої сітки відповідним скінченнорізницевим рівняннями.

В результаті цих дій можемо дістати або сукупність співвідношень, які дозволяють обчислити значення шуканої функції у вузлових точках на основі вже відомих значень у сусідніх точках (явна схема *(explicit scheme)*, або систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язавши яку знаходимо числові значення шуканої функції (неявна схема *(implicit scheme)*.

При використанні скінченнорізницевої схеми важливим є питання стійкості *(stability)* такої схеми. Скінченнорізницева схема називається стійкою, якщо малі похибки, що допускаються в процесі розв'язання згасають або залишаються малими при необмеженому зростанні номера рядка. В протилежному випадку схема називається нестійкою. Зрозуміло, що нестійку схему застосовувати недоцільно, оскільки неминучі незначні похибки, наприклад, похибки округлення, будуть приводити до результатів, що сильно відрізняються від точного розв'язку.

Незважаючи на складність обчислення за неявними схемами (необхідно розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь), перевага цих схем перед явними полягає в тому, що в неявних схемах крок сітки можна вибирати достатньо великим, не побоюючись, що схема буде нестійкою.

3.3 Метод сіток для задачі Діріхле

3.3.1 Рівняння Лапласа при скінченнорізницевих наближеннях

Замінимо частинні похідні, що входять в рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (3.3)$$

відповідними центральними різницевими похідними другого порядку. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h^2}\big(u(x-h,y)-2u(x,y)+u(x+h,y)\big)+\\&+\frac{1}{k^2}\big(u(x,y-k)-2u(x,y)+u(x,y+k)\big)=0.\end{aligned} \qquad (3.4)$$

У випадку, коли $h=k$, тобто кроки вздовж осі Ox і Oy однакові, з рівняння (3.4) матимемо

$$u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)-4u(x,y)=0.$$

Розв'яжемо дане рівняння відносно $u(x,y)$. Тоді

$$u(x,y)=\frac{1}{4}\big(u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)\big). \qquad (3.5)$$

Це і є рівняння Лапласа на площині при скінченнорізницевих наближеннях. Формула (3.5) дає можливість наближено знайти значення функції $u(x,y)$ в точці $A(x,y)$ як середнє її значення в сусідніх чотирьох точках $B(x-h,y)$, $C(x+h,y)$, $D(x,y+h)$ і $E(x,y-h)$.

3.3.2 Розв'язання задачі Діріхле методом сіток

Покажемо застосування методу сіток для побудови наближених розв'язків внутрішньої задачі Діріхле, а саме: знайти функцію $u(x,y)$, що задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.6}$$

при (x,y) є G і крайову умову

$$u\big|_{\Gamma} = f\ . \tag{3.7}$$

Вибравши крок h квадратної клітинки, в області G побудуємо дві сім'ї прямих

$$x = ih \text{ та } y = jh, \tag{3.8}$$

де i та j приймають цілі значення. Координати точок, що є вузлами сітки, можна визначити так:

$$\left[\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih, \\ y_j &= y_0 + jh, \end{aligned}\right. \tag{3.9}$$

де $i = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, причому вузол (x_i, y_j) сітки S_h повинен або належати області G, або бути віддаленим від її межі Γ на відстань меншу, ніж h, де відстань вимірюється або по горизонталі, або по вертикалі.

Тоді для кожної внутрішньої точки (x_i, y_j) сітки S_h скінченнорізницеве наближення (3.5) рівняння Лапласа запишеться так:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right). \tag{3.10}$$

Схема обчислення за формулою (3.10) показана на рис. 3.2.

В межових вузлах першого роду B_h сітки S_h будемо мати, що

$$u(B_h) = u(B) = f(B), \tag{3.11}$$

де B – найближча до B_h точка межі Γ.

Отже, розв'язки u_{ij} наближаються середнім значенням розв'язку за чотирма сусідніми точками. Ми одержали систему лінійних алгебраїчних рівнянь (3.10). Ця система є неоднорідною, при цьому число невідомих, тобто число внутрішніх вузлів сітки, збігається з числом рівнянь. Отримана система завжди сумісна і має єдиний розв'язок. Розв'язавши систему, одержимо наближені значення функції u_{ij} у вузлах сіткової області G_h.

Тим самим буде знайдено наближений чисельний розв'язок задачі Діріхле для області G_h.

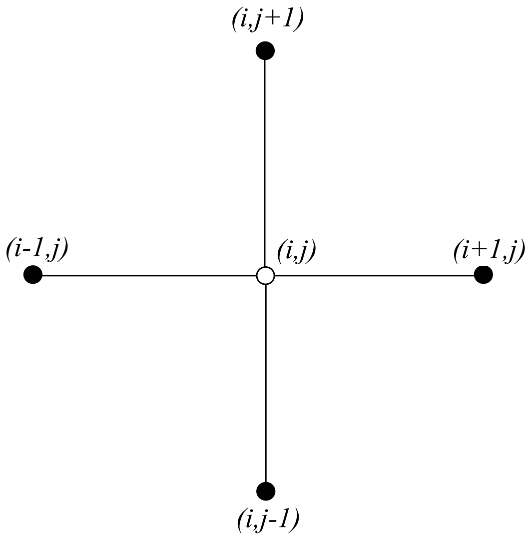


Рисунок 3.2 – Схема обчислення за формулою (3.10)

3.4 Метод сіток для математичної моделі поширення тепла у стержні

Розглянемо математичну модель поширення тепла в однорідному теплоізольованому стержні довжиною l, а саме: знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \left(0 < x < l, t > 0\right),$$

якщо $u\left(0,t\right) = g_1\left(t\right)$, $u\left(l,t\right) = g_2\left(t\right)$ при $t > 0$, $u\left(x,0\right) = f\left(x\right)$ при $0 \le x \le l$.

Для простоти викладок і запису формул будемо вважати, що $a = 1$, тобто розглянемо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.12}$$

До такого вигляду завжди можна прийти, якщо ввести часову змінну за формулою $\tau = a^2 t$.

Будемо розв'язувати цю задачу методом сіток. В півсмузі $t > 0$ і $0 \le x \le l$ побудуємо прямокутну сітку:

$$\begin{cases} x = ih, \left(i = 0,1,2,3,...,n\right); \\ y = ik, \left(j = 0,1,2,3,...\right), \end{cases}$$

де $h = \dfrac{1}{n}$ (n ціле) – крок вздовж осі Ox і k – крок вздовж осі Oy.

3.4.1. Явна різницева схема

Введемо позначення $x_i = ih$, $t_j = jk$, $u_{ij} = u\left(x_i, y_j\right)$. Замінимо в (3.12) похідні на скінченнорізницеві похідні

$\dfrac{\partial u}{\partial t} \approx \dfrac{u\left(x, t+k\right) - u\left(x,t\right)}{k}$ – права скінченнорізницева похідна за t;

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \dfrac{u\left(x+h,t\right) - 2u\left(x,t\right) + u\left(x-h,t\right)}{h^2}$ – це є центральна скінченнорізницева похідна за x 2-го порядку.

Тоді рівняння теплопровідності (3.12) в скінченних різницях прийме вигляд

$$\frac{u\left(x,t+k\right) - u\left(x,t\right)}{k} \approx \frac{u\left(x+h,t\right) - 2u\left(x,t\right) + u\left(x-h,t\right)}{h^2}. \qquad (3.13)$$

Для внутрішнього вузла сітки $\left(x_i, y_j\right)$ це рівняння запишеться так

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2},$$

звідки маємо, що

$$u_{i,j+1} = u_{ij} + \frac{k}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}\right). \qquad (3.14)$$

Якщо ввести позначення

$$\frac{k}{h^2} = \sigma, \qquad (3.15)$$

то це рівняння запишеться так

$$u_{i,j+1} = \sigma u_{i+1,j} + \left(1 - 2\sigma\right)u_{ij} + \sigma u_{i-1,j}. \qquad (3.16)$$

З цієї формули видно, що, знаючи значення функції $u\left(x,t\right)$ в вузлах j-го рядка $t = jk$, можна обчислити значення функції $u\left(x,t\right)$ в точках наступного $\left(j+1\right)$-го рядка за схемою, яка показана на рис. 3.3.

Отже, обчислення ведуться із використанням чотирьох сусідніх вузлів, причому $u_{i,j+1}$ одержуємо через значення функції (відомі) в трьох вузлах попереднього j-го рядка, тобто отримали явну схему обчислення.

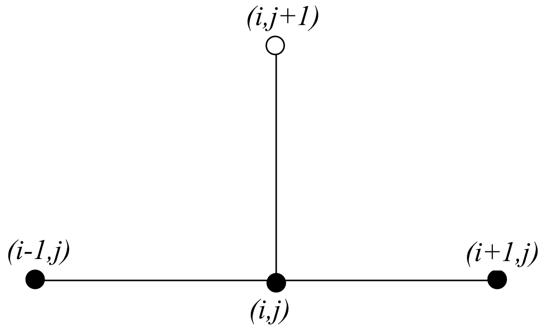


Рисунок 3.3 – Схема обчислення за формулою (3.16)

Значення $u_{ij} = \left(x_i, t_j\right)$ обчислюють так. Спочатку обчислюють значення функції $u\left(x,t\right)$ у вузлах початкового рядка $t = 0$, користуючись початковою умовою $u\left(x,0\right) = f\left(x\right)$; при $i = 0,1,2,...,n$ будемо мати $u_{i0} = u\left(x_i, 0\right) = f\left(x_i\right)$. Користуючись крайовими умовами $u\left(0,t\right) = g_1\left(t\right)$ і $u\left(l,t\right) = g_2\left(t\right)$ для $j = 0,1,2,...$ будемо мати $u_{0j} = g_1\left(t_j\right)$, $u_{nj} = g_2\left(t_j\right)$.

А далі за формулою (3.16) послідовно обчислюємо значення функції $u\left(x,t\right)$ в усіх вузлах відповідно 1-го, 2-го, 3-го і т.д. рядків, таким чином, знаходимо значення функції $u\left(x,t\right)$ в усіх вузлах вказаної півсмуги.

Явна схема (3.16) є стійкою, якщо $0 < \sigma \le \frac{1}{2}$. При цьому найменша похибка схеми буде при $\sigma = \frac{1}{6}$. Якщо $\sigma = \frac{1}{6}$, то формула (3.16) прийме вигляд

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}\left(u_{i+1,j} + 4u_{ij} + u_{i-1,j}\right). \qquad (3.17)$$

3.4.2 Неявна різницева схема

В рівнянні теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial t}$ – замінимо лівою різницевою похідною за t, а саме: $\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u\left(x,t\right) - u\left(x,t-k\right)}{k}$.

Тоді рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ заміниться таким наближенням в скінченних різницях

$$\frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k}=\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2},$$

яке в вузлах запишеться так:

$$\frac{u_{ij}-u_{i,j-1}}{k}=\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Звідси маємо, що

$$u_{ij}-u_{i,j-1}=\frac{k}{h^2}\left(u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}\right),$$

вводячи позначення $\frac{k}{h^2}=\sigma$, матимемо

$$u_{i,j-1}=-\sigma u_{i+1,j}+(1+2\sigma)u_{ij}-\sigma u_{i-1,j}. \qquad (3.18)$$

За цією формулою ми виразили значення функції $u(x,t)$ у вузлах $(j-1)$-го рядка сітки через значення цієї функції у вузлах наступного j-го рядка в трьох вузлах (x_{i+1},t_j), (x_i,t_j) і (x_{i-1},t_j) за схемою, що зображена на рис. 3.4.

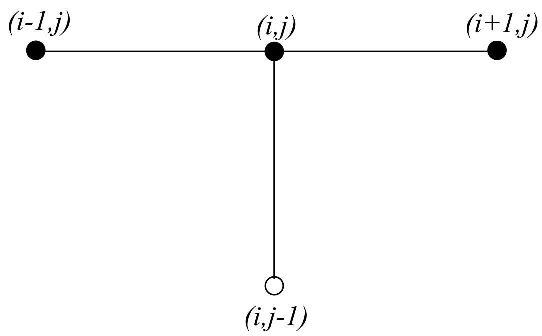


Рисунок 3.4 – Схема обчислення за формулою (3.18)

Визначивши за початковими умовами $u(x,0)=f(x)$ значення функції $u(x,t)$ у вузлах нульового рядка ($t=0$), тобто числа $u_{i0}=f(x_i)$ для $i=1,2,...,n$, а за (КУ) $u_{0j}=g_1(t_j)$, $u_{nj}=g_2(t_j)$ для $j=0,1,2,...$ складемо систему рівнянь (3.18) для $j=1$ при $i=1,2,...,n-1$. Розв'язавши цю систему $(n-1)$ рівнянь, визначивши цим самим значення функції $u(x,t)$ у $(n-1)$ вузлах 1-го ряду, перейдемо до складання системи рівнянь для 2-го ряду і т.д. В результаті послідовного складання і розв’язання систем рівнянь, ми визначимо значення функції в усіх внутрішніх вузлах сітки.

3.5 Метод сіток для математичної моделі вільних коливань струни

3.5.1 Рівняння вільних коливань струни при скінченнорізницевих наближеннях

Розглянемо рівняння вільних коливань однорідної струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ при } 0 < x < l \text{ і } t \geq 0. \tag{3.19}$$

Будемо шукати його розв'язок при заданих крайових і початкових умовах, а саме:

$$\begin{cases} u(0,t) = g_1(t); \\ u(l,t) = g_2(t), \end{cases} \text{ï ðè } t \geq 0. \tag{3.20}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x); \\ u'_t(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{3.21}$$

де $f(x)$ і $\varphi(x)$ – задані функції при $0 \leq x \leq l$.

Для простоти викладок припустимо, що $a = 1$, тоді рівняння (3.19) запишеться так

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ при } 0 < x < l \text{ і } t \geq 0 \tag{3.22}$$

(цього легко можна досягти заміною $\tau = at$).

Розв'яжемо цю крайову задачу методом сіток. Як і у випадку рівнянь параболічного типу, побудуємо в півсмузі $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq \infty$ прямокутну сітку

$$\begin{cases} x = ih, \ (i = 0,1,2,3,...,n); \\ y = ik, \ (j = 0,1,2,3,...), \end{cases}$$

вибравши $h = \frac{1}{n}$, де n – ціле число. Замінивши у вузлах сітки частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, що входять в рівняння (3.22), центральними різницевими похідними 2-го порядку за t і за x, дістанемо таке різницеве рівняння

$$\frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}. \tag{3.23}$$

3.5.2 Явна різницева схема

У вузлах сітки рівняння (3.23) запишеться так

$$\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2}=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}. \qquad (3.24)$$

Введемо позначення

$$\lambda=\frac{k}{h}, \qquad (3.25)$$

тоді з рівняння (3.24) матимемо

$$u_{i,j+1}=2\left(1-\lambda^2\right)+\lambda^2\left(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}\right)-u_{i,j-1}. \qquad (3.26)$$

Отже, значення функції $u(x,t)$ у вузлі $(i,j+1)$ обчислюється як середнє значення функції у вузлах двох попередніх рядків, тобто при обчисленні використовується схема, що показана на рис. 3.5.

Для початку обчислень за формулою (3.26) необхідно знати значення функції $u(x,t)$ у вузлах двох попередніх рядків, в той час як початкові умови (3.21) задають значення функції $u(x,t)$ лише на нульовому рядку $u_{i0}=f(x_i)$ для $i=1,2,...,n-1$ (для $i=0$ та $i=n$ використовуються крайові умови (3.20). Звідки взяти значення функції $u(x,t)$ ще на одному рядку? Якщо використати другу з початкових умов $u'_t(x,0)=\varphi(x)$, то значення функції $u(x,t)$ можна визначити на фіктивному рядку з номером $j=-1$. Для цього замінимо частинну похідну $u'_t(x,t)$ лівою різницевою похідною за t за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{u(x,t)-u(x,t-k)}{k}.$$

Тоді, враховуючи те, що $u'_t(x,0)=\varphi(x)$, при $j=0$ будемо мати

$$u_{i,-1}=u_{i,0}-k\varphi(x_i),$$

де $i=1,2,...,n$.

Крайові умови (3.20) використовуються для знаходження значень u_{oj} і u_{nj} для $j=1,2,...$.

Знаючи значення функції $u(x,t)$ у вузлах рядків з номерами $j=0$ та $j=-1$, можна знайти значення функції у вузлах 1-го рядка $(j=1)$, користуючись формулами (3.26). Продовжуючи цей процес далі при $j=2$; $j=3$ і т.д., знаходять значення функції $u\left(x,t\right)$ в усіх вузлах сітки.

Зауваження. При $\lambda \le 1$ ця явна схема стійка, процес є збіжним, а крок по осі Ot вибирають з умови, що $k \le h$. При $\lambda > 1$ схема нестійка.

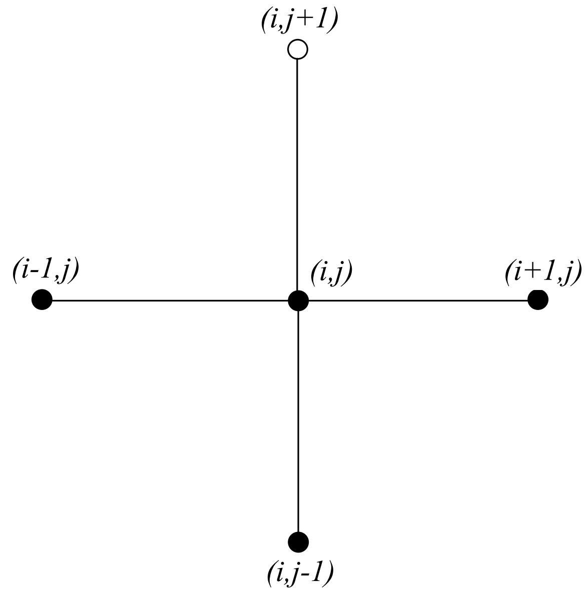


Рисунок 3.5 – Схема обчислення за формулою (3.26)

Запитання для самоперевірки

1. Запишіть скінченнорізницеві похідні першого і другого порядку.

2. Як записується рівняння Лапласа в скінченнорізницевих наближеннях?

3. Які основні ідеї розв’язання ДРЧП методом сіток?

4. Що називається вузлами сітки? Які вузли називаються сусідніми? Які вузли називаються внутрішніми?

5. Які межові вузли називаються межовими вузлами першого роду, а які – другого?

6. Які вузли є розрахунковими точками?

7. Який алгоритм розв'язання задачі Діріхле методом сіток?

8. Чим відрізняється явна схема методу сіток від неявної?

9. Як записати одновимірне рівняння теплопровідності в скінченнорізницевих наближеннях?

10. Яка основна формула використовується у явній схемі методу сіток при розв'язанні одновимірного рівняння теплопровідності? Яка формула використовується при неявній схемі?

4 ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

4.1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

Загальний вигляд лінійних однорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x} + X_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{4.1}$$

де $u(x, y)$ – шукана функція; X_1, X_2 – відомі функції незалежних змінних x і y.

Алгоритм знаходження розв'язку диференціального рівняння (4.1)

1. Записуємо рівняння у вигляді (4.1): переносимо все у ліву частину (права частина має дорівнювати нулю) і визначаємо X_1 і X_2: X_1 – коефіцієнт біля $\frac{\partial u}{\partial x}$; X_2 – коефіцієнт біля $\frac{\partial u}{\partial y}$.

2. Складаємо звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dx}{X_1} = \frac{dy}{X_2}. \tag{4.2}$$

3. Знаходимо загальний розв'язок диференціального рівняння у вигляді

$$\varphi(x, y) = C. \tag{4.3}$$

4. Тоді частинний розв'язок диференціального рівняння (4.1) має вигляд

$$u = \varphi(x, y), \tag{4.4}$$

а його загальний розв'язок

$$u = F\left(\varphi(x, y)\right), \tag{4.5}$$

де F – довільна функція.

Додаткові теоретичні відомості

Алгоритм розв'язання диференціальних рівнянь (4.1) приводить до того, що необхідно розв'язувати звичайні диференціальні рівняння першого порядку (4.2), які в свою чергу зводяться до знаходження інтегралів.

Основні типи диференціальних рівнянь першого порядку та методи їх розв'язання

I. Диференціальні рівняння із відокремленими змінними:

а) форма запису із похідною

$$y' = f(x). \tag{4.6}$$

Алгоритм знаходження розв'язку:

1) проінтегруємо

$$y = \int f(x)dx + C;$$

б) диференціальна форма запису

$$f_1(y)dy = f_2(x)dx. \tag{4.7}$$

Алгоритм знаходження розв'язку:

1) проінтегруємо

$$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx + C.$$

II. Диференціальні рівняння із змінними, що відокремлюються

а) форма запису із похідною

$$y' = f_1(y) f_2(x). \tag{4.8}$$

Алгоритм знаходження розв'язку:

1) запишемо похідну у вигляді частки диференціалів

$$\frac{dy}{dx} = f_1(y) f_2(x);$$

2) рознесемо диференціали

$$dy = f_1(y) f_2(x)dx;$$

3) відокремлюємо змінні (біля диференціала dx має бути функція, що залежить лише від x, а біля диференціала dy – функція, що залежить лише від y), тобто поділимо і праву і ліву частину рівняння на $f_1(y)$

$$\frac{dy}{f_1(y)} = f_2(x)dx;$$

4) отримали диференціальне рівняння із відокремленими змінними (4.7). Розв'язуємо його

$$\int \frac{dy}{f_1(y)} = \int f_2(x)dx + C;$$

б) диференціальна форма запису

$$M_1(x)N_1(y)dy = M_2(x)N_2(y)dx. \qquad (4.9)$$

Алгоритм знаходження розв'язку:

1) відокремлюємо змінні, тобто поділимо і праву і ліву частину рівняння на $M_1(x)N_2(y)$

$$\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = \frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx;$$

2) отримали диференціальне рівняння із відокремленими змінними (4.7). Розв'язуємо його

$$\int \frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = \int \frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx + C.$$

III. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y), \qquad (4.10)$$

де $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Алгоритм знаходження розв'язку:

1) робимо заміну $y = ux$, де $u = u(x) \Rightarrow y' = u'x + u$. Тоді

$$u'x + u = \varphi(u);$$

2) отримали диференціальне рівняння із змінними, що відокремлюються (4.8). Розв'язуємо його

$$\frac{du}{dx}x = \varphi(u) - u;$$

$$x\,du = (\varphi(u) - u)dx;$$

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C;$$

3) в отриманий розв'язок замість u підставляємо $\frac{y}{x}$.

IV. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{4.11}$$

Алгоритм знаходження розв'язку:

1) робимо заміну

$$y = uv, \tag{4.12}$$

де $u = u(x)$, $v = v(x) \Rightarrow y' = u'v + v'u$. Тоді

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x);$$

2) групуємо другий і третій доданки і спільний множник u виносимо за дужки

$$u'v + u\left(v' + P(x)v\right) = Q(x); \tag{4.13}$$

3) накладаємо на функцію v обмеження, щоб вираз у дужках дорівнював нулю

$$v' + P(x)v = 0;$$

4) отримали диференціальне рівняння із змінними, що відокремлюються (4.8). Розв'язуємо його

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v;$$

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|v| = -\int P(x)dx,$$

без константи C, тому що нам потрібний лише один частинний розв'язок;

$$v = e^{-\int P(x)dx};$$

5) підставляємо v у диференціальне рівняння (4.13)

$$u' = Q(x)e^{\int P(x)dx};$$

6) отримали диференціальне рівняння із відокремленими змінними (4.6). Розв'язуємо його

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C;$$

7) знаходимо функцію y

$$y = uv = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

V. Диференціальні рівняння Бернуллі

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}. \tag{4.14}$$

Алгоритм знаходження розв'язку:

1) робимо заміну

$$y = uv, \tag{4.15}$$

де $u = u(x)$, $v = v(x) \Rightarrow y' = u'v + v'u$. Тоді

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x)u^{\alpha}v^{\alpha};$$

2) групуємо другий і третій доданки і спільний множник u виносимо за дужки

$$u'v + u\left(v' + P(x)v\right) = Q(x)u^{\alpha}v^{\alpha}; \tag{4.16}$$

3) накладаємо на функцію v обмеження, щоб вираз у дужках дорівнював нулю

$$v' + P(x)v = 0;$$

4) отримали диференціальне рівняння із змінними, що відокремлюються (4.8). Розв'язуємо його

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v;$$

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|v| = -\int P(x)dx,$$

без константи C, тому що нам потрібний лише один частинний розв'язок;

$$v = e^{-\int P(x)dx};$$

5) підставляємо v у диференціальне рівняння (4.13):

$$u' = Q(x)u^{\alpha}e^{(1-\alpha)\int P(x)dx};$$

6) отримали диференціальне рівняння із змінними, що відокремлюються (4.8). Розв'язуємо його

$$\frac{du}{dx} = Q(x)u^{\alpha}e^{(1-\alpha)\int P(x)dx};$$

$$\frac{du}{u^{\alpha}} = Q(x)e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}dx;$$

$$\int u^{-\alpha}du=\int Q(x)e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}dx+C;$$

$$\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\int Q(x)e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}dx+C;$$

7) розв'язуємо отримане рівняння відносно u

$$u=\begin{cases}\sqrt[\alpha-1]{\dfrac{1}{(1-\alpha)\int Q(x)e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}dx+C}}, \text{ ÿêù î } \alpha-\text{ ï àðí å;}\\ \pm\sqrt[\alpha-1]{\dfrac{1}{(1-\alpha)\int Q(x)e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}dx+C}}, \text{ ÿêù î } \alpha-\text{ í åï àðí å;}\end{cases}$$

8) знаходимо функцію y

$$y=uv.$$

Таблиця невизначених інтегралів

1) $\int u^{\alpha}du=\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq-1);$

2) $\int\dfrac{du}{u}=\ln|u|+C;$

3) $\int a^{u}du=\dfrac{a^{u}}{\ln a}+C;$

4) $\int e^{u}du=e^{u}+C;$

5) $\int\sin u\,du=-\cos u+C;$

6) $\int\cos u\,du=\sin u+C;$

7) $\int\dfrac{du}{a^2+u^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a}+C=-\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{u}{a}+C,\ (a\neq0);$

8) $\int\dfrac{du}{a^2-u^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right|+C=-\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right|+C;$

9) $\int\dfrac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+C,\ (a\neq0);$

10) $\int\dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\dfrac{u}{a}+C=-\arccos\dfrac{u}{a}+C,\ (a>0);$

11) $\int\dfrac{du}{\cos^2 u}=\operatorname{tg}u+C;$

12) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

13) $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\sin u} - \operatorname{ctg} u\right| + C;$

14) $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos u} - \operatorname{tg} u\right| + C;$

15) $\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C;$

16) $\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C;$

17) $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C;$

18) $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

Таблиця 4.1. – Огляд методів інтегрування

Структура інтеграла		*Метод інтегрування*
1		2
1	$\int F(f(x)) f'(x) dx$	Підстановка $f(x) = t$ або введення під знак диференціала $f(x)$
2	$\int P_n(x) e^{ax+b} dx$ $\int P_n(x) \cos(ax+b) dx$ $\int P_n(x) \sin(ax+b) dx$ $\int P_n(x) \operatorname{sh}(ax+b) dx$ $\int P_n(x) \operatorname{ch}(ax+b) dx$	Інтегрування за частинами за формулою $\int u dv = uv - \int v du$. Тоді $u = P_n(x)$, dv – все те, що залишається
3	$\int P_n(x) \ln(ax+b) dx$ $\int P_n(x) \operatorname{arctg}(ax+b) dx$ $\int P_n(x) \operatorname{arcctg}(ax+b) dx$ $\int P_n(x) \arcsin(ax+b) dx$ $\int P_n(x) \arccos(ax+b) dx$	Інтегрування за частинами за формулою $\int u dv = uv - \int v du$. Тоді $dv = P_n(x) dx$, u – все те, що залишається

Продовження таблиці 4.1

1		2
4	$\int e^{ax+b}\cos(cx+d)\,dx$ $\int e^{ax+b}\sin(cx+d)\,dx$ $\int e^{ax+b}\mathrm{sh}(cx+d)\,dx$ $\int e^{ax+b}\mathrm{ch}(cx+d)\,dx$	Двічі проінтегрувати за частинами за формулою $\int u dv = uv - \int v du$ ($u = e^{ax+b}$, dv – все те, що залишається) і розв'язати рівняння відносно $\int u dv$
5	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$	Виділення в чисельнику похідної знаменника. При цьому в загальному випадку утворюються два інтеграла виду $\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}$ і $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, перший з яких – табличний, а другий потребує виділення повного квадрата знаменника $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$
6	$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}$	Рекурентна формула $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} = \frac{u}{2a^2(k-1)(u^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{k-1}}$
7	$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^k}dx$	Те ж саме, що й інтеграл 5, після чого отримаємо інтеграл 6
8	$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$	Відокремити цілу частину, розкласти знаменник на множники типу $(x-a)^n$, $(x^2+px+q)^n$, потім розкласти інтегрований дріб на суму простіших дробів

Продовження таблиці 4.1

	1	2
9	$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$	1. Універсальна підстановка: $u = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, тоді $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin u = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $dx = \dfrac{2du}{1+u^2}$; 2. Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тоді підстановка $u = \operatorname{tg} x$ $\sin x = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, $dx = \dfrac{du}{1+u^2}$
10	$\int \sin(ax+b)\cos(cx+d)\,dx$ $\int \sin(ax+b)\sin(cx+d)\,dx$ $\int \cos(ax+b)\cos(cx+d)\,dx$	Застосувати формули: $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big)$, $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$, $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big)$
11	$\int \sin^m(ax+b)\cos^n(ax+b)\,dx$	1. Якщо m – непарне додатне, то підстановка $t = \cos x$; 2. Якщо n – непарне додатне, то підстановка $t = \sin x$; 3. Якщо m і n - парні додатні, то застосування формул $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$
12	$\int R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \ldots, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_v}{s_v}}\right)dx$	Підстановка $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n$, де n – найменше спільне кратне знаменників дробів $\dfrac{r_1}{s_1}, \ldots, \dfrac{r_v}{s_v}$, тобто $n =$ Í ÑÊ $\{s_1 \ldots s_v\}$

Продовження таблиці 4.1

1		2
13	$\int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, ..., x^{\frac{r_v}{s_v}}\right)dx$	Підстановка $x = t^n$, де n – найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{r_1}{s_1}, ..., \frac{r_v}{s_v}$, тобто $n = \text{Í ÑÊ}\{s_1...s_v\}$
14	$\int x^m\left(a + bx^n\right)^p dx$	1. Якщо p – ціле $\Rightarrow$ інтеграл 12; 2. Якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, то підстановка $a + bx^n = u^s$, де $p = \frac{r}{s}$, $s > 0$; 3. Якщо $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число, то підстановка $a + bx^n = u^s x^n$
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$	Виділення повного квадрата $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, потім підстановка $x + \frac{b}{2a} = t$
16	$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}$	Підстановка $x = 1/t$, яка приводить до інтеграла 15
17	$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$	Підстановка $x = a\sin t$ або $x = a\cos t$, яка приводить до інтеграла 9
18	$\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx$	Підстановка $x = a\,\text{tg}\,t$ або $x = a\,\text{ctg}\,t$, яка приводить до інтеграла 9
19	$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$	Підстановка $x = \frac{a}{\sin t}$ або $x = \frac{a}{\cos t}$, яка приводить до інтеграла 9
20	$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$	Виділення повного квадрата $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, потім підстановка $x + \frac{b}{2a} = t$, яка приводить до одного з інтегралів 17, 18, 19

Задача 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\text{ctg y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1-2x}\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (4.17)$$

Розв'язання

Записуємо задане рівняння у вигляді (4.1):

$$\frac{1}{1-2x}\frac{\partial u}{\partial x}-\text{ctg}\,y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Отже,

$$X_1=\frac{1}{1-2x},\ X_2=-ctg\,y.$$

Складаємо звичайне диференціальне рівняння (4.2)

$$(1-2x)dx=-\frac{dy}{ctg\,y}. \qquad (4.18)$$

Отримали диференціальне рівняння першого порядку із відокремленими змінними (4.7), розв'язуємо його

$$\int(1-2x)dx+C=-\int\frac{dy}{ctg\,y}.$$

Враховуючи, що

$$\int(1-2x)dx=x-x^2+C_1;$$

$$-\int\frac{dy}{ctg\,y}=\int\frac{-\sin y dy}{\cos y}=\int\frac{d\cos y}{\cos y}=\ln|\cos y|+C_2,$$

отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння (4.18)

$$x-x^2+C=\ln|\cos y|.$$

Запишемо його у вигляді (4.3)

$$\ln|\cos y|-x+x^2=C.$$

Тоді

$$\varphi(x,y)=\ln|\cos y|-x+x^2,$$

а загальний розв'язок диференціального рівняння (4.17)

$$u(x,y)=F\left(\ln|\cos y|-x+x^2\right),$$

де F – довільна функція.

Відповідь: $u(x,y)=F\left(\ln|\cos y|-x+x^2\right)$.

Задача 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(xy - x^3y^3\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.19}$$

Розв'язання

Записуємо задане рівняння у вигляді (4.1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(x^3y^3 - xy\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Отже,

$$X_1 = 1,\; X_2 = x^3y^3 - xy.$$

Складаємо звичайне диференціальне рівняння (4.2)

$$dx = \frac{dy}{x^3y^3 - xy}. \tag{4.20}$$

Визначимо тип отриманого диференціального рівняння. Запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = x^3y^3 - xy;$$

$$y' + xy = x^3y^3.$$

Отримали диференціальне рівняння Бернуллі (4.14), розв'язуємо його

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv';$$

$$u'v + uv' + xuv = x^3u^3v^3;$$

$$u'v + u\left(v' + xv\right) = x^3u^3v^3;$$

$$v' + xv = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = -xv;$$

$$\frac{dv}{v} = -xdx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int xdx;$$

$$\ln|v| = -\frac{x^2}{2};$$

$$v = e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$u'e^{-\frac{x^2}{2}} = x^3u^3e^{-3\frac{x^2}{2}};$$

$$\frac{du}{u^3} = x^3 e^{-x^2} dx;$$

$$\int u^{-3} du = \int x^3 e^{-x^2} dx + C.$$

Враховуючи, що

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int -2x \cdot \left(-x^2\right) e^{-x^2} dx = \begin{vmatrix} t = -x^2 \\ dt = -2xdx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int te^t dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(te^t - \int e^t dt\right) = \frac{e^t}{2}\left(t-1\right) + C_1 =$$

$$= -\frac{e^{-x^2}}{2}\left(x^2+1\right) + C_1,$$

отримаємо

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{e^{-x^2}}{2}\left(x^2+1\right) - \frac{C}{2};$$

$$\frac{1}{u^2} = e^{-x^2}\left(x^2+1\right) + C;$$

$$u = \pm\sqrt{\frac{1}{e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+C}}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (4.20)

$$y = \pm e^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{\frac{1}{e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+C}}.$$

Запишемо його у вигляді (4.3)

$$y^2 = \frac{e^{-x^2}}{e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+C};$$

$$y^2\left(e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+C\right) = e^{-x^2};$$

$$e^{-x^2}\left(x^2 - \frac{1}{y^2} + 1\right) = C.$$

Тоді

$$\varphi\left(x,y\right) = e^{-x^2}\left(x^2 - \frac{1}{y^2} + 1\right),$$

а загальний розв'язок диференціального рівняння (4.17)

$$u(x,y)=F\left(e^{-x^2}\left(x^2-\frac{1}{y^2}+1\right)\right),$$

де F – довільна функція.

Відповідь: $u(x,y)=F\left(e^{-x^2}\left(x^2-\frac{1}{y^2}+1\right)\right).$

Задача 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\sin x}{y}\frac{\partial u}{\partial x}+\ln y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Задача 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$e^{x+3y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Задача 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$2xy\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+(y^2-3x^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

Задача 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$e^x\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

4.2 Класифікація квазілінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку із двома незалежними змінними та зведення їх до канонічного вигляду

Загальний вигляд квазілінійного диференціального рівняння другого порядку із двома незалежними змінними

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad (4.21)$$

Алгоритм зведення диференціальних рівнянь (4.21) до канонічного вигляду

1. Визначаємо коефіцієнти A, B і C. Згідно з (4.21) A і C – коефіцієнти біля $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ відповідно, B – коефіцієнт біля $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ поділений на 2.

2. Визначаємо значення Δ за формулою

$\Delta = B^2 - AC$.

3. В залежності від знака Δ визначаємо тип диференціального рівняння:

а) якщо $\Delta > 0$ – диференціальне рівняння гіперболічного типу;

б) якщо $\Delta = 0$ – диференціальне рівняння параболічного типу;

с) якщо $\Delta < 0$ – диференціальне рівняння еліптичного типу.

4. Визначаємо характеристики ξ і η диференціального рівняння (4.21):

а) якщо диференціальне рівняння гіперболічного типу, то $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, де $\varphi(x,y) = C$, $\psi(x,y) = C$ – загальні розв'язки диференціальних рівнянь $\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{A}$ і $\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{A}$ відповідно;

б) якщо диференціальне рівняння параболічного типу, то $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, де $\varphi(x,y) = C$ – загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}$, $\psi(x,y)$ – довільна функція, лінійно незалежна з функцією $\varphi(x,y)$;

в) якщо диференціальне рівняння еліптичного типу, то $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, де $\varphi(x,y) \pm \psi(x,y)i = C$, – загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{A} i$.

5. Виражаємо частинні похідні, що входять до диференціального рівняння (4.21) через нові незалежні змінні ξ і η, використовуючи формули диференціювання складних функцій:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

6. Підставляємо знайдені частинні похідні у (4.21). В результаті, в залежності від типу (4.21), отримаємо одну із канонічних форм:

а) якщо рівняння гіперболічного типу, то його канонічна форма

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right);$$

б) якщо рівняння параболічного типу, то його канонічна форма

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right);$$

в) якщо рівняння еліптичного типу, то його канонічна форма

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Додаткові теоретичні відомості

При зведенні диференціальних рівнянь (4.21) до канонічного вигляду необхідно знаходити частинні похідні та розв'язувати диференціальні рівняння першого порядку. У найпростішому випадку, коли A, B, C є константами, знаходження характеристик приводить до необхідності розв'язання звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dx}=a \text{ та } \frac{dy}{dx}=a\pm bi, \text{ де } a,b=const.$$

Алгоритм розв'язання цих рівнянь такий:

$\frac{dy}{dx}=a$;

$\int dy=a\int dx+C$;

$y=ax+C$;

$C=y-ax$.

$\frac{dy}{dx}=a\pm bi$;

$\int dy=\left(a\pm bi\right)\int dx+C$;

$y=\left(a\pm bi\right)x+C$;

$C=y-ax\pm bxi$.

Таблиця похідних

1) $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u', \left(\alpha\in R\right);$

2) $\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a\cdot u';$

3) $\left(e^{u}\right)' = e^{u}\cdot u';$

4) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}\cdot u';$

5) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}\cdot u';$

6) $\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u';$

7) $\left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u';$

8) $\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u';$

9) $\left(\operatorname{ctg} u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u';$

10) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u';$

11) $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u';$

12) $\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u';$

13) $\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u';$

14) $\left(\operatorname{sh} u\right)' = \operatorname{ch} u\cdot u';$

15) $\left(\operatorname{ch} u\right)' = \operatorname{sh} u\cdot u';$

16) $\left(\operatorname{th} u\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\cdot u';$

17) $\left(\operatorname{cth} u\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u}\cdot u';$

Правила диференціювання $C = const, u = u\left(x\right), v = v\left(x\right)$

$C' = 0;$

$\left(Cu\right)' = Cu';$

$\left(u\pm v\right)' = u'\pm v';$

$\left(uv\right)' = u'v + uv';$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}.$

Задача 1. Визначити тип ДРЧП та звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (4.22)$$

Розв'язання

Визначимо тип ДРЧП

$$A = 1,\ B = 0,\ C = -1;$$

$\Delta = B^2 - AC = 1 > 0$ – рівняння гіперболічного типу.

Знайдемо характеристики ДРЧП:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B+\sqrt{\Delta}}{A};$$

$$\frac{dy}{dx}=1;$$

$$dy=dx;$$

$$y=x+C;$$

$$C=y-x.$$

Отже, $\xi=y-x$ – перша характеристика ДРЧП.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{\Delta}}{A};$$

$$\frac{dy}{dx}=-1;$$

$$dy=-dx;$$

$$y=-x+C;$$

$$C=y+x.$$

Отже, $\eta=y+x$ – друга характеристика ДРЧП.

Визначимо усі похідні, які входять в диференціальне рівняння (4.22). Враховуючи, що

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-1;\ \frac{\partial\xi}{\partial y}=1;$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=1;\ \frac{\partial\eta}{\partial y}=1;$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial x}=0,$$

отримаємо

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=$$

$$=\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння (4.22)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+3\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}+4\frac{\partial u}{\partial \xi}+4\frac{\partial u}{\partial \eta}=-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+7\frac{\partial u}{\partial \xi}+3\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Тоді канонічний вигляд рівняння (4.22)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=\frac{7}{4}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Відповідь: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=\frac{7}{4}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial \eta}$.

Задача 2. Визначити тип ДРЧП та звести його до канонічного вигляду

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (4.23)$$

Розв'язання

Визначимо тип ДРЧП

$$A=x^2,\ B=xy,\ C=y^2;$$

$\Delta=B^2-AC=x^2y^2-x^2y^2=0$ – рівняння параболічного типу.

Знайдемо характеристики ДРЧП:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2};$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}+\ln|C|;$$

$$\ln|y|=\ln|Cx|;$$

$$y = Cx;$$

$$\frac{y}{x} = C.$$

Отже, $\xi = \frac{y}{x}$ – перша характеристика ДРЧП.

Нехай, $\eta = x$ – друга характеристика ДРЧП.

Визначимо усі похідні, які входять в диференціальне рівняння (4.23).

Враховуючи, що

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}; \ \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1; \ \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}; \ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0; \ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2};$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x} = 0,$$

отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння (4.23)

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial y}=x^2\left(\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+$$

$$+2xy\left(-\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+y^2\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)-5\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=$$

$$=\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{2y}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+2\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}+$$

$$+\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{5}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{5}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$$

Тоді канонічний вигляд рівняння (4.23)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\frac{5}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Виразимо x і y через нові незалежні змінні і підставимо їх у отримане рівняння

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{y}{x};\\ \eta=x;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\xi\eta;\\ x=\eta.\end{cases}$$

Тоді канонічний вигляд рівняння (4.23)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\frac{5}{\eta^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\dfrac{5}{\eta^3}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}.$

Задача 3. Визначити тип ДРЧП та звести його до канонічного вигляду

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{3}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{140}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0.$$

Задача 4. Визначити тип ДРЧП та звести його до канонічного вигляду

$$6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+36\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+54\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$$

Задача 5. Визначити тип ДРЧП та звести його до канонічного вигляду

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+56\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-212\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

4.3 Розв'язання однорідного рівняння теплопровідності при нульових крайових умовах

Розв'язок однорідного рівняння теплопровідності при нульових крайових умовах

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$(0<x<l, 0<t<\infty),$$

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} u(0,t)=0, \\ u(l,t)=0, \end{cases}\ 0<t<\infty$$

$$\text{(ПУ)}\ u(x,0)=\varphi(x),\ (0<x<l).$$

знаходиться за формулою:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

де

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx.$$

Додаткові теоретичні відомості

Знаходження коефіцієнта B_n в більшості випадків зводиться до знаходження визначених інтегралів, в яких підінтегральна функція є добутком многочлена $P_n(x)$ на тригонометричну функцію $\cos(\alpha x)$ або $\sin(\alpha x)$. Такі інтеграли є типовими, для яких застосовується метод інтегрування частинами

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du;$$

$$\int_a^b P_n(x)\sin(\alpha x)\,dx = \left| \begin{matrix} u = P_n(x) & du = P_n'(x)dx \\ dv = \sin(\alpha x)dx & v = -\dfrac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{P_n(x)}{\alpha}\cos(\alpha x)\Big|_a^b + \frac{1}{\alpha}\int_a^b P_n'(x)\cos(\alpha x)\,dx;$$

$$\int_a^b P_n(x)\cos(\alpha x)\,dx = \left| \begin{matrix} u = P_n(x) & du = P_n'(x)dx \\ dv = \cos(\alpha x)dx & v = \dfrac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{P_n(x)}{\alpha}\sin(\alpha x)\Big|_a^b - \frac{1}{\alpha}\int_a^b P_n'(x)\sin(\alpha x)\,dx.$$

Відповідні інтеграли після застосування методу інтегрування частинами зводяться до інтегралів

$$\int_a^b \sin(\alpha x)\,dx = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)\Big|_a^b;$$

$$\int_a^b \cos(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)\Big|_a^b.$$

Для спрощення виразу для функції $u(x,t)$ іноді необхідно застосовувати такі співвідношення

$$\cos(\pi n) = (-1)^n;$$

$$\sin(\pi n) = 0,$$

при $n = 0, \pm1, \pm2, ...$

Задача 1. Знайти розв’язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 3,\ t > 0),$$

якщо $\begin{cases} u(0,t) = 0; \\ u(3,t) = 0, \end{cases}$ і $u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, 0 \le x \le \dfrac{3}{2}, \\ 3 - x, \dfrac{3}{2} < x \le 3. \end{cases}$

Розв'язання

За умовою $a = 4$, $l = 3$. Тоді розв'язок будемо шукати у вигляді ряду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot e^{-\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right),$$

де $B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx$.

При $l=3$

$$B_n=\frac{2}{3}\int_0^3\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=\frac{2}{3}\cdot\left(\int_0^{3/2}\frac{x^2}{3}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx+\int_{3/2}^{3}(3-x)\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx\right).$$

Кожен з інтегралів знайдемо за формулою інтегрування за частинами

$$\int_0^{3/2}\frac{x^2}{3}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=\left|\begin{array}{ll} u=\frac{x^2}{3} & du=\frac{2x}{3}dx \\ dv=\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx & v=-\frac{3}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{x^2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_0^{3/2}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{3/2}x\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=x & du=dx \\ dv=\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx & v=\frac{3}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\end{array}\right|=-\frac{9}{4\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+$$

$$+\frac{6x}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_0^{3/2}-\frac{6}{\pi^2n^2}\int_0^{3/2}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=-\frac{9}{4\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+$$

$$+\frac{9}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{18}{\pi^3n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_0^{3/2}=-\frac{9}{4\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+$$

$$+\frac{9}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{18}{\pi^3n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{18}{\pi^3n^3};$$

$$\int_{3/2}^{3}(x-3)\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=\left|\begin{array}{ll} u=x-3 & du=dx \\ dv=\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx & v=-\frac{3}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\end{array}\right|=$$

$$=\frac{3(3-x)}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_{3/2}^{3}+\frac{3}{\pi n}\int_{3/2}^{3}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=-\frac{9}{2\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+$$

$$+\frac{9}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_{3/2}^{3}=-\frac{9}{2\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{9}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Тоді

$$B_n=\frac{2}{3}\left(-\frac{9}{4\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{9}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{18}{\pi^3 n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{18}{\pi^3 n^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{9}{2\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{9}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)=-\frac{9}{2\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{12}{\pi^3 n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{12}{\pi^3 n^3}.$$

Отже,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{9}{2\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{12}{\pi^3 n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{12}{\pi^3 n^3}\right)\cdot e^{-\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right).$$

Відповідь:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{9}{2\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{12}{\pi^3 n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{12}{\pi^3 n^3}\right)\cdot e^{-\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right).$$

Задача 2. Знайти розв’язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \left(0<x<4,\ t>0\right),$$

якщо $\begin{cases}u(0,t)=0;\\u(4,t)=0,\end{cases}$ і $u(x,0)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, 0\le x\le 2,\\4-x, 2<x\le 4.\end{cases}$

Задача 3. Знайти розв’язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \left(0<x<2,\ t>0\right),$$

якщо $\begin{cases}u(0,t)=0;\\u(2,t)=0,\end{cases}$ і $u(x,0)=\begin{cases}21x^2, 0\le x\le\frac{2}{7},\\2-x, \frac{2}{7}<x\le 2.\end{cases}$

4.4 Розв'язання диференціального рівняння вільних коливань струни при нульових крайових умовах

Розв'язок диференціального рівняння вільних коливань струни при нульових крайових умовах

$$\text{(ДРЧП) }\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \left(0<x<l, t>0\right),$$

$$(\text{КУ})\begin{cases} u(0,t)=0, \\ u(l,t)=0; \end{cases} \ (t>0).$$

$$(\text{ПУ})\begin{cases} u(x,0)=f(x), \\ u_t'(x,0)=g(x), \end{cases} \ (0\le x\le l).$$

знаходиться за формулою:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi na}{l}t\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi na}{l}t\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

де

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx.$$

Задача 1. Знайти розв'язок диференціального рівняння вільних коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ \left(0<x<3,\ t>0\right),$$

якщо $\begin{cases} u(0,t)=0; \\ u(3,t)=0, \end{cases}$ і $\begin{cases} u(x,0)=x\left(x-3\right); \\ u'\left(x,0\right)=2. \end{cases}$

Розв'язання

Згідно з умовою задачі $a=3$, $l=3$, $f\left(x\right)=x\left(x-3\right)$, $g\left(x\right)=2$. Тоді

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\pi nt\right)+b_n\sin\left(\pi nt\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right),$$

де

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3 x\left(x-3\right)\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=\left|\begin{matrix} u=x^2-3x & du=2xdx \\ dv=\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx & v=-\frac{3}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{2\left(x^2-3x\right)}{3\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_0^3+\frac{4}{\pi n}\int_0^3 x\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx & v=\frac{3}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\end{matrix}\right|=\frac{12x}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_0^3-$$

$$-\frac{12}{\pi^2 n^2}\int_0^3 \sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx = \frac{36}{\pi^3 n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_0^3 = \frac{36}{\pi^3 n^3}\left(\cos(\pi n)-1\right)=$$

$$=\frac{36}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}-\dfrac{72}{\pi^3(2k-1)^3},\ n=2k-1;\\ 0,\ n=2k.\end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{3\pi n}\int_0^3 2\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=-\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_0^3=-\frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\cos(\pi n)-1\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}\dfrac{8}{\pi^2 n^2},\ n=2k-1;\\ 0,\ n=2k.\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{36}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n-1\right)\cos(\pi n t)-\frac{4}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right)\sin(\pi n t)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right).$$

Враховуючи, що усі парні члени ряду дорівнюють 0 отримаємо

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{72\cos\left((2k-1)\pi t\right)}{\pi^3(2k-1)^3}+\frac{8\sin\left((2k-1)\pi t\right)}{\pi^2(2k-1)^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{3}x\right).$$

Відповідь:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{72\cos\left((2k-1)\pi t\right)}{\pi^3(2k-1)^3}+\frac{8\sin\left((2k-1)\pi t\right)}{\pi^2(2k-1)^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{3}x\right).$$

Задача 2. Знайти розв'язок диференціального рівняння вільних коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \left(0<x<2,\, t>0\right),$$

якщо $\begin{cases}u(0,t)=0;\\ u(2,t)=0,\end{cases}$ і $\begin{cases}u(x,0)=0.1x(x-2);\\ u'(x,0)=2-x.\end{cases}$

Задача 3. Однорідна струна закріплена на кінцях $x=0$ і $x=l$. В початковий момент струна має форму ламаної OAB, де $O(0,0)$, $A(2,-0.1)$, $B(3,0)$. Знайти форму струни в будь-який момент часу t, якщо початкові швидкості відсутні.

4.5 Розв'язання внутрішньої задачі Діріхле для круга

Розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для круга

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}=0,$$

$$0\le r<a\ \text{ і }\ 0\le\varphi<2\pi,$$

$$\text{(КУ)}\ u(a,\varphi)=f(\varphi),$$

знаходиться за формулою:

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cdot\left(A_n\cdot\cos n\varphi+B_n\cdot\sin n\varphi\right),$$

де

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Задача 1. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа $\Delta u=0$ в крузі $0\le r<1$, якщо $u(1,\varphi)=2\varphi^2-\varphi+2$.

Розв'язання

Згідно з умовою задачі $a=1$, $f(\varphi)=2\varphi^2-\varphi+2$. Тоді

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cdot\left(A_n\cdot\cos n\varphi+B_n\cdot\sin n\varphi\right),$$

де

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\varphi^2-\varphi+2\right)d\varphi=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\varphi^3}{3}-\frac{\varphi^2}{2}+2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi^3}{3}-\frac{\pi^2}{2}+2\pi+\frac{2\pi^3}{3}+\frac{\pi^2}{2}+2\pi\right)=\frac{4\pi^2}{3}+4;$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\varphi^2-\varphi+2\right)\cos(n\varphi)\,d\varphi=\begin{vmatrix} u=2\varphi^2-\varphi+2 & du=(4\varphi-1)\,d\varphi \\ dv=\cos(n\varphi)\,d\varphi & v=\frac{1}{n}\sin(n\varphi)\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\left(2\varphi^2-\varphi+2\right)}{\pi n}\sin(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}(4\varphi-1)\sin(n\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\begin{vmatrix} u=4\varphi-1 & du=4d\varphi \\ dv=\sin(n\varphi)\,d\varphi & v=-\frac{1}{n}\cos(n\varphi)\end{vmatrix}=\frac{4\varphi-1}{\pi n^2}\cos(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{4}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{\cos(n\varphi)}{\pi n^2}(4\pi-1+4\pi+1)-\frac{4}{\pi n^3}\sin(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{8}{n}\cos(\pi n)=\frac{8(-1)^n}{n};$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\varphi^2-\varphi+2\right)\sin(n\varphi)\,d\varphi=\begin{vmatrix} u=2\varphi^2-\varphi+2 & du=(4\varphi-1)\,d\varphi \\ dv=\sin(n\varphi)\,d\varphi & v=-\frac{1}{n}\cos(n\varphi)\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{\left(2\varphi^2-\varphi+2\right)}{\pi n}\cos(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}(4\varphi-1)\cos(n\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\begin{vmatrix} u=4\varphi-1 & du=4d\varphi \\ dv=\cos(n\varphi)\,d\varphi & v=\frac{1}{n}\sin(n\varphi)\end{vmatrix}=-\frac{\cos(\pi n)}{\pi n}\left(2\pi^2-\pi+2-2\pi^2-\pi-2\right)+$$

$$+\frac{4\varphi-1}{\pi n^2}\sin(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{4}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n\varphi)\,d\varphi=\frac{2}{n}\cos(\pi n)+\frac{4}{\pi n^3}\cos(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{n}\cos(\pi n)=\frac{2(-1)^n}{n}.$$

Отже, розв'язком внутрішньої задачі Діріхле буде функція

$$u(r,\varphi)=\frac{2\pi^2}{3}+2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(8\cos n\varphi+2\sin n\varphi)}{n^2}\cdot r^n.$$

Відповідь: $u(r,\varphi)=\frac{2\pi^2}{3}+2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(8\cos n\varphi+2\sin n\varphi)}{n^2}\cdot r^n$.

Задача 2. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа $\Delta u=0$ в крузі $0\le r<2$, якщо $u(2,\varphi)=\varphi^2$.

Задача 3. Знайти розподіл температури на однорідній пластинці радіусом $R=4$, на колі верхньої половини якої підтримується температура $1°$ C, а на нижній половині $0°$ C.

4.6 Метод сіток для математичної моделі поширення тепла у стержні

Постановка задачі: застосовуючи метод сіток, знайти розв'язок однорідного рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при ненульових крайових $\begin{cases} u(0,t)=f_1(t), \\ u(l,t)=f_2(t), \end{cases}$ $(0<x<l, 0<t<\infty)$ та початковій $u(x,0)=\varphi(x)$, $(0<x<l)$ умовах.

Алгоритм розв'язання при застосуванні явної схеми

1. Задаємо кількість n рівних частин, на які ми розбиваємо стержень довжиною l.

2. Визначаємо крок зміни незалежної змінної x

$$h=\frac{l}{n}.$$

3. Задаємо число $0<\sigma\le\frac{1}{2}$ (найкраще $\sigma=\frac{1}{6}$).

4. Визначаємо крок зміни t

$$k=h^2\sigma.$$

5. Будуємо таблицю, яка містить $n+3$ стовпці

j	i	0	1	2	3	…	i	…	n
	t_j \ x_i								
0									
1									
2									
…									
j									
…									

6. Заповнюємо другий рядок. У ньому міститься координата x_i, яка обчислюється за формулою

$$x_i = i \cdot h.$$

7. Заповнюємо другий стовпчик, який містить координату t_j

$$t_j = j \cdot k.$$

8. В результаті отримали таблицю, у якій на перетині i-ого стовпця і j-ого рядка повинно стояти значення температури в точці з координатою x_i в момент часу t_j.

9. Рядок $j = 0$ повинен містити значення температури в початковий момент часу. Заповнюємо даний рядок використовуючи початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \text{ тобто } u_{i,0} = \varphi(x_i).$$

10. Стовпці $i = 0$ і $i = n$ визначають значення температури на кінцях стержня. Стовпець $i = 0$ заповнюємо застосовуючи першу крайову умову

$$u(0,t) = f_1(t), \text{ тобто } u_{0,j} = f_1(t_j).$$

Заповнюємо стовпець $i = n$, використовуючи другу крайову умову

$$u(l,t) = f_2(t), \text{ тобто } u_{n,j} = f_2(t_j).$$

11. Заповнюємо усі клітинки рядка $j = 1$ за формулою

$$u_{i,1} = \sigma\left(u_{i+1,0} - 2u_{i,0} + u_{i-1,0}\right) + u_{i,0} \text{ при } 0 < \sigma \le \frac{1}{2};$$

$$u_{i,1} = \frac{1}{6}\left(u_{i+1,0} + 4u_{i,0} + u_{i-1,0}\right) \text{ при } \sigma = \frac{1}{6}.$$

12. Заповнюємо наступний рядок $j = j$ за формулою

$$u_{i,j+1} = \sigma\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) + u_{i,j} \text{ при } 0 < \sigma \le \frac{1}{2};$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}\left(u_{i+1,j} + 4u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) \text{ при } \sigma = \frac{1}{6}.$$

13. Повторюємо п.12 допоки усі клітинки не будуть заповнені.

Задача 1. Методом сіток знайти розв'язок рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо

$$\text{(КУ)} \begin{cases} u(0;t) = 1 - 6t; \\ u(0.6;t) = 0.3624; \end{cases} (0 < x < 0.6, 0 < t < \infty),$$

$$\text{(ПУ)}\ u(x,0) = cos 2x,\ (0 < x < 0.6).$$

Розв'язання

Скористаємось явною схемою при $\sigma = \dfrac{1}{6}$, матимемо формулу

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}\cdot\left(u_{i-1,j} + 4\cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}\right).$$

Нехай $n = 6$, тоді крок зміни змінної x

$$h = \frac{l}{n} = \frac{0,6}{6} = 0,1.$$

Визначимо крок зміни змінної t

$$k = \frac{h^2}{6} = \frac{0,1^2}{6} = 0,0017.$$

Далі складаємо таблицю. Спочатку заповнимо значення функції $u(x,t)$ у рядку із номером $j = 0$, користуючись початковою умовою. Отже, $u_{i,0} = \cos(2x_i)$, тобто

$$u_{0,0} = \cos(2 \cdot 0) = 1,0;$$

$$u_{1,0} = \cos(2 \cdot 0,1) = 0,9801;$$

....

Користуючись крайовими умовами заповнимо стовпці із номерами $i = 0$ та $i = 6$: $u_{0,j} = 1 - 6t_j$, $u_{6,j} = 0,3624$. Отже, отримаємо

$$u_{0,1} = 1 - 6 \cdot 0,0017 = 0,99;$$

$$u_{0,2} = 1 - 6 \cdot 0,0033 = 0,98;$$

....

$$u_{6,1} = 0,3624;$$

$$u_{6,2} = 0,3624;$$

....

Потім послідовно заповнюємо пусті клітинки рядка під номером $j = 1$, починаючи з елемента $u_{1,1}$:

$$u_{1,1} = \frac{1}{6}\cdot\left(u_{0,0} + 4\cdot u_{1,0} + u_{2,0}\right) = \frac{1}{6}\cdot\left(1,0 + 4\cdot 0,9801 + 0,9211\right) = 0,9736$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{6}\cdot\left(u_{1,0} + 4\cdot u_{2,0} + u_{3,0}\right) = \frac{1}{6}\cdot\left(0,9801 + 4\cdot 0,9211 + 0,8253\right) = 0,9149$$

....

Потім аналогічно заповнюємо рядок під номером $j = 2$, далі рядок під номером $j = 3$. Продовжуємо заповнювати до тих пір, поки усі клітинки не будуть заповнені.

У результаті отримали таку таблицю:

j	i	0	1	2	3	4	5	6
	t \ x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,0	1,0	0,9801	0,9211	0,8253	0,6967	0,5403	0,3624
1	0,0017	0,99	0,9736	0,9149	0,8199	0,6921	0,5367	0,3624
2	0,0033	0,98	0,9665	0,9089	0,8144	0,6875	0,5336	0,3624
3	0,005	0,97	0,9592	0,9027	0,809	0,683	0,5307	0,3624
4	0,0067	0,96	0,9516	0,8965	0,8036	0,6786	0,528	0,3624
5	0,0083	0,95	0,9438	0,8902	0,7983	0,6743	0,5255	0,3624
6	0,01	0,94	0,9359	0,8838	0,7929	0,6702	0,5231	0,3624

Задача 2. Методом сіток знайти розв'язок рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо

$$\text{(КУ)} \begin{cases} u(0;t) = -t - 4,355; \\ u(0.6;t) = -4t + 6,453; \end{cases} (0 < x < 0.6, 0 < t < \infty),$$

$$\text{(ПУ)}\ u(x,0) = 6sin(4x - 0,94) + 0,49,\ (0 < x < 0.6).$$

4.7 Застосування Maple для розв'язання задач математичної фізики

Розв'язання усіх задач, які розглядаються у даному посібнику, зводяться до строгих алгоритмів або до кінцевих формул, в які слід підставити вихідні дані. Основна складність полягає у тому, що для успішного розв'язання відповідних задач необхідно знаходити частинні похідні функції багатьох змінних, знаходити невизначені та визначені інтеграли, розв'язувати звичайні диференціальні рівняння першого порядку. Для виконання усіх цих операцій (або для перевірки отриманого результату) можна застосовувати математичний додаток Maple.

Для знаходження повних та частинних похідних в Maple застосовується оператор diff. Структура оператора:

$\mathrm{diff}(f, x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

де f – функція (однієї або багатьох змінних), похідна якої визначається; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – змінні, за якими визначається похідна; n – порядок похідної.

Приклад. Знайти усі похідні першого та другого порядків функції $x^2 - \sin(xy)$.

Розв'язання

Застосуємо оператор diff

```
> diff(x^2-sin(x*y),x);
```

$$2x - \cos(x\,y)\,y$$

```
> diff(x^2-sin(x*y),y);
```

$$-\cos(x\,y)\,x$$

```
> diff(x^2-sin(x*y),x,y);
```

$$\sin(x\,y)\,x\,y - \cos(x\,y)$$

```
> diff(x^2-sin(x*y),x,x);
```

$$2 + \sin(x\,y)\,y^2$$

```
> diff(x^2-sin(x*y),y,y);
```

$$\sin(x\,y)\,x^2$$

Відповідь:

$$\left(x^2 - \sin(xy)\right)'_x = 2x - \cos(xy)\,y;$$

$$\left(x^2 - \sin(xy)\right)'_y = -\cos(xy)\,x;$$

$$\left(x^2 - \sin(xy)\right)''_{xy} = \sin(xy)\,xy - \cos(xy);$$

$$\left(x^2 - \sin(xy)\right)''_{xx} = 2 + \sin(xy)\,y^2;$$

$$\left(x^2 - \sin(xy)\right)''_{yy} = \sin(xy)\,x^2.$$

Якщо функція диференціюється декілька раз за однією змінною, то для скорочення можна застосовувати оператор $. Записи

```
> diff(sin(x),x$3);
```

$$-\cos(x)$$

```
> diff(sin(x),x,x,x);
```

$$-\cos(x)$$

еквівалентні, і таким чином визначається третя похідна від функції $\sin(x)$.

В Maple для знаходження визначених та невизначених інтегралів застосовується оператор int.

Структура оператора int для знаходження невизначених інтегралів:

$\mathrm{int}(f,x)$;

де f – підінтегральна функція; x – змінна інтегрування.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^2(x)dx$

Розв'язання

Застосуємо оператор int

```
> int((sin(x))^2,x);
```

$$-\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)+\frac{x}{2}$$

Відповідь: $\int \sin^2(x)dx = -\frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + \frac{x}{2} + C$.

Структура оператора int для знаходження визначених інтегралів:

$\mathrm{int}(f, x = a..b)$;

де f – підінтегральна функція; x – змінна інтегрування; a і b – нижня і верхня межі інтегрування, відповідно.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x\sin(nx)dx$.

Розв'язання

Застосуємо оператор int

```
> int(x*sin(n*x),x=0..1);
```

$$-\frac{-\sin(n)+\cos(n)\,n}{n^2}$$

Відповідь: $\int_0^1 x\sin(nx)\,dx = -\frac{-\sin n + n\cos n}{n^2}$.

Для знаходження аналітичного розв'язку звичайних диференціальних рівнянь застосовується оператор dsolve.

Структура оператора dsolve:

dsolve(f);

де f – диференціальне рівняння.

Зауваження. В позначенні шуканої функції в дужках записується незалежна змінна. Наприклад, якщо шукана функція y залежить від незалежної змінної x, то скрізь, де в диференціальному рівнянні зустрічається y, ми записуємо $y(x)$. Похідні, що входять у диференціальне рівняння, записуємо за допомогою оператора diff.

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння $xy' - y = y^2$.

Розв'язання

```
> dsolve(x*diff(y(x),x)-y(x)=y(x)^2);
```

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{x}{x - \_C1}$$

Відповідь: $y = -\frac{x}{x - C_1}$.

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 25y = e^x\left(\cos 5x - 10\sin 5x\right).$$

Розв'язання

```
> dsolve(diff(y(x),x$2)+25*y(x)=exp(x)*(cos(5*x)-
10*sin(5*x)));
```

$$\mathrm{y}(x) = \sin(5\,x)\,\_C2 + \cos(5\,x)\,\_C1 + \mathrm{e}^x\cos(5\,x)$$

Відповідь: $y = C_2\sin 5x + C_1\cos 5x + e^x\cos 5x$.

Задача 1. Встановити тип ДРЧП та звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (4.24)$$

Розв'язання

Визначимо тип ДРЧП

$$A=1,\ B=\cos x,\ C=-\sin^2 x;$$

$\Delta = B^2 - AC = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 > 0$ – рівняння гіперболічного типу.

Знайдемо характеристики ДРЧП:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{\Delta}}{A};$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos x-1;$$

```
> dsolve(diff(y(x),x) = cos(x)-1);
```

$$y(x)=\sin(x)-x+\_C1$$

$$C=y-\sin x+x$$

Отже, $\xi = y-\sin x+x$ – перша характеристика ДРЧП.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{\Delta}}{A};$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos x+1;$$

```
> dsolve(diff(y(x),x) = cos(x)+1);
```

$$y(x)=\sin(x)+x+\_C1$$

$$C=y-\sin x-x.$$

Отже, $\eta = y-\sin x-x$ – друга характеристика ДРЧП.

Визначимо усі похідні, які входять в диференціальне рівняння (4.24).

Знайдемо усі похідні першого та другого порядків від функції $\xi = y-\sin x+x$

```
> diff(y-sin(x)+x,x);
```

$$-\cos(x)+1$$

```
> diff(y-sin(x)+x,y);
```

$$1$$

```
> diff(y-sin(x)+x,x$2);
```

$$\sin(x)$$

```
> diff(y-sin(x)+x,x,y);
```

$$0$$

```
> diff(y-sin(x)+x,y$2);
```

$$0$$

Отже,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\cos x + 1;\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \sin x;\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Знайдемо усі похідні першого та другого порядків від функції $\eta = y - \sin x - x$

```
> diff(y-sin(x)-x,x);
```

$$-\cos(x) - 1$$

```
> diff(y-sin(x)-x,y);
```

$$1$$

```
> diff(y-sin(x)-x,x$2);
```

$$\sin(x)$$

```
> diff(y-sin(x)-x,x,y);
```

$$0$$

```
> diff(y-sin(x)-x,y$2);
```

$$0$$

Тоді

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\cos x - 1;\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \sin x;\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x} = 0.$$

В результаті отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} =$$

$$= (1-\cos x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (\cos x + 1)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \sin x\frac{\partial u}{\partial \xi} + \sin x\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} +$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = (1-\cos x)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - (\cos x + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння (4.24)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\sin x\frac{\partial u}{\partial y}=\left(1-\cos x\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+$$

$$+\left(\cos x+1\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\sin x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\sin x\frac{\partial u}{\partial \eta}+2\cos x\left(1-\cos x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-$$

$$-4\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-2\cos x\left(\cos x+1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-$$

$$-\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\sin x\frac{\partial u}{\partial \xi}-\sin x\frac{\partial u}{\partial \eta}=-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0.$$

Тоді канонічний вигляд рівняння (4.24)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0.$$

Відповідь: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$.

Задача 2. Знайти розв'язок рівняння

$$\text{(ДРЧП) } \frac{\partial u}{\partial t}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$\text{(КУ) } \begin{cases} u\left(0,t\right)=2; \\ u\left(4,t\right)=2t+18; \end{cases}$$

$$\text{(ПУ) } u\left(x,0\right)=x^2+2.$$

Розв'язання

Маємо однорідне рівняння теплопровідності із ненульовими крайовими умовами. Розв'язок будемо шукати у вигляді (див. п. 2.2.4)

$$u(x,t)=s(x,t)+w(x,t)+g_1(t)+\left(g_2(t)-g_1(t)\right)\frac{x}{l} \tag{4.25}$$

Згідно з умовою задачі

$$g_1(t)=2;$$
$$g_2(t)=2t+18;$$
$$\varphi(x)=x^2+2;$$
$$a=3;$$
$$l=4.$$

Враховуючи, що

$$\varphi_1(x)=\varphi(x)-g_1(0)+\left(g_1(0)-g_2(0)\right)\frac{x}{l}=x^2+2-2+\left(2-0-18\right)\frac{x}{4}=x^2-4x,$$

$s(x,t)$ є розв'язком такої задачі:

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial s}{\partial t}=9\frac{\partial^2 s}{\partial x^2},\left(0<x<4,0<t<\infty\right),$$

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} s(0,t)=0, \\ s(l,t)=0, \end{cases}\quad 0<t<\infty$$

$$\text{(ПУ)}\ s(x,0)=x^2-4x,\ \ (0<x<4).$$

Відносно функції $s(x,t)$ отримали однорідне рівняння теплопровідності із нульовими крайовими умовами. Згідно з п. 2.2.3 отримаємо

$$s(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

де

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^4\left(x^2-4x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right)dx.$$

```
> int((x^2-4*x)*sin(Pi*n*x/4),x=0..4);
```

$$\frac{64\,(-2+\pi\, n\,\sin(\pi\, n)+2\cos(\pi\, n))}{\pi^3\, n^3}$$

Тоді $B_n=\dfrac{-64+32\pi n\sin(\pi n)+64\cos(\pi n)}{\pi^3 n^3}$.

Враховуючи, що n натуральне число

$$B_n=\frac{64}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases} 0, n=2k, \\ -\dfrac{128}{\pi^3\left(2k-1\right)^3}, n=2k-1 \end{cases}$$

В результаті отримаємо

$$s(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{128}{\pi^3(2k-1)^3}\cdot e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{4}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{4}x\right).$$

Знайдемо $f_1(x,t)$

$$f_1(x,t)=f(x,t)-g_1'(t)+\left(g_1'(t)-g_2'(t)\right)\frac{x}{l}=0-0+(0-2)\frac{x}{4}=-\frac{x}{2}.$$

Тоді $w(x,t)$ є розв'язком такої задачі:

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial w}{\partial t}=9\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{x}{2},\left(0<x<4,0<t<\infty\right),$$

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} w(0,t)=0, \\ w(l,t)=0, \end{cases}\quad 0<t<\infty$$

$$\text{(ПУ)}\ w(x,0)=0,\ \ (0<x<4).$$

Розв'язок останньої задачі знаходиться у вигляді:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

де

$$h_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f_1(x,t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx=-\frac{1}{4}\int_0^4 x\sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right)dx,$$

```
> int(x*sin(Pi*n*x/4),x=0..4);
```

$$-\frac{16\left(-\sin(\pi n)+\cos(\pi n)\pi n\right)}{\pi^2 n^2}$$

$$h_n(t)=\frac{-4\sin(\pi n)+4\pi n\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}=\frac{4(-1)^n}{\pi n};$$

$$T_n(t)=\int_0^t h_n(\tau)e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau=\int_0^t\frac{4(-1)^n}{\pi n}e^{-\left(\frac{3\pi n}{4}\right)^2(t-\tau)}d\tau;$$

```
> int(4*(-1)^n/Pi/n*exp(-((3*Pi*n/4)^2)*(t-
tau)),tau=0..t);
```

$$\frac{64}{9}\frac{(-1)^{(1+n)}\left(e^{\left(-\frac{9t\pi^2n^2}{16}\right)}-1\right)}{\pi^3 n^3}$$

$$T_n(t)=\frac{64(-1)^n}{9\pi^3n^3}\left(1-e^{-\frac{9\pi^2n^2t}{16}}\right).$$

Отримаємо

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64(-1)^n}{9\pi^3n^3}\left(1-e^{-\frac{9\pi^2n^2t}{16}}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right).$$

Тоді згідно з (4.25) шукана функція набуде вигляду

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{128}{\pi^3(2k-1)^3}\cdot e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{4}\right)^2t}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{4}x\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64(-1)^n}{9\pi^3n^3}\left(1-e^{-\frac{9\pi^2n^2t}{16}}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right)+2-\frac{x(t+4)}{2}.$$

Відповідь:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{128}{\pi^3(2k-1)^3}\cdot e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{4}\right)^2t}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{4}x\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64(-1)^n}{9\pi^3n^3}\left(1-e^{-\frac{9\pi^2n^2t}{16}}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right)+2-\frac{x(t+4)}{2}.$$

Задача 3. Встановити тип ДРЧП та звести його до канонічного вигляду

$$3\,\mathrm{tg}^2x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-2y\,\mathrm{tg}\,x\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\mathrm{tg}^3x\frac{\partial u}{\partial x}=0\,.$$

Задача 4. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ $\left(0<x<2,t>0\right)$, якщо $u(0,t)=0$, $u(2,t)=8$ $\left(t>0\right)$, $u(x,0)=2x^2$ при $0\le x\le 2$.

5 ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Завдання 1

Визначити тип диференціального рівняння та звести його до канонічного вигляду.

1.1

а) $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{70}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{3}u=0;$

б) $-10\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+180\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-810\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}-7\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-\frac{6}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{9}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{111}{224}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{7}{6}\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0.$

1.2

а) $6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-60\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+96\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-9\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-50\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-125\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-84\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-318\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial u}{\partial x}-7\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.3

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-36\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-48\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-144\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{61}{6300}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}u=0.$

1.4

а) $\frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{3}{40}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{80}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+20\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-20\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{5}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{5}{324}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-7\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{4}{7}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.5

а) $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{24}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0;$

б) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+18\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+27\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-6\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $-\frac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{27}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1059}{100}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{5}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0.$

1.6

а) $-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{29}{72}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{24}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-30\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+75\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{53}{1176}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{6}u=0.$

1.7

а) $\frac{2}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{3}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-7\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-80\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-200\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $10\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+100\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+890\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.8

а) $-3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+105\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-7\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{125}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{6}u=0;$

в) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+90\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+810\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.9

а) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+45\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-70\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}+8\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+64\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+256\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+9\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-20\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-122\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.10

а) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-60\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-144\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}=0;$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{8}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{13}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{3}{5}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{7}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.11

а) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-45\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+50\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+54\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+243\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+10\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{10}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{181}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{7}{6}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.12

а) $-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{2}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}=0;$

в) $\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{8}{45}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{41}{225}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{5}{3}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.13

а) $-\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{13}{294}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{294}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{6}u=0;$

б) $\frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{15}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{90}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{5}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1649}{1600}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{6}{7}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{9}u=0.$

1.14

а) $10\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+30\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-180\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+9\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $\frac{4}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{80}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{10}{7}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{25}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{5}u=0.$

1.15

а) $-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{3}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{140}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{5}u=0;$

б) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-60\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-150\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+10\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-\frac{4}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{16}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1649}{980}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{5}{4}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{3}{5}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0.$

1.16

а) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+42\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-7\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-10\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-180\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-810\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}+8\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+98\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+595\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.17

а) $-8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+104\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-288\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{4}u=0;$

в) $-\frac{5}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{10}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{125}{1008}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{5}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.18

а) $\frac{9}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{9}{100}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{27}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{8}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{4}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{8}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{15}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{13}{720}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0.$

1.19

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-16\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-32\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.20

а) $-\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{3}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{5}u=0;$

б) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{97}{2592}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.21

а) $\frac{8}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{7}{15}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{7}{6}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+64\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+256\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-246\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-6\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.22

а) $\frac{7}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{7}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{7}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+60\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-180\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{6}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{477}{196}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{5}{6}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{7}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.23

а) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-315\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{2}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{9}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+30\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+50\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+9\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.24

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{52}{35}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{9}{35}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{6}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+80\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+400\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4\dfrac{\partial u}{\partial x}-3\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-\dfrac{1}{8}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{8}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{41}{800}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{4}{9}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.25

а) $\dfrac{9}{10}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{9}{40}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{27}{40}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{7}{4}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{4}{7}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{16}{49}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{3}{8}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{10}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{769}{225}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{5}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.26

а) $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+27\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-162\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\dfrac{\partial u}{\partial x}+7\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\dfrac{6}{5}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{2}{5}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{30}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{6}{7}\dfrac{\partial u}{\partial x}+4\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+20\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\dfrac{\partial u}{\partial x}+8\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.27

а) $-5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-45\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{1}{6}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{36}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{7}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{1}{8}u=0;$

в) $-8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+128\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-904\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-6\dfrac{\partial u}{\partial x}-3\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.28

а) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-16\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-240\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{98}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0;$

в) $-\frac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{7}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1565}{1323}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{7}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{9}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}u=0.$

1.29

а) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-7\frac{\partial u}{\partial x}+10\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{8}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{32}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{8}{9}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{5}{9}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}u=0;$

в) $10\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+140\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+740\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.30

а) $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{17}{144}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{144}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{6}u=0;$

б) $6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+60\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+150\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-84\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-427\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}-10\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.31

а) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{5}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+48\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+96\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}-7\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-126\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-742\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.32

а) $-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-27\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-8\dfrac{\partial u}{\partial x}+4\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-18\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\dfrac{\partial u}{\partial x}-5\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-\dfrac{5}{7}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{20}{21}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{205}{252}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{8}{3}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.33

а) $-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+18\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial x}-4\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{14}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{196}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{1}{2}u=0;$

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{1}{32}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{1}{2}u=0.$

1.34

а) $\dfrac{1}{10}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{40}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{8}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{1}{5}u=0;$

б) $-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-36\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-108\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+100\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+545\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-6\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.35

а) $-\dfrac{1}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{5}{126}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{1}{126}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{9}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{9}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{1}{9}u=0;$

в) $10\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+180\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+970\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4\dfrac{\partial u}{\partial x}-7\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.36

а) $-8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+64\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-96\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-112\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+448\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}-8\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-729\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.37

а) $\frac{5}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{43}{42}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{5}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{7}{4}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{147}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{5}u=0;$

в) $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{17}{256}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}u=0.$

1.38

а) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+96\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-378\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+9\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{14}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{112}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-20\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+145\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}+8\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.39

а) $-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-28\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-48\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-9\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{3}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{15}{14}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{75}{112}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{5}{9}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{181}{64800}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.40

а) $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{13}{112}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{15}{56}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{3}{5}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{4}u=0;$

в) $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-54\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+522\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}+u=0.$

1.41

а) $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{5}{28}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{28}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{5}u=0;$

б) $\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{175}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{5}u=0;$

в) $\frac{10}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{160}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{3208}{15}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{5}{7}\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

1.42

а) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-6\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{98}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+72\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-288\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}+8\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.43

а) $\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{48}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{4}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{8}{5}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{80}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+90\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4\frac{\partial u}{\partial x}-10\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.44

а) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-32\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+128\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-18\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-39\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.45

а) $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{9}{40}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{40}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{3}u=0;$

б) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+30\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-45\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{109}{1800}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0.$

1.46

а) $\frac{5}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{25}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{35}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{8}{5}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+126\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-567\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{25}{4032}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{6}u=0.$

1.47

а) $\frac{2}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{7}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{2}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{7}u=0;$

б) $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{72}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{7}u=0;$

в) $-\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{45}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{13}{450}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{8}u=0.$

1.48

а) $-\frac{6}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{10}{7}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{7}u=0;$

б) $-\frac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{3}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0;$

в) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{20}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{65}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}u=0.$

1.49

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-30\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-7\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $-\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{24}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{384}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2}{63}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{85}{2268}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0.$

1.50

а) $\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{75}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{75}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{6}u=0;$

б) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-30\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-45\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-10\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-162\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-1458\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.51

а) $-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{72}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{144}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}u=0;$

б) $\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{700}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{4369}{1764}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{8}{9}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.52

а) $\frac{10}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{20}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{50}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-84\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-294\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+9\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-72\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+424\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}+8\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.53

а) $\frac{7}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{21}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{7}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{128}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0;$

в) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+36\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+212\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.54

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}+9\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $-\frac{5}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{5}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{5}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{7}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{9}u=0;$

в) $-7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{4594}{175}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{5}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{10}u=0.$

1.55

а) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{47}{28}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{5}{14}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{10}{3}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{8}u=0;$

б) $-\frac{5}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{5}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{5}{24}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{5}{9}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{7}u=0;$

в) $-3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+60\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-447\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.56

а) $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{4}{15}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{8}{15}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{5}{9}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{175}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-486\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.57

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{175}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{7}u=0;$

в) $\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{18}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{13}{1296}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{3}u=0.$

1.58

а) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-60\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+175\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{50}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{4}u=0;$

в) $-\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{27}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{25}{5184}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.59

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{4}u=0;$

б) $\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{294}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}u=0;$

в) $8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-16\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+296\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+10\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.60

а) $-10\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+20\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+240\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}-7\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{7}u=0.$

1.61

а) $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{5}{48}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{48}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}u=0;$

б) $\frac{9}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{9}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{9}{50}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{3}{8}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{5}u=0;$

в) $\frac{7}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+14\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{7175}{256}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{9}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{3}{8}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.62

а) $\frac{8}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{64}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{5}{3}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{3}u=0;$

в) $-\frac{2}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{3}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{109}{40}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}u=0.$

1.63

а) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{50}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{80}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0;$

б) $\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{200}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{10}u=0;$

в) $-\frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{41}{4000}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0.$

1.64

а) $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{18}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{54}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0;$

б) $-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+144\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-576\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-\frac{5}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{5}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{745}{784}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{9}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.65

а) $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{216}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{216}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{5}u=0;$

б) $-\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{576}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{4}{7}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0;$

в) $\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{16}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{148}{27}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{5}u=0.$

1.66

а) $\frac{4}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{52}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{24}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{5}{4}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{4}{9}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{5}{512}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{6}u=0.$

1.67

а) $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{80}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{80}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+48\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+144\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+108\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+1053\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}+9\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.68

а) $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{19}{36}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{7}{36}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{3}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{8}{9}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{20}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{1}{320}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\dfrac{3}{8}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{27}{20}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{291}{200}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{10}{3}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{3}{4}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.69

а) $-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-15\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-12\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-100\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-500\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+56\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-200\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0.$

1.70

а) $8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-152\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+720\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}-6\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\dfrac{1}{7}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{2}{49}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{343}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{6}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{8}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{1}{5}u=0;$

в) $-7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+56\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-679\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+10\dfrac{\partial u}{\partial x}+10\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.71

а) $7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+63\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+56\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial x}+5\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-80\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-200\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{9}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{5409}{400}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.72

а) $-\frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{3}{50}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{200}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0;$

б) $10\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-60\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+90\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}-8\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $-\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{85}{2592}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{7}u=0.$

1.73

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{7}{24}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{48}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}u=0;$

б) $-\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{24}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{288}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}u=0;$

в) $-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{61}{144}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2}{5}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{3}{10}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{8}u=0.$

1.74

а) $\frac{2}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{8}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{5}{6}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{9}u=0;$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $-3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-18\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{459}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{5}{7}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0.$

1.75

а) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-36\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+72\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-7\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $-3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-54\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-243\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $-\frac{5}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{226}{15}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{6}u=0.$

1.76

а) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+34\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+144\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+8\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{5}u=0;$

в) $-\frac{6}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{8}{15}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{793}{1080}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{5}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.77

а) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{45}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{225}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{9}u=0;$

в) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-156\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}-9\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.78

а) $-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-81\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-126\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+10\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+54\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+243\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-10\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+100\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-1250\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+10\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.79

а) $-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{30}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{30}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0;$

б) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+80\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+320\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-7\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-\frac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{795}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{4}u=0.$

1.80

а) $10\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{9}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{27}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{5}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{7}u=0;$

в) $-\frac{7}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{21}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{12271}{432}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0.$

1.81

а) $\frac{3}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{21}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{9}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{3}{7}\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-16\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-\frac{5}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{5}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1825}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{7}{9}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{6}u=0.$

1.82

а) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{13}{42}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{42}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{4}u=0;$

б) $\frac{5}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{45}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{405}{28}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{7}{10}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{9}u=0;$

в) $\frac{5}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{25}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1205}{4608}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{4}u=0.$

1.83

а) $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{9}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{3}u=0;$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}-7\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{26}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{4}{7}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0.$

1.84

а) $-8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-24\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+560\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial u}{\partial x}-9\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{49}{27}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2}{5}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{5}{6}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.85

а) $\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{7}{180}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{360}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{6}u=0;$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+16\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+9\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+16\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-89\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.86

а) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{81}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{5}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{4}u=0;$

б) $\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{6}u=0;$

в) $\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{89}{12800}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.87

а) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-20\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial u}{\partial x}-8\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{4}u=0;$

в) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+84\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+315\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}-8\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.88

а) $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+27\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+6\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{576}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{9}u=0;$

в) $-\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{74}{8575}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{5}u=0.$

1.89

а) $8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-104\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+320\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-30\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-45\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-85\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.90

а) $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{11}{48}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{48}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-80\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-200\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-20\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+425\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.91

а) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+48\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-42\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+16\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-64\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+80\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-596\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

1.92

а) $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+81\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+162\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\dfrac{4}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+12\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{4}{3}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+96\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+288\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\dfrac{\partial u}{\partial x}-3\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.93

а) $-\dfrac{1}{6}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{5}{112}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{336}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{8}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{1}{9}u=0;$

б) $-7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+140\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-700\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\dfrac{\partial u}{\partial x}-u=0;$

в) $\dfrac{7}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{7}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{91}{108}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{3}{7}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{7}{5}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{1}{2}u=0.$

1.94

а) $-\dfrac{5}{7}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{1}{7}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{4}{7}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{10}{3}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{3}{8}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{1}{7}u=0;$

б) $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-80\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+400\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{40}{7}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{298}{49}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{1}{3}u=0.$

1.95

а) $\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{2}{15}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{1}{60}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{6}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{10}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{1}{2}u=0;$

б) $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+18\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+27\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-7\dfrac{\partial u}{\partial x}-6\dfrac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-24\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+232\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-7\dfrac{\partial u}{\partial x}-4\dfrac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.96

а) $-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{4}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{6}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{8}{7}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{1}{3}u=0;$

б) $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+16\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}-9\dfrac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+16\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-7\dfrac{\partial u}{\partial x}+6\dfrac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.97

а) $-9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-144\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-540\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\dfrac{1}{10}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{10}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{10}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{1}{7}u=0;$

в) $\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{13}{6}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{8}u=0.$

1.98

а) $-\dfrac{9}{7}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{45}{14}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{25}{14}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{1}{4}u=0;$

б) $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+24\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+72\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\dfrac{\partial u}{\partial x}-2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+30\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+225\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.99

а) $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{12}{35}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{35}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{1}{10}u=0;$

б) $\dfrac{2}{5}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{8}{5}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{8}{5}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{1}{2}u=0;$

в) $-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+54\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-390\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\dfrac{\partial u}{\partial x}+5\dfrac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.100

а) $\frac{9}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{21}{40}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{9}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{7}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{6}u=0;$

б) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{64}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0;$

в) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+14\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-53\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-8\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

Завдання 2

Знайти розв'язок крайової задачі для рівняння теплопровідності на відрізку $\left[0;l\right]$, якщо $u\left(0;t\right)=u\left(l;t\right)=0$ при $t\geq 0$.

2.1 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{49}{100}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2, 0\leq x\leq 2,\\ 8-x, 2<x\leq 8.\end{cases}$

2.2 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{16}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}3x^2, 0\leq x\leq \frac{2}{3},\\ 2-x, \frac{2}{3}<x\leq 2.\end{cases}$

2.3 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{49}{81}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}36x^2, 0\leq x\leq \frac{2}{9},\\ 2-x, \frac{2}{9}<x\leq 2.\end{cases}$

2.4 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{36}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}10x^2, 0\leq x\leq \frac{9}{10},\\ 9-x, \frac{9}{10}<x\leq 9.\end{cases}$

2.5 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}x^2, 0\leq x\leq 2,\\ 6-x, 2<x\leq 6.\end{cases}$

2.6 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{100}{81}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}6x^2, 0\le x\le \frac{1}{3},\\ 1-x, \frac{1}{3}<x\le 1.\end{cases}$

2.7 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{9}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{12}{11}x^2, 0\le x\le \frac{11}{4},\\ 11-x, \frac{11}{4}<x\le 11.\end{cases}$

2.8 $\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{56}{5}x^2, 0\le x\le \frac{5}{8},\\ 5-x, \frac{5}{8}<x\le 5.\end{cases}$

2.9 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{16}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{56}{9}x^2, 0\le x\le \frac{9}{8},\\ 9-x, \frac{9}{8}<x\le 9.\end{cases}$

2.10 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{16}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{56}{3}x^2, 0\le x\le \frac{3}{8},\\ 3-x, \frac{3}{8}<x\le 3.\end{cases}$

2.11 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{25}{121}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{21}{2}x^2, 0\le x\le \frac{4}{7},\\ 4-x, \frac{4}{7}<x\le 4.\end{cases}$

2.12 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{16}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{55}{3}x^2, 0\le x\le \frac{6}{11},\\ 6-x, \frac{6}{11}<x\le 6.\end{cases}$

2.13 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{4}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{110}{9}x^2, 0 \le x \le \dfrac{9}{11}, \\ 9 - x, \dfrac{9}{11} < x \le 9. \end{cases}$

2.14 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 4x^2, 0 \le x \le 1, \\ 5 - x, 1 < x \le 5. \end{cases}$

2.15 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 100\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2, 0 \le x \le 2, \\ 8 - x, 2 < x \le 8. \end{cases}$

2.16 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{9}{64}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2, 0 \le x \le 2, \\ 8 - x, 2 < x \le 8. \end{cases}$

2.17 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{64}{25}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 7x^2, 0 \le x \le 1, \\ 8 - x, 1 < x \le 8. \end{cases}$

2.18 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{4}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 3x^2, 0 \le x \le \dfrac{5}{3}, \\ 10 - x, \dfrac{5}{3} < x \le 10. \end{cases}$

2.19 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{100}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 30x^2, 0 \le x \le \dfrac{3}{10}, \\ 3 - x, \dfrac{3}{10} < x \le 3. \end{cases}$

2.20 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{4}{81}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{20}{7}x^2, 0 \le x \le \dfrac{7}{5}, \\ 7 - x, \dfrac{7}{5} < x \le 7. \end{cases}$

2.21 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{16}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 10x^2, 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 3 - x, \frac{1}{2} < x \le 3. \end{cases}$

2.22 $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 6x^2, 0 \le x \le \frac{1}{3}, \\ 1 - x, \frac{1}{3} < x \le 1. \end{cases}$

2.23 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 15x^2, 0 \le x \le \frac{1}{3}, \\ 2 - x, \frac{1}{3} < x \le 2. \end{cases}$

2.24 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{6}{5}x^2, 0 \le x \le \frac{5}{3}, \\ 5 - x, \frac{5}{3} < x \le 5. \end{cases}$

2.25 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{25}{81}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 21x^2, 0 \le x \le \frac{2}{7}, \\ 2 - x, \frac{2}{7} < x \le 2. \end{cases}$

2.26 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{9}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{10}{3}x^2, 0 \le x \le \frac{6}{5}, \\ 6 - x, \frac{6}{5} < x \le 6. \end{cases}$

2.27 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{81}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{2}{9}x^2, 0 \le x \le \frac{9}{2}, \\ 9 - x, \frac{9}{2} < x \le 9. \end{cases}$

2.28 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{100}{81}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{45}{2}x^2, 0\le x\le\frac{2}{5},\\ 4-x, \frac{2}{5}<x\le 4.\end{cases}$

2.29 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{81}{64}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}x^2, 0\le x\le 2,\\ 6-x, 2<x\le 6.\end{cases}$

2.30 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{49}{100}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}14x^2, 0\le x\le\frac{3}{7},\\ 3-x, \frac{3}{7}<x\le 3.\end{cases}$

2.31 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{4}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}6x^2, 0\le x\le\frac{1}{2},\\ 2-x, \frac{1}{2}<x\le 2.\end{cases}$

2.32 $\frac{\partial u}{\partial t}=25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^2, 0\le x\le 3,\\ 9-x, 3<x\le 9.\end{cases}$

2.33 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{25}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{56}{9}x^2, 0\le x\le\frac{9}{8},\\ 9-x, \frac{9}{8}<x\le 9.\end{cases}$

2.34 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{16}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}5x^2, 0\le x\le\frac{4}{5},\\ 4-x, \frac{4}{5}<x\le 4.\end{cases}$

2.35 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{10}{3}x^2, 0\le x\le \dfrac{3}{2},\\ 9-x, \dfrac{3}{2}<x\le 9.\end{cases}$

2.36 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{16}{25}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{14}{3}x^2, 0\le x\le \dfrac{9}{7},\\ 9-x, \dfrac{9}{7}<x\le 9.\end{cases}$

2.37 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{25}{49}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{12}{7}x^2, 0\le x\le \dfrac{7}{4},\\ 7-x, \dfrac{7}{4}<x\le 7.\end{cases}$

2.38 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{25}{64}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}10x^2, 0\le x\le \dfrac{1}{2},\\ 3-x, \dfrac{1}{2}<x\le 3.\end{cases}$

2.39 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{121}{100}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{45}{2}x^2, 0\le x\le \dfrac{2}{5},\\ 4-x, \dfrac{2}{5}<x\le 4.\end{cases}$

2.40 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{49}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}3x^2, 0\le x\le 1,\\ 4-x, 1<x\le 4.\end{cases}$

2.41 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}8x^2, 0\le x\le \dfrac{7}{8},\\ 7-x, \dfrac{7}{8}<x\le 7.\end{cases}$

2.42 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{121}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{6}{7}x^2, 0\le x\le\frac{7}{3},\\ 7-x, \frac{7}{3}<x\le 7.\end{cases}$

2.43 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{25}{121}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{56}{11}x^2, 0\le x\le\frac{11}{8},\\ 11-x, \frac{11}{8}<x\le 11.\end{cases}$

2.44 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{25}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{12}{7}x^2, 0\le x\le\frac{7}{4},\\ 7-x, \frac{7}{4}<x\le 7.\end{cases}$

2.45 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{64}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}6x^2, 0\le x\le\frac{1}{2},\\ 2-x, \frac{1}{2}<x\le 2.\end{cases}$

2.46 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{72}{5}x^2, 0\le x\le\frac{5}{9},\\ 5-x, \frac{5}{9}<x\le 5.\end{cases}$

2.47 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{100}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{6}{7}x^2, 0\le x\le\frac{7}{3},\\ 7-x, \frac{7}{3}<x\le 7.\end{cases}$

2.48 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{4}{81}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}6x^2, 0\le x\le\frac{1}{2},\\ 2-x, \frac{1}{2}<x\le 2.\end{cases}$

2.49 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{81}{25}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{56}{5}x^2, 0\le x\le \dfrac{5}{8},\\ 5-x, \dfrac{5}{8}<x\le 5.\end{cases}$

2.50 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}9x^2, 0\le x\le \dfrac{8}{9},\\ 8-x, \dfrac{8}{9}<x\le 8.\end{cases}$

2.51 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{36}{25}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}45x^2, 0\le x\le \dfrac{1}{5},\\ 2-x, \dfrac{1}{5}<x\le 2.\end{cases}$

2.52 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}10x^2, 0\le x\le \dfrac{9}{10},\\ 9-x, \dfrac{9}{10}<x\le 9.\end{cases}$

2.53 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{21}{5}x^2, 0\le x\le \dfrac{10}{7},\\ 10-x, \dfrac{10}{7}<x\le 10.\end{cases}$

2.54 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{25}{16}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{6}{5}x^2, 0\le x\le \dfrac{5}{2},\\ 10-x, \dfrac{5}{2}<x\le 10.\end{cases}$

2.55 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{49}{36}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x^2, 0\le x\le 4,\\ 8-x, 4<x\le 8.\end{cases}$

2.56 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{12}{7}x^2, 0 \le x \le \frac{7}{4}, \\ 7 - x, \frac{7}{4} < x \le 7. \end{cases}$

2.57 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, 0 \le x \le 2, \\ 8 - x, 2 < x \le 8. \end{cases}$

2.58 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{9}{100}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^2, 0 \le x \le \frac{9}{4}, \\ 9 - x, \frac{9}{4} < x \le 9. \end{cases}$

2.59 $\frac{\partial u}{\partial t} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{56}{11}x^2, 0 \le x \le \frac{11}{8}, \\ 11 - x, \frac{11}{8} < x \le 11. \end{cases}$

2.60 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{10}{3}x^2, 0 \le x \le \frac{3}{2}, \\ 9 - x, \frac{3}{2} < x \le 9. \end{cases}$

2.61 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{56}{9}x^2, 0 \le x \le \frac{9}{8}, \\ 9 - x, \frac{9}{8} < x \le 9. \end{cases}$

2.62 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{81}{100}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^2, 0 \le x \le \frac{3}{2}, \\ 3 - x, \frac{3}{2} < x \le 3. \end{cases}$

2.63 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{49}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}2x^2, 0\le x\le \frac{3}{2},\\ 6-x, \frac{3}{2}<x\le 6.\end{cases}$

2.64 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{49}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}11x^2, 0\le x\le \frac{10}{11},\\ 10-x, \frac{10}{11}<x\le 10.\end{cases}$

2.65 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{4}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}8x^2, 0\le x\le \frac{7}{8},\\ 7-x, \frac{7}{8}<x\le 7.\end{cases}$

2.66 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}4x^2, 0\le x\le \frac{3}{4},\\ 3-x, \frac{3}{4}<x\le 3.\end{cases}$

2.67 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{4}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}5x^2, 0\le x\le \frac{4}{5},\\ 4-x, \frac{4}{5}<x\le 4.\end{cases}$

2.68 $\frac{\partial u}{\partial t}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2, 0\le x\le \frac{8}{7},\\ 8-x, \frac{8}{7}<x\le 8.\end{cases}$

2.69 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{121}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}15x^2, 0\le x\le \frac{3}{5},\\ 6-x, \frac{3}{5}<x\le 6.\end{cases}$

2.70 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{4}{25}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{72}{5}x^2, 0\le x\le\dfrac{5}{9},\\ 5-x, \dfrac{5}{9}<x\le 5.\end{cases}$

2.71 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{49}{64}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{45}{4}x^2, 0\le x\le\dfrac{4}{5},\\ 8-x, \dfrac{4}{5}<x\le 8.\end{cases}$

2.72 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}5x^2, 0\le x\le\dfrac{4}{5},\\ 4-x, \dfrac{4}{5}<x\le 4.\end{cases}$

2.73 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{4}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}6x^2, 0\le x\le 1,\\ 7-x, 1<x\le 7.\end{cases}$

2.74 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{45}{2}x^2, 0\le x\le\dfrac{2}{5},\\ 4-x, \dfrac{2}{5}<x\le 4.\end{cases}$

2.75 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{49}{64}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}12x^2, 0\le x\le\dfrac{1}{4},\\ 1-x, \dfrac{1}{4}<x\le 1.\end{cases}$

2.76 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{49}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}30x^2, 0\le x\le\dfrac{1}{6},\\ 1-x, \dfrac{1}{6}<x\le 1.\end{cases}$

2.77 $\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{28}{5}x^2, 0\le x\le\frac{5}{4},\\ 10-x, \frac{5}{4}<x\le 10.\end{cases}$

2.78 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{81}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{56}{9}x^2, 0\le x\le\frac{9}{8},\\ 9-x, \frac{9}{8}<x\le 9.\end{cases}$

2.79 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{16}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}28x^2, 0\le x\le\frac{1}{4},\\ 2-x, \frac{1}{4}<x\le 2.\end{cases}$

2.80 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{15}{2}x^2, 0\le x\le\frac{2}{3},\\ 4-x, \frac{2}{3}<x\le 4.\end{cases}$

2.81 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{81}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{3}{4}x^2, 0\le x\le\frac{8}{3},\\ 8-x, \frac{8}{3}<x\le 8.\end{cases}$

2.82 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}30x^2, 0\le x\le\frac{3}{10},\\ 3-x, \frac{3}{10}<x\le 3.\end{cases}$

2.83 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{81}{100}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{110}{9}x^2, 0\le x\le\frac{9}{11},\\ 9-x, \frac{9}{11}<x\le 9.\end{cases}$

2.84 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{81}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 9x^2, 0 \le x \le 1, \\ 10 - x, 1 < x \le 10. \end{cases}$

2.85 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{121}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{30}{7}x^2, 0 \le x \le \frac{7}{6}, \\ 7 - x, \frac{7}{6} < x \le 7. \end{cases}$

2.86 $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{10}{3}x^2, 0 \le x \le \frac{3}{2}, \\ 9 - x, \frac{3}{2} < x \le 9. \end{cases}$

2.87 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{25}{81}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 18x^2, 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 5 - x, \frac{1}{2} < x \le 5. \end{cases}$

2.88 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{9}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 11x^2, 0 \le x \le \frac{10}{11}, \\ 10 - x, \frac{10}{11} < x \le 10. \end{cases}$

2.89 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{81}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{72}{7}x^2, 0 \le x \le \frac{7}{9}, \\ 7 - x, \frac{7}{9} < x \le 7. \end{cases}$

2.90 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 5x^2, 0 \le x \le \frac{4}{5}, \\ 4 - x, \frac{4}{5} < x \le 4. \end{cases}$

2.91 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{49}{16}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{72}{5}x^2, 0\le x\le \dfrac{5}{9},\\ 5-x, \dfrac{5}{9}<x\le 5.\end{cases}$

2.92 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{72}{7}x^2, 0\le x\le \dfrac{7}{9},\\ 7-x, \dfrac{7}{9}<x\le 7.\end{cases}$

2.93 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{16}{25}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}6x^2, 0\le x\le 1,\\ 7-x, 1<x\le 7.\end{cases}$

2.94 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{36}{25}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{90}{7}x^2, 0\le x\le \dfrac{7}{10},\\ 7-x, \dfrac{7}{10}<x\le 7.\end{cases}$

2.95 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{25}{81}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{55}{3}x^2, 0\le x\le \dfrac{6}{11},\\ 6-x, \dfrac{6}{11}<x\le 6.\end{cases}$

2.96 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{100}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}15x^2, 0\le x\le \dfrac{3}{5},\\ 6-x, \dfrac{3}{5}<x\le 6.\end{cases}$

2.97 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=100\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{6}{11}x^2, 0\le x\le \dfrac{11}{3},\\ 11-x, \dfrac{11}{3}<x\le 11.\end{cases}$

2.98 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}11x^2, 0\le x\le\frac{10}{11},\\ 10-x, \frac{10}{11}<x\le 10.\end{cases}$

2.99 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{81}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{3}{4}x^2, 0\le x\le\frac{8}{3},\\ 8-x, \frac{8}{3}<x\le 8.\end{cases}$

2.100 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^2, 0\le x\le 3,\\ 6-x, 3<x\le 6.\end{cases}$

Завдання 3

Розв'язати крайову задачу для хвильового рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо $u(0,t)=u(l,t)=0$, $u(x,0)=f(x)$, $u'_t(x;0)=g(x)$ $(0\le x\le l)$.

3.1 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=9$; $u(x,0)=-0,2x(x-9)$; $u'(x,0)=10x+5$.

3.2 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=4$; $u(x,0)=-0,1x(x-4)$; $u'(x,0)=-7x-6$.

3.3 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=2$; $u(x,0)=0,3x(x-2)$; $u'(x,0)=10x-8$.

3.4 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{100}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=8$; $u(x,0)=0,3x(x-8)$; $u'(x,0)=-6$.

3.5 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{4}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=4$; $u(x,0)=x(x-4)$; $u'(x,0)=-8x+1$.

3.6 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{16}{81}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=8$; $u(x,0)=0,3x(x-8)$; $u'(x,0)=2x+9$.

3.7 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{100}{81}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=2$; $u(x,0)=0,3x(x-2)$; $u'(x,0)=-10x-10$.

3.8 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{25}{64}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=3$; $u(x,0)=-0,1x(x-3)$; $u'(x,0)=-7x+1$.

3.9 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{16}{81}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=9$; $u(x,0)=-0,7x(x-9)$; $u'(x,0)=-4x-7$.

3.10 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{4}{25}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=9$; $u(x,0)=-0,2x(x-9)$; $u'(x,0)=-2x-3$.

3.11 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=8$; $u(x,0)=-0,2x(x-8)$; $u'(x,0)=3x+3$.

3.12 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{25}{16}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=10$; $u(x,0)=0,2x(x-10)$; $u'(x,0)=-x+4$.

3.13 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=2$; $u(x,0)=0,3x(x-2)$; $u'(x,0)=-5x+7$.

3.14 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{25}{64}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=7$; $u(x,0)=-x(x-7)$; $u'(x,0)=-3x+2$.

3.15 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=6$; $u(x,0)=0,7x(x-6)$; $u'(x,0)=-3x+3$.

3.16 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{16}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=8$; $u(x,0)=0,8x(x-8)$; $u'(x,0)=x-9$.

3.17 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{25}{16}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=7$; $u(x,0)=0,5x(x-7)$; $u'(x,0)=0$.

3.18 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{64}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=4$; $u(x,0)=-0,4x(x-4)$; $u'(x,0)=-9x+5$.

3.19 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{9}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=9$; $u(x,0)=-0,7x(x-9)$; $u'(x,0)=x+4$.

3.20 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=64\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=9$; $u(x,0)=-0,6x(x-9)$; $u'(x,0)=-5x+5$.

3.21 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{25}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=1$; $u(x,0)=-0,2x(x-1)$; $u'(x,0)=-9x-7$.

3.22 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{25}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=10$; $u(x,0)=0,3x(x-10)$; $u'(x,0)=-7x+5$.

3.23 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=5$; $u(x,0)=-0,4x(x-5)$; $u'(x,0)=4x-7$.

3.24 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{49}{100}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=7$; $u(x,0)=0,4x(x-7)$; $u'(x,0)=x-2$.

3.25 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{81}{100}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=7$; $u(x,0)=0,4x(x-7)$; $u'(x,0)=-7x-9$.

3.26 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=6$; $u(x,0)=0,6x(x-6)$; $u'(x,0)=-3x$.

3.27 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{81}{25}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=7$; $u(x,0)=-0,3x(x-7)$; $u'(x,0)=x+5$.

3.28 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{64}{81}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=9$; $u(x,0)=-x(x-9)$; $u'(x,0)=9x+8$.

3.29 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{4}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=8$; $u(x,0)=x(x-8)$; $u'(x,0)=-6x$.

3.30 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{16}{25}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=4$; $u(x,0)=-0,8x(x-4)$; $u'(x,0)=5x+5$.

3.31 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{9}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=6$; $u(x,0)=0,6x(x-6)$; $u'(x,0)=5x-7$.

3.32 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=6$; $u(x,0)=-0,5x(x-6)$; $u'(x,0)=1$.

3.33 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=2$; $u(x,0)=0,9x(x-2)$; $u'(x,0)=-4x-2$.

3.34 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{25}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=7$; $u(x,0)=0,4x(x-7)$; $u'(x,0)=x+4$.

3.35 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=100\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=6$; $u(x,0)=-0,6x(x-6)$; $u'(x,0)=8x+2$.

3.36 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{64}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=6$; $u(x,0)=0,7x(x-6)$; $u'(x,0)=8x-8$.

3.37 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=7$; $u(x,0)=-0,6x(x-7)$; $u'(x,0)=8x-5$.

3.38 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=10$; $u(x,0)=-0,8x(x-10)$; $u'(x,0)=-6x+7$.

3.39 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{9}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=1$; $u(x,0)=0,7x(x-1)$; $u'(x,0)=-x+9$.

3.40 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{81}{100}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=1$; $u(x,0)=-0,3x(x-1)$; $u'(x,0)=9x-1$.

3.41 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{25}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=2$; $u(x,0)=0,5x(x-2)$; $u'(x,0)=6x+6$.

3.42 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{100}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=4$; $u(x,0)=0,6x(x-4)$; $u'(x,0)=7x-2$.

3.43 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{25}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=1$; $u(x,0)=-0,2x(x-1)$; $u'(x,0)=8x-4$.

3.44 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=6$; $u(x,0)=0,6x(x-6)$; $u'(x,0)=6x-7$.

3.45 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{16}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=8$; $u(x,0)=0,9x(x-8)$; $u'(x,0)=10x-10$.

3.46 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{9}{100}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=1$; $u(x,0)=-0,5x(x-1)$; $u'(x,0)=5x+8$.

3.47 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=10$; $u(x,0)=x(x-10)$; $u'(x,0)=-5x+10$.

3.48 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{16}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=3$; $u(x,0)=0,9x(x-3)$; $u'(x,0)=7x+9$.

3.49 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=9$; $u(x,0)=0,7x(x-9)$; $u'(x,0)=7x-2$.

3.50 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=8$; $u(x,0)=0,2x(x-8)$; $u'(x,0)=-2x+2$.

3.51 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{16}{81}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=1$; $u(x,0)=x(x-1)$; $u'(x,0)=5x+6$.

3.52 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{25}{81}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=5$; $u(x,0)=0,1x(x-5)$; $u'(x,0)=7x+4$.

3.53 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{81}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=2$; $u(x,0)=-0,4x(x-2)$; $u'(x,0)=-4x-6$.

3.54 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=5$; $u(x,0)=0,4x(x-5)$; $u'(x,0)=-3x+4$.

3.55 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{36}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=3$; $u(x,0)=0,2x(x-3)$; $u'(x,0)=x-7$.

3.56 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{4}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=6$; $u(x,0)=0,1x(x-6)$; $u'(x,0)=8x+8$.

3.57 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=9$; $u(x,0)=-0,5x(x-9)$; $u'(x,0)=-6$.

3.58 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{25}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=6$; $u(x,0)=-0,6x(x-6)$; $u'(x,0)=5x+1$.

3.59 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=9$; $u(x,0)=-0,4x(x-9)$; $u'(x,0)=8x-8$.

3.60 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=7$; $u(x,0)=-0,2x(x-7)$; $u'(x,0)=-7x-7$.

3.61 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=7$; $u(x,0)=-0{,}2x(x-7)$; $u'(x,0)=9x-6$.

3.62 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=4$; $u(x,0)=0{,}8x(x-4)$; $u'(x,0)=7x+1$.

3.63 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{16}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=4$; $u(x,0)=-0{,}7x(x-4)$; $u'(x,0)=x$.

3.64 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{100}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=9$; $u(x,0)=-0{,}1x(x-9)$; $u'(x,0)=5x+8$.

3.65 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{49}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=6$; $u(x,0)=0{,}2x(x-6)$; $u'(x,0)=-3x-10$.

3.66 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{16}{81}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=3$; $u(x,0)=0{,}1x(x-3)$; $u'(x,0)=-8x-7$.

3.67 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{16}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=9$; $u(x,0)=-0{,}5x(x-9)$; $u'(x,0)=-x+4$.

3.68 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{49}{81}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=9$; $u(x,0)=0{,}2x(x-9)$; $u'(x,0)=-x-3$.

3.69 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{9}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=4$; $u(x,0)=x(x-4)$; $u'(x,0)=x-8$.

3.70 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{4}{49}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=6$; $u(x,0)=x(x-6)$; $u'(x,0)=-2x+4$.

3.71 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{100}{49}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=7$; $u(x,0)=0{,}9x(x-7)$; $u'(x,0)=5x-10$.

3.72 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 6$; $u(x,0) = 0,2x(x-6)$; $u'(x,0) = -6x - 5$.

3.73 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 10$; $u(x,0) = -0,4x(x-10)$; $u'(x,0) = -10x - 6$.

3.74 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 8$; $u(x,0) = -0,6x(x-8)$; $u'(x,0) = 2x - 9$.

3.75 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{4}{81}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 1$; $u(x,0) = 0,8x(x-1)$; $u'(x,0) = x + 1$.

3.76 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{16}{81}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 3$; $u(x,0) = 0,1x(x-3)$; $u'(x,0) = 4x - 7$.

3.77 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{25}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 4$; $u(x,0) = -0,7x(x-4)$; $u'(x,0) = -x - 6$.

3.78 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{64}{49}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 7$; $u(x,0) = -0,3x(x-7)$; $u'(x,0) = 7x - 10$.

3.79 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{100}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 10$; $u(x,0) = -0,3x(x-10)$; $u'(x,0) = 5x - 7$.

3.80 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{64}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 2$; $u(x,0) = 0,2x(x-2)$; $u'(x,0) = 2x - 4$.

3.81 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{100}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 6$; $u(x,0) = -0,4x(x-6)$; $u'(x,0) = 7x - 6$.

3.82 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{9}{64}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 5$; $u(x,0) = -0,6x(x-5)$; $u'(x,0) = -4x + 4$.

3.83 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{49}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 10$; $u(x,0) = 0{,}3x(x-10)$; $u'(x,0) = 7$.

3.84 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{64}{49}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 6$; $u(x,0) = -0{,}9x(x-6)$; $u'(x,0) = -2x-10$.

3.85 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 3$; $u(x,0) = -0{,}3x(x-3)$; $u'(x,0) = -5x$.

3.86 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{4}{25}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 9$; $u(x,0) = 0{,}7x(x-9)$; $u'(x,0) = x+9$.

3.87 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{25}{64}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 10$; $u(x,0) = -0{,}4x(x-10)$; $u'(x,0) = -4x-2$.

3.88 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 5$; $u(x,0) = 0{,}8x(x-5)$; $u'(x,0) = -7x-8$.

3.89 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 10$; $u(x,0) = 0{,}2x(x-10)$; $u'(x,0) = 4x+4$.

3.90 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{9}{25}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 7$; $u(x,0) = 0{,}2x(x-7)$; $u'(x,0) = 10x+4$.

3.91 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{9}{64}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 2$; $u(x,0) = -x(x-2)$; $u'(x,0) = x-5$.

3.92 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{9}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 5$; $u(x,0) = 0{,}1x(x-5)$; $u'(x,0) = 5x-5$.

3.93 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{9}{100}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 2$; $u(x,0) = -0{,}9x(x-2)$; $u'(x,0) = -3x+1$.

3.94 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 4$; $u(x,0) = 0,9x(x-4)$; $u'(x,0) = 9x+1$.

3.95 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{25}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 3$; $u(x,0) = 0,6x(x-3)$; $u'(x,0) = -9x-6$.

3.96 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 64\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 5$; $u(x,0) = -0,7x(x-5)$; $u'(x,0) = -5x+4$.

3.97 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 10$; $u(x,0) = 0,3x(x-10)$; $u'(x,0) = x+6$.

3.98 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 5$; $u(x,0) = -0,4x(x-5)$; $u'(x,0) = -8x-1$.

3.99 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{49}{64}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 3$; $u(x,0) = -0,9x(x-3)$; $u'(x,0) = 7x-3$.

3.100 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 3$; $u(x,0) = -0,5x(x-3)$; $u'(x,0) = -3x+9$.

Завдання 4

Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ в крузі при заданих крайових умовах.

4.1 $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi) = -9\varphi^2 - 3\varphi - 8$.

4.2 $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi) = 5\varphi^2 - 3\varphi + 4$.

4.3 $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi) = -4\varphi^2 + 4$.

4.4 $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi) = -7\varphi^2 - 9\varphi + 10$.

4.5 $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi) = 3\varphi^2 + 8\varphi - 9$.

4.6 $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi) = 6\varphi - 6$.

4.7 $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi) = -6\varphi^2 - \varphi - 8$.

4.8 $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi) = \varphi^2 + \varphi + 2$.

4.9 $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi) = \varphi^2 - 10\varphi + 4$.

4.10 $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi) = 4\varphi^2 + 5\varphi + 4$.

4.11 $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi) = -8\varphi^2 - 8\varphi - 10$.

4.12 $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi) = -2\varphi^2 - 2\varphi + 3$.

4.13 $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi) = -10\varphi - 3$.

4.14 $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi) = 5\varphi^2 + 10\varphi + 8$.

4.15 $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi) = -5\varphi^2 + 6\varphi - 2$.

4.16 $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi) = 6\varphi^2 + \varphi - 1$.

4.17 $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi) = -5\varphi^2 - 4\varphi + 6$.

4.18 $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi) = -5\varphi^2 + \varphi + 4$.

4.19 $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi) = -7\varphi^2 - 9\varphi + 1$.

4.20 $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi) = 10\varphi^2 - 8\varphi + 1$.

4.21 $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi) = 10\varphi^2 + \varphi + 6$.

4.22 $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi) = -6\varphi^2 + 4\varphi - 4$.

4.23 $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi) = \varphi^2 + 6\varphi + 9$.

4.24 $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi) = -\varphi^2 - \varphi + 6$.

4.25 $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi) = 10\varphi^2 + 6\varphi - 1$.

4.26 $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi) = 5\varphi^2 + 9\varphi - 7$.

4.27 $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi) = -3\varphi^2 - 10\varphi - 4$.

4.28 $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi) = -8\varphi^2 - 5\varphi - 6$.

4.29 $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi) = 8\varphi^2 - 8\varphi - 5$.

4.30 $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi) = -6\varphi^2 - 10\varphi + 10$.

4.31 $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi) = 6\varphi^2 - 8\varphi + 4$.

4.32 $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi) = 8\varphi^2 - \varphi - 7$.

4.33 $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi) = -8\varphi + 6$.

4.34 $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi) = -3\varphi^2 - 10\varphi + 4$.

4.35 $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi) = -3\varphi^2 + 4\varphi - 4$.

4.36 $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi) = -8\varphi^2 - 8\varphi - 6$.

4.37 $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi) = 10\varphi^2 - 2\varphi + 9$.

4.38 $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi) = -9\varphi^2 - 6\varphi$.

4.39 $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi) = 6\varphi^2 + 5$.

4.40 $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi) = -4\varphi^2 + 3\varphi - 8$.

4.41 $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi) = 2\varphi^2 + 10\varphi + 6$.

4.42 $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi) = -\varphi^2 - 9\varphi + 7$.

4.43 $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi) = -10\varphi^2 + 3\varphi + 3$.

4.44 $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi) = -5\varphi^2 + 5\varphi - 10$.

4.45 $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi) = 10\varphi^2 - 9\varphi + 6$.

4.46 $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi) = 10\varphi^2 - 3\varphi - 3$.

4.47 $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi) = -4\varphi^2 - \varphi - 9$.

4.48 $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi) = -10\varphi^2 - 5\varphi - 7$.

4.49 $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi) = -10\varphi^2 - 9\varphi$.

4.50 $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi) = -5\varphi^2 - 8\varphi - 10$.

4.51 $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi) = -8\varphi^2 + \varphi - 4$.

4.52 $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi) = 7\varphi^2 - 3\varphi - 7$.

4.53 $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi) = 6\varphi^2 + 4\varphi + 7$.

4.54 $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi) = -5\varphi^2 + 3\varphi - 9$.

4.55 $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi) = -7\varphi^2 + 5\varphi + 6$.

4.56 $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi) = -5\varphi^2 - 2\varphi + 7$.

4.57 $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi) = 2\varphi^2 + 10\varphi + 8$.

4.58 $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi) = -8\varphi^2 - 2\varphi + 8$.

4.59 $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi) = -2\varphi^2 - 8\varphi - 4$.

4.60 $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi) = -8\varphi^2 - 9\varphi - 6$.

4.61 $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi) = -9\varphi^2 - 10\varphi - 8$.

4.62 $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi) = -6\varphi^2 - 7\varphi - 7$.

4.63 $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi) = -9\varphi^2 + 10\varphi + 7$.

4.64 $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi) = -2\varphi^2 - 5\varphi + 3$.

4.65 $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi) = -9\varphi^2 - 3\varphi - 9$.

4.66 $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi) = -5\varphi^2 - 10\varphi + 8$.

4.67 $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi) = 4\varphi^2 + 10\varphi + 4$.

4.68 $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi) = -2\varphi^2 - 9\varphi + 4$.

4.69 $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi) = 4\varphi^2 + 4\varphi + 3$.

4.70 $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi) = -8\varphi^2 - 7\varphi - 6$.

4.71 $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi) = 8\varphi^2 + 7\varphi - 4$.

4.72 $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi) = 4\varphi^2 + 9\varphi - 7$.

4.73 $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi) = -5\varphi^2 + 9\varphi - 10$.

4.74 $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi) = 10\varphi^2 - 7\varphi + 2$.

4.75 $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi) = 5\varphi^2 + 5\varphi$.

4.76 $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi) = 10\varphi^2 - 8$.

4.77 $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi) = -2\varphi^2 - 4\varphi$.

4.78 $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi) = -6\varphi^2 + 6\varphi + 4$.

4.79 $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi) = -3\varphi^2 + 10\varphi - 6$.

4.80 $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi) = -3\varphi^2 + 3\varphi + 8$.

4.81 $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi) = 10\varphi^2 - 5\varphi + 6$.

4.82 $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi) = \varphi^2 + 10\varphi$.

4.83 $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi) = -4\varphi^2 - 7\varphi + 5$.

4.84 $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi) = -9\varphi^2 - 10$.

4.85 $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi) = 10\varphi^2 + \varphi + 4$.

4.86 $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi) = 7\varphi^2 - 8\varphi - 6$.

4.87 $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi) = -4\varphi^2 - 9\varphi + 2$.

4.88 $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi) = 4\varphi^2 - 3$.

4.89 $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi) = 8\varphi^2 - 8\varphi - 2$.

4.90 $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi) = -5\varphi^2 + 3\varphi - 6$.

4.91 $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi) = -5\varphi^2 + 6\varphi$.

4.92 $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi) = -10\varphi^2 - 5\varphi + 10$.

4.93 $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi) = -6\varphi^2 - 8\varphi - 5$.

4.94 $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi) = -6\varphi^2 - 3\varphi - 6$.

4.95 $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi) = -\varphi^2 + 4\varphi - 1$.

4.96 $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi) = -9\varphi^2 + 4\varphi - 7$.

4.97 $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi) = 8\varphi^2 - 9\varphi + 8$.

4.98 $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi) = -3\varphi^2 - 5\varphi - 7$.

4.99 $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi) = -4\varphi^2 - 3\varphi + 5$.

4.100 $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi) = -9\varphi^2 + 9\varphi - 1$.

Завдання 5

Методом сіток знайти розв'язок рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при заданих крайових умовах $u(0;t) = g_1(t)$, $u(l;t) = g_2(t)$ та початковій умові $u(x;0) = f(x)$ для $x \in [0;0,6]$. Розв'язок виконувати при $h = 0,1$ для $t \in [0;0,01]$ з чотирма десятковими знаками при $\sigma = \frac{1}{6}$.

5.1 $u(x,0) = 9cos(-3x - 0,47) - 0,22$; $u(0,t) = t + 7,804$;
$u(0.6,t) = -4t - 6,012$.

5.2 $u(x,0) = 10x(4x - 0,29) + 0,1$; $u(0,t) = -4t + 0,1$;
$u(0.6,t) = 4t + 12,76$.

5.3 $u(x,0) = 5cos(3x + 0,33) + 0,28$; $u(0,t) = -t + 5,01$;
$u(0.6,t) = -2t - 2,373$.

5.4 $u(x,0) = 6x(-9x - 0,61) - 0,74$; $u(0,t) = -4t - 0,74$;
$u(0.6,t) = 5t - 22,376$.

5.5 $u(x,0) = 5cos(-4x - 0,17) - 0,71$; $u(0,t) = t + 4,218$;
$u(0.6,t) = t - 4,915$.

5.6 $u(x,0) = 4sin(4x + 0,47) + 0,87$; $u(0,t) = t + 2,682$;
$u(0.6,t) = 2t + 1,943$.

5.7 $u(x,0) = 7sin(-6x - 0,96) - 0,2$; $u(0,t) = t - 5,934$;
$u(0.6,t) = -4t + 6,719$.

5.8 $u(x,0) = 8cos(3x - 0,81) + 0,15$; $u(0,t) = -t + 5,666$;
$u(0.6,t) = t + 4,54$.

5.9 $u(x,0) = sin(-2x - 0,53) - 0,71$; $u(0,t) = -3t - 1,216$;
$u(0.6,t) = 3t - 1,697$.

5.10 $u(x,0) = 3x(10x + 0,33) + 0,83$; $u(0,t) = -3t + 0,83$;
$u(0.6,t) = -2t + 12,224$.

5.11 $u(x,0) = 9cos(-5x - 0,88) - 0,28$; $u(0,t) = t + 5,454$;
$u(0.6,t) = -3t - 6,936$.

5.12 $u(x,0) = 7ln(5x + 0,87) - 0,86$; $u(0,t) = 2t - 1,835$;
$u(0.6,t) = 5t + 8,613$.

5.13 $u(x,0) = 5sin(-2x + 0,51) - 0,42$; $u(0,t) = 2t + 2,021$;
$u(0.6,t) = 3t - 3,603$.

5.14 $u(x,0) = 2cos(-7x - 0,65) - 0,2$; $u(0,t) = 3t + 1,392$;
$u(0.6,t) = 5t + 0,074$.

5.15 $u(x,0) = 7x(x + 0,64) - 0,16$; $u(0,t) = -2t - 0,16$;
$u(0.6,t) = 2t + 5,048$.

5.16 $u(x,0) = ln(2x + 0,74) + 0,03$; $u(0,t) = -t - 0,271$;
$u(0.6,t) = t + 0,693$.

5.17 $u(x,0) = 5sin(8x - 0,99) - 0,02$; $u(0,t) = -3t - 4,2$;
$u(0.6,t) = 3t - 3,119$.

5.18 $u(x,0) = 10ln(10x + 0,3) - 0,36$; $u(0,t) = t - 12,4$;
$u(0.6,t) = -t + 18,045$.

5.19 $u(x,0) = 2sin(8x - 0,34) - 0,35$; $u(0,t) = 4t - 1,017$;
$u(0.6,t) = 4t - 2,287$.

5.20 $u(x,0) = 5cos(-3x + 0,21) + 0,52$; $u(0,t) = -5t + 5,41$;
$u(0.6,t) = t + 0,424$.

5.21 $u(x,0) = 3ln(6x + 0,23) - 0,52$; $u(0,t) = t - 4,929$;
$u(0.6,t) = t + 3,509$.

5.22 $u(x,0) = cos(5x + 0,3) - 0,83$; $u(0,t) = 2t + 0,125$;
$u(0.6,t) = 4t - 1,817$.

5.23 $u(x,0) = 9x(-x - 0,33) + 0,91$; $u(0,t) = 4t + 0,91$;
$u(0.6,t) = 2t - 4,112$.

5.24 $u(x,0) = 9x(-7x + 0,2) + 0,05$; $u(0,t) = t + 0,05$;
$u(0.6,t) = 4t - 21,55$.

5.25 $u(x,0) = 8sin(-2x - 0,55) + 0,96$; $u(0,t) = 2t - 3,221$;
$u(0.6,t) = -3t - 6,912$.

5.26 $u(x,0) = 10ln(4x + 0,4) + 0,05$; $u(0,t) = -3t - 9,113$;
$u(0.6,t) = t + 10,346$.

5.27 $u(x,0) = 2sin(-9x + 0,28) + 0,68$; $u(0,t) = 3t + 1,233$;
$u(0.6,t) = 2t + 2,516$.

5.28 $u(x,0) = 6ln(4x + 0,62) + 0,29$; $u(0,t) = t - 2,578$;
$u(0.6,t) = t + 6,922$.

5.29 $u(x,0) = 10ln(10x + 0,08) + 0,16$; $u(0,t) = -2t - 25,097$;
$u(0.6,t) = -5t + 18,21$.

5.30 $u(x,0) = 8ln(5x + 0,8) + 0,76$; $u(0,t) = 5t - 1,025$;
$u(0.6,t) = 5t + 11,44$.

5.31 $u(x,0) = 8cos(4x - 0,62) - 0,78$; $u(0,t) = -3t + 5,731$;
$u(0.6,t) = t - 2,441$.

5.32 $u(x,0) = 6ln(x + 0,02) + 0,34$; $u(0,t) = t - 23,132$;
$u(0.6,t) = -t - 2,528$.

5.33 $u(x,0) = 8ln(2x + 0,3) - 0,44$; $u(0,t) = -5t - 10,072$;
$u(0.6,t) = -5t + 2,804$.

5.34 $u(x,0) = cos(-6x + 0,2) - 0,02$; $u(0,t) = 3t + 0,96$;
$u(0.6,t) = -2t - 0,987$.

5.35 $u(x,0) = x(-6x - 0,56) - 0,63$; $u(0,t) = t - 0,63$;
$u(0.6,t) = -3t - 3,126$.

5.36 $u(x,0) = 6x(4x + 0,57) - 0,86$; $u(0,t) = t - 0,86$;
$u(0.6,t) = -4t + 9,832$.

5.37 $u(x,0) = 8x(-x - 0,32) + 0,51$; $u(0,t) = -t + 0,51$;
$u(0.6,t) = -4t - 3,906$.

5.38 $u(x,0) = 10x(-3x - 0,61) - 0,72$; $u(0,t) = 4t - 0,72$;
$u(0.6,t) = -2t - 15,18$.

5.39 $u(x,0) = 9ln(2x + 0,72) - 0,15$; $u(0,t) = t - 3,107$;
$u(0.6,t) = t + 5,721$.

5.40 $u(x,0) = 2ln(7x + 0,86) - 0,32$; $u(0,t) = -5t - 0,622$;
$u(0.6,t) = -3t + 2,923$.

5.41 $u(x,0) = ln(10x + 0,61) + 0,96$; $u(0,t) = -2t + 0,466$;
$u(0.6,t) = t + 2,849$.

5.42 $u(x,0)=10cos(4x-0,67)-0,3$; $u(0,t)=4t+7,538$;
$u(0.6,t)=-4t-1,885$.

5.43 $u(x,0)=5sin(8x+0,07)+0,67$; $u(0,t)=-4t+1,02$;
$u(0.6,t)=4t-4,268$.

5.44 $u(x,0)=7ln(5x+0,43)+0,44$; $u(0,t)=2t-5,468$;
$u(0.6,t)=5t+9,068$.

5.45 $u(x,0)=cos(7x-0,37)+0,35$; $u(0,t)=-5t+1,282$;
$u(0.6,t)=2t-0,422$.

5.46 $u(x,0)=3cos(-5x+0,29)-0,48$; $u(0,t)=-5t+2,395$;
$u(0.6,t)=4t-3,205$.

5.47 $u(x,0)=4cos(2x-0,54)-0,15$; $u(0,t)=-2t+3,281$;
$u(0.6,t)=-3t+3,01$.

5.48 $u(x,0)=7sin(x-0,44)-0,98$; $u(0,t)=4t-3,962$;
$u(0.6,t)=-2t+0,135$.

5.49 $u(x,0)=3cos(-5x-0,52)-0,64$; $u(0,t)=-2t+1,963$;
$u(0.6,t)=-3t-3,428$.

5.50 $u(x,0)=sin(8x+0,67)-0,04$; $u(0,t)=t+0,581$;
$u(0.6,t)=-5t-0,766$.

5.51 $u(x,0)=10ln(x+0,54)-0,68$; $u(0,t)=t-6,842$;
$u(0.6,t)=-t+0,63$.

5.52 $u(x,0)=8ln(8x+0,74)-0,1$; $u(0,t)=-4t-2,509$;
$u(0.6,t)=-3t+13,596$.

5.53 $u(x,0) = 9sin(-8x + 0,55) - 0,42$; $u(0,t) = 3t + 4,284$;
$u(0.6,t) = -5t + 7,635$.

5.54 $u(x,0) = 9ln(7x + 0,63) + 0,64$; $u(0,t) = 3t - 3,518$;
$u(0.6,t) = -5t + 14,814$.

5.55 $u(x,0) = 10sin(-6x - 0,72) + 0,77$; $u(0,t) = 5t - 5,824$;
$u(0.6,t) = 5t + 10,01$.

5.56 $u(x,0) = 5cos(4x + 0,81) + 0,06$; $u(0,t) = 2t + 3,507$;
$u(0.6,t) = -4t - 4,928$.

5.57 $u(x,0) = 5sin(-8x - 0,96) + 0,02$; $u(0,t) = -3t - 4,076$;
$u(0.6,t) = -2t + 2,518$.

5.58 $u(x,0) = sin(10x - 0,33) + 0,61$; $u(0,t) = 5t + 0,286$;
$u(0.6,t) = -2t + 0,035$.

5.59 $u(x,0) = 10cos(-x - 0,89) + 0,25$; $u(0,t) = -4t + 6,544$;
$u(0.6,t) = -t + 1,057$.

5.60 $u(x,0) = 7x(-8x + 0,02) - 0,1$; $u(0,t) = t - 0,1$;
$u(0.6,t) = 4t - 20,176$.

5.61 $u(x,0) = 8sin(-10x + 0,61) - 0,92$; $u(0,t) = 5t + 3,663$;
$u(0.6,t) = 5t + 5,313$.

5.62 $u(x,0) = 7sin(4x - 0,84) - 0,12$; $u(0,t) = 4t - 5,333$;
$u(0.6,t) = -2t + 6,88$.

5.63 $u(x,0) = 6x(-6x - 0,82) - 0,7$; $u(0,t) = 5t - 0,7$;
$u(0.6,t) = 2t - 16,612$.

5.64 $u(x,0) = 6sin(-x - 0,8) - 0,11$; $u(0,t) = t - 4,414$;
$u(0.6,t) = t - 6,023$.

5.65 $u(x,0) = 2cos(-4x + 0,86) - 0,29$; $u(0,t) = -4t + 1,015$;
$u(0.6,t) = t - 0,228$.

5.66 $u(x,0) = 9cos(-7x + 0,71) + 0,13$; $u(0,t) = -4t + 6,955$;
$u(0.6,t) = t - 8,329$.

5.67 $u(x,0) = x(-x - 0,8) + 0,77$; $u(0,t) = t + 0,77$;
$u(0.6,t) = -5t - 0,07$.

5.68 $u(x,0) = 6ln(7x + 0,31) + 0,57$; $u(0,t) = -t - 6,457$;
$u(0.6,t) = -4t + 9,608$.

5.69 $u(x,0) = cos(-7x - 0,54) + 0,71$; $u(0,t) = t + 1,568$;
$u(0.6,t) = -4t + 0,738$.

5.70 $u(x,0) = 3cos(10x + 0,66) - 0,32$; $u(0,t) = 2t + 2,05$;
$u(0.6,t) = -3t + 2,47$.

5.71 $u(x,0) = 2sin(-8x - 0,61) + 0,24$; $u(0,t) = -3t - 0,906$;
$u(0.6,t) = 5t + 1,773$.

5.72 $u(x,0) = 8ln(x + 0,62) + 0,44$; $u(0,t) = t - 3,384$;
$u(0.6,t) = t - 3,384$.

5.73 $u(x,0) = 10sin(-5x - 0,75) + 0,61$; $u(0,t) = 3t - 6,206$;
$u(0.6,t) = -3t + 6,326$.

5.74 $u(x,0) = 9ln(7x + 0,92) + 0,34$; $u(0,t) = 4t - 0,41$;
$u(0.6,t) = -t + 15,038$.

5.75 $u(x,0)=8sin(6x-0,19)-0,48$; $u(0,t)=t-1,991$;
$u(0.6,t)=t-2,602.$

5.76 $u(x,0)=9x(-6x+0,04)-0,66$; $u(0,t)=t-0,66$;
$u(0.6,t)=5t-19,884.$

5.77 $u(x,0)=6x(-6x+0,31)-0,78$; $u(0,t)=-4t-0,78$;
$u(0.6,t)=-5t-12,624.$

5.78 $u(x,0)=2ln(4x+0,02)-0,08$; $u(0,t)=4t-7,904$;
$u(0.6,t)=-3t+1,688.$

5.79 $u(x,0)=5sin(-7x+0,52)+0,43$; $u(0,t)=t+2,914$;
$u(0.6,t)=5t+2,994.$

5.80 $u(x,0)=8cos(9x+0,02)-0,94$; $u(0,t)=-t+7,058$;
$u(0.6,t)=2t+4,26.$

5.81 $u(x,0)=8x(4x+0,69)+0,37$; $u(0,t)=5t+0,37$;
$u(0.6,t)=3t+15,202.$

5.82 $u(x,0)=3ln(8x+0,45)+0,23$; $u(0,t)=5t-2,166$;
$u(0.6,t)=4t+5,205.$

5.83 $u(x,0)=sin(8x-0,42)+0,78$; $u(0,t)=3t+0,372$;
$u(0.6,t)=-2t-0,165.$

5.84 $u(x,0)=ln(5x+0,62)-0,58$; $u(0,t)=t-1,058$;
$u(0.6,t)=2t+0,706.$

5.85 $u(x,0)=4x(-4x+0,45)-0,13$; $u(0,t)=t-0,13$;
$u(0.6,t)=t-4,81.$

5.86 $u(x,0) = 8cos(8x - 0,26) - 0,9$; $u(0,t) = t + 6,831$; $u(0.6,t) = -t - 2,272$.

5.87 $u(x,0) = 6sin(3x - 0,94) + 0,37$; $u(0,t) = -2t - 4,475$; $u(0.6,t) = 4t + 4,917$.

5.88 $u(x,0) = 9cos(8x - 0,1) + 0,24$; $u(0,t) = -t + 9,195$; $u(0.6,t) = -2t + 0,129$.

5.89 $u(x,0) = 8cos(-x - 0,4) + 0,63$; $u(0,t) = 2t + 7,998$; $u(0.6,t) = 4t + 4,952$.

5.90 $u(x,0) = 6x(x - 0,85) - 0,98$; $u(0,t) = -5t - 0,98$; $u(0.6,t) = t - 4,04$.

5.91 $u(x,0) = 5cos(5x + 0,41) + 0,67$; $u(0,t) = 2t + 5,256$; $u(0.6,t) = -5t - 4,151$.

5.92 $u(x,0) = cos(2x - 0,79) +$; $u(0,t) = 2t + 1,704$; $u(0.6,t) = -2t + 1,917$.

5.93 $u(x,0) = 7x(2x + 0,53) + 0,65$; $u(0,t) = -3t + 0,65$; $u(0.6,t) = 3t + 7,916$.

5.94 $u(x,0) = 2ln(8x + 0,21) + 0,38$; $u(0,t) = 4t - 2,741$; $u(0.6,t) = 3t + 3,603$.

5.95 $u(x,0) = 6x(5x - 0,94) + 0,99$; $u(0,t) = 4t + 0,99$; $u(0.6,t) = 3t + 8,406$.

5.96 $u(x,0) = 7x(2x + 0,07) + 0,28$; $u(0,t) = 4t + 0,28$; $u(0.6,t) = -5t + 5,614$.

5.97 $u(x,0)=2cos(9x-0,79)+0,11$; $u(0,t)=3t+1,518$;
$u(0.6,t)=4t-0,094$.

5.98 $u(x,0)=10sin(8x-0,41)+0,66$; $u(0,t)=5t-3,326$;
$u(0.6,t)=3t-8,825$.

5.99 $u(x,0)=4x(-2x-0,75)+0,04$; $u(0,t)=4t+0,04$;
$u(0.6,t)=t-4,64$.

5.100 $u(x,0)=5sin(-7x-0,82)-0,37$; $u(0,t)=5t-4,026$;
$u(0.6,t)=2t+4,395$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Литвинюк В. П. Рівняння математичної фізики: Навчальний посібник. – Вінниця, ВДТУ, 2003. – 106 с.

2. Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І. Рівняння математичної фізики: Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 108 с.

3. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики: Підручник. – К.: Либідь, 2006. – 424 с.

4. Вища математика: Підручник: У 2-х кн. – К.: Либідь, 2003. – Кн. 2. Спеціальні розділи / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран та ін. – 368 с.

5. Тихонов А. Н., Самарський А. А. Уравнения математической физики. – М: Наука, 1972.

6. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985.

7. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.Численные методы анализа. – М.: Наука, 1968.

8. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнение в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970.

9. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969.

10. Самарский А. А. Теория разностных схем. – 3-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

14. Самарський А. А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1982.

15. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

16. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983.

17. Белевец П. С., Кожух И. Г. Задачник практикум по методам математической физики. – Мн.: Вышейша шк., 1989.

18. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1976.

СЛОВНИК НАЙБІЛЬШ ВЖИВАНИХ ТЕРМІНІВ

внутрішній вузол	internal node
вузол другого роду	node of the second sort
вузол першого роду	node of the first sort
вузол сітки	mesh node
гіперболічний	hyperbolic
двовимірний	two-dimensional
диференціал	differential
диференціальне рівняння	differential equation
диференціювання	differentiation
еліптичний	elliptic
загальний розв'язок	general solution
задача Діріхле	Dirichlet's problem
задача Неймана	Neumann problem
інтеграл	integral
канонічний вигляд	canonical form
квазілінійний	quasilinear
кількість змінних	amount of variables
крайові умови	boundary conditions
лінійний	linear
математична фізика	mathematical physics
межовий вузол	boundary node
метод відокремлення змінних	method of separation of variable
метод сіток	net-point method
метод Фур'є	Fourier method
моделювання	modelling
неявна схема	implicit scheme
одновимірний	one-dimensional
однорідний	homogeneous
оператор Лапласа	Laplace operator
параболічний	parabolic
первісна	primitive
порядок диференціального рівняння	degree of a differential equation
похідна	derivative
початкові умови	entry conditions

рівняння вимушених коливань струни	equation of forced oscillationses of a string
рівняння вільних коливань струни	equation of free oscillations of a string
рівняння коливання мембрани	equation of oscillation of a diaphragm
рівняння Лапласа	Laplace equatione
рівняння Пуассона	Poisson equation
рівняння теплопровідності	heat conduction equation
рівняння характеристик	equation of characteristics
різницева похідна	difference derivation
розв'язок	solution
розрахункова точка	rated point
ряд Тейлора	Taylor series
ряд Фур'є	Fourier series
сіткова область	net domain
скінченнорізницеві наближення	finite-difference approximation
стійкість	stability
сусідній вузол	neighboring node
теплове поле	thermal field
тривимірний	three-dimensional
умови Робена	Roben's conditions
функціональна залежність	functional association
функція	function
характеристики	characteristics
хвильове рівняння	wave equation
частинна похідна	partial derivative
частинний розв'язок	partial solution
явна схема	explicit scheme

Навчальне видання

Володимир Олександрович Краєвський

Спецкурс математичного аналізу

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено автором

Редактор О. Д. Скалоцька

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Гарнітура Times New Roman
Формат 29,7х42 $^1\!/_4$
Папір офсетний
Друк різографічний
Ум. друк. арк.
Тираж прим.
Зам. №

Віддруковано в комп’ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ