В.О. Краєвський

МАТЕМАТИКА

для довузівської підготовки іноземців

Частина 1

Вінниця, 2009

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В.О.Краєвський

Математика
для довузівської підготовки іноземців

Частина 1

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для довузівської підготовки студентів-іноземців. Протокол № від 2009р.

Вінниця ВНТУ 2009

УДК 517.958 (075)
К 78

Рецензенти:
В.А. Петрук, доктор педагогічних наук, професор
В.І. Клочко, доктор педагогічних наук, професор
Д.А. Найко, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Краєвський В. О.
К 78 **Математика для довузівської підготовки іноземців. Частина 1.** Навчальний посібник.. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 118 с.

У першій частині посібника містяться матеріали з арифметики і алгебри. До кожної теми розроблений теоретичний матеріал, в якому основний акцент робиться на вивченні студентами математичних термінів українською мовою. Теоретичний матеріал супроводжується великою кількістю прикладів розв'язання типових завдань. Після кожної теми приводяться практичні завдання для самостійної роботи.

Посібник розрахований на студентів-іноземців підготовчих факультетів вузів України.

УДК 517.958 (075)

Зміст

Вступ 4
Тема 1. Натуральні числа 5
Тема 2. Додавання 7
Тема 3. Віднімання 10
Тема 4. Множення 13
Тема 5. Ділення 17
Тема 6. Звичайні дроби 21
Тема 7. Десяткові дроби 26
Тема 8. Відношення, пропорції, відсотки (проценти) 32
Тема 9. Раціональні числа 36
Тема 10. Степінь 41
Тема 11. Одночлени, многочлени 44
Тема 12. Декартові координати на площині 52
Тема 13. Рівняння 57
Тема 14. Системи рівнянь 61
Тема 15. Корінь n-го степеня. Степінь з раціональним показником 66
Тема 16. Квадратні рівняння 74
Тема 17. Функції та графіки 78
Тема 18. Нерівності 86
Тема 19. Показникова та логарифмічна функції 93
Тема 20. Послідовність. Арифметична прогресія. Геометрична прогресія 106
Список літератури 112
Словник найбільш вживаних термінів 113

Вступ

Математика вивчає кількісні відношення та просторові форми навколишнього світу. Поняття та об'єкти математики являють собою абстракції кількісних відношень та просторових форм, які спостерігаються в природі. Вивчаючи матеріальні процеси з кількісної сторони, мають справу з багатьма величинами. Наприклад, різноманітні фізичні процеси характеризуються такими величинами, як маса, густина, температура, теплоємність, сила та напруга струму тощо. У хімії користуються такими поняттями, як валентність, атомна маса, моль, в геометрії — довжина відрізка, площа, об'єм і т. д. Вивчаючи математичний бік явищ, цікавляться тільки числовими значеннями величин, не зважаючи на їхній конкретний зміст.

Елементарна математика в основному має справу із сталими величинами та з найпростішими геометричними фігурами (трикутник, коло тощо) і обмежується лише початковим вивченням кількісних відношень та просторових форм. Понять та методів елементарної математики не досить для опису процесів, які характеризуються змінними величинами. Введення в математику поняття змінної величини і функції дало змогу перейти від розв'язування окремих фізичних та геометричних задач до створення загальних методів розв'язування цих задач.

Навчальний посібник відповідає програмі курсу математики для студентів-іноземців підготовчих факультетів вузів України. Крім того може використовуватись абітурієнтами, які готуються до вступних іспитів у вузи. Мета його – забезпечити ґрунтовне засвоєння теоретичного матеріалу з основних розділів математики, сприяти формуванню навичок застосування теоретичного матеріалу для розв'язання конкретних прикладів, допомогти студентам при самостійному розв'язанні задач.

Складається посібник із двох частин, які видаються окремими книжками. У першій частині містяться матеріали з арифметики і алгебри. У другу частини увійшли теоретичний матеріал та завдання із векторної алгебри, тригонометрії, початкам аналізу, комбінаторики, теорії комплексних чисел та геометрії.

Тема 1

НАТУРАЛЬНІ ЧИСЛА

Natural numbers

1 – один
2 – два
3 – три
4 – чотири
5 – п'ять
6 – шість
7 – сім
8 – вісім
9 – дев'ять
10 – десять
11 – одинадцять
12 – дванадцять
13 – тринадцять
14 – чотирнадцять
15 – п'ятнадцять
16 – шістнадцять
17 – сімнадцять
18 – вісімнадцять
19 – дев'ятнадцять
20 – двадцять
30 – тридцять
40 – сорок

50 – п'ятдесят
60 – шістдесят
70 – сімдесят
80 – вісімдесят
90 – дев’яносто
100 – сто
200 – двісті
300 – триста
400 – чотириста
500 – п'ятсот
600 – шістсот
700 – сімсот
800 – вісімсот
900 – дев'ятсот
1 000 – одна тисяча
2 000 – дві тисячі
…
1 000 000 – один мільйон
2 000 000 – два мільйона
…
1 000 000 – один мільярд
2 000 000 – два мільярда

Числа 1, 2, 3,..., які вживаються для лічби (**лічба** – *counting*) предметів, називаються натуральними числами (**натуральне число –** *natural number*). Вони записуються за допомогою десяти цифр (**цифра** - *figure*): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Кожна цифра визначає у числі розряд (**розряд числа** – *number position*). Розряди називаються справа наліво, починаючи з нижчого: одиниці, десятки, сотні, тисячі, ... Якщо в числі відсутній який-небудь розряд, то в запису числа на його місці стоїть цифра 0. ***Наприклад*** ***(for example)***, *у числі 307 898 міститься 8 одиниць, 9 десятків, 8 сотень, 7 тисяч, 0 десятків тисяч і 3 сотні тисяч.*

У запису числа розряди, починаючи справа, групуються в класи **(клас – *number class*)**, по три розряди в кожному. Перші три розряди утворюють клас одиниць, наступні три цифри утворюють клас тисяч, далі – клас мільйонів, потім – мільярдів.

Наприклад, число 56 – складається лише з класу одиниць, число 1 345 829 409 – містить клас одиниць, тисяч, мільйонів та мільярдів.

Числа читаються зліва направо, починаючи із старшого класу. Спочатку читають число, яке утворюється цифрами даного класу (зліва направо, спочатку розряд сотень, потім десятків і, нарешті, – одиниць) потім називають сам клас, і далі переходять до наступного класу. Клас одиниць не називається.

Наприклад,

34 – тридцять чотири

13 456 – тринадцять тисяч чотириста п'ятдесят шість

456 782 045 – чотириста п'ятдесят шість мільйонів сімсот вісімдесят дві тисячі сорок п'ять

число 783 502 197 048 читаємо: сімсот вісімдесят три мільярди п'ятсот два мільйони сто дев'яносто сім тисяч сорок вісім.

Вправи (exercises)

1. Прочитай (*read*) такі числа:

5003, 424 671, 89 901, 70 200, 62 050 000, 47 350 406, 5 730 600 201.

2. Запиши (*write*) такі числа цифрами:

1) вісімнадцять мільйонів шістсот п'ятдесят чотири тисячі триста два;

2) сто двадцять чотири мільйони п'ятсот двадцять тисяч сімдесят вісім;

3) двадцять дев'ять мільярдів;

4) дев'ять мільярдів сімсот шістдесят тисяч тридцять чотири;

5) шістсот чотири мільйони вісімнадцять тисяч шістдесят;

6) чотириста вісімдесят п'ять тисяч дев'ять;

7) двадцять мільйонів сімсот тридцять два;
8) три мільярди триста три;
9) п'ять мільярдів п'ять тисяч п'ять.

3. Прочитай:
1) довжина екватора Землі 40 075 696 м;
2) від Сонця до Землі 149 597 900 км;
3) один календарний рік дорівнює 31 557 600 с.

4. Попроси продиктувати (*ask to dictate*) тобі дані числа і запиши їх у зошит:
а) 43 008, 5 672 931, 400 270 000, 150 840;
б) 37 000 206, 9 807 100, 6006, 20 200 202;
в) 4 776 508, 32 276 000 000, 180 004.

Тема 2

ДОДАВАННЯ
Addition

+ - плюс *(plus)*, знак додавання *(plus sign)*

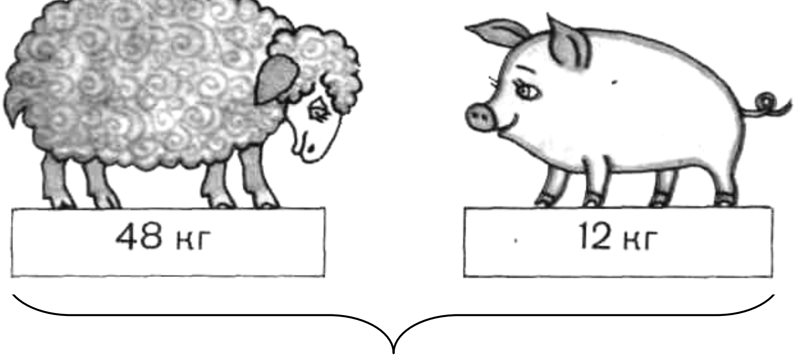
$$32 + 5 = 37$$

Числа 32 і 5 називаються доданками ***(*доданок** – ***item)***. 37 називається сумою ***(*сума** – ***sum)***. **Вираз (*expression*)** читається наступним чином:
32 плюс 5 дорівнює 37;
сума 32 і 5 дорівнює 37;
до 32 додати 5 дорівнює 37.

***Приклад* (*example*)** *1:*
***Знайти* (*find*)** *суму чисел 342 і 254.*
Розв'язання* (*solution*):*
342+254=596.

Якщо необхідно **визначити (*evaluate*)** значення A і B **разом** або **всього *(sum total)***, то значить необхідно обчислити суму $A+B$.

Приклад 2:



Вівця важить 48 кг. Порося важить 12 кг. Яка маса вівці і поросяти разом?

Розв'язання:

48+12=60 кг

Відповідь* (*answer*)*: вівця і порося разом важать 60 кг.

Приклад 3:

В одному пакеті 65 насінин. У другому – 47 насінин. Скільки всього насінин в двох пакетах?

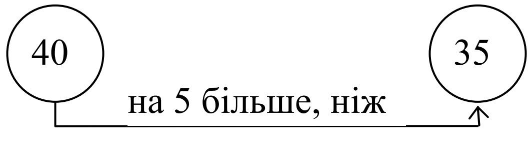
Розв'язання:

65+47=112 насінин.

Відповідь: в двох пакетах разом 112 насінин.

Якщо A **на *x* більше ніж (*greater by x than*)** B, або A **на *x* важче ніж (*heavier by x than*)** B, або A **на *x* довше ніж (*longer by x than*)** B, тоді $A=B+x$.

Приклад 4:



Отже, 35+5=40.

Приклад 5:

Порося важить 12 кг. Вівця на 36 кг важче. Скільки кілограм важить вівця?

Розв'язання:

12+36=48 кг

Відповідь: вівця важить 48 кг.

Якщо A **на** x **менше ніж** ***(less by x than)*** B, або A **на** x **легше ніж** ***(easier by x than)*** B, або A **на** x **коротше ніж** ***(shorter by x than)*** B, тоді $B = A + x$.

Приклад 6:

Порося на 36 кг легше вівці і важить 12 кг. Скільки кілограм важить вівця?

Розв'язання:

12+36=48 кг

Відповідь: вівця важить 48 кг.

Вправи

1. Прочитати різними способами наступні вирази:

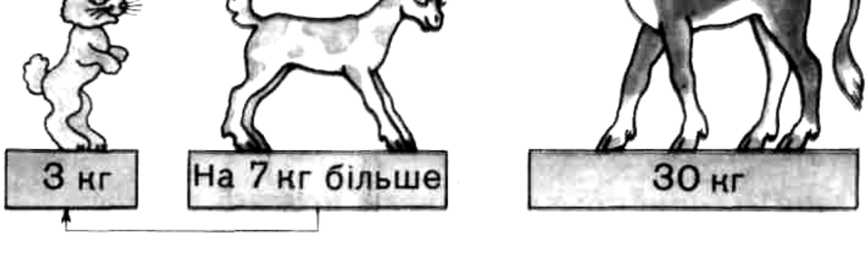
а) 23 345+873=24218;

б) 43+25=68;

в) 64+9=73.

2. Записати під диктовку вирази.

3. Маса кроля 3 кг, маса козеняти на 7 кг більша, а маса теляти 30 кг. Яка маса козеняти і теляти разом?



4. Число 3 786 496 на 604 589 менше від числа x. Знайди x.

5. Перший клас зібрав 149 кг, другий на 17 кг більше, ніж перший, а третій на 9 кг більше, ніж другий. Скільки яблук зібрали три класи разом?

6. Перший доданок 18 307, а другий на 8 009 більший ніж перший. Знайди їх суму.

7. Сашко, Сергійко і Олесь принесли свої марки на виставку. Сашко приніс 157 марок, Сергій на 86 марок більше, ніж Сашко, а Олесь на 48 марок більше, ніж Сергій і Сашко разом. Скільки всього марок принесли хлопці на виставку?

8. Зліва від знака рівності **(знак рівності - *equality sign*)** між цифрами постав знаки додавання так, щоб утворена **рівність (*equality*)** була правильною : 4 4 4 4 4 4 4 4 = 500

Тема 3

ВІДНІМАННЯ
Subtraction

– - мінус *(minus)*, знак віднімання *(minus sign)*

$$11 - 5 = 6$$

Число 11 **зменшуване *(minuend)***, 5 – **від'ємник *(subtrahend)***, 6 – **різниця *(difference)***. Вираз читається наступним чином:

11 мінус 5 дорівнює 6;

різниця чисел 11 і 5 дорівнює 6;

від 11 відняти 5 дорівнює 6.

Приклад 1:

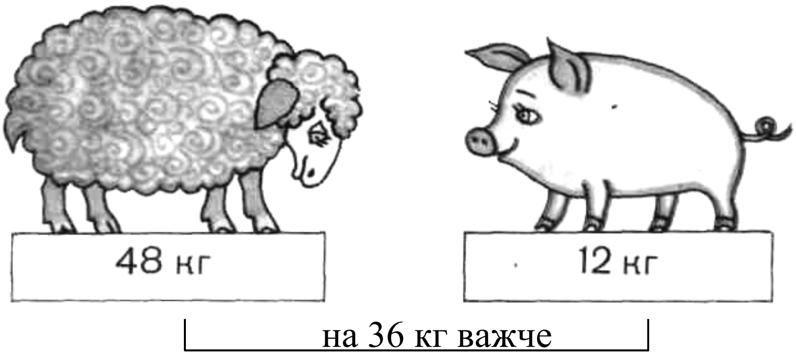
Знайти різницю чисел 356 і 67.

Розв’язання:

356-67=289.

Якщо A на x більше ніж B, або A на x важче ніж B, або A на x довше ніж B, тоді $B = A - x$.

Приклад 2:



Вівця важить 48 кг. Вівця на 36 кг важче порося. Скільки кілограм важить порося?

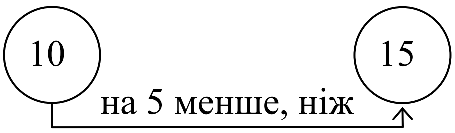
Розв'язання:

48-36=12 кг

Відповідь: порося важить 12 кг.

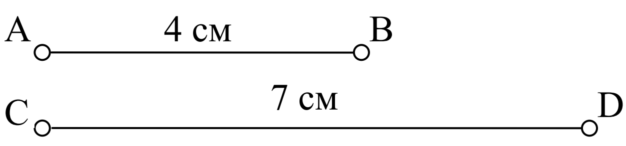
Якщо A на x менше ніж B, або A на x легше ніж B, або A на x коротше ніж B, тоді $A = B - x$.

Приклад 3:



10 на 5 менше 15. Отже, 15-5=10.

Приклад 4:



Відрізок CD=7 см. Відрізок AB на 3 см коротше відрізка CD. Тоді довжина відрізка AB: $7 - 3 = 4$ см.

Приклад 5:

На дроті сиділо 12 пташок. 2 пташки полетіли. Скільки пташок залишилось.

Розв'язання:

12-2=10 пташок.

Відповідь: залишилось 10 пташок.

Вправи

1. Прочитати різними способами наступні вирази:

а) 14 745-624=14121;

б) 853-46=807;

в) 734-598=136.

2. Записати під диктовку вирази.

3. Обчислити другий доданок, якщо:

1) сума двох доданків 30 000 і один з доданків 10 000;

2) сума двох доданків 56 000 і один з доданків 50 000.

4. Сума трьох доданків дорівнює 69 000. Один доданок 2 400, другий доданок 10 000. Обчисли третій доданок.

5. Зменшуване 25 000, від'ємник 17 080. Знайди різницю.

6. Сума трьох доданків 69 785. Один доданок 24 867, другий доданок 15 984. Знайди третій доданок.

7. Різниця двох чисел 472. Більше число 2000. Знайди менше число.

8. Різниця двох чисел 23 646. Менше число 8954. Знайди більше число.

9. Автомобіль має пройти за два дні 863 км. Першого дня він пройшов 487 км. Скільки кілометрів йому залишилось пройти другого дня?

10. Під час літніх канікул Женя, Федя і Зіна збирали лікарські рослини. Женя зібрав 1030 г, Федя на 180 г більше, Зіна на 640 г менше, ніж Женя і Федя разом. Скільки грамів лікарських рослин зібрали діти разом?

Тема 4

Множення

Multiplication

$\times$, $\cdot$ - **знак множення *(oblique cross)***

$$7 \cdot 5 = 35$$

Числа 7 і 5 називаються множниками (**множник** - ***multiplier***). 35 називається добутком (**добуток** - ***product***). Вираз читається наступним чином:

7 помножити на 5 дорівнює 35;

добуток 7 і 5 дорівнює 35;

7 на 5 дорівнює 35.

Переставний закон множення: від перестановки множників добуток не змінюється

$$a \cdot b = b \cdot a .$$

Якщо один з множників дорівнює нулю, то й сам добуток дорівнює нулю

$$a \cdot 0 = 0, \ 0 \cdot a = 0 .$$

Якщо добуток дорівнює нулю, то хоча б один з множників дорівнює нулю.

Сполучний закон множення: щоб добуток двох чисел помножити на третє число, можна перше число помножити на добуток другого і третього чисел

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Розподільний закон множення відносно додавання: щоб помножити суму на число, можна помножити на це число кожний доданок і ці добутки додати

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c .$$

Спільний множник ***(common factor)*** можна виносити за **дужки** ***(parenthesis)***

$$a\cdot b+b\cdot c=c\cdot\left(a+b\right).$$

Множення без калькулятора (**калькулятор** - ***calculator***)

Приклад 1:

$$
\begin{array}{lrr}
 & & 1459\\
 & \times & 275\\ \hline
1459\cdot 5= & 7295\rightarrow & 7295\\
1459\cdot 70= & 102130\rightarrow & 10213\\
1459\cdot 200= & \underline{291800}\rightarrow & \underline{2918}\\
 & 401225\rightarrow & 401225
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
76456\\
\times\ 478\\ \hline
611648\\
535192\\
\underline{305824}\\
36545968
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
258\\
\times\ 3004\\ \hline
1032\\
\underline{774}\\
775032
\end{array}
$$

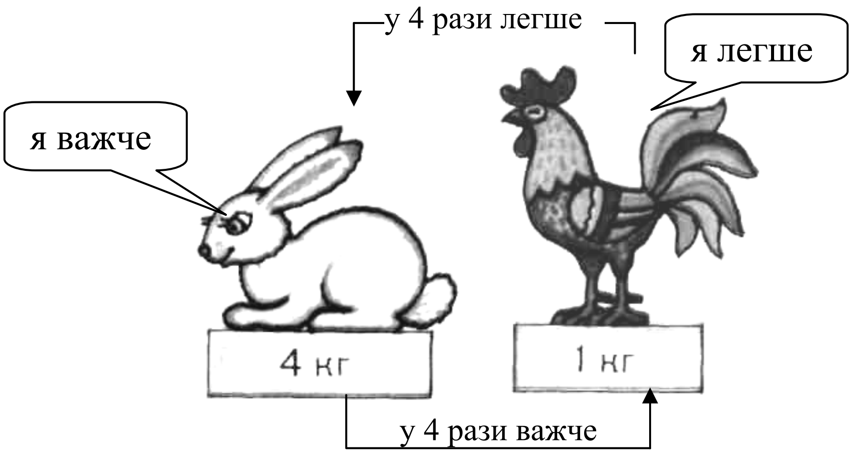
Отже,

1459·275=7295 76456·478=36545968 258·3004=775032

Якщо A **в** $\boldsymbol{x}$ **раз більше ніж** (***x times more than***) B, або A **в** $\boldsymbol{x}$ **раз важче ніж** (***x times heavier than***) B, або A **в** $\boldsymbol{x}$ **раз довше ніж** (***x times longer than***) B, тоді $A=B\cdot x$.

Якщо A **в** $\boldsymbol{x}$ **раз менше ніж** (***x times less than***) B, **або в** $\boldsymbol{x}$ **раз легше ніж** (***x times easier than***) B, або **в** $\boldsymbol{x}$ **раз коротше ніж** (***x times shorter than***) B, тоді $B=A\cdot x$.

Приклад 2: Півень важить 1 кг. Півень у 4 рази легше за зайця. Яка вага зайця?



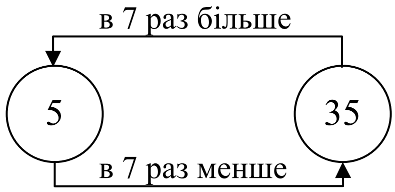
Розв'язання:

$1 \cdot 4 = 4$ *кг*

Відповідь: заєць важить 4 кг.

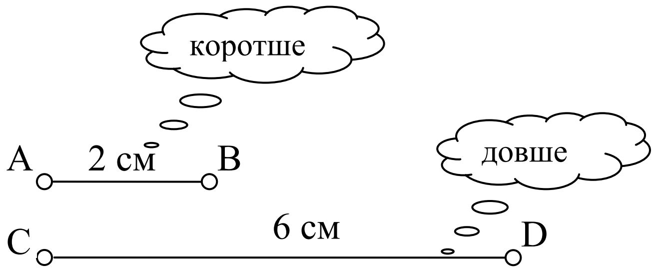
Приклад 3:

Число 35 у 7 раз більше за число 5. Число 5 у 7 раз менше за число 35.



Отже, $5 \cdot 7 = 35$.

Приклад 4: Відрізок AB *у 3 рази коротше ніж відрізок* CD. *Відрізок* CD *у 3 рази довше ніж відрізок* AB.



Тоді,

$l_{CD} = 3 \cdot l_{AB} = 3 \cdot 2 = 6$ *см.*

Вправи

1. Прочитати різними способами наступні вирази:

а) $394 \cdot 78 = 30732$;

б) $826 \cdot 438 = 361788$;

в) $48 \cdot 33 = 1584$.

2. Записати під диктовку вирази.

3. Знайти добуток не користуючись калькулятором

а) $4 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 125$;

б) $2 \cdot 14 \cdot 25 \cdot 5$;

в) $17 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 30$;

г) $45 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 2$;

д) $36 \cdot 25 \cdot 44 \cdot 0$;

е) $0 \cdot 243 \cdot 11 \cdot 63$;

є) $(40 \cdot 7) \cdot 3 \cdot 25$;

ж) $8 \cdot (125 \cdot 7 \cdot 3) \cdot 4$;

з) $298 \cdot 4 \cdot 50 \cdot 20$;

и) $498 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 8$;

і) $44 \cdot 75 \cdot 16 \cdot 125$;

к) $28 \cdot 50 \cdot 250 \cdot 16$.

4. Замінити додавання множенням (усно).

а) $4+4+4+4+4$;

б) $7+7+7+7$;

в) $3+3+3$;

г) $5+5+5+5+5+5$;

д) $12+12+12+12+12$.

5. У двох ящиках лежать помідори. У другому ящику у 3 рази більше помідорів, ніж у першому. Скільки помідорів разом в обох ящиках, якщо в першому ящику 12 кг?

6. Сергійко старший за свою сестру на 5 років, але молодший за батька у 3 рази. Скільки років Сергійкові і скільки років його батькові, якщо Сергійковій сестрі 8 років?

7. У магазин привезли 5 ящиків з фарбами. У кожному ящику було 144 коробки, а в кожній коробці 12 тюбиків з фарбами. Скільки тюбиків привезли в магазин?

8. Столяр і його помічник мають зробити 217 рам. Столяр за день робить 18 рам, а його помічник — 13. Скільки рам їм залишиться зробити після двох днів роботи?

9. Від двох пристаней одночасно назустріч один одному відійшли два катери і зустрілись через 2 год. Швидкість одного з них 22 км/год, швидкість другого 27 км/год. Знайди відстань між пристанями.

10. На пасіці 164 вулика. Передбачалось з кожного вулика одержати за літо 25 кг меду. Скільки кілограмів меду планувала одержати пасіка?

11. Три сестри: Оля, Надійка і Оленка збирали листівки. У Олі їх 168, у Надійки в 4 рази більше, ніж у Олі, а в Оленки на 35 листівок менше, ніж у Надійки. Скільки листівок зібрали Оля, Надійка і Оленка разом.

Тема 5

ДІЛЕННЯ

Division

$\div$, $:$ - **знак ділення *(division sign)***

$$48 : 6 = 8$$

Число 48 **ділене** (***dividend***), 6 – **дільник** (***divisor***), 8 – **частка** (***quotient***). Вираз читається наступним чином:

48 поділити на 6 дорівнює 8;

частка чисел 48 і 6 дорівнює 8.

На нуль ділити не можна.

Основна властивість частки: якщо ділене і дільник помножити або поділити на одне й те саме число, то частка не зміниться.

Якщо a - ділене, b - дільник і $a = b \cdot c + r$, де $r < b$, то c - **неповна частка *(partial quotient)*** і r - **остача від ділення** (***residue of division***) a на b.

Приклад 1:

Потрібно 17 горіхів розділити порівну між трьома дітьми, то кожній дитині дістанеться по 5 горіхів, а 2 горіхи залишиться. Число 17 на 5 не ділиться. Можна записати, що $17 = 3 \cdot 5 + 2$. *Тут число 17 - ділене, 3 - дільник, 5 - неповна частка і 2 - остача.*

Ділення без калькулятора:

```
11396 | 28          1603882 | 782          4756 | 38
112   |-----        1564    |------        38   |-----
      | 407         ----    | 2051         --   | 125
  196                3988                   95
  196                3910                   76
  ---                ----                   --
    0                 782                  196
                      782                  190
                      ---                  ---
                        0                    6
```

Отже,

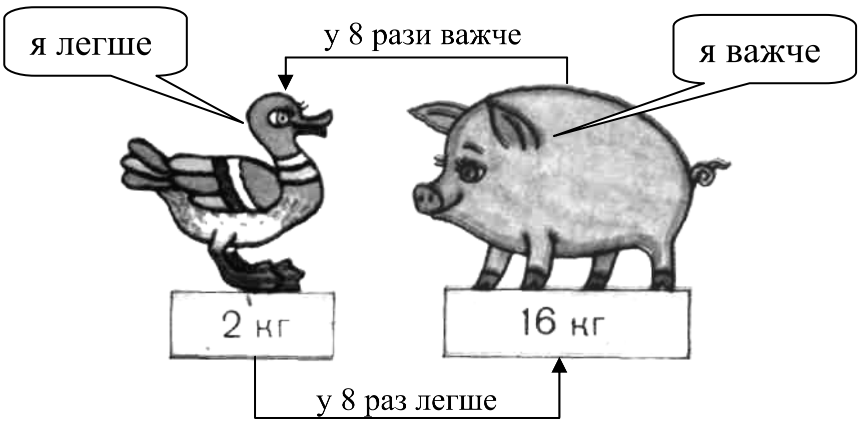
11396:28=407 1603882:782=2051 4756=38·125+6

Якщо A в x раз більше ніж B, або A в x раз важче ніж B, або A в x раз довше ніж B, тоді $B = A : x$.

Якщо A в x раз менше ніж B, або A в x раз легше ніж B, або A в x раз коротше ніж B, тоді $A = B : x$.

Приклад 4:

Порося важить 16 кг. Качка в 8 раз легша за порося. Яка вага качки?



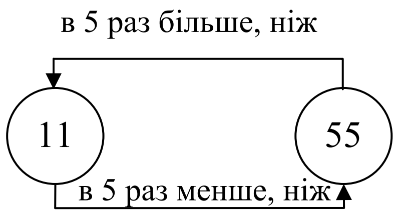
Розв'язання:

$16 : 8 = 2$ *кг*

Відповідь: качка важить 2 кг.

Приклад 3:

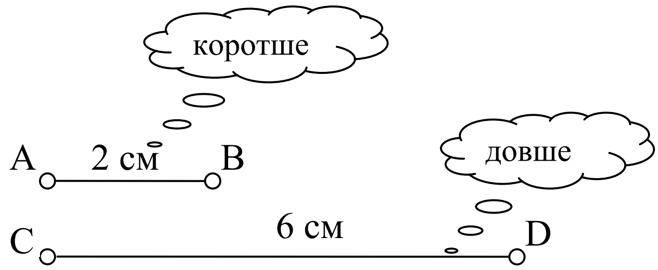
Число 55 у 5 раз більше за число 11. Число 11 у 5 раз менше за число 55.



Отже, $11 = 55 : 5$.

Приклад 5:

Відрізок AB у 3 рази коротше ніж відрізок CD. Відрізок CD у 3 рази довше ніж відрізок AB.



Тоді,

$l_{AB} = l_{CD} : 3 = 6 : 3 = 2$ см.

Приклад 6:

Знайди ділене, якщо дільник дорівнює 9, неповна частка 8 і остача 7.

Розв'язання:

9·8+7=79.

Відповідь: ділене дорівнює 79.

Вправи.

1. Прочитати різними способами наступні вирази:

а) $540 : 15 = 36$;

б) 291384:513=568;

в) $1584:48=33$.

2. Записати під диктовку вирази.

3. Знайти (усно):

а) $484:4$;

б) $960:(4\cdot 6\cdot 8)$;

в) $960:30$;

г) $0:25$;

д) $(845\cdot 48):16$;

е) $(360\cdot 215:8)$;

є) $(84\cdot 35\cdot 18):9$.

4. Виконати дії не користуючись калькулятором.

а) 78 +23·(81–69);

б) (78 + 23)·(81–69);

в) 78 + 23· (81–69);

г) (78 + 32):(81–70);

д) 5871:103+(247–82):5–1;

е) 840 + 357·527 + 481;

є) (840 + 357) ·527 + 481;

ж) 78·507–19·97 + 927: (2081–1978);

з) 79·68+(1400– (777–687) ·5):19;

и) 805 001+ (908·307–65· (403–289)):3;

і) 25·(28·105 + 7236:18) – (4217–1823) :6·25.

5. Мама роздала п'ятьом дітям 185 горіхів порівну. Скільки горіхів одержала кожна дитина?

6. У хорі 90 дітей, це в три рази більше, ніж в оркестрі. Скільки дітей в оркестрі?

7. Шлях довжиною 350 км автомобіль проїхав за 5 год. Яка швидкість автомобіля?

8. Знайти неповну частку та остачу:

а) 12:5;

б) 98:9;

в) 782:26;

г) 4183:56

9. У мішку було 50 кг цукру. Його розфасували в пакети, по 3 кг кожний. Скільки кілограмів цукру залі шилось у мішку після розфасовки?

10. 14 апельсинів, не розрізуючи їх, розділили порівну між 4 дітьми. Апельсини, які залишилися, поділили порівну тато з мамою. Скільки апельсинів одержала кожна дитина, скільки — тато і скільки — мама?

11. Знайди ділене, якщо дільник дорівнює 5, неповна частка 4 і остача 3.

12. Вирази ділене через неповну частку, дільник і остачу у вигляді рівності $a = bc + r$:

а) 79:5;

б) 85:21;

в) 406:16;

г) 810:25.

Тема 6

ЗВИЧАЙНІ ДРОБИ

Fractions

$\frac{3}{5}$ - **звичайний дріб** ***(fraction)***

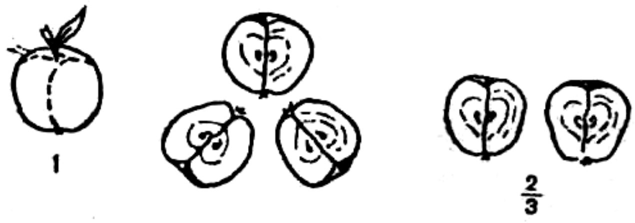
Число 3 – **чисельник *(numerator)***. Число 5 – **знаменник *(denominator)***. Дріб читається наступним чином:

три п'ятих.

Знаменник дробу показує, на скільки рівних частин поділено одиницю. Чисельник дробу показує, скільки таких частин узяте.

Приклад 1:

Звичайний дріб $\frac{2}{3}$ *показує, що ціле число поділено на 3 рівних частини і взято 2 такі частини:*



Спеціальні назви деяких дробів:

$\frac{1}{2}$ - **половина** (***half***) ; $\frac{1}{3}$ - **третина** (***one third***) ; $\frac{1}{4}$ - **чверть** (***quarter***) .

Якщо чисельник дробу менший від знаменника, то дріб називається правильним (**правильний дріб** – ***proper fraction***) .

Приклад 2:

$\frac{2}{3}, \frac{1}{10}, \frac{7}{25}$ *- правильні дроби.*

Якщо чисельник дробу дорівнює знаменнику або більший за нього, то дріб називається неправильним (**неправильний дріб** - ***improper fraction***).

Приклад 3:

$\frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \frac{9}{9}$ *- неправильні дроби.*

Ціла та дробова частини неправильного дробу:

$$\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5}$$

2 – **ціла частина** (***integer part***) ; $\frac{3}{5}$ - **дробова частина** (***fractional part***) .

Читається вираз наступним чином: дві цілих три п'ятих.

Щоб виділити цілу частину з неправильного дробу, треба поділити чисельник неправильного дробу на знаменник. Тоді неповна частка буде цілою частиною, остача - чисельником і попередній знаменник - знаменником дробової частини.

Найменшим спільним кратним (**найменше спільне кратне** - ***least common multiple***) кількох чисел називається найменше натуральне число, яке ділиться на кожне з цих чисел без остачі.

Основна властивість дробів: якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число, то дістанемо дріб, що дорівнює даному:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

Вправи

1. Прочитати дроби:

$\frac{1}{2}$; $\frac{6}{7}$; $5\frac{3}{4}$; $\frac{23}{33}$; $\frac{48}{11}$.

2. Виписати окремо правильні і неправильні дроби (прочитайте їх):

а) $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{8}{8}$; $\frac{8}{11}$; $\frac{12}{10}$; $\frac{11}{11}$; $\frac{13}{5}$; $\frac{3}{4}$;

б) $\frac{15}{26}$; $\frac{16}{9}$; $\frac{25}{24}$; $\frac{24}{23}$; $\frac{31}{35}$; $\frac{36}{17}$; $\frac{19}{19}$; $\frac{54}{59}$; $\frac{47}{46}$; $\frac{89}{85}$; $\frac{99}{90}$;

в) $\frac{101}{101}$; $\frac{125}{126}$; $\frac{204}{201}$; $\frac{305}{302}$; $\frac{500}{501}$.

3. Записати частку у вигляді дробу:

$3:5$; $7:10$; $5:8$; $13:15$; $43:47$; $21:20$; $52:41$; $120:17$.

4. Записати у вигляді неправильних дробів:

$2\frac{1}{2}$; $1\frac{5}{7}$; $2\frac{15}{16}$; $3\frac{5}{8}$; $5\frac{2}{7}$; $10\frac{3}{7}$.

5. Виділити цілу та дробову частини неправильних дробів:

$\frac{11}{8}$; $\frac{12}{5}$; $\frac{15}{7}$; $\frac{107}{35}$; $\frac{125}{312}$; $\frac{145}{36}$; $\frac{206}{3}$; $\frac{643}{40}$; $\frac{1201}{55}$.

6. Скоротити дроби (*reduce fraction*) :

а) $\frac{2}{4}$; $\frac{4}{10}$; $\frac{6}{9}$; $\frac{3}{15}$; $\frac{8}{18}$; $\frac{20}{24}$; $\frac{28}{40}$; $\frac{150}{200}$; $\frac{125}{375}$;

б) $\frac{17\cdot 3\cdot 9}{6\cdot 51\cdot 15}$; $\frac{19\cdot 8\cdot 3\cdot 11}{22\cdot 4\cdot 20\cdot 19}$; $\frac{15\cdot 13\cdot 6}{6\cdot 9\cdot 5\cdot 2\cdot 6}$; $\frac{49\cdot 77\cdot 56\cdot 100}{33\cdot 70\cdot 42\cdot 28}$.

7. Записати дроби у порядку зростання ***(порядок зростання - increasing order)*** :

$\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{4}{81}$; $\frac{17}{36}$.

8. Написати числа у порядку спадання ***(порядок спадання – decreasing order)*** :

$1\frac{2}{7}$; $\frac{5}{42}$; $\frac{679}{343}$; $3\frac{1}{7}$.

9. Порівняти *(compare)* дроби:

а) $\frac{7}{10}$; $\frac{11}{15}$; б) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; в) $\frac{7}{9}$; $\frac{11}{13}$; $\frac{17}{39}$.

10. Знайти суму:

а) $\frac{1}{11}+\frac{2}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}$;

б) $\frac{1}{3}+\frac{7}{9}+\frac{5}{6}+\frac{17}{18}+\frac{13}{36}$;

в) $\frac{7}{15}+\frac{14}{45}+\frac{2}{9}+\frac{5}{18}+\frac{1}{3}$;

г) $5\frac{13}{42}+2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}$.

11. Знайти різницю:

а) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$;

б) $2-\frac{15}{16}$;

в) $15-1\frac{31}{36}$;

г) $1\frac{5}{18}-\frac{11}{15}$;

д) $504\frac{11}{14}-385\frac{15}{28}$;

е) $\left(17\frac{3}{4}+16\frac{5}{6}\right)-\left(16\frac{5}{9}-15\frac{7}{12}\right)$.

12. Перевірити *(examine)* рівності:

а) $3\frac{17}{24}+2\frac{8}{15}+1\frac{7}{8}=4\frac{3}{4}+3\frac{11}{30}$;

б) $8\frac{19}{60}+10\frac{17}{40}+15\frac{11}{24}=17\frac{5}{8}+16\frac{23}{40}$.

13. Знайти x:

а) $x+\frac{3}{10}=5\frac{7}{10}$;

б) $6\frac{11}{24}-x=5\frac{5}{18}$;

в) $\frac{123}{144}+x=6\frac{121}{360}$;

г) $x-\frac{11}{90}=\frac{5}{18}$;

д) $x+4\frac{1}{6}=5\frac{4}{45}$;

е) $1\frac{23}{30}-x=1\frac{1}{6}$.

14. Знайти добуток:

а) $\frac{17}{18}\cdot\frac{15}{34}$;

б) $\frac{16}{85}\cdot\frac{17}{32}$;

в) $\frac{5}{32}\cdot\frac{18}{35}$;

г) $\frac{17}{40}\cdot\frac{10}{11}$;

д) $\frac{35}{48}\cdot\frac{16}{35}$;

е) $1\frac{1}{2}\cdot1\frac{1}{5}$;

є) $1\frac{1}{3}\cdot2\frac{1}{4}$.

15. Знайти частку:

а) $\frac{5}{6}:5$;

б) $\frac{4}{5}:2$;

в) $1\frac{1}{2}:2$;

г) $1\frac{1}{2}:3$;

д) $0:4\frac{8}{9}$;

е) $45:3\frac{1}{3}$;

є) $\frac{17}{30}:\frac{7}{10}$;

ж) $\frac{28}{29}:\frac{4}{29}$;

з) $1\frac{2}{3}:1\frac{1}{9}$.

16. Виконати дії (*to execute operations*):

а) $\frac{2}{5}+2\frac{4}{9}:\left(\left(7\frac{5}{12}-5\frac{3}{4}\right):22\frac{1}{2}+10\cdot\frac{5}{18}\right)-\frac{4}{5}$;

б) $\left(20\frac{8}{15}\cdot 7\frac{1}{2}-\frac{539}{5}:2\frac{1}{2}\right):\left(3\frac{13}{21}\cdot 8\frac{2}{5}-29\frac{2}{5}-\frac{5}{6}\cdot 1\frac{1}{5}+\frac{21}{25}\right)$;

в) $\frac{7}{9}\cdot 1\frac{2}{7}+43\frac{3}{4}:1\frac{12}{3}-3\frac{18}{25}+1\frac{1}{45}\cdot\left(37\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}-1\frac{3}{23}\cdot 9\right)+\frac{47}{100}$.

17. Знайти x:

а) $\frac{3}{8}x+25=100$;

б) $\frac{1}{9}x-20=56$;

в) $40-\frac{3}{8}x=35\frac{1}{2}$;

г) $\left(4\frac{1}{2}-2x\right)\cdot 3\frac{2}{3}=\frac{11}{15}$;

д) $\left(2\frac{4}{5}x-50\right):\frac{2}{3}=51$;

е) $3\frac{4}{15}:\left(3\frac{1}{2}+x\right):21\frac{3}{7}-1\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$.

Тема 7

ДЕСЯТКОВІ ДРОБИ

Decimals

$3{,}54$ - **десятковий дріб** ***(decimal)***

Число 3 – **ціла частина** ***(integer part)*** десяткового дробу. Число 54 - **дробова частина** ***(fractional part)***. «,» - **кома** ***(decimal point)***. Дріб читається наступним чином:

три цілих п'ятдесят чотири сотих.

#,# - … десятих: $2{,}5$ - дві цілих п'ять десятих;

#,## - … сотих: $140{,}23$ - сто сорок цілих двадцять три сотих;

#,### - … тисячних: 1,056 - одна ціла п'ятдесят шість тисячних;

#,#### - … десятитисячних: 5,9054 - п'ять цілих дев'ять тисяч п'ятдесят чотири десятитисячних;

#,##### - … стотисячних: 700,10003 - сімсот цілих десять тисяч три стотисячних;

#,###### - … мільйонних: 3,802459 - три цілих вісімсот дві тисячі чотириста п'ятдесят дев'ять мільйонних.

Якщо до десяткового дробу справа приписати один або кілька нулів, то значення дробу не зміниться.

$$32{,}45=32{,}450;\ 1{,}010=1{,}01000;\ 0{,}5=0{,}500.$$

Якщо десятковий дріб закінчується нулями, то ці нулі можна відкинути і значення дробу при цьому не зміниться.

$$5{,}000=5;\ 1{,}0030=1{,}003;\ 12{,}01000=12{,}01.$$

Порівняння *(comparison)* десяткових дробів

Спочатку треба порівняти їхні цілі частини як натуральні числа (або нуль): з двох десяткових дробів більший той, у якого більша ціла частина:

$$13{,}78 > 12{,}952, \text{ тому що } 13>12.$$

Якщо ж цілі частини дробів, які порівнюють, рівні між собою, то порівнюють їхні десяткові частини: з двох десяткових дробів з однією й тією самою цілою частиною більший той, у якого кількість десятих часток більша:

$$13{,}51 > 13{,}48, \text{ тому що } 5>4.$$

Якщо два десяткових дроби мають рівні цілі частини і десяті, то порівнюють соті і т. д. Якщо два десяткових дроби мають рівні цілі частини, рівні десяті, рівні соті, рівні тисячні і т. д. до кінця, то ці дроби рівні між собою.

$$13{,}1\underline{2}3 > 13{,}1\underline{1}, \text{ тому що } 2>1,$$

$$11{,}123=11{,}12300, \text{ тому що } 11=11,\ 1=1,\ 2=2,\ 3=3.$$

Додавання десяткових дробів

При додаванні десяткові дроби записують «стовпчиком» — один під одним так, щоб однойменні розряди стояли один під одним (коми теж будуть в одному стовпчику). Додають десяткові дроби так, як і натуральні числа, не звертаючи уваги на коми. В сумі ставлять кому під комами доданків.

Приклади:

$$\begin{array}{r} 2,65 \\ +\;3,24 \\ \hline 5,89 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25,971 \\ +\;9,457 \\ \hline 35,428 \end{array}$$

Віднімання десяткових дробів

Віднімання десяткових дробів виконують за схемою віднімання натуральних чисел. Від'ємник записують під зменшуваним так, щоб кома була під комою. Потім обчислюють, не звертаючи уваги на кому. В різниці ставлять кому під комами у зменшуваному і від'ємнику.

Якщо зменшуване і від'ємник мають різну кількість знаків після коми, то можна приписати потрібну кількість нулів.

Приклади:

$$\begin{array}{r} 3,97 \\ -\;2,52 \\ \hline 1,45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 19,327 \\ -\;6,418 \\ \hline 12,909 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32,500 \\ -\;3,673 \\ \hline 28,827 \end{array}$$

Множення десяткових дробів

1) помножити натуральні числа, не звертаючи уваги на кому;

2) у результаті відокремити справа комою стільки десяткових знаків, скільки їх мають обидва множники разом. Якщо в добутку, який дістанемо після множення натуральних чисел, буде менше цифр, ніж їх треба, щоб відокремити комою, то зліва слід приписати потрібну кількість нулів.

Приклади:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 3{,}2 \\ 4{,}8 \end{array} \\ \hline 256 \\ 128 \\ \hline 15{,}36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 0{,}056 \\ 1{,}05 \end{array} \\ \hline 280 \\ 56 \\ \hline 0{,}05880 \end{array}$$

Ділення десяткових дробів на натуральне число

Ділення виконується аналогічно діленню натуральних чисел.

Якщо ціла частина діленого менша від дільника, то в частці дістанемо 0 цілих.

Якщо обчислення не закінчується діленням дробової частини діленого і залишається остача, то треба приписати до неї потрібну кількість нулів.

Приклади:

$$\begin{array}{l|l} 25{,}56 & 71 \\ \cline{2-2} \underline{0} & 0{,}36 \\ 255 & \\ \underline{213} & \\ 426 & \\ \underline{426} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 12 & 16 \\ \cline{2-2} \underline{0} & 0{,}75 \\ 120 & \\ \underline{112} & \\ 80 & \\ \underline{80} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 23{,}45 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{20} & 4{,}69 \\ 34 & \\ \underline{30} & \\ 45 & \\ \underline{45} & \\ 0 & \end{array}$$

Ділення десяткових дробів на десяткові дроби

Щоб поділити число на десятковий дріб, треба:

1) помножити ділене і дільник на 10, або 100, або 1000, або … , щоб дільник став натуральним числом;

2) ділене поділити на це натуральне число.

Приклад:

$3.96 : 16.5 = (3.96 \cdot 10) : (16.5 \cdot 10) = 39.6 : 165 = 0.24$.

Періодичний дріб *(periodic fraction)* – нескінченний десятковий дріб, у якого одна або декілька цифр повторюються в одній і тій самі й послідовності. Комбінація цифр, яка повторюється, називається періодом ***(період - period)***. Період відокремлюють дужками ***(дужки - parenthesis)***.

Приклади:

$$0{,}916666... = 0{,}91(6)$$ *- період дорівнює 6;*

$$0{,}2727272... = 0{,}(27)$$ *- період дорівнює 27.*

Вправи

1. Прочитати дроби:

а) 1,32; в) 0,1;

б) 34,001; г) 100,0201.

2. Записати дроби під диктовку.

3. Написати звичайні дроби у вигляді десяткових:

$$\frac{3}{10};\frac{21}{100};\frac{11}{1000};\frac{7}{10000};\frac{101}{10000000};1\frac{9}{100};23\frac{15}{100}.$$

4. Скоротити дроби:

$$2{,}100; 14{,}7000; 0{,}170010; 0{,}930000; 181{,}0100; 0{,}150; 23{,}400.$$

5. Обчислити:

а) $5{,}423 + 3{,}577 \cdot (5{,}423 - 3{,}577)$;

б) $(9 - 0{,}4)\cdot(6{,}1 - 4{,}6) + (4{,}1 - 2{,}85)\cdot(3{,}2 - 3{,}12)$;

в) $(2{,}743 - 12{,}257)\cdot 0{,}01 + 0{,}047 \cdot (10000 - 429{,}5)$;

г) $\left(\dfrac{0{,}3\cdot(3{,}6-2{,}8)}{0{,}25\cdot(0{,}94+1{,}06)} + \dfrac{(0{,}2-0{,}15):0{,}001}{(4{,}7-3{,}9)\cdot 10}\right):27{,}92$

д) $((0{,}6 + 0{,}425 - 0{,}005):0{,}1):(30{,}5 - 0{,}96:0.48 + 22{,}5)$

6. Знайти x, якщо

а) $14,2-(x+3,4)=10,8;$

б) $30,4x+8,176=10;$

в) $\dfrac{x}{0,4}=0,6-0,4$

г) $3,06-0,05x+66:0,33+0,14=203.$

7. Представити звичайні дроби у вигляді десяткових:

$\dfrac{9}{15};\ \dfrac{312}{125};\ \dfrac{36}{8};\ 1\dfrac{751}{625};\ 5\dfrac{2541}{2000}.$

8. Представити десяткові дроби у вигляді звичайних:

$0,125;\ 1,8;\ 2,24;\ 15,06;\ 0,2;\ 121,85.$

9. Назвати період кожного дробу:

$0,730303...;\ 9,235423423...,\ 0,35737373...,\ 269,494949...\ .$

10. Виконати дії:

а) $\dfrac{\left(4,5\cdot 1\dfrac{2}{3}-6,75\right)\cdot 0,(6)}{\left(3,(3)\cdot 0,3+0,(2)+\dfrac{4}{9}\right):2\dfrac{2}{3}}+\dfrac{1\dfrac{4}{11}\cdot 0.22:0,3-0,96}{\left(0,2-\dfrac{3}{40}\right)\cdot 1,6};$

б) $\dfrac{0,5+\dfrac{1}{4}+0,1(6)+0,125}{0,(3)+0,4+\dfrac{14}{15}}+\dfrac{0,1(6)+0,(3)}{0,(3)+1,1(6)}.$

11. Зменшити число 29,4 у 2 рази.

12. Знайти добуток чисел 2,3 і 56,7.

13. Сума трьох доданків дорівнює 101,5. Перший доданок дорівнює 17,4, другий доданок у 3,31 раз більше. Знайдіть третій доданок.

14. Купили стіл і 6 стільців, заплатили всього 87,8 грн. Скільки коштував один стілець, якщо стіл коштував 38 грн.

15. Синові на штани потрібно 0,7 м тканини, а батькові в 1,8 раз більше. На скільки метрів тканини батькові треба більше?

Тема 8

ВІДНОШЕННЯ, ПРОПОРЦІЇ, ВІДСОТКИ (ПРОЦЕНТИ)

Ratio, proportion, per cent

Відношенням (**відношення** – *ratio*) називається число, що показує, у скільки разів одна величина більша за другу, або яку частину одна величина становить від другої.

Приклад 1:

$$1:2;13:17;1000:1.$$

Основна властивість відношень

$$\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}=\frac{a:n}{b:n}$$

Властивості відношень

1. Відношення величин замінюють відношенням чисел, що їх вимірюють.

Приклад 2:
12 м : 6м = 12 : 6, або
120 км : 2 см = 12 000 000 : 2 = 6 000 000 : 1.

2. Відношення більших чисел можна замінити відношенням менших чисел.

Приклад 3:
Замість відношення 18 000:6 можна взяти відношення 3000:1.

3. Відношення дробових чисел можна замінити відношенням цілих чисел:

$$5:\frac{1}{2}=10:1;$$

$$3{,}5:5\frac{2}{3}=\frac{7}{2}:\frac{17}{3}=\frac{21}{6}:\frac{34}{6}=21:34.$$

Рівність двох відношень називають пропорцією (**пропорція – *proportion***).

Наприклад:

2:1 = 10:5.

Числа 2 і 5 називають крайніми членами (**крайній член пропорції – *extreme***), а числа 1 і 10 – середніми членами пропорції (**середній член пропорції – *mean***).

Добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку її середніх членів.

$$a:b=c:d\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c\,.$$

Якщо дві величини змінюються так, що відношення відповідних значень цих величин є сталим числом, то такі величини називаються прямо пропорційними (**прямо пропорційний - *directly proportional***)

$\frac{a}{b}=k=const$, $\Rightarrow$ a і b - прямо пропорційні,

k - коефіцієнт пропорційності.

Якщо дві величини змінюються так, що добуток відповідних значень цих величин є сталим, числом, то такі величини називаються обернено пропорційними (**обернено пропорційний - *inverse proportional***)

$a\cdot b=k=const$, $\Rightarrow$ a і b - обернено пропорційні.

П р и к л а д 4 :

З 20 кг води озера Сиваш можна добути 0,5 кг солі. Скільки потрібно взяти цієї води, щоб мати 1 т солі?

Розв'язання:

$$\begin{array}{ll} 20\ \hat{e}\tilde{a} & 0{,}5\ \hat{e}\tilde{a} \\ \tilde{o}\ \hat{e}\tilde{a} & 1000\ \hat{e}\tilde{a} \end{array} \Rightarrow \frac{20}{\tilde{o}} = \frac{0{,}5}{1000}$$

$$\tilde{o} = \frac{1000 \cdot 20}{0{,}5} = 40000\ \hat{e}\tilde{a}$$

Відповідь: 40 000 кг води.

Одна сота величини або числа називається відсотком (процентом) ***(*****відсоток (процент) –** ***per cent)***.

П р и к л а д 5 :

Із жита дістають 80 % борошна. Скільки жита треба змолоти, щоб мати 50 кг борошна?

$$\begin{array}{ll} \text{ç 100 êã æèòà} & \text{80 êã áîðîøíà} \\ \text{ç õ êã æèòà} & \text{50 êã áîðîøíà} \end{array} \Rightarrow \frac{100}{\tilde{o}} = \frac{80}{50}$$

$$\tilde{o} = \frac{100 \cdot 50}{80} = 62{,}5$$ *кг*

Відповідь: 62,5 кг жита.

Вправи

1. Складіть пропорції з рівностей:

а) $15 \cdot 42 = 35 \cdot 18$;

б) $54 \cdot 55 = 66 \cdot 45$;

в) $2{,}5 \cdot 0{,}018 = 0{,}15 \cdot 0{,}3$.

2. Знайдіть невідомий член пропорції:

а) $x : 1 = 2 : 7$;
в) $45 : 18 = 180 : x$;

б) $x : 9 = 7 : 14$;
г) $21 : x = 36 : 12$.

3. З 21 кг бавовняного насіння одержали 5,1 кг олії. Скільки олії можна одержати з 7 кг бавовняного насіння?

4. Із свіжих вишень при сушінні виходить 15% сушених вишень. Скільки сушених вишень буде з 120 кг свіжих вишень?

5. Сплав складається з міді, олова і сурми, які взято у відношенні 1:2:2. Скільки треба взяти кожної з цих речовин, щоб дістати 0,792 т сплаву?

6. Запишіть у відсотках:
$\frac{1}{100}, \frac{5}{100}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}.$

7. Скільки сухої ромашки вийде з 50 кг свіжої, якщо вона при сушінні втрачає 84 % своєї маси?

8. Знайдіть:
а) 8 % від 1250 крб.;
б) 4,5 % від 3,6 т;
в) 14 % від 180 км;
г) 0,5 % від 25 л.

9. Збільшіть число 800 на 40 %.

10. Знайдіть число, якщо 8 % його дорівнює 40.

11. Свіжі гриби містять 90 % води, а сушені — 12 %. Скільки сушених грибів вийде з 20 кг свіжих?

12. Визначте відсоток солі в розчині, якщо в 300 г розчину міститься 15 г солі.

13. Знайти
а) 2% від 50;
б) 10% від 20;

в) $6\frac{1}{4}\%$ від 64;

г) 12,5% від 8,88.

14. Знайдіть число х, якщо

а) $7\%x = 182$;

б) $60\%x = 23$;

в) $1\frac{2}{3}\%x = 4,75$;

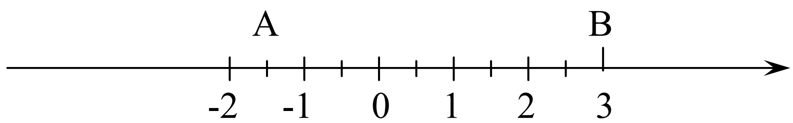
г) $7,5\%x = 3,3$.

Тема 9

РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

Rational quantities

Пряма ***(straight line)***, на якій взято **початок відліку** ***(zero point)***, задано **одиничний відрізок** ***(unit segment)*** і показано **додатний напрям** ***(positive direction)*** називається координатною прямою **(координатна пряма –** ***coordinate line)***.



Число, що показує положення точки на прямій, називається координатою **(координата –** ***coordinate)*** цієї точки.

Приклад 1:

Точка А має координату -1,5, точка В – координату 3. Пишуть: А(-1,5), В(3).

Числа, які знаходяться **праворуч** ***(from the right of)*** точки 0 на координатній прямій називаються додатними **(додатний -** ***positive)***.

Числа, які знаходяться **ліворуч** ***(from the left of)*** точки 0 на координатній прямій називаються від'ємними ***(*****від'ємний –** ***negative)*** .

Числа, що знаходяться на одній відстані від початку координат, але лежать від нього по різні боки, називаються протилежними **(протилежний -** ***opposite*****)** .

Наприклад, 2 і -2 – протилежні, 1,5 і -1,5 – протилежні.

Натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль називають цілими числами ***(*****ціле число –** ***integer)***.

Числа додатні (цілі і дробові), від'ємні (цілі і дробові) і нуль називаються раціональними числами ***(*****раціональне число –** ***rational number)***.

Відстань ***(distance)*** від початку відліку до точки ***(*****точка** ***- point)***, що зображає число, називається модулем ***(*****модуль** ***- module)*** числа.

Модулем додатного числа і числа нуль є те саме число. Модулем від'ємного числа є протилежне йому число. Тобто,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ÿêù î } a \geq 0; \\ -a, & \text{ÿêù î } a < 0. \end{cases}$$

Наприклад: $|2| = 2; |-3| = 3; |-3,5| = 3,5.$

Порівняння раціональних чисел

З двох чисел меншим вважають те, зображення якого міститься лівіше на координатній прямій, і більшим те, зображення якого міститься правіше. Будь-яке від'ємне число менше від будь-якого додатного. З двох від'ємних чисел менше те, модуль якого більший.

Приклади:

$-12 < 1$, тому що -12 – від'ємне, а 1 додатне;

$-12 > -24$, тому що $|12| < |24|$.

Додавання раціональних чисел

Сумою двох чисел з однаковими знаками є число, яке має той самий знак, що й доданки, а модуль його дорівнює сумі модулів доданків.

Сумою двох чисел з різними знаками є число, яке має той знак, що й доданок з більшим модулем, а модуль дорівнює різниці модулів доданків.

Приклади:

$8+5=13$;

$(-7)+12=5$, *тому що* 12–7=5 і $12>7$;

$3+(-3)=0$, *тому що* 3–3=0;

$3{,}5+(-7{,}8)=-4{,}3$, *тому що* 7,8–3,5=0 і $7{,}8>3{,}5$.

Віднімання раціональних чисел

Щоб відняти будь-яке число, досить до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику:

$$a-b=a+(-b).$$

Приклади:

$7-15=7+(-15)=-8$;

$10-(-7{,}4)=10+7{,}4=17{,}4$.

Множення раціональних чисел

Добуток двох чисел з однаковими знаками є число додатне, а модуль добутку дорівнює добутку модулів множників. Добуток двох чисел з різними знаками є число від'ємне, а модуль його дорівнює добутку модулів множників.

Якщо один з множників дорівнює нулю, то добуток дорівнює нулю. Навпаки: добуток може дорівнювати нулю тоді і тільки тоді, коли хоч один з множників дорівнює нулю.

Приклади:

$5\cdot 7=35$, *додатне, тому що* 5 *і* 7 *мають однакові знаки;*

$4{,}8\cdot(-7)=-33{,}6$, *від'ємне, тому що* 4,8 *і* –7 *мають різні знаки;*

$23{,}6\cdot 0=0$, *тому що другий множник дорівнює* 0.

Ділення раціональних чисел

Частки двох чисел з однаковими знаками є число додатне. Частка двох чисел з різними знаками є число-від'ємне. Щоб знайти модуль частки, треба модуль діленого поділити на модуль дільника.

При діленні нуля на будь-яке число, що не дорівнює нулю, дістанемо нуль. Ділити на нуль не можна.

Приклади:

$48:6=8$, *додатне, тому що* 48 *і* 6 *мають однакові знаки;*

$44{,}2:(-2)=-22{,}1$, *від'ємне, тому що* 44,2 *і* –2 *мають різні знаки;*

$0:4{,}6=0$, *тому що дільник дорівнює* 0.

Розкривання дужок

Якщо перед дужками стоїть знак «плюс», то, розкриваючи дужки, знак кожного доданка, що в дужках, зберігаємо. Якщо перед дужками стоїть знак «мінус», то, розкриваючи дужки, знак кожного доданка, що в дужках, змінюємо на протилежний:

$$a+(b+c)=a+b+c,\ a-(b+c)=a-b-c.$$

Вправи

1. Показати на координатній прямій точки, яким відповідають усі цілі числа x, якщо

а) $10<|x|<18$;
в) $10<|x|<28$;

б) $|x|<10$;
г) $|x-1|<12$.

2. Розташувати у порядку зростання числа:

$-15;\ 3;\ -1;\ -|-4|;\ |-2|;\ 0;\ 1/2;\ 0{,}9;\ |5|;\ -4.$

3. Розташувати у порядку спадання числа:
$-11;\ 0,65;\ |0,63|;\ -|5,25|;\ -|-5,26|;\ -|-2,75|;\ 7,4;\ |0|.$

4. Знайти a і b, якщо $|a|+|b|=0$.

5. Знайти a, якщо $|a|+|-a|=6$.

6. Чи може сума двох від'ємних чисел бути більше їх частки?

7. Перевірити рівність: $|ab|=|a|\cdot|b|$ при $a=-5;\ b=4$.

8. Знайти x та y, якщо $|x+y|=0$.

9. Виконати дії:

а) $\left(\left((-1,75)-(-3,25)\right)\cdot 0,48+(-0,3)\right):0,028;$

б) $\left((+3,28)-(-1,52)\right):(-24)+(-1,3)\cdot(-0,04);$

в) $\left((+0,45)+(-3,6)\cdot\left(\left(\frac{-3}{8}\right)-\left(-\frac{7}{12}\right)+\left(-\frac{1}{18}\right)\right)\right):(-0,01);$

г) $\left(\left(\left(-\frac{7}{15}\right)-\frac{11}{18}-\left(-\frac{17}{45}\right)\right):(-0,015)+18,5\right)\cdot(-1,2).$

10. Від'ємник дорівнює -2,5, різниця дорівнює 14,2. Знайти зменшувальне.

11. Збільшити число 4,17 у 1,2 рази.

12. Поділити число 3,88 на число -2.

Тема 10

СТЕПІНЬ

Power

Степенем ***(*****степінь** ***- power)*** називається добуток кількох рівних множників:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = a^n$$

Наприклад:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3;$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6.$$

Розглянемо степінь

$$4^5$$

Число 4 називається основою степеня ***(*****основа степеня –** ***base of power)***. Число 5 називається показником степеня ***(*****показник степеня** ***- exponent)***.

Вираз читається наступним чином: «чотири у п'ятому степені».

Спеціальні назви степеня:

a^2 : читається «a в квадраті» або «квадрат a»;

a^3 : читається «a в кубі» або «куб a».

Наприклад,

2^3 - «два в кубі»;

5^2 - «п'ять в квадраті».

Порядок дій при обчисленнях

Додавання і віднімання вважаються діями першого ступеня, множення і ділення – другого ступеня, піднесення до степеня – дія третього ступеня. Обчислюючи значення виразу, спочатку виконують дії вищого ступеня, потім – нижчого. Дії одного й того самого ступеня виконуються в тому порядку, в якому вони записані. Якщо вираз містить дужки, спочатку знаходять значення виразу – в дужках.

Властивості степенів

Для будь-яких x, y і додатних a і b справедливі рівності:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x} = a^x; \; a^0 = 1; \; a^1 = a;$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \; a^x : a^y = a^{x-y};$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}; \; \left(ab\right)^x = a^x b^x;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \; a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Вправи:

1. Прочитайте вирази:

а) a^3;

б) 7^4;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$;

г) $23{,}23^7$;

д) $\left(-2{,}05\right)^2$.

2. Піднести до степеня числа:

$\left(\frac{3}{4}\right)^2$; $\left(3\frac{1}{3}\right)^2$; $\left(3\frac{3}{4}\right)^2$; $\left(-2\right)^3$; $\left(-0{,}12\right)^2$; $\left(-1\right)^2$;

$-\left(-1\right)^2$; $\left(-\frac{2}{13}\right)^2$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$.

3. Розташувати числа у порядку зростання:

а) $\left(-1{,}5\right)^2$; $\left(\frac{1}{7}\right)^3$;

б) $\left(+1{,}5\right)^2$; $0{,}8^3$; $\left(-1{,}1\right)^2$.

4. Розташувати числа у порядку спадання:

$(-1,8)^2$; $\left(-\frac{3}{7}\right)^3$; $\left(-1\frac{2}{9}\right)^2$; $(-0,9)^2$; $(-1,75)^3$.

5. Записати дроби у вигляді степенів із від'ємним показником:

а) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{625}$; $\frac{2}{343}$; $\frac{4}{243}$; $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{225}$.

б) $\frac{x^3}{y^5}$; $\frac{a^{2n}}{b^n}$; $\frac{a^{n^2-n}}{b^{2n}}$; $\frac{x^{n+2}}{y^{7n}}$.

6. Виконати дії:

а) $3^m \cdot 3$;

б) $2^n \cdot 8$;

в) $7^{m+1} \cdot 49$;

г) $a^{2m} \cdot a^{m-1}$;

д) $a^m \cdot a^{3-m}$;

е) $a^{m+1} \cdot a^{1-m}$;

є) $\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{-3}\right)^{-1}$;

ж) $\left(\left(\frac{2m}{3n}\right)^{-4}\right)^{-2}$.

7. Знайти числові значення виразів:

а) 2^{-2};

б) 3^{-2};

в) 2^{-3};

г) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + 4^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 5}$;

д) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} - 5\cdot(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2^{-2} + 1^0}$.

Тема 11

ОДНОЧЛЕНИ, МНОГОЧЛЕНИ

Monomials, polynomials

Найпростіші вирази – числа, змінні, їх степені і добутки називають одночленами ***(одночлен - monomial)***.

Приклад 1:

$$6, -\frac{7}{12}, z, x^2, 3a \cdot 5b \text{ - } \textit{одночлени.}$$

Якщо одночлен містить тільки один числовий множник, до того ж поставлений на перше місце, і якщо кожна змінна входить тільки до одного множника, такий одночлен називається одночленом стандартного вигляду.

Приклад 2:

$$3a \cdot 5c, 2x^2x^3, ab \cdot 8 \text{ - } \textit{не стандартний вид};$$

$$3xy, 5a, 8 \text{ - } \textit{стандартний вид}.$$

Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають коефіцієнтом ***(коефіцієнт – coefficient)*** цього одночлена.

Приклад 3:

$$12xy \text{ - } \textit{коефіцієнт } 12.$$

Суму кількох одночленів називають многочленом ***(многочлен - polynomial)***.

Приклад 4:

$$7x + 2a + 5 \text{ - } \textit{многочлен.}$$

Кожний доданок многочлена називається його членом.

Наприклад,

многочлен $7x^2 + 2x + 7a$ *містить три члени*: $7x^2, 2x, 7a$.

Многочлен, який містить два доданки, називається двочленом.

Многочлен, який містить три доданки, називається тричленом.

Подібні члени многочлену – це такі доданки, які відрізняються тільки коефіцієнтами або й зовсім не відрізняються.

Вважають, що многочлен записано в стандартному вигляді, якщо всі його члени – одночлени стандартного вигляду, і серед них немає подібних.

Щоб додати два многочлени, достатньо сполучити їх знаком плюс.

Коли пропонується знайти різницю двох многочленів, це означає — від першого з них відняти другий. Виконуючи таке завдання, після першого многочлена пишуть знак мінус і взятий у дужки другий многочлен. Розкриваючи дужки, перед якими стоїть знак мінус, знаки всіх членів, що були в цих дужках, змінюють на протилежні.

Щоб помножити многочлен на одночлен, потрібно кожний член многочлена помножити на даний одночлен і результати додати.

Приклад 5:

$$(3x + 7y) \cdot 6a = 18ax + 42ay.$$

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого многочлена і отримані добутки додати.

Приклад 6:

$$(5a + 7b) \cdot (2 + 4a) = 5a \cdot 2 + 7b \cdot 2 + 5a \cdot 4a + 7b \cdot 4a = 10a + 14b + 20a^2 + 28ab$$

Розкласти многочлен на множники – це означав замінити його добутком кількох многочленів, тотожним даному многочлену.

Один із способів розкладання многочлена на множники – винесення спільного множника за дужки

$$ax + ay = a(x + y)$$

Спосіб групування

$ab + ac + xb + xc = \left(ab + ac\right) + \left(xb + xc\right) = a\left(b + c\right) + x\left(b + c\right) =$

$= \left(b + c\right)\left(a + x\right)$

Формули скороченого множення:

$$a^2 - b^2 = \left(a - b\right)\left(a + b\right)$$

$$\left(a + b\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\left(a - b\right)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\left(a + b\right)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ або } \left(a + b\right)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$\left(a - b\right)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ або } \left(a - b\right)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$a^3 + b^3 = \left(a + b\right)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

$$a^3 - b^3 = \left(a - b\right)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

Вправи

1. Звести подібні члени

а) $15ab + 4ab - 10ab$; $-6xy - xy + 8xy$;

б) $\left(-\frac{3}{4}ab\right) + \left(+\frac{2}{3}a^2b\right) + ab - \left(+\frac{5}{6}a^2b\right) + \left(-\frac{1}{2}ab\right)$;

в) $\left(-0,3ab\right) + \left(-0,2a^2\right) + 1,4b + \left(-5a^2\right) + \left(-2,3ab\right)$;

г) $-9,387m - 3,89n + 8,197m - 1,11n - 0,002m.$

2. Виконати дії

а) $\left(x^2 + 2xy + y^2\right) + \left(2xy - x^2 - y^2\right)$;

б) $\left(5m^2 - 5m + 3\right) + \left(-4m^2 - 5m - 3\right)$;

в) $\left(10a - 6b + 5c - 4d\right) + \left(9a - 2b - 4c + 2d\right)$.

3. Виконати ділення

а) $\left(-\frac{2}{5}a^4x^3y^2\right):\left(-\frac{1}{2}a^3xy^2\right);$

б) $\left(-\frac{3}{4}a^5b^3c\right):\left(1\frac{1}{2}a^2b^2c\right);$

в) $0,4x^7y^5z^4:\left(-0,5x^3y^5z^2\right);$

г) $\left(-1,2a^8b^3c^4\right):\left(-0,3a^5bc^4\right);$

д) $0,5a^mb^nc^3:\left(-\frac{2}{3}a^2bc\right);$

е) $1,5x^{m+1}y^{n-1}:3x^{m-1}y^{n-2}.$

4. Спростити вираз та знайти результат

а) $bc(11c-7b)-\left((b-2c)\cdot\left(b^2-5bc+c^2\right)+c^3\right)$, якщо $b=-\frac{1}{2};$ $c=\frac{3}{2};$

б) $(p-5n)\cdot\left(3p^2+2pn-7n^2\right)-\left(13n\left(3n^2-p^2\right)-17pn^2\right)$, якщо $p=-3;\ \ n=-2;$

в) $(p-4q)\cdot\left(3p^2+2pq-5q^2\right)-\left(12pq^2-10qp^2-2q^2\right)$, якщо $p=2;\ \ q=-\frac{3}{5}.$

5. Виконати дії

а) $5\left(-a^3b^2c\right)^3;$

б) $-3\left(2a^2b^3\right)^2;$

в) $2\left(-3x^4y^3\right)^3;$

г) $-\frac{1}{2}\left(-5a^3b^4c^2\right)^2;$

д) $\left(a^h\right)^3;$

е) $\left(x^{n+1}\right)^2;$

є) $\left(c^{2n}\right)^3;$

ж) $\left(a^{n-1}\right)^3;$

з) $\left(-x^n\right)^2;$

и) $\left(-x^n\right)^{12}.$

6. Представити у вигляді многочлена квадрат двочлена

а) $\left(0,3a^2+4b\right)^2$;

б) $\left(1,3m^3+2,5m^2\right)^2$;

в) $\left(1\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{5}{6}x^3y^3\right)^2$;

г) $\left(1\frac{3}{4}p^4q^2+1\frac{2}{3}p^3q^3\right)^2$;

д) $\left(1\frac{2}{5}a^5b^3+0,4a^3b^2\right)^2$;

е) $\left(\frac{4}{5}a^3b+1\frac{1}{4}b^2\right)^2$.

7. Представити у вигляді квадрата двочлена

а) $x^2+2xy+y^2$;

б) $a^2+6ab+9b^2$;

в) $25b^2+20b+4$;

г) $a^4+18a^2b+81b^2$;

д) $49a^2+84ab+36b^2$;

е) $\frac{1}{25}x^2+\frac{2}{15}xy+\frac{1}{9}y^2$.

8. Замінити знаки «?» одночленами так, щоб рівність була вірною

а) $\left(6a^5+?\right)^2=?+?+25x^2$;

б) $\left(5b^2+?\right)^2=?+?+49c^4$;

в) $\left(?+?\right)=?+70b^3c+49c^2$;

г) $\left(3a^3b+?\right)^2=?+?+25b^4$.

9. Представити у вигляді многочлена квадрат двочлена

а) $\left(a^m-b^n\right)^2$;

б) $\left(2x^m-3^n\right)^2$;

в) $\left(5x^2-2y^{n-1}\right)^2$;

г) $\left(\frac{2}{3}x^{m-2}-\frac{3}{4}x^{2n-1}\right)^2$;

д) $\left(\frac{5}{6}x^{m-1}y^n-\frac{3}{5}x^{n+1}y^2\right)^2$.

10. Представити вираз у вигляді квадрата двочлена

а) $c^2-2cd+d^2$;

б) $4a^2-28ab+49b^2$;

в) $\frac{1}{4}c^2-cy+y^2$.

11. Представити вираз у вигляді суми квадратів двох виразів

а) $4y^2 - 4y + 1 + p^2$;

б) $b^2 - 6b + 13$;

в) $a^4 - 6a^2b^2 + 25b^4$;

г) $x^4 - 2x^2y + 5y^2$;

д) $a^4 - 14a^2b + 53b^2$;

е) $a^8 - 10a^4b^2 + 29b^4$.

12. Замінити знаки «?» одночленами так, щоб рівність була вірною

а) $(?-?)^2 = 81x^2 - ? + 100x^4y^6$;

б) $(? - 4x^7)^2 = 25x^4y^2 - ? + ?$;

в) $(8a^3 - ?)^2 = ? - ? + 49a^8b^6$;

г) $(? - 2b)^2 = ? - 12ab + ?$.

13. Виконати дії

а) $(3+a)\cdot(3-a)\cdot(3-a)\cdot(3+a)$;

б) $(a+2)^2\cdot(a-2)^2$;

в) $(a+b+c)\cdot(a+b-c)$;

г) $(x-y+z)\cdot(x-y-z)$;

д) $(a-b+c)\cdot(a+b-c)$;

е) $(a+b+c)\cdot(a-b-c)$.

14. Скоротити дроби

а) $\dfrac{53^2 - 27^2}{79^2 - 51^2}$;

б) $\dfrac{53^2 - 32^2}{61^2 - 44^2}$;

в) $\dfrac{105^2 - 35^2}{161^2 - 21^2}$

15. Представити вираз у вигляді многочлена

а) $(x+y)^3$;

б) $(x^2+5)^3$;

в) $(n^2 - 0{,}4m^3n)^3$;

г) $\left(\dfrac{3}{4}a^2 - \dfrac{2}{3}b^2\right)^3$.

16. Представити вираз у вигляді куба двочлена

а) $m^3+n^3+3m^2n+3mn^2$;

б) $-b^3-12b^2-48b-64$;

в) $27a^3-13{,}5a^2b+2{,}25ab^2-0{,}125b^3$;

г) $\frac{1}{27}a^6-a^4b^2-3a^2b^4-27b^6$.

17. Представити у вигляді добутку

а) $8c^3+p^3$;

б) $(a+b)^3+c^3$;

в) $(b-c)^3-a^3$;

г) $(5x+y)^3-(3x-2y)^3$.

18. Розкласти на множники

а) $13a^2-52b+39$;

б) $12a^3b-18ab^2-30ab^3$;

в) $a^2bc+ab^2c-abc^2$;

г) $135a^{12}b^8+90a^{10}b^{11}-36a^6b^{16}$.

19. Довести тотожність

а) $b-c+b(c-1)=c(b-1)$;

б) $2bx-a(x-b)=b(a+x)-x(a-b)$;

в) $(-5a)^3\cdot(2b)^4=-(10ab)^3\cdot 2b$;

г) $(x-2b)(x^2-5bx+b^2)+(2b-x)(x^2-6bx+b^2)=bx(x-2b)$;

д) $(a-3c)(2a^2-7ac-c^2)-(3c-a)(c^2+7ac-a^2)=a^2(a-3c)$.

20. Розкласти на множники

а) $ax+ay+2x+2y$;

б) $ac+bc+a+b$;

в) $56x^2-45y-40xy+63x$;

г) $a^3+a^2b-a^2c-abc$;

д) $14a^2c+25b^2d-10abd-35abc$.

21. Довести тотожність

а) $5x^3-2x^2+5x-2=\left(x^2+1\right)\left(5x-2\right);$

б) $\left(2ab-3c\right)\left(3ac-2b\right)=6a^2bc-9ac^2-4ab^2+6bc;$

в) $5\left(a+b\right)^2-4a^2-4ab=\left(a+b\right)\left(a+5b\right);$

г) $3\left(x-7\right)^2+8x-56=\left(x-7\right)\left(3x-13\right).$

22. Розкласти на множники

а) $x^2-y^2;$

б) $a^2b^2-c^2;$

в) $100-b^4;$

г) $0,25-0,64a^6.$

23. Довести тотожність

а) $\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2=a\left(a+1\right)+\dfrac{1}{4};$

б) $\left(4x^2+4ax+a^2\right):\left(2x+a\right)-\left(2x+a\right)^3:\left(4x^2+4ax+a^2\right)=0;$

в) $\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^3-\left(\dfrac{x+3}{2}\right)^3=\dfrac{9\left(x^2+3\right)}{-4};$

г) $\left(\dfrac{x-3}{3}\right)^3+\left(\dfrac{x+3}{3}\right)^3=\dfrac{2x\left(x^2+27\right)}{27}.$

24. Розкласти на множники

а) $\left(7n+8,5\right)^2-\left(4n+2,5\right)^2;$

б) $\left(7n+6,5\right)^2-\left(2n+11,5\right)^2;$

в) $4b^2-\left(x^2-b^2-1\right)^2;$

г) $\left(2a^3-4a^2-a+1\right)^2-\left(3a-1\right)^2;$

д) $n^4+n^3-n-1;$

е) $\left(x+y\right)^4-\left(x-y\right)^4.$

Тема 12

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

Проведемо на площині дві перпендикулярні координатні прямі x і y, які перетинаються в початку відліку – точці O (рис. 1). Площину, на якій задано такі координатні прямі, називають координатною площиною ***(координатна площина** - coordinate plane)*, пряму x - віссю абсцис ***(вісь абсцис** - abscissa axis)*, пряму y - віссю ординат ***(вісь ординат** - ordinate axis)* , точку O – початком координат ***(початок координат** - coordinate origin)*. Початок координат O розбиває кожну із осей на дві півосі – додатну та від'ємну.

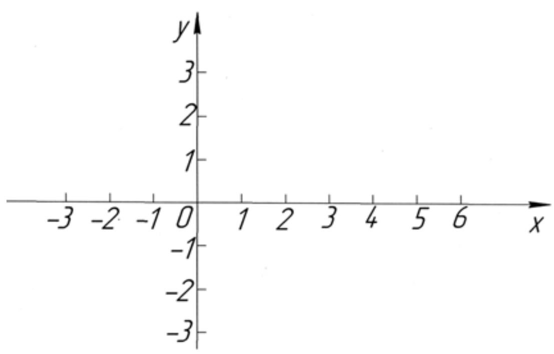


Рисунок 1

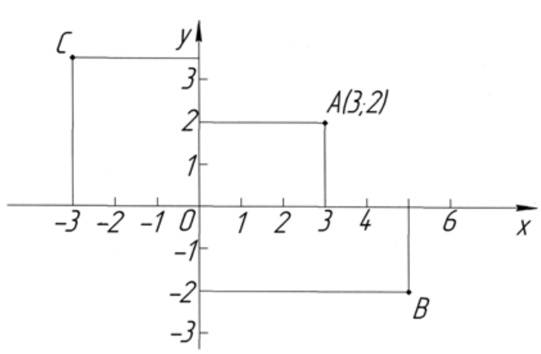


Рисунок 2

Кожній точці координатної площини відповідає пара чисел. Наприклад, точці A відповідає пара (3; 2), бо пряма Ax, перпендикулярна до осі x, перетинає її в точці з координатою 3, а пряма Ay, перпендикулярна до осі y, перетинає її в точці з координатою 2 (рис. 2). Говорять, що точка A має координати 3 і 2. Записують: $A(3;2)$. Тут 3 — **абсциса** *(abscissa)*, 2 — **ордината** *(ordinate)* точки A. Першою завжди пишуть абсцису.

Р. Декарт (1596-1650)

Кожній парі чисел на координатній площині відповідає єдина точка. На рис. 2 показано, як позначити, наприклад, точки B(5;-2) і C(-3;3,5).

Координати точок першим використовував французький математик Рене Декарт (1596-1650). Тому їх часто називають декартовими координатами **(декартові координати - *Cartesian rectangular coordinates*)**.

Якщо $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$ - дві довільні точки і $C(x;y)$ середина відрізка AB. Тоді

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Якщо $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$ - дві довільні точки, то відстань між точками A і B обчислюється за формулою

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Приклад 1:

Знайдіть довжину d відрізка AB та координати його середини C, якщо відомі координати точок A і B: $A(1;-6)$, $B(4;-2)$.

Розв'язання:

Довжина відрізка AB:

$$d = \sqrt{(1-4)^2 + (-6+2)^2} = 5$$

Координати точки $C(x;y)$

$$x = \frac{1+4}{2} = 2,5;$$

$$y = \frac{-6-2}{2} = -4.$$

Відповідь: $d = 5$; $C(2,5;-4)$.

Рівнянням фігури на площині в декартових координатах називається рівняння з двома змінними x і y, яке задовольняють координати будь-якої точки фігури. І навпаки, будь-які два числа, що задовольняють це рівняння, є координатами деякої точки фігури.

Рівняння прямої в декартовій системі координат

$$ax+by+c=0,$$

де a,b,c - константи.

Рівняння кола з центром у точці $A(a,b)$ і радіусом R

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Приклад 2:

Які з точок лежать на прямій $y-x=2$: $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(8;10)$; $(-2;-6)$*?*

Розв'язання:

Точки, які лежать на прямі й повинні задовольняти рівняння цієї прямої. Підставимо координати точок у рівняння прямої:

$(1;-1)\Rightarrow -1-1=-2\neq 2$ *- не лежить на прямій;*

$(-1;1)\Rightarrow 1-(-1)=2$ *- лежить на прямій;*

$(8;10)\Rightarrow 10-8=2$ *- лежить на прямій;*

$(-2;-6)\Rightarrow -6-(-2)=-4\neq 2$ *- не лежить на прямій.*

Відповідь: $(-1;1)$, $(8;10)$.

Приклад 3:

Знайдіть координати центра та радіус кола

$x^2+y^2-8x+8y+7=0$.

Розв'язання:

Згрупуємо окремо доданки які пропорційні x і окремо, які пропорційно y. Отримані суми доповнимо до повного квадрату:

$$x^2+y^2-8x+8y+7=\left(x^2-8x\right)+\left(y^2+8y\right)+7=$$
$$=\left(x^2-2\cdot 4x+16-16\right)+\left(y^2+2\cdot 4y+16-16\right)+7=$$
$$=\left(x^2-2\cdot 4x+16\right)+\left(y^2+2\cdot 4y+16\right)-25=$$
$$=\left(x-4\right)^2+\left(y+4\right)^2-25=0$$

$\left(x-4\right)^2+\left(y+4\right)^2=5^2$ *- рівняння кола з центром у точці $A(4;-4)$ і радіусом $R=5$.*

Відповідь: $A(4;-4)$, $R=5$.

Вправи:

1. Проведіть осі координат, виберіть одиницю довжини на осях, побудуйте точки з координатами: $(1;2)$, $(-2;1)$, $(-1;3)$, $(2;-1)$.

2. Візьміть будь-які чотири точки на координатній площині. Знайдіть координати цих точок.

3. На прямій, паралельній осі Ox, узято дві точки. Одна з них має ординату $y=2$. Чому дорівнює ордината другої точки?

4. З точки $A(2;3)$ на вісь Ox опущено перпендикуляр. Знайдіть координати основи перпендикуляра.

5. Знайдіть відстань від точки $A(-3;4)$ до:

а) осі Ox;

б) осі Oy;

в) до початку координат.

6. На бісектрисі першої чверті взято точку з ординатою $y=2$. Чому дорівнює абсциса цієї точки?

7. Знайдіть геометричне місце точок площини Oxy, для яких $x=-y$.

8. Знайдіть координати середини відрізка з кінцями (2;0) і (0;2).

9. Дано один кінець відрізка (1;1) і його середину (2;2). Знайдіть другий кінець відрізка.

10. Дано три точки: $A(4;-2)$, $B(1;2)$, $C(-2;6)$. Знайдіть відстань між цими точками, взятими попарно.

11. Знайдіть на осі х точку, рівновіддалену від точок (1;2) і (2;3).

12. Знайдіть точку, рівновіддалену від осей координат і точки (3;6).

13. Які з точок $(1;2)$, $(3;4)$, $(-4;3)$, $(0;5)$, $(5;-1)$ лежать на колі, заданому рівнянням $x^2+y^2=25$?

14. Знайдіть на колі, заданому рівнянням $x^2+y^2=169$, точки:

а) з абсцисою 5;

б) з ординатою -12.

15. Дано точки $A(-1;-1)$ і $C(-4;3)$. Складіть рівняння кола з центром у точці C, яке проходить через точку A.

16. Знайдіть координати точок перетину кола $x^2+y^2-8x-8y+7=0$ з віссю Ox.

17. Складіть рівняння кола з центром у точці $(1;2)$, яке дотикається до осі Ox.

18. Доведіть, що коло $x^2+y^2+2ax+1=0$ не перетинає вісь Oy.

19. Складіть рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох даних точок $(0;1)$ і $(1;2)$.

20. Знайдіть точки перетину з осями координат прямої, заданої рівнянням:

а) $x+2y+3=0$;

б) $3x+4y=12$;

в) $3x-2y+6=0$.

Тема 13

Рівняння

Equation

Рівняння – це рівність, яка містить невідомі числа, позначені буквами. Невідомі числа в рівнянні називають змінними ***(змінна - variable)***. Змінні найчастіше позначають буквами x, y, z, хоч можна позначити їх і іншими буквами.

Наприклад,

$$5x = 30,\ \ 3a = 18.$$

Число, яке задовольняє рівняння, називається його коренем ***(корінь - root)*** , або розв'язком ***(розв'язок - solution)***.

Наприклад,

рівняння $3x - 17 = 7$ *має Розв'язання* $x = 8$.

рівняння $x(x-2)(x-3) = 0$ *має три корені*: $x = 0, x = 2, x = 3$.

рівняння $x - 7 = x$ *не має жодного кореня.*

Розв'язати *(solve)* рівняння– це означає знайти всі його розв'язки або показати, що їх не існує.

Два рівняння називають рівносильними ***(рівносильні рівняння - equivalent equations)***, якщо вони мають однакові розв'язки. Рівносильними вважають і такі рівняння, які не мають розв'язків.

Щоб розв'язувати складніші рівняння, слід вміти замінювати їх простішими і рівносильними даним.

Завжди правильні такі основні властивості рівнянь:

1. У будь-якій частині рівняння можна звести подібні доданки або розкрити дужки,
2. Будь-який член рівняння можна перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний.

3. Обидві частини рівняння можна помножити або поділити па одне й те саме число, відмінне від нуля.

Рівняння виду $ax = b$ називається лінійним рівнянням ***(лінійне рівняння - linear equation)*** із змінною х. Числа a, b - коефіцієнти ***(коефіцієнт - coefficient)*** даного рівняння; a - коефіцієнт при змінній x, b — вільний член рівняння.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають рівнянням першого степеня з однією змінною ***(рівняння першого степеня - simple equation)***. Його корінь $x = \frac{b}{a}$. Кожне рівняння першого степеня з однією змінною має один корінь. Лінійне рівняння може не мати коренів або мати один корінь чи безліч.

Наприклад,

рівняння $0x = 5$ *не має жодного розв'язку, бо не існує числа, яке б при множенні на 0 у добутку дало* 5;

рівняння $0x = 0$ *має безліч коренів, його задовольняє довільне значення змінної х.*

Приклад 1:

Розв'язати рівняння $|x-2| = 5$.

Згідно означення модуля необхідно розглянути два випадки:

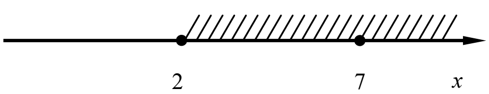
$$x - 2 \geq 0, \; \text{òîä³} \; |x-2| = x - 2$$

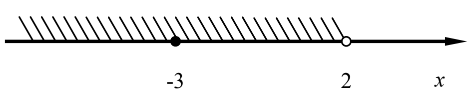
$$x - 2 < 0, \; \text{òîä³} \; |x-2| = -(x-2) = 2 - x$$

Отже отримаємо наступні системи

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x - 2 = 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2 < 0, \\ 2 - x = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2, \\ x = 7; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2, \\ x = -3; \end{cases}$$





$$x = 7. \qquad x = -3.$$

Відповідь: $x = 7, \; x = -3$.

Два вирази, відповідні числові значення яких рівні при будь-яких значеннях змінних, називаються тотожно рівними, або тотожними **(тотожний - *identical*)**.

Вправи:

1. Визначити, які з рівностей тотожності:

а) $a+3=3+a$;

б) $xy=yx$;

в) $b+3=5$;

г) $3(a+b)=3a+3$;

д) $1+m=9$;

е) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

2. При яких значеннях m рівняння не має розв'язків:

а) $2x=5-mx$;

б) $mx-6=3x$;

в) $mx=4x+12$;

г) $2mx+3=2m-x$.

3. Визначити, які з рівнянь не мають розв'язків і які рівняння мають безліч розв'язків:

а) $2x+1=2x+3$;

б) $5x-15-3x-6=2x-25$;

в) $4x-3-3x-4=x-7$;

г) $5(x-2)=5x-10$;

д) $\frac{x-5}{2}+\frac{x+1}{8}=\frac{2,5x-3}{4}$.

4. Визначити чи рівносильні рівняння:

а) $5x+1=2$ і $10x+2=4$;

б) $5x+4=9$ і $2x-1=1$;

в) $2x-1=4$ і $x+5=7$;

г) $x+1=5$ і $4x-3=2$;

д) $5x+3=18$ і $\frac{5x+3}{3}=6$;

е) $x+1=4$ і $\frac{x+1}{2}=\frac{4}{3}$.

5. Розв'язати рівняння:

а) $x+1\frac{1}{2}x+9=\frac{2}{3}x+4+\frac{5}{6}x-\frac{6}{5}x+\frac{1}{5}$;

б) $2\frac{1}{2}x-3\frac{1}{2}x+1=x-5\frac{1}{3}x+3\frac{1}{5}x$;

в) $15(x+2)=6(2x+7)$;

г) $\dfrac{1-7x}{8}-\dfrac{x+30}{3}-\dfrac{x-1}{5}=3$;

д) $\dfrac{5x+1}{3}-\dfrac{17-x}{2}=\dfrac{3x+1}{8}+15$.

5. Розв'язати рівняння:

а) $|x|-1=5$;

б) $|2x-3|=5$;

в) $|x-8|=x-8$;

г) $\dfrac{|x-9|}{x-9}=-1$;

д) $2-x=|3x-1|$;

е) $|x+1|+|x-2|=3$;

є) $|x|+|x+1|=2$;

ж) $|x|+|x+2|+|2-x|=x+1$;

з) $\left|\dfrac{x-3}{2}+1\right|=2$.

6. Дріб $\dfrac{p+19}{17-3y}$ дорівнює 4 при $y=4$. При якому значенні y даний дріб буде дорівнювати 1.

7. Учень задумав число. Якщо від нього відняти 7 і результат поділити на 3, то дістанемо 5. Яке число задумав учень?

8. Сума двох чисел дорівнює 13,6, а різниця 1,6. Знайдіть ці числа.

9. Сума двох чисел дорівнює 105, їх відношення 1 : 2. Знайдіть ці числа.

10. Батько в 5 раз старший від сина, а син на 32 роки молодший від батька. Скільки років кожному з них?

11. Мотузку завдовжки 25 м розрізали на дві частини, одна з яких на 50 % довша від другої. Знайдіть довжини цих частин мотузки.

12. У трьох кошиках 54 кг яблук, У першому кошику на 12 кг менше, ніж у другому, а в третьому – вдвічі більше, ніж у першому. Скільки кілограмів яблук у кожному кошику?

13. Катер у стоячій воді йде зі швидкістю 20 км/год. Швидкість течії річки 2 км/год. Знайдіть відстань між двома пристанями, якщо рейс туди й назад катер здійснює за 5 год.

Тема 14

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Combined equations

Рівняння виду $ax+by=c$, де a,b,c - коефіцієнти; x,y - змінні , називається лінійним рівнянням з двома змінними x і y. Якщо $a\neq 0$ і $b\neq 0$, його називають рівнянням першого степеня з двома змінними.

Пара значень змінних, яка задовольняє рівняння $ax+by=c$, називається розв'язком цього рівняння.

Наприклад,

$5x+3y=21 \Rightarrow x=0, y=7$ *- розв'язки рівняння.*

Розглянемо рівняння $3x-2y=6$. Надавши змінній x значень -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., знайдемо відповідні значення змінної у. Матимемо розв'язки даного рівняння: (-2;-6), (-1;-4,5), (0;-3), (1;-1,5), (2;0), (3;1,5)…

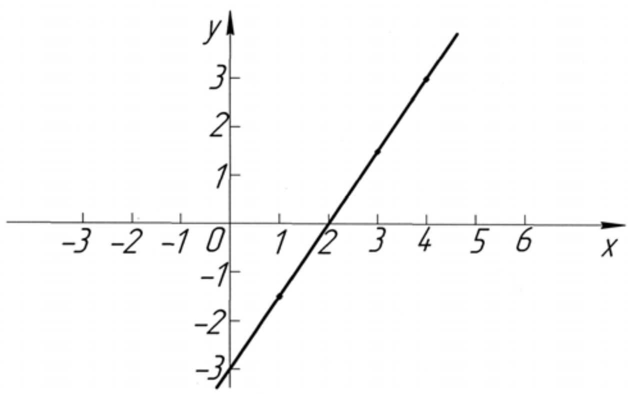


Рисунок 1

Якщо на координатній площині позначити точки, що відповідають цим парам, виявиться, що всі вони розміщені на одній прямій (рис. 1). Цю пряму називають графіком ***(графік - graph)*** даного рівняння. Графік кожного рівняння першого степеня з двома змінними – пряма.

Якщо вимагається знайти спільні розв'язки двох чи кількох рівнянь, то говорять, що ці рівняння утворюють систему.

Розв'язком системи рівнянь називають спільний розв'язок усіх її рівнянь.

Наприклад,

$$\begin{cases} x+3y=9 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Rightarrow x=3, y=2 \text{ - \textit{розв'язок системи.}}$$

Розв'язувати системи рівнянь можна графічним способом.

Розв'яжемо, *наприклад*, систему

$$\begin{cases} x+3y=9 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

Для цього побудуємо на одній координатній площині графіки обох її рівнянь (рис. 2). Побудовані графіки перетинаються в точці A(3; 2). *Тому пара чисел* (3; 2) *- єдиний розв'язок даної системи рівнянь.*

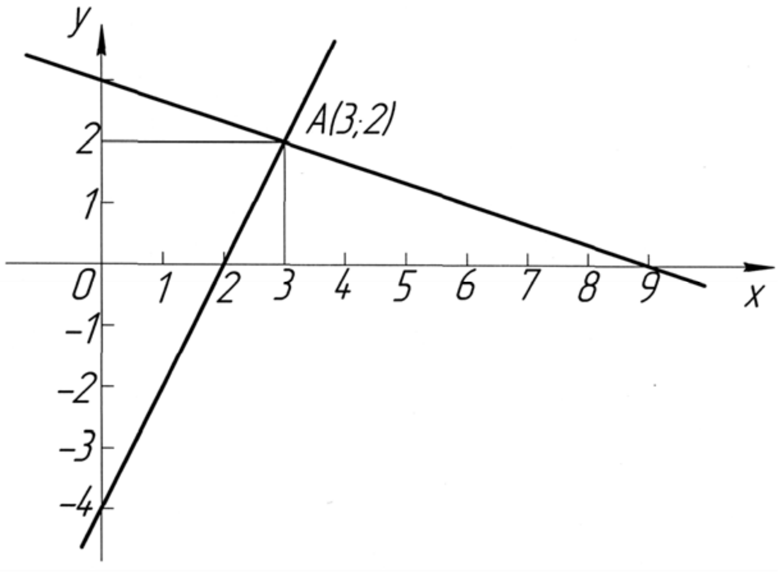


Рисунок 2

Щоб розв'язати систему рівнянь способом підстановки ***(метод підстановки - substitution method)***, треба:

1) виразити з якого-небудь її рівняння одну змінну через другу;
2) підставити в інше рівняння системи замість цієї змінної здобутий вираз;
3) розв'язати утворене рівняння з однією змінною;
4) знайти відповідне значення другої змінної.

Приклад 1:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$3x = 2y + 12 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{3}y + 4$$

$$5\left(\frac{2}{3}y + 4\right) + 3y = 1$$

$$\frac{10}{3}y + 20 + 3y = 1$$

$$\frac{19}{3}y = -19 \Rightarrow y = -3$$

$$3x + 6 = 12 \;\Rightarrow\; x = 2$$

Відповідь: $(2;-3)$ *- розв'язок системи.*

Щоб розв'язати систему методом додавання потрібно:

1) зробити коефіцієнти при одній змінній у першому і другому рівняннях протилежними;
2) почленно додати ліві і праві частини рівнянь;
3) розв'язати утворене рівняння з однією змінною;
4) знайти відповідне значення другої змінної.

Приклад 2:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 9x-6y=36 \\ 10x+6y=2 \end{cases} \\ \hline \quad 19x=38 \end{array}$$

$x=2$

$6-2y=12$

$-2y=6 \;\Rightarrow\; y=-3$

Відповідь: $(2;-3)$ *- розв'язок системи.*

Вправи:

1. Розв'язати графічним методом системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x-y=2, \\ 3x-y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x-y=5, \\ 3x+2y=12. \end{cases}$

2. Розв'язати методом підстановки системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x+y=11, \\ 3x-y=9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x+4y=253, \\ y=5x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9x-4y=98, \\ x=\dfrac{3}{5}y; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3y-8x=15, \\ 7x-2y=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y=a+2b, \\ x-y=a; \end{cases}$

е) $\begin{cases} ax+y=1, \\ ay-b^2x=b; \end{cases}$

є) $\begin{cases} \dfrac{7x-3y}{5}=\dfrac{5x-y}{3}-\dfrac{x+y}{2}, \\ 5(y+1)=3(x-1); \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 1-0,3y+0,6=\dfrac{x+1}{5}, \\ \dfrac{y-3}{4}=\dfrac{4x+9}{20}-1,5. \end{cases}$

3. Розв'язати методом додавання системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x+y=13, \\ 2x-y=12,5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 16x-27y=-6, \\ 5x-18y=-21; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-7y=3, \\ 5x-21y=11; \end{cases}$

4. Розв'язати системи введенням додаткових невідомих:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = 2, \\ \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{4}{x-y} = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x+y} + \dfrac{7}{x-y} = 1{,}9, \\ \dfrac{5}{x-y} - \dfrac{2}{2x+y} = 1{,}15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{6}{2x+y-1} - \dfrac{2}{2x-y+3} = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{4}{2x+y-1} + \dfrac{4}{2x-y+3} = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{3}{4x+3y} + \dfrac{2}{4x-3y} = \dfrac{37}{55}, \\ \dfrac{5}{4x-3y} - \dfrac{1}{4x-3y} = \dfrac{14}{55}. \end{cases}$

5. На будівництві працювало 50 мулярів і теслярів. Згодом кількість мулярів збільшилась у 2 рази, а теслярів у 3 рази і всіх стало 130. Скільки спочатку було мулярів і теслярів на будівництві?

6. Швидкість моторного човна за течією 23 км/год, а проти течії 17 км/год. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії.

7. Знайдіть два числа, якщо половина їх суми дорівнює 71, а половина різниці 31.

8. 20% першого числа на 15 менші, ніж 30 % другого, а 40 % першого на 2 більші від 20 % другого. Знайдіть ці числа.

9. Сума квадратів двох від'ємних чисел дорівнює 74, а різниця їх квадратів 24. Знайдіть ці числа.

10. Якщо розсадити дітей по двоє за стіл, то не вистачить три столи. Якщо ж розсадити їх по троє, то один стіл виявиться зайвим. Скільки було дітей і скільки столів?

Тема 15

КОРІНЬ N-ГО СТЕПЕНЯ. СТЕПІНЬ З РАЦІОНАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

n-th root. Power with rational exponent

Коренем n-го степеня ***(*корінь n-го степеня *-)*** з числа a називається таке число, n-й степінь якого дорівнює a.

Арифметичним коренем ***(*арифметичний корінь *- arithmetical root)*** n-го степеня з числа a називають невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Арифметичний корінь n-го степеня з числа a позначають $\sqrt[n]{a}$.

Наприклад,

$\sqrt[3]{8} = 2$, тому що $2^3 = 8$ і $2 > 0$.

При парному n існує два корені n-го степеня з будь-якого додатного числа a; корінь n-го степеня з числа 0 дорівнює 0; коренів парного степеня з від'ємних чисел не існує. При непарному n існує корінь n-го степеня з будь-якого числа a, і притому тільки один.

Для коренів непарного степеня справджується рівність

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

Наприклад,

$$x^4 = 81$$

$$x_1 = \sqrt[4]{81} = 3 \qquad x_2 = -\sqrt[4]{81} = -3$$

Для будь-якого x

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, \text{ ÿêù î } n \text{ ï àðí å;} \\ x, \text{ ÿêù î } n \text{ í åï àðí å.} \end{cases}$$

Корінь другого степеня з числа називають квадратним коренем ***(*квадратний корінь *- square root)***, а показник 2 кореня в запису опускають (наприклад, корінь квадратний із 7 позначають просто $\sqrt{7}$). Корінь третього степеня називають кубічним коренем ***(*кубічний корінь *- cube root)***.

Основні властивості арифметичних коренів n-го степеня.

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
3. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;
4. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$;
5. $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$;
6. $\sqrt[n]{a^n} = a, (a \geq 0)$;
7. $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, ÿêù î $a < b$;
8. $\sqrt{a^2} = |a|$;
9. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$;
10. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}, (a \geq 0)$.

Степенем числа $a > 0$ з раціональним показником $r = \frac{m}{n}$, де m - ціле число, а n - натуральне $(n > 1)$, називається число $\sqrt[n]{a^m}$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} .$$

Якщо $a < 0$, раціональний степінь числа a не визначений.

Для будь-яких r, s і додатних a і b справедливі рівності:

1. $a^0 = 1$;
2. $a^1 = a$;
3. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;
4. $a^r : a^s = a^{r-s}$;
5. $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$;
6. $(ab)^r = a^r b^r$;
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$;
8. $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$;
9. Якщо $0 < a < b$, то
   $a^r < b^r$, ÿêø î $r > 0$,
   $a^r > b^r$, ÿêø î $r < 0$;
10. Якщо $r > s$, то
   $a^r > a^s$, ÿêø î $a > 1$,
   $a^r < a^s$, ÿêø î $0 < a < 1$.

Приклад 1:

Спростити вираз $\frac{\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}}{\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2}} - \frac{8ab}{a^2 - 4b^2} + \frac{2b}{a - 2b}, 0 < a < 2b.$

Розв'язання:

$$\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2} = \sqrt{(a - 2b)^2} = |a - 2b| = 2b - a;$$

$$\sqrt{a^2+4ab+4b^2}=\sqrt{\left(a+2b\right)^2}=\left|a+2b\right|=a+2b;$$

Тоді

$$\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b}=\frac{2b-a}{a+2b}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b}=$$

$$=\frac{\left(2b-a\right)\left(a-2b\right)-8ab+2b\left(2b+a\right)}{a^2-4b^2}=\frac{-a^2+4ab-4b^2-8ab+2ab+4b^2}{a^2-4b^2}=$$

$$=\frac{-2ab-a^2}{a^2-4b^2}=\frac{-a\left(2b+a\right)}{\left(a+2b\right)\left(a-2b\right)}=\frac{-a}{a-2b}=\frac{a}{2b-a}.$$

Приклад 2:

Перевірити справедливість рівності

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2.$$

Розв'язання:

Розглянемо рівність

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Очевидно, що коли вона виконується, то виконується і задана рівність. Нехай $a=\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}$, $b=2+\sqrt{3}$. *Неважко переконатись, що* $a>0$ *і* $b>0$. *Якщо при цьому виконується рівність* $a^2=b^2$, *то* $a=b$. *Знаходимо*

$$a^2=\frac{\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(19-8\sqrt{3}\right)}{\left(4-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(19-8\sqrt{3}\right)}{19-8\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3},$$

$$b^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}.$$

Оскільки $a^2=b^2$, *то* $a=b$, *тобто задана рівність справедлива.*

Вправи:

1. Здобути корінь з одночленів:

$\sqrt[6]{2^{12}}$; $\sqrt[4]{3^8}$; $\sqrt[3]{-a^6}$; $\sqrt[3n]{a^{6m+9mn}}$; $\sqrt{\dfrac{a^4}{9}}$; $\sqrt[3]{-\dfrac{a^{3n}}{64^{-n}}}$.

2. Винести множник з-під знака кореня:

а) $\sqrt{75}$;

б) $\sqrt[3]{500}$;

в) $\sqrt[3]{-108}$;

г) $\sqrt[3]{x^{10}y^7}$;

д) $\sqrt{\dfrac{(a^2-2ab+b^2)y}{25}}$;

е) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{64}a^{6n}c^{15}}$;

є) $\sqrt[p+3]{a^{(p-3)^2+12p}}$;

ж) $\sqrt{\dfrac{a}{b^2}-\dfrac{1}{b}}$;

з) $\sqrt[3]{\dfrac{b^3}{a^4}-\dfrac{b^5}{a^6}}$;

и) $\dfrac{3}{2a}\sqrt{4a^2-\dfrac{8a^2b^2}{9}}$;

і) $\dfrac{ac}{b}\sqrt[n]{3^{n+2}a^{n+5}b^{2n-1}c^{1-3n}}$.

3. Внести множник під знак кореня:

а) $6\sqrt{5}$;

б) $\dfrac{1}{m}\sqrt[5]{m^5-1}$;

в) $3a^nb\sqrt[m]{3a^2b}$;

г) $(2-a)\sqrt{\dfrac{2a}{a-2}}, a>2$.

4. Скоротити показники коренів та підкореневих виразів:

а) $\sqrt[3]{a^6}$;

б) $\sqrt[mn]{a^mb^{2m}}$;

в) $\sqrt[-4]{a^{-8n}b^{10}c^2}$;

г) $\sqrt[6n]{\dfrac{16a^{10}b^6}{9c^{18}}}$;

д) $\sqrt[15]{\dfrac{32a^{-25}c^{15}}{3125b^{30}}}$;

е) $\sqrt[6]{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$;

є) $\sqrt[8]{(3-x)^4}, x>3$.

5. Привести корені до загального показника:

а) $\sqrt[6]{a^5}$ і $\sqrt[5]{a^3}$;

б) $\sqrt[9]{a^4}$ і $\sqrt[6]{a^5}$.

6. Звільнити підкореневий вираз від дробу:

$\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; $b\sqrt[4]{\frac{a}{b^3}}$; $\sqrt[n]{\frac{2b^5c^3}{a^7}}$.

7. Що більше:

а) $2\sqrt{3}$ чи $3\sqrt{2}$;

б) $2\sqrt[8]{3}$ чи $3\sqrt[3]{2}$;

в) $\sqrt{2}$ чи $\sqrt[3]{3}$.

8. Виконайте дії:

а) $\left(5\sqrt{2}-4\sqrt[3]{3}\right)+\left(3\sqrt{2}+6\sqrt[3]{3}\right)$;

б) $\left(2\sqrt[3]{11}-8\sqrt[5]{7}\right)+\left(7\sqrt[5]{7}-\sqrt[3]{11}\right)$;

в) $\left(2+3\sqrt{32}\right)+\left(\frac{\sqrt{128}}{2}-6\sqrt{18}\right)$;

г) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}$;

д) $\frac{5}{4-\sqrt{11}}+\frac{1}{3+\sqrt{7}}-\frac{6}{\sqrt{7}-2}-\frac{\sqrt{7}-5}{2}$.

9. Виконайте множення:

а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$;

б) $\sqrt{3}m\cdot\sqrt{3}$;

в) $\left(2\sqrt{6}-3\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{3}+2\sqrt{2}$;

г) $\left(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{ab^2}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$.

10. Виконайте дії:

а) $\frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{a}}\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{2}{\sqrt{a}}+2\right)$;

б) $\left(\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right)\cdot\frac{1+a(a-2)}{a^2-a+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{(a+1)^2}}$.

11. Виконайте ділення:

а) $\sqrt[3]{6a^4}:\sqrt[3]{2a}$;

б) $\left(3\sqrt[3]{6}+2\sqrt[3]{18}-4\sqrt[3]{12}\right):2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$;

в) $\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right):\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

12. Виконайте дії:

а) $\left(\sqrt[3]{4m^2}-\sqrt[3]{9n^2}\right):\left(\sqrt[3]{2m}+\sqrt[3]{3n}\right)$;

б) $\left(\sqrt[3]{25a^2}-\sqrt[3]{16b^2}\right):\left(\sqrt[3]{5a}-\sqrt[3]{4b}\right)$;

в) $\left(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{16xy^2}+\sqrt[3]{4y^3}\right):\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2y}\right)$.

13. Піднесіть до степеня наступні вирази:

а) $\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^4$;

б) $\left(\sqrt[6]{2}-\sqrt{3}\right)^2$;

в) $\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2$;

г) $\left(a\sqrt{b}-2a\sqrt{2b}\right)^3$; $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2+\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}{2(a-b)}:\dfrac{1}{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}-3\sqrt{ab}$.

14. Скоротити дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$;

б) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$.

15. Звільнити дроби від коренів у знаменнику:

а) $\dfrac{18}{\sqrt{6}}$;

в) $\dfrac{b}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$;

б) $\dfrac{a}{1-\sqrt{a}}$;

г) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}$.

16. Довести тотожності:

а) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, якщо $a>0$, $b>0$, $a^2-b>0$;

б) $\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(10-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$;

в) $\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=2\sqrt{3m-n}$.

17. Виконати дії:

а) $\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{25}}+\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-\dfrac{10}{\sqrt[3]{25}}\right):\left(\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5}\right)+\sqrt[6]{5}$;

б) $2x+\sqrt{x^2-1}\cdot\left(1+\dfrac{x^2}{x^2-1}-\dfrac{1+x:\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$;

в) $\dfrac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\dfrac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right)$;

г) $\left(\dfrac{\sqrt{2+a}}{\sqrt{2+a}-\sqrt{2-a}}+\dfrac{2-a}{\sqrt{4-a^2}-2+a}\right):\dfrac{\sqrt{\dfrac{4}{a^2}-1+\dfrac{2-a}{a}}}{\sqrt{2-a}}$.

18. Спростити вирази:

а) $\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2}$;

б) $\dfrac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2}}$.

19. Довести тотожності:

а) $\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\dfrac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}:\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}=1$;

б) $\dfrac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p-1}}=4p-\sqrt{4p^2-1}$, якщо $p\geq\dfrac{1}{2}$;

в) $a^3+b^3+c^3=3abc$, якщо $a+b+c=0$.

20. Напишіть без коренів наступні вирази:

а) $\sqrt[3]{a^2}$;

б) $\sqrt[-3]{a^{-5}}$;

в) $\sqrt[m]{\dfrac{x^2}{y^n}}$.

21. Замінити радикалами:

$a^{\frac{5}{6}}$; $(a+b)^{0,25}$; $c^{\frac{5n-3}{2m}}$.

22. Обчислити:

а) $25^{\frac{1}{2}}-27^{\frac{2}{3}}+81^{\frac{3}{4}}$;

б) $9^{-0,5}-8^{\frac{1}{3}}+0,25^{-\frac{3}{2}}$;

в) $4^{-\frac{1}{4}}+\left(\dfrac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-\left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)$.

23. Виконати дії:

а) $a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{3}{5}}\cdot a^{\frac{3}{4}}\cdot b^{\frac{2}{3}}$; $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$;

б) $\dfrac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{1,5}a^{\frac{1}{6}}-a^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{a^{\frac{5}{6}}+3^{1,5}a^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{1}{3}}+3\right)^2}\cdot\left(\dfrac{3a^{\frac{1}{3}}}{a-27}+\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}-3}\right)$;

в) $\left(\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^2$, якщо $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}$;

г) $\left(\dfrac{(1-a)\sqrt[3]{1+a}}{a}\cdot\sqrt{\dfrac{3a^2}{4-8a+4a^2}}\right)^{-1}:\dfrac{3a\sqrt{a}}{2\sqrt{1-a^2}}$;

д) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)^{-1}$.

24.Довести рівності:

а) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}}-2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-ab^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b}:a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$, якщо $a\neq b\neq 0$;

б) $\dfrac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot x^{\frac{1}{4}}+1=\sqrt{x}$.

Тема 16

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Quadratic

Квадратним або рівняння другого степеня з однією змінною називають рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де x - змінна, а a,b,c - коефіцієнти квадратного рівняння, причому $a\neq 0$.

Якщо коефіцієнт b або c дорівнює нулю, то квадратне рівняння називають неповним ***(*неповне квадратне рівняння** *- pure quadratic)***. Неповні квадратні рівняння бувають трьох видів:

1) $ax^2=0$; 2) $ax^2+bx=0$ 3) $ax^2+c=0$.

Рівняння $ax^2=0$ має один корінь $x=0$.

Рівняння виду $ax^2+bx=0$ рівносильне рівнянню $x(ax+b)=0$ і завжди має два корені: $x=0$ і $x=-\dfrac{b}{a}$.

Квадратне рівняння виду $ax^2 + c = 0$ рівносильне рівнянню $x^2 = -\frac{c}{a}$. Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, воно має два розв'язки $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, якщо $-\frac{c}{a} < 0$ - рівняння не має жодного розв'язку.

Приклад 1:

Знайти корені рівняння $2x^2 - 18 = 0$.

Розв'язання:

$$2x^2 - 18 = 0;$$

$$2x^2 = 18;$$

$$x^2 = 9;$$

$$x_{12} = \pm\sqrt{9};$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = -3.$$

Відповідь: $x_1 = 3,\ x_2 = -3.$

Дискримінантом ***(дискримінант - discriminant)*** рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ називають вираз $D = b^2 - 4ac$.

Якщо $D > 0$ рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два розв'язки, які шукаються за формулами

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ і } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Якщо $D = 0$ рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має один розв'язок, який шукається за формулою

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Якщо $D < 0$ рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має жодного розв'язку.

Приклад 2:

Знайти корені рівняння $x^2 + 4x - 21 = 0.$

Розв'язання:

$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100 > 0.$

$x_{12} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{100}}{2};$

$x_1 = 3,\ x_2 = -7.$

Відповідь: $x_1 = 3,\ x_2 = -7.$

Квадратне рівняння називають зведеним ***(*****зведене квадратне рівняння** ***- reduced quadratic)***, якщо коефіцієнт a дорівнює одиниці: $x^2 + px + q = 0$.

Якщо зведене квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ має два корені, то їх сума дорівнює коефіцієнту p рівняння, взятому з протилежним знаком, а добуток – вільному члену q:

$$x_1 + x_2 = -p;$$
$$x_1 x_2 = q,$$

де x_1, x_2 - розв'язки рівняння $x^2 + px + q = 0$.

Вправи:

1. Розв'язати рівняння:

а) $x^2 + 1 = 82;$

б) $5x^2 = 20;$

в) $x^2 - 0,5x = 0;$

г) $\dfrac{4}{x^2 - 10x + 25} + \dfrac{1}{25 - x^2} - \dfrac{1}{x + 5} = 0;$

д) $(ax + b)^2 - (a - bx)^2 - 4abx + a^2(x^2 - 1) = 0;$

е) $x^2 - 26x + 120 = 0;$

є) $x^2 - 372x + 3620 = 0;$

ж) $x^2 - 24x - 56 = 0;$

з) $x^2 - 4\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} = 0;$

и) $(x+3)(x-2) + (x+2)^2 - 3x - 10 = 0;$

і) $x - 7 + \frac{(x-6)^2}{3} = \frac{(x+4)^2}{2} - \frac{(x+2)(x+6)}{4}.$

2. Розв'язати рівняння введенням нової змінної:

а) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x-3)^2 = 81;$

б) $(x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2 = 55;$

в) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = 2{,}9;$

г) $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6.$

3. Скласти рівняння по заданим кореням:

а) 7 і $-5;$

б) $4 - \sqrt{5}$ і $4 + \sqrt{5};$

в) $\frac{1}{10 - 2\sqrt{10}}$ і $\frac{1}{10 + \sqrt{40}}.$

4. Розкласти на множники наступні тричлени:

а) $x^2 - 4x + 3;$

б) $a^2 - 29a + 198;$

в) $5y^2 - 2by - 35b^2.$

5. Скоротити дроби:

а) $\frac{a^2 + 6a - 91}{a^2 + 8a - 105};$

б) $\frac{2a^2 + 8a - 90}{3a^2 - 36a + 105};$

в) $\frac{a^2 - 9ab + 14b^2}{a^2 - ab - 2b^2}.$

6. Розв'язати рівняння:

а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0;$

б) $x^4 - 25x^2 = m^2x^2 - 25m^2;$

в) $x^4 - \frac{50}{2x^4 - 7} = 14;$

г) $x^2(x-4)(x+4)=24-2x^2\left(x^2+5\right)$.

7. Розкласти на множники многочлени:

а) x^4-5x^2+4;

б) x^4-8x^2+7;

в) $x^4-\left(1+ab\right)x^2+ab$.

8. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 61, а добуток 900.

9. Добуток двох послідовних цілих чисел більший від їх суми на 239. Знайдіть ці числа.

10. Квадрат суми двох послідовних натуральних чисел більший від суми їх квадратів на 264. Знайдіть числа.

11. Знайдіть три послідовні цілі числа, сума квадратів яких дорівнює 434.

Тема 17

ФУНКЦІЇ ТА ГРАФІКИ

Function. Graph

Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини ***(множина** - set)* D відповідає єдине значення змінної y, то таку відповідність називають функцією ***(функція** - function)*. При цьому x називають незалежною змінною ***(незалежна змінна** - independent variable)* або аргументом ***(аргумент** - argument)*, y - залежною змінною ***(залежна змінна** - dependent variable)*, а множину D - областю визначення даної функції.

Задають функції найчастіше формулами ***(формула** - formula)*, таблично ***(таблиця** - table)* або графічно. Графіком функції називається множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати - відповідним значенням функції.

Наприклад, формула $y = x^2$ *задає функцію, яка виражає відповідність між числами і їх квадратами. Якщо область визначення цієї функції - множина цілих чисел з проміжку* $[-3;3]$, *то її можна задати таблицею:*

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Графіком функції $y = x^2$, *заданої на множині всіх дійсних чисел* R, *є вся* **парабола *(parabola)*** *з нескінченними вітками (рис. 1). Область визначення цієї функції — множина* R, *а область значень — проміжок* $[0;+\infty)$.

Елементарні функції

$y = kx$ - **пряма пропорційність *(direct proportionality)***. Її графік - пряма, що проходить через початок координат (рис. 2).

Область визначення цієї функції — множина R, область значень, якщо $k \neq 0$ - теж множина R.

Лінійною **(лінейна функція - *linear function*)** називають функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$. Її графік – пряма, **не паралельна *(non-parallel)*** осі y (рис. 3). Область визначення R, область значень – множина R, якщо $k \neq 0$. Для побудови графіка лінійної функції досить знати координати двох його точок. Якщо k = 0, область значень – одне число b (рис. 4).

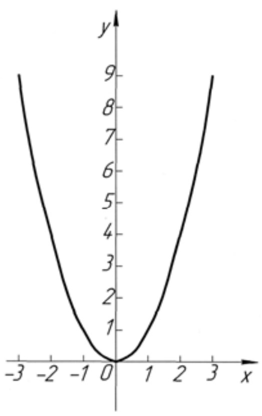


Рисунок 1

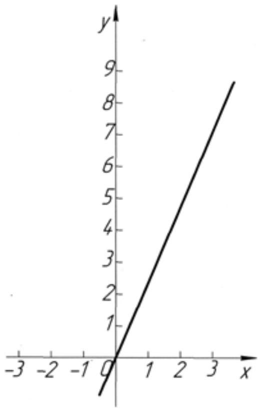


Рисунок 2

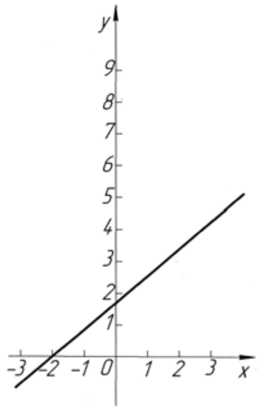


Рисунок 3

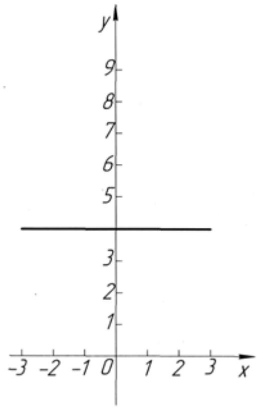


Рисунок 4

$y = \dfrac{k}{x}$ – **обернена пропорційність *(inverse proportionality)***. Її графік – **гіпербола *(hyperbola)***. Коли $k > 0$, вітки цієї гіперболи розміщені в I і III чвертях координатної площини (рис. 5), коли $k < 0$ — в II и IV чвертях (рис. 6). Область визначення функції $y = \dfrac{k}{x}$ множина R без числа 0, область значень – ця сама множина.

Графік функції $y = x^3$ зображено на рис. 7. Її область визначення і множина значень — множина R.

Графік функції $y = \sqrt{x}$ - одна вітка параболи (рис. 8). Її область визначення $[0;+\infty)$ і область значень $[0;+\infty)$.

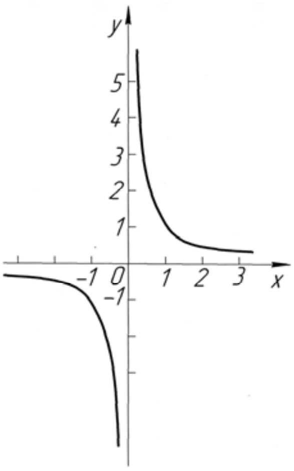


Рисунок 5

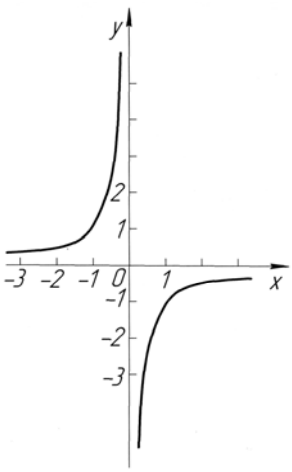


Рисунок 6

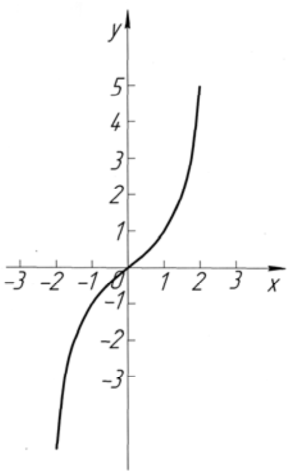


Рисунок 7

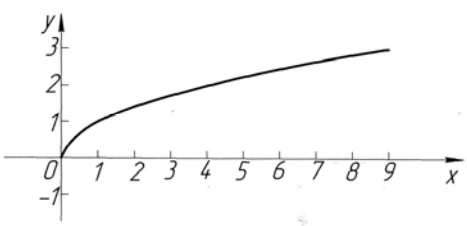


Рисунок 8

Якщо змінна y залежить від x, то записують $y = f(x)$. Символом $f(a)$ позначають значення функції $y = f(x)$ коли $x = a$. Нехай, наприклад, функцію задано формулою $y = 3x^2 - 5$. Можна записати і так: $f(x) = 3x^2 - 5$. У цьому випадку $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 5 = -5$; $f(1) = 3 \cdot 1^2 - 5 = -2$; $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 5 = 7$.

Зауваження. Якщо $y = f(x)$, то часто кажуть, що y — функція від x, тобто функцією називають змінну y. Однак здебільшого під функцією розуміють не одну залежну змінну, а відповідність між значеннями двох змінних. До того ж — не будь-яку відповідність, а однозначну, при якій кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y.

Перетворення графіків елементарних функцій

Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x (рис. 9).

Щоб побудувати графік функції $y = kf(x)$, треба графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x в k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його в k разів до осі x, якщо $0 < k < 1$.

Щоб дістати графік функції $y = f(x) + n$, треба графік функції $y = f(x)$ перенести на n одиниць в напрямі осі y, якщо $n > 0$, або в протилежному напрямі, якщо $n < 0$.

Щоб дістати графік функції $y = f(x - m)$, досить графік функції $y = f(x)$ перенести на m одиниць в напрямі осі x, якщо $m > 0$, або на $-m$ одиниць в протилежному напрямі, якщо $m < 0$ (рис. 10).

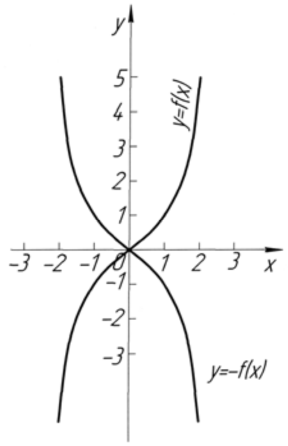


Рисунок 9

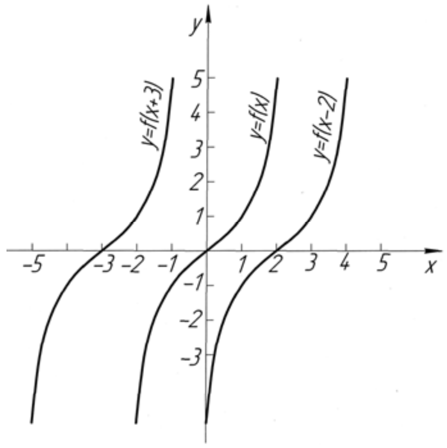


Рисунок 10

Рисунок 11

Функція, яка задається формулою $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c - довільні числа, а x - аргумент, називається квадратичною функцією.

Графік функції $y = ax^2 + bx + c$ - парабола, координати вершин якої $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$. Якщо $a > 0$, то вітки параболи направлені вверх, якщо $a < 0$, то вітки параболи направлені вниз.

Щоб побудувати графік функції $y = ax^2 + bx + c$, можна знайти координати вершини параболи і ще кількох її точок, позначити їх на координатній площині і провести через них плавну лінію. Можна дотримуватись іншого способу: спочатку побудувати графік функції $y = ax^2 + bx$, а потім підняти або опустити його на |c| одиниць. Графік функції $y = ax^2 + bx$ будувати неважко, оскільки він перетинає вісь абсцис у точках $x = 0$ і $x = -\frac{b}{a}$, а її вершина знаходиться у точці $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-b^2}{4a}\right)$.

Описуючи властивості функції, звичайно починають з її області визначення. **Область визначення функції *(definitional domain)*** – **проекція *(projection)*** її графіка на вісь x; **область значень функції *(codomain)*** – проекція її графіка на вісь y (рис. 11).

Якщо для будь-яких двох значень аргументу більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, то таку функцію називають зростаючою (**зростаюча функція** - *increasing function*). Якщо для будь-яких двох значень аргументу більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, то таку функцію називають спадною (**спадна функція** - *drop-down function*). Наприклад, функції $y=2x$, $y=x^3$ - зростаючі, а функції $y=-2x$, $y=-\sqrt{x}$. Графік зростаючої функції «іде вгору», а спадної — «опускається вниз».

Можна також говорити про зростання чи спадання функції не на всій області визначення, а тільки на окремих проміжках.

Якщо графік функції **симетричний** (*symmetric*) відносно осі y, її називають парною (**парна функція** - *even function*). Якщо графік функції симетричний відносно початку координат, її називають непарною (**непарна функція** - *odd function*).

Функція $y=f(x)$ парна, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x)=f(x)$. Функція $y=f(x)$ непарна, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $-f(-x)=f(x)$.

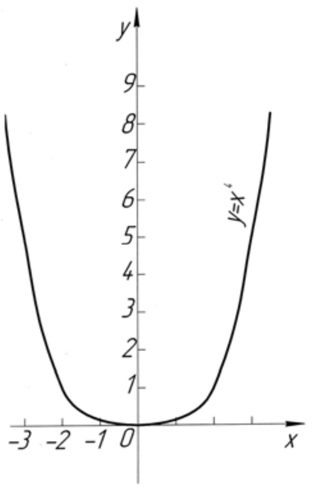


Рисунок 12

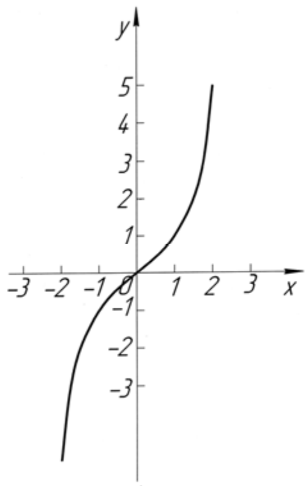


Рисунок 13

Функція, задана формулою $y=x^n$, де x - аргумент, а n - довільне натуральне число, називається степеневою функцією (**степенева функція** - *power function*) з натуральним показником. Конкретні приклади таких функцій: $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, …

Степенева функція з натуральним показником n парна, якщо число n парне (рис. 12), або непарна, якщо число n непарне (рис. 13).

Вправи:

1. а) $f(x)=2x^2-3x+1$. Знайти: $f(0), f(3), f(-3)$.

б) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$. Знайти: $f(0), f(1), f(m+1)$.

2. Знайти $f\left(-1\right)$, $f(1)$, $f(0)$, $f\left(3\right)$, якщо функція задана таблично

x	-4	-2	-1	0	1	2	3	4
y	17	5	2	1	2	5	10	17

3. Знайти $f\left(-3\right)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(2\right)$, $f\left(5\right)$, $f\left(8\right)$, $f\left(2{,}75\right)$

а) $$f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ ÿêù î } -\infty<x\le -2, \\ 4-x^2, \text{ ÿêù î } -2<x<2, \\ x-2, \text{ ÿêù î } 2\le x<\infty; \end{cases}$$

б) $$f(x)=\begin{cases} x+6, \text{ ÿêù î } x<-2, \\ x^2-x-2, \text{ ÿêù î } |x|\le 2, \\ 0, \text{ ÿêù î } x>2. \end{cases}$$

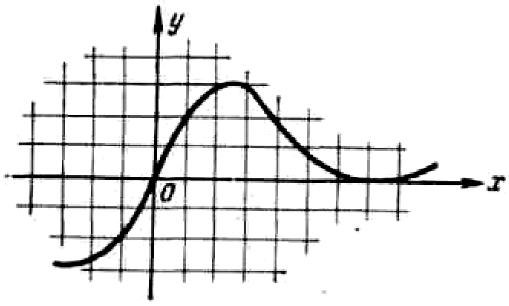
4. Записати однією формулою функції, використовуючи знак абсолютної величини:

а) $$f(x)=\begin{cases} x, \text{ ÿêù î } x\ge 0, \\ -x, \text{ ÿêù î } x<0; \end{cases}$$

б) $$f(x)=\begin{cases} 2x-3, \text{ ÿêù î } x\ge 1{,}5, \\ 3-2x, \text{ ÿêù î } x<1{,}5; \end{cases}$$

в) $$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ ÿêù î } x>0, \\ -1, \text{ ÿêù î } x<0. \end{cases}$$

5. Функція задана графіком. По графіку знайти корні функції:



6. Знайти корні функції:

а) $y = x - 2$;

б) $y = x^2 - 4$;

в) $y = \sqrt{\dfrac{x+8}{x}}$;

г) $y = x^2 - 2|x| - 3$.

7. Побудувати графіки функцій:

а) $3x - 2y = 0$;

б) $y = |x+1| - x + 1$.

8. Розв'язати графічно рівняння:

а) $5x + 1 = 6$;

б) $|x| = 1$;

в) $2|x| - 3 = |x| + 6$.

9. Побудувати графіки функцій:

а) $y = x - 1$; б) $y = 2x + 3$.

10. Чи належить графіку функції $y = \dfrac{8+3x}{2}$ дані точки: $(2;7)$, $(2;8)$, $(3;9)$, $\left(\dfrac{2}{3};5\right)$, $\left(\dfrac{1}{3};4{,}5\right)$, $(-2;1)$, $\left(-\dfrac{1}{2};5\right)$, $(-2;-7)$.

11. Знайти значення k якщо графік функції $y = kx + 2$ проходить через точку $P(-7;-12)$.

12. Розв'язати графічно системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |2x + 3y| = 5, \\ |2x - 3y| = 1. \end{cases}$

13. Побудувати графіки функцій:

а) $y = \dfrac{12}{x}$;

б) $y = -\dfrac{12}{x}$.

14. Розв'язати графічно системи рівнянь:

а) $\begin{cases} xy = -12, \\ x + 2y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 21, \\ xy = -12. \end{cases}$

15. Побудувати графіки функцій $y = 4 - x^2$ та $y = \left|4 - x^2\right|$.

Тема 18

НЕРІВНОСТІ

Inequality

Число a вважається більшим від b, якщо різниця $a - b$ - число додатне; число a менше від b, якщо різниця $a - b$ - число від'ємне.

Знаки ***(*знак - *sign)*** $<$ і $>$ називають знаками строгої нерівності ***(*строга нерівнсть - *strict inequality)***.

Знаки $\le$ і $\ge$ також протилежні один одному, їх називають знаками нестрогої нерівності ***(*нестрога нерівність - *unstrict inequality)***. Будь-який із знаків <, >, $\le$ і $\ge$ називають знаком нерівності.

Два вирази, сполучені знаком нерівності, утворюють нерівність.

Якщо обидві частини нерівності – числа, її називають числовою нерівністю.

Властивості числових нерівностей

1. Якщо $a<b$ і $b<c$, то $a<c$.

2. Якщо до обох частин правильної нерівності додати одне й те саме число, то дістанемо правильну нерівність.

3. Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме додатне число, то дістанемо правильну нерівність. Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то дістанемо правильну нерівність.

4. Нерівності з однаковими знаками можна почленно додавати.

5. Нерівності з однаковими знаками можна почленно перемножати, якщо їх ліві і праві частини – додатні числа.

Розв'язування нерівностей з однією змінною

Розв'язком нерівності з однією змінною називається значення цієї змінної, яке задовольняє дану нерівність.

Розв'язати нерівність — це означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх немає.

Розв'язують нерівність, замінюючи її іншими нерівностями, простішими і рівносильними їй.

Дві нерівності називають рівносильними ***(*рівносильні нерівності - *equivalent inequalities)***, якщо вони мають одні й ті самі розв'язки, тобто якщо кожний розв'язок першої нерівності задовольняє другу, а кожний розв'язок другої нерівності задовольняє першу.

Властивості нерівностей із змінними

1. Якщо з однієї частини нерівності перенесемо в іншу доданок з протилежним знаком, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.

2. Якщо обидві частини нерівності помножимо або поділимо на одне й те саме додатне число, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.

3. Якщо обидві частини нерівності помножимо або поділимо на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.

Нерівність виду $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (замість знака $>$ можуть бути знаки $<,\le,\ge$, а функція в знаменнику може бути константою) розв'язується методом проміжків:

а) на числову вісь наносять точки $x_1, x_2, ..., x_n$, що розбивають її на проміжки в яких вираз $\frac{f(x)}{g(x)}$ зберігає знак. Такими точками можуть бути корені рівнянь $f(x)=0$ і $g(x)=0$. Відповідні цим кореням точки позначають на числовій прямій: зафарбованими кружками – точки, які задовольняють дану нерівність, а не зафарбованими – точки, які її не задовольняють.

б) відшукують і позначають на числовій осі знак виразу $\frac{f(x)}{g(x)}$ для значень x, які належать кожному з інтервалів.

Приклад 1:

Розв'язати нерівність $\frac{(x+3)(5-x)}{2x-5}>0.$

Розв'язуємо рівняння

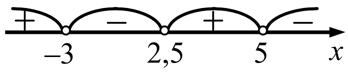
$\left(x+3\right)\left(5-x\right)=0;$

$x_1=-3;\ x_2=5.$

$2x-5=0;$

$x_3=2{,}5.$

Так як нерівність строга, то числа $x_1 = -3;\ \ x_2 = 5;\ \ x_3 = 2{,}5$ *не є розв'язками заданої нерівності, тому на числовій прямій їх позначаємо світлими кружками. Ці точки розбивають числову вісь на чотири проміжки. На кожному проміжку визначаємо знак виразу* $\dfrac{(x+3)(5-x)}{2x-5}$ *і проставляємо його на числовій прямій:*



З отриманого рисунка отримаємо відповідь:
$x \in \left(-\infty;-3\right) \cup \left(2{,}5;5\right).$

Ірраціональна нерівність ***(irrational inequality)*** $\sqrt{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < \left(g(x)\right)^2. \end{cases}$$

Ірраціональна нерівність $\sqrt{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності систем нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > \left(g(x)\right)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Система нерівностей ***(inequality system)***

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, яке задовольняє кожну з нерівностей даної системи.

Розв'язати систему нерівностей — це означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх немає.

Приклад 2:

Розв'язати нерівність $\sqrt{x+61} < x+5$.

Розв'язання:

Задана ірраціональна нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x+61 \geq 0, \\ x+5 > 0, \\ x+61 < x^2+10x+25, \end{cases}$$

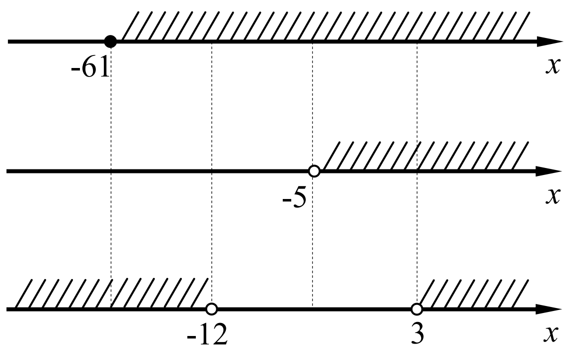
$$\begin{cases} x \geq -61, \\ x > -5, \\ x^2+9x-36 > 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо квадратне рівняння

$$x^2+9x-36=0$$

$$x_1=-12,\ x_2=3.$$

Знаходимо розв'язок кожної нерівності на різних числових прямих, зберігаючи при цьому взаємне розташування точок:



Розв'язки усіх нерівностей збігаються лише на проміжку $x \in (3;\infty)$.

Відповідь: $x \in (3;\infty)$.

Вправи:

1. Відняти другу нерівність з першої:

а) $6>3;\ 2<5;$

б) $-8<-5;\ -2>-7;$

в) $2x>b^2;\ a^2<9-x;$

г) $2a^2>b;\ x^2<9.$

2. Помножити обидві частини нерівності на вказаний множник:

а) $5 > -2$ *í à* 5;

б) $-7 < -5$ *í à* -2;

в) $x - 1 > 7 - x$ *í à* $a^2 + 4$;

г) $x + 2 < c$ *í à* $-x^2 - 4$.

3. Розділити обидві частини нерівності на вказаний дільник:

а) $-6 < 9$ *í à* 3;

б) $-15 > -35$ *í à* -5.

4. Чи рівносильні нерівності:

а) $3x \le 0$ *ò à* $5x + \dfrac{11}{x} \le \dfrac{11}{x}$;

б) $2x > 3$ *ò à* $\dfrac{2x}{9 - x^2} > \dfrac{3}{9 - x^2}$;

в) $2x + 3 > 0$ *ò à* $2x + 3 + (x - 8) > x - 8$.

5. Розв'язати нерівності:

а) $x + 4 > 2 - 3x$;

б) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{3}{5} < 4x - 3$.

6. Розв'язати системи нерівностей

а) $\begin{cases} 5(x+1) + 6(x+2) > 9(x+3), \\ 7x - 3(2x+3) > 2(x-18); \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-3)(x-4) < (x+1)(x+2), \\ x(x+1) + x(x+2) < (2x-1)(x+3). \end{cases}$

7. Розв'язати нерівності:

а) $\dfrac{5 - 2a}{8 + 5a} > 0$;

б) $\dfrac{x - 1}{x + 3} > 2$;

в) $\dfrac{3 - 5x}{x + 1} > 4$.

8. Знайти найбільше натуральне x, яке задовольняє системі нерівностей:

$$\begin{cases} 5x - \dfrac{3-2x}{2} > \dfrac{7x-5}{2} + x, \\ \dfrac{7x-2}{3} - 2x < 5 - \dfrac{x-2}{4}. \end{cases}$$

9. Розв'язати нерівності:

а) $|x-3| > 5$;

б) $\left|\dfrac{2}{x-13}\right| > \dfrac{8}{9}$;

в) $|x+2| + |x| + |x-2| < 4$;

г) $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{1+2x+x^2} - \dfrac{|x-3|}{x-3} < 5.$

10. Довести нерівності:

а) $a^2 + b^2 > 2|ab|$;

б) $3\left(\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) + 10 \geq 0$;

в) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$, якщо $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

11. Розв'язати нерівності:

а) $x^2 - 14x + 45 > 0$;

б) $\dfrac{(x-3)(x-5)}{x-2} > 0$;

в) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6} < 0$;

г) $\dfrac{1}{3x-2-x^2} - \dfrac{3}{7x-4-3x^2} > 0$;

д) $x^2 - 4|x| + 3 > 0.$

12. При яких значеннях m корні рівнянь будуть дійсними і різними:

а) $x^2 + 2(m-4)x + m^2 + 6m = 0$;

б) $(m+2)x^2+(2m+3)x+m-1=0;$

в) $(5m+1)x^2+(7m+3)x+3m=0.$

13. Розв'язати нерівності:

а) $\sqrt{(1-x)(2+x)}<1;$

б) $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0;$

в) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}.$

14. Розв'язати системи нерівностей:

а) $\begin{cases}\sqrt{4x-7}<x,\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}>4;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sqrt{3-x}>\sqrt{x-2},\\ \sqrt{3x-5}>\sqrt{x-4}.\end{cases}$

15. Розв'язати нерівності:

а) $x+3y+1<0;$

б) $y\geq\dfrac{6}{x};$

в) $|y|\geq x$.

16. Розв'язати системи нерівностей:

а) $\begin{cases}y\geq 2x+6,\\ y\leq -2x+6;\end{cases}$

б) $\begin{cases}y-3x-6\leq 0,\\ 2y-6x+3\geq 0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+y\leq 2,\\ y-x\leq 2,\\ y\geq 0.\end{cases}$

Тема 19

ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

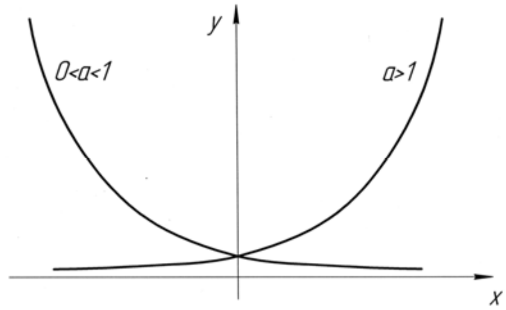
Exponential function. Logarithmic function

Основні властивості показникової функції $y=a^x$:

1) Область визначення функції a^x - множина R дійсних чисел.

2) Область значень функції a^x (якщо $a \neq 1$) — множина R_+ всіх додатних дійсних чисел. Якщо $a = 1$, функція a^x при всіх x стала: вона дорівнює 1.

3) Якщо $a > 1$, функція a^x зростає на всій числовій прямій; якщо $0 < a < 1$, функція a^x спадає на множині R.



Основні властивості логарифмічної функції $y = \log_a x$:

1. Область визначення логарифмічної функції – множина R_+ всіх додатних чисел.

2. Область значень логарифмічної функції — множина R всіх дійсних чисел.

3. Логарифмічна функція на всій області визначення R_+ зростає, якщо $a > 0$ і спадає, якщо $0 < a < 1$.

Властивості степенів

Для будь-яких x, y і додатних a і b справедливі рівності:

$$a^0 = 1;\ a^1 = a;$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};\ a^x : a^y = a^{x-y};$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy};\ \left(ab\right)^x = a^x b^x;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};\ a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Властивості логарифмів

1. Якщо $x > 0$, то

$$x = a^{\log_a x}$$

(основна логарифмічна тотожність).

2. Логарифм основи дорівнює одиниці

$$\log_a a = 1.$$

3. Логарифм одиниці дорівнює нулю

$$\log_a 1 = 0.$$

4. Якщо $x_1 > 0$ і $x_2 > 0$, то

$$\log_a(x_1x_2)=\log_a(x_1)+\log_a(x_2)$$

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=\log_a(x_1)-\log_a(x_2)$$

5. Якщо $x>0$, то

$$\log_a x^p = p\log_a x,$$

де p - будь-яке дійсне число

6. Якщо

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Зокрема,

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b=\log_{a^p} b^p = p\log_{a^p} x$$

Показникові та логарифмічні рівняння

1. Показникове рівняння

$$a^{f(x)}=b^{g(x)}\ \left(a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1\right)$$

рівносильне рівнянню

$$f(x)\log_c a = g(x)\log_c b,$$

де $c>0, c\neq 1$.

2. Показникове рівняння

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}\ \left(a>0, a\neq 1\right)$$

рівносильне рівнянню

$$f(x)=g(x).$$

Приклад 1:

Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{4}\cdot 4^{x^2}=8\cdot\left(0{,}5\right)^{3x}.$$

Розв'язання:

$$2^{-2}\cdot\left(2^2\right)^{x^2}=2^3\cdot\left(2^{-1}\right)^{3x};$$

$$2^{-2}\cdot 2^{2x^2}=2^3\cdot 2^{-3x};$$

$$2^{-2+2x^2}=2^{3-3x};$$

$$-2+2x^2=3-3x;$$

$$2x^2+3x-5=0;$$

$$x_1=1;\ x_2=-2,5.$$

Відповідь: $x_1=1;\ x_2=-2,5.$

Приклад 2:

Розв'язати рівняння

$$3\cdot 4^x+2^x\cdot 3^x-2\cdot 9^x=0.$$

Розв'язання:

$$3\cdot\left(2^x\right)^2+2^x\cdot 3^x-2\cdot\left(3^x\right)^2=0.$$

Це є однорідне рівняння. Поділимо ліву і праву частину рівняння на $\left(3^x\right)^2$.

$$3\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^x-2=0.$$

Нехай $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$, *тоді*

$$3\cdot t^2+t-2=0;$$

$$t_1=\frac{2}{3};\quad t_2=-1<0 \text{ – сторонній корінь.}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3};$$

$$x=1.$$

Відповідь: $x=1$.

3. Коренями рівняння

$$\left(u(x)\right)^{f(x)} = \left(u(x)\right)^{g(x)},$$

є розв'язки мішаної системи

$$\begin{cases} u(x) > 0, \\ u(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

і ті значення x, для яких $u(x) = 1$, якщо при цих значеннях визначені $f(x)$ і $g(x)$.

4. Логарифмічне рівняння

$$\log_a f(x) = b$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = a^b.$$

Приклад 3:

Розв'язати рівняння $\log_2\left(x^2 + 4x + 3\right) = 3$.

Розв'язання:

Задане рівняння рівносильне рівнянню

$$x^2 + 4x + 3 = 2^3;$$

$$x^2 + 4x + 3 = 8;$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0;$$

$$x_1 = -5; \quad x_2 = 1.$$

Відповідь: $x_1 = -5; \quad x_2 = 1$.

5. Логарифмічне рівняння

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

рівносильне одній з таких систем

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{або} \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Приклад 4:

Розв'язати рівняння $\log_3\left(x^2-4x-5\right)=\log_3\left(7-3x\right)$.

Розв'язання:

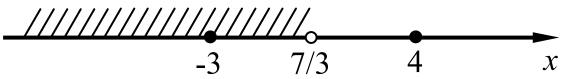
Задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 7-3x>0, \\ x^2-4x-5=7-3x; \end{cases}$$

Область визначення рівняння:

$$\begin{cases} x<\dfrac{7}{3}, \\ x^2-x-12=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<\dfrac{7}{3}, \\ x_1=-3; x_2=4. \end{cases}$$



Відповідь: $x_1=-3$.

6. Для розв'язування рівнянь

$$\log_a f(x)+\log_a g(x)=\log_a u(x)$$

$$\log_a f(x)-\log_a g(x)=\log_a u(x)$$

$$p\log_a f(x)=\log_a u(x)$$

їх приводять до вигляду

$$\log_a\left(f(x)g(x)\right)=\log_a u(x)$$

$$\log_a\frac{f(x)}{g(x)}=\log_a u(x)$$

$$\log_a f(x)^p=\log_a u(x)$$

Із знайдених коренів треба включити у відповідь ті, для яких $f(x)>0$, $g(x)>0$, $u(x)>0$.

Приклад 5:

Розв'язати рівняння $\lg(x+3)-2\lg(x-2)=\lg 0,4$.

Розв'язання:

Область визначення рівняння:

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Rightarrow \ x\in(2\,;\infty).$$

Застосовуючи властивості логарифмів, виконаємо деякі перетворення:

$$\lg(x+3)=\lg(x-2)^2+\lg 0,4;$$

$$x+3=0,4(x-2)^2;$$

$$0,4x^2-2,6x-1,4=0;$$

$$2x^2-13x-7=0;$$

$$x_1=7; \quad x_2=-\frac{1}{2}.$$

$x_2=-\frac{1}{2}$ *не входить до області визначення.*

Відповідь: $x=7$.

7. Якщо при розв'язуванні рівняння застосовують перетворення виду $\log_a\left(f(x)g(x)\right)$, $\log_a\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$, $\log_a\left(f(x)\right)^p$, де p - парне число, то виникає небезпека втрати коренів заданого рівняння. Щоб запобігти втраті коренів треба користуватись формулами у такому вигляді:

$$\log_a\left(f(x)g(x)\right)=\log_a|f(x)|+\log_a|g(x)|$$

$$\log_a\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\log_a|f(x)|-\log_a|g(x)|$$

$$\log_a\left(f(x)\right)^p=p\log_a|f(x)|$$

Показникові і логарифмічні нерівності

Показникова нерівність *(exponential inequality)* $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ при $a>1$ рівносильна нерівності

$$f(x)>g(x),$$

а при $0 < a < 1$ - нерівності

$$f(x) < g(x).$$

Логарифмічна нерівність ***(logarithmic inequality)*** $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

при $a > 1$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ - системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Приклад 6:

Розв'язати нерівність

$$\log_{0,2}\left(x^2 - x - 2\right) > \log_{0,2}\left(-x^2 + 2x + 3\right).$$

Розв'язання:

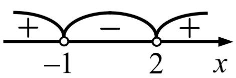
Користуючись властивістю логарифмічної функції, дістаємо, що дана нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 & (a) \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 & (\acute{a}) \\ x^2 - x - 2 < -x^2 + 2x + 3 & (\hat{a}) \end{cases}.$$

Розв'язуємо кожну нерівність системи:

а)

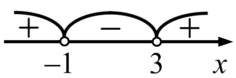
$$x^2 - x - 2 > 0,$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1,$$



$$x \in (-\infty\,;\, -1) \cup (2\,;\, \infty)$$

б)

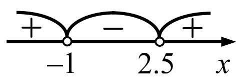
$$-x^2 + 2x + 3 > 0$$
$$x^2 - 2x - 3 < 0$$
$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3,$$



$$x \in (-1\,;\, 3)$$

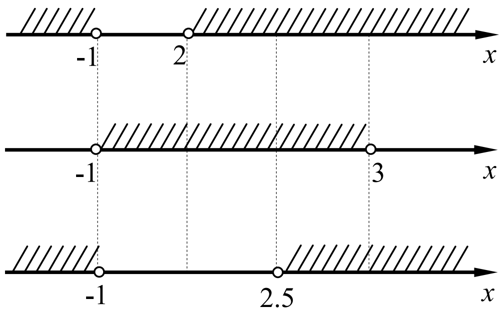
в)

$$x^2 - x - 2 > -x^2 + 2x + 3$$
$$2x^2 - 3x - 5 > 0$$
$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2{,}5,$$



$$x \in (-\infty\,;\, -1) \cup (2.5;\, \infty)$$

Знайдемо розв'язання системи:



Відповідь: $x \in (2{,}5;3)$.

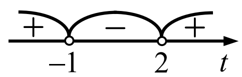
Приклад 7:

Розв'язати нерівність $\log_2^2(x-1) - \log_2(x-1) - 2 \le 0$.

Розв'язання:

Нехай $\log_2(x-1) = t$,

$$t^2 - t - 2 \le 0,$$

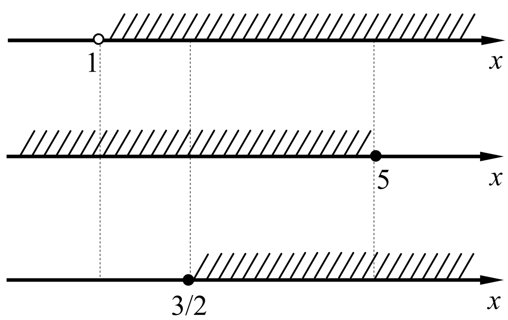


$$-1 \le t \le 2, \text{ або } \begin{cases} t \le 2 \\ t \ge -1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \log_2(x-1) \le 2 \\ \log_2(x-1) \ge -1 \end{cases}.$$

Дана система рівносильна такій системі:

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x-1 \le 4, \\ x-1 \ge \dfrac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \le 5, \\ x \ge \dfrac{3}{2}; \end{cases}$$



Відповідь: $x \in \left[\dfrac{3}{2}; 5\right]$.

Вправи:

1. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = a^{\frac{2}{x}}$;

б) $y = a^{\sqrt{x-2}}$;

в) $y = 2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}}$.

2. Перевірте рівності:

а) $\log_3 9 = 2$;

б) $\log_4 16 = 2$;

в) $\log_5 125 = 3$;

г) $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$.

3. Знайти x, якщо:

а) $x\log_2 0{,}125 = -2$;

б) $\dfrac{\log_{0,32}\left(2\sqrt{2}\right)}{5} = x$;

в) $\log_{3\sqrt{3}} x = -\dfrac{2}{3}$;

г) $\log_3\left(x-2\right) = 2$;

д) $\log_4 8\sqrt{2} = x$.

4. Обчислити:

а) $2\log_5 25 + 3\log_2 64$;

б) $\log_2 \log_2 16$;

в) $\log_6 36 + 5\log_7 49 + 4\log_{1/2} 4$.

5. Знайти x:

а) $2\log_3 x = 3\log_3 x - 2$;

б) $5\log_2 x - 3\log_7 49 = 2\log_2 x$;

в) $\left(\log_3 x\right)^2 - 3\log_3 x + 2 = 0$;

г) $\left(\log_2 x\right)^2 - \log_2 x - 2 = 0$;

6. Знайти область визначення функції:

а) $y = \log_2\left(x^2 - 1\right)$;

б) $y = \sqrt{\lg\dfrac{1-2x}{x+3}}$;

в) $y = \log_3 \log_{0,5} x$.

7. Порівняти x і y:

а) $\log_3 x < \log_3 y$;

б) $\log_{0,1} x < \log_{0,1} y$;

в) $\log_\pi x > \log_\pi y$.

8. Порівняти:

а) $\log_8 9$ ÷è $\log_9 8$;

б) $\log_4 1$ ÷è $\log_5 1$;

в) $\log_5 5$ ÷è $\log_6 6$;

г) $\log_{0,15} 0{,}15$ ÷è $\log_2 2$.

9. Обчислити:

а) $10^{1-2\lg 10}$;

б) $10 \cdot 100^{\frac{\lg 9}{2} - \lg 2}$.

10. Знайти x:

а) $\lg x = \lg 7 - \lg 3 + \lg 2$;

б) $\lg x = \dfrac{2\lg(a+b)}{5} - \dfrac{3\lg(a-b)}{4}$;

в) $\lg x = 3\lg a + 2\lg b - 4\lg c$.

11. Довести рівності:

а) $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} = 2$;

б) $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}} = 3$;

в) $\sqrt[\log_b a]{a^2} - 2\sqrt[\log_b a]{a} \cdot \sqrt[\log_a b]{b} + \sqrt[\frac{\log_a b}{2}]{b} = (b-a)^2$.

12. Обчислити A, якщо:

а) $A = 5^{3\ \log_{125} 7} - \dfrac{\log_{\sqrt{5}} 4}{4}$;

б) $A = 2^{2\ \log_4 9} + \log_{1/3} 3$;

в) $A = 3^{\frac{\log_{1/3}\frac{1}{25}}{2} - \frac{\log_{\sqrt{3}} 8}{6}}$;

г) $A = 10^B$, де $B = 2\log_{0,01} 2 + \log_{100} \sqrt{3}$;

13. Знайти значення виразів:

а) $10^{\lg 12}$; б) $10^{1-\lg 2,5}$; в) $0,1^{\lg 6-\lg 2}$.

14. Записати числа в стандартному вигляді ($a\cdot 10^n$, де $1<a<10$):

$125;\ 14,36;\ 8500;\ 13750;\ 13,7;\ 3;715;\ 19,14;\ 0,81;\ 0,305;$
$123000000;\ 0,000895;\ 0,0000001;\ 0,0007001.$

15. Знайти значення виразів:

а) $\lg 153-\lg 15,3$;

б) $\lg 14,24-\lg 85,44+\lg 60$;

в) $\lg 0,08-\lg 272+\lg 3800$.

16. Розв'язати рівняння:

а) $3^{-x}=81$;

б) $2^{2x-1}=8$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$;

г) $27^{\sqrt{x+1}}=729\cdot 3^{\sqrt{x+1}}$;

д) $0,2^{x^2+7x+4,5}=5\sqrt{5}$;

е) $2^{x-2}=1$;

є) $19^{3x^2+x-2}=1$;

ж) $3^x+3^{x+1}=108$;

з) $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448$;

и) $3^{2x}-3^x=702$;

і) $49^{1+\sqrt{x-2}}-344\cdot 7^{\sqrt{x-2}}=-7$;

17. Розв'язати рівняння:

а) $\frac{8^x+2^x}{4^x-2}=5$;

б) $12^x+27^x=2\cdot 8^x$;

в) $\sqrt[x]{100}+\sqrt[x]{25}=4,25\sqrt[x]{50}$;

г) $27^x-13\cdot 9^x+13\cdot 3^{x+1}-27=0$;

д) $x^2\cdot 2^{-x}+16\cdot 2^{\sqrt{x+2}}=2^{4-x}+x^2\cdot 2^{\sqrt{x+2}}$;

е) $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14$;

є) $(x-3)^{3x^2-10x+3}=1$;

ж) $\left|x-3\right|^{3x^2-10x+3}=1;$

з) $\left(x-3\right)^{x^2-x}=\left(x-3\right)^2.$

18. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases}9^{x+y}=729,\\3^{x-y}-1=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sqrt[x-1]{49}=\sqrt[y-1]{343},\\3^y=9^{2-y};\end{cases}$

в) $\begin{cases}3^{2x}-2^y=725,\\3^x-2^{\frac{y}{2}}=25;\end{cases}$

г) $\begin{cases}2^x\cdot3^y=648,\\3^x\cdot2^y=432.\end{cases}$

19. Розв'язати рівняння:

а) $\log_3 x=2;$

б) $\lg\left(\frac{1}{2}+x\right)=\lg\frac{1}{2}-\lg x;$

в) $2\left(\lg2-1\right)+\lg\left(5^{\sqrt{x}}+1\right)=\lg\left(5^{1-\sqrt{x}}+5\right);$

г) $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2;$

д) $\log_{4x+1}7+\log_{9x}7=0;$

е) $\log_a x+\log_{\sqrt{a}}x+\log_{\sqrt[3]{n^2}}x=27,\ a>0,\ a\neq1;$

є) $\log_2\left(4\cdot3^x-6\right)-\log_2\left(9^x-6\right)=1;$

ж) $\lg\left(3x-5\right)-\frac{\lg\left(x+1\right)}{2}=1-\lg5;$

з) $\log_{\sqrt{2x^2-1}}\left(3x^4-3x^2+7\right)=4;$

и) $\log_2\log_3\left(x^2-16\right)-\log_{1/2}\log_{1/3}\frac{1}{x^2-16}=2;$

і) $\left|\log_2\left(3x-1\right)-\log_2 3\right|=\left|\log_2\left(5-2x\right)-1\right|.$

20. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases}x+y=34,\\\log_2 x+\log_2 y=6;\end{cases}$

б) $\begin{cases}xy=40,\\x_{\lg y}=4;\end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \lg x \cdot \lg(xy) = 2, \\ \lg \dfrac{x}{y} = 3. \end{cases}$

21. Розв'язати нерівності:

а) $3^x > 81;$

б) $2^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}+2} < 62;$

в) $0{,}5^{x^2-4x} < 8;$

г) $0{,}3^{2x^2-3x+6} < 0{,}00243;$

д) $5 \cdot 2^{3x} - 24 \cdot 2^{5-3x} + 56 \le 0;$

е) $(x-3)^{x^2-7x} > 1.$

22. Розв'язати нерівності:

а) $\log_2(3x+1) > \log_2(x-1);$

б) $\lg\dfrac{6}{x} > \lg(x+5);$

в) $\log_{1/3}\dfrac{x+1}{4x-1} < 1;$

г) $\log_{0,5}(2x+3) \le \log_{0,5}(4x-1);$

д) $\log_4(x+7) > \log_2(x+1);$

е) $\log_6\dfrac{3}{2-x} < 0;$

ж) $\log_{3/4}\left(\sqrt{x+3} - x\right) > 0;$

з) $\dfrac{1}{\log_3 x} \le \dfrac{1}{\log_3\sqrt{x+2}}.$

Тема 20

ПОСЛІДОВНІСТЬ. АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ. ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Consequence. Arithmetical progression. Geometric progression

Уявимо, що підряд виписано всі парні ***(парний - even)*** натуральні числа:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...

Це – послідовність парних натуральних чисел. Число 2 – її перший член, 4 – другий, 6 – третій, 20 – десятий і т. д.

Приклади числових послідовностей :

1, 2, 3, 4, 5, ...— послідовність натуральних чисел, 1, 3, 5, 7, 9, ...— послідовність непарних ***(непарний - odd)*** натуральних чисел.

Послідовності бувають скінченні ***(скінченний - finite)*** і нескінченні ***(нескінченний - infinite)***. Скінченною, наприклад, є послідовність одноцифрових натуральних чисел:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Послідовність усіх натуральних чисел нескінченна. Записуючи нескінченну послідовність, після кількох її перших членів ставлять трикрапку.

Перший, другий, третій члени послідовності парних натуральних чисел дорівнюють відповідно 2, 4, 6. Пишуть: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$. Оскільки кожний член послідовності парних натуральних чисел удвоє більший від свого порядкового номера, то її n-й член дорівнює $2n$, тобто

$$a_n = 2n .$$

Це формула n-го члена послідовності парних натуральних чисел.

$a_n = 2n - 1$ формула n-го члена послідовності непарних натуральних чисел.

Якщо відома формула n-го члена послідовності, то неважко обчислити будь-який її член. Напишемо кілька перших членів послідовності, n-й член якої $a_n = n^2 + 2$. Надаючи змінній n значення 1, 2, 3, 4, 5, ..., дістанемо перші члени послідовності:

3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, ...

Тисячний член цієї послідовності $a_{1000} = 1000^2 + 2 = 1000002$.

Набагато важче розв'язувати обернену задачу – для даної послідовності знайти її n-й член. Наприклад, формула n-го члена послідовності простих чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... — невідома і досі, хоч математики шукали її понад 2000 років.

Із двох сусідніх членів a_i і a_{i+1} послідовності член a_{i+1} називають наступним ***(наступний - next)*** за a_i, а a_i - попереднім ***(попередній - previous)*** по відношенню до a_{i+1}. Послідовність називають зростаючою, якщо кожний її член, починаючи з другого, більший від попереднього. Послідовність називається спадною, якщо кожний її член, починаючи з другого, менший від попереднього.

Арифметичною прогресією називається послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додають одне й те саме число:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots .$$

Число d називається різницею арифметичної прогресії **(різниця арифметичної прогресії - *common difference*)**. Число a_1 називається першим членом арифметичної прогресії.

Перший член і різниця арифметичної прогресії можуть бути якими завгодно числами. Арифметична прогресія зростаюча, якщо її різниця додатна, або спадна, якщо її різниця від'ємна.

Формула n-го члена арифметичної прогресії

$$a_n = a_1 + (n-1)d .$$

Сума членів скінченної арифметичної прогресії дорівнює півсумі крайніх її членів, помноженій на число членів:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n .$$

Геометричною прогресією називається послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число:

$$b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3 \dots .$$

Число q називають знаменником геометричної прогресії **(знаменник геометричної прогресії - *geometric ratio*)**. Число b_1 називається першим членом геометричної прогресії.

Перший член b_1 і знаменник q геометричної прогресії можуть бути будь-якими числами.

Формула n-го члена геометричної прогресії:

$$b_n = b_1 q^{n-1} .$$

Формула суми n перших членів геометричної прогресії з першим членом b_1 і знаменником q

$$S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}, \text{ якщо } q \neq 1,$$

$$S_n = nb_1, \text{ якщо } q = 1.$$

Вправи:

1. Написати кілька перших членів послідовності квадратів натуральних чисел. Який її n-й член?

2. Написати кілька перших членів і n-й член послідовності кубів натуральних чисел.

3. Знайти шостий, восьмий і десятий члени послідовності, n-й член якої $b_n = 2^n$.

4. Перший член послідовності дорівнює $\frac{1}{2}$, а кожний інший вдвічі більший від попереднього. Написати сім перших членів послідовності.

5. Перші два члени послідовності 1 і 3, а кожний інший дорівнює сумі двох попередніх її членів. Написати 10 перших членів цієї послідовності.

6. Написати сім перших членів арифметичної прогресії, у якої:

а) $a_1 = 2$, $d = 5$;

б) $a_1 = -3$, $d = 4$.

7. В арифметичній прогресії $a_1 = 9$, $d = 4$. Знайти a_{15}, a_{32}.

8. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ - арифметична прогресія. Знайти a_{30}, якщо $a_3 = 3$, $a_4 = 4$.

9. Знайти суму перших ста натуральних чисел.

10. Знайти суму перших ста непарних натуральних чисел.

11. Знайти арифметичну прогресію, що складається з натуральних чисел, якщо добуток перших трьох та перших чотирьох її членів відповідно дорівнюють 6 та 24.

12. Знайти перший член і різницю арифметичної прогресії, якщо

а) $\begin{cases} a_1 + a_7 = 22, \\ a_{10} - a_3 = 21; \end{cases}$

б) $\begin{cases} a_2 + a_5 - a_3 = 10, \\ a_1 - a_6 = 17; \end{cases}$

в) $\begin{cases} a_1 + a_5 = 24, \\ a_2 \cdot a_3 = 60; \end{cases}$

д) $\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = -12, \\ a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = 80; \end{cases}$

е) $\begin{cases} S_2 - S_4 + a_2 = 14, \\ S_3 + a_3 = 17; \end{cases}$

є) $\begin{cases} 5a_1 + 10a_5 = 0, \\ a_1 \cdot a_4 = 8. \end{cases}$

13. Розв'язати рівняння:

а) $0,3^{2+4+6+...+2x} = 0,3^{72}$;

б) $3^3 \cdot 3^5 \cdot 3^8 \cdot ... \cdot 3^{2n-1} = 27^5$;

в) $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot ... \cdot 2^{2n} = 0,25^{-28}$;

г) $\log_{10} x + \log_{\sqrt{10}} x + \log_{\sqrt[3]{10}} x + ... + \log_{\sqrt[10]{10}} x = 5,5$;

д) $\log_a x + \log_{\sqrt{a}} x + ... + \log_{\sqrt[a]{a}} x = \dfrac{a+1}{2}$.

14. Написати сім перших членів геометричної прогресії, у якої $b_1 = 1$, $q = 3$.

15. $b_1, b_2, b_3, ...$ — геометрична прогресія. Знайти b_{12}, якщо $b_3 = 1$, $b_4 = 0.5$.

16. Знайти суму 15 перших членів геометричної прогресії

а) 1, 2, 4, 8, ...;

б) 1024, 512, 256, ...

17. Було це майже сто років тому. Селянин продавав 20 овець за 200 грн. Коли один з покупців став надто довго торгуватись, селянин запропонував: «Дай за першу вівцю 1 коп., за другу — 2 коп., за третю— 4 коп. і далі за кожну вівцю вдвічі більше копійок, ніж за попередню». Покупець погодився. Скільки він заплатив за тих 20 овець?

18. Задача з індійського фольклору. Цар дуже любив шахи і обіцяв винахідникові гри дати велику нагороду. Винахідник запросив дати йому за першу клітину шахівниці одну пшеничну зернину, за другу – дві, за третю – чотири і далі за кожну клітину вдвічі більше, ніж за попередню. Цар здивувався, що винахідник так мало запросив. Але обіцянку не зміг виконати. Чому?

19. Уявімо, що на початку нашої ери жінка М народила дві дочки, кожна з них до 30 років народила теж дві дочки і т. д. Чи можливо це? Скільки б за таких умов нащадків М жило б у наш час?

20. Знайти перший і останній члени геометричної прогресії, у якій $b_1 = 3$, $q = 2$, $S_8 = 765$.

21. Між числами 9 і 243 написати два числа, які разом із даними числами утворюють геометричну прогресію.

22. Знайти перший член і знаменник геометричної прогресії, у якій $b_8 - b_1 = 15$, $b_4 - b_2 = 6$.

23. Знайти чотири числа, які утворюють геометричну прогресію, у якої сума крайніх членів дорівнює 49, а сума середніх членів дорівнює 14.

24. Добуток перших трьох членів геометричної прогресії дорівнює 1728, а сума їх дорівнює 63. Знайти перший член та знаменник цієї прогресії.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике / П. Ф. Фильчаков. – К.: «Наукова думка», 1972. – 744 с.

2. Волков Ю. І. Лінійна алгебра й аналітична геометрія з елементами програмування мовою Паскаль: навчальний посібник [для студентів інженерно-технічних спеціальностей] / Ю. І. Волков, Д. А. Найко. – К.: НМК ВО, 1990. – 144 с. – ISBN 5-7763-0037-1.

3. Дорохин Д. П. Сборник задач и упражнений по математике: навчальний посібник [для іноземних студентів підготовчих факультетів вищих навчальних закладів] / Д. П. Дорохин , З. Е. Плаксенко, Г. Ф. Бажора. – М.: Высш. шк., 1986. – 248 с.

4. Людвичек К. В. Математика: навчальний посібник [для іноземних студентів підготовчих факультетів вищих навчальних закладів] / К. В. Людвичек. – Харьков, 2003. – 258 с.

5. Математика. Алгебра и начала анализа: підручник / [ред. А. И. Лобанов]. - К.: Вища шк., 1987. - 304 с.

6. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу: підручник [для 10–11 класів середньої школи] / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубінчук. – К.: Зодіак–Еко, 2001. — 688 с.

7. Погорєлов О. В. Геометрія: підручник [для 7—11 класів середньої школи] / О. В. Погорєлов. – К.: Освіта, 1993. – 352 с. – ISBN 5-330-00563-9.

8. Навчальні програми (довузівська підготовка іноземних громадян) / [упорд.: Б. Андрющенко]. – К.: Політехніка, 2005. – 84 с.

9. Алгебра і початки аналізу: навчальний посібник [для 9-10 класів середньої школи] / [ред. А. Колмогоров]. – К.: Радянська школа, 1987. – 336 с.

10. Formula – математика для школи [Електронний ресурс] / І. Виспянський . – Режим доступу: http://www.formula.co.ua.

СЛОВНИК НАЙБІЛЬШ ВЖИВАНИХ ТЕРМІНІВ

абсциса	abscissa
аргумент	argument
арифметичний корінь	arithmetical root
вираз	expression
від'ємний	negative
від'ємник	subtrahend
віднімання	subtraction
відношення	ratio
відповідь	answer
відсоток	per cent
відстань	distance
вісь абсцис	abscissa axis
вісь ординат	ordinate axis
вправа	exercises
гіпербола	hyperbola
графік	graph
декартові координати	Cartesian coordinates
десятковий дріб	decimal
дискримінант	discriminant
ділене	dividend
ділення	division
дільник	divisor
добуток	product
додавання	addition
доданок	item
додатний	positive
дробова частина	fractional part
дужки	parenthesis
залежна змінна	dependent variable
зведене квадратне рівняння	reduced quadratic
звичайний дріб	fraction
зменшуване	minuend
змінна	variable

знак	sign
знак рівності	equality sign
знаменник	denominator
знаменник геометричної прогресії	geometric ratio
зростаюча функція	increasing function
ірраціональний	irrational
калькулятор	calculator
квадратне рівняння	quadratic
квадратний корінь	square root
коефіцієнт	coefficient
кома	decimal point
координата	coordinate
координатна площина	coordinate plane
координатна пряма	coordinate line
корінь	root
корінь n-го степеня	n-th root
крайній член пропорції	extreme
кубічний корінь	cube root
лінійний	linear
лічба	counting
логарифмічна нерівність	logarithmic inequality
логарифмічна функція	logarithmic function
метод підстановки	substitution method
мінус	minus
многочлен	polynomial
множення	multiplication
множина	set
множник	multiplier
модуль	module
найменше спільне кратне	least common multiple
натуральне число	natural number
незалежна змінна	independent variable
непарна функція	odd function
непарний	odd
неповна частка	partial quotient

неповне квадратне рівняння	pure quadratic
неправильний дріб	improper fraction
нерівність	inequality
нескінченний	infinite
нестрога нерівність	unstrict inequality
обернена пропорційність	inverse proportionality
обернено пропорційний	inverse proportional
область визначення	definitional domain
область значень	actual range
одиничний відрізок	unit segment
одночлен	monomial
ордината	ordinate
основа степеня	base of power
остача від ділення	residue of division
парабола	parabola
парна функція	even function
парний	even
період	period
періодичний дріб	periodic fraction
плюс	plus
показник степеня	exponent
показникова нерівність	exponential inequality
показникова функція	exponential function
половина	half
порівняння	comparison
порядок зростання	increasing order
порядок спадання	decreasing order
початок відліку	zero point
початок координат	coordinate origin
правильний дріб	proper fraction
приклад	example
проекція	projection
пропорція	proportion
протилежний	opposite
процент	per cent

пряма	straight line
пряма пропорційність	direct proportionality
прямо пропорційний	directly proportional
раціональне число	rational number
рівність	equality
рівносильні нерівності	equivalent inequalities
рівносильні рівняння	equivalent equations
рівняння	equation
рівняння першого степеня	simple equation
різниця	difference
різниця арифметичної прогресії	common difference
розв'язання	solution
розряд числа	number position
середній член пропорції	mean
симетричний	symmetric
система нерівностей	inequality system
система рівнянь	combined equations
скінченний	finite
скоротити дроби	reduce fraction
спадна функція	dropdown function
спільний множник	common factor
степенева функція	power function
степінь	power
строга нерівність	strict inequality
сума	sum
таблиця	table
тотожний	identical
точка	point
формула	formula
функція	function
цифра	figure
ціла частина	integer part
ціле число	integer
частка	quotient
чисельник	numerator

Навчальне видання

Володимир Олександрович Краєвський

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ДОВУЗІВСЬКОЇ ПІДГОТОВКИ ІНОЗЕМЦІВ
Частина 1

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено автором

Редактор

Видавництво ВНТУ “УНІВЕРСУМ – Вінниця”
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29,7х42
Друк різографічний
Тираж прим.
Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк.

Зам. №

Віддруковано в комп’ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ