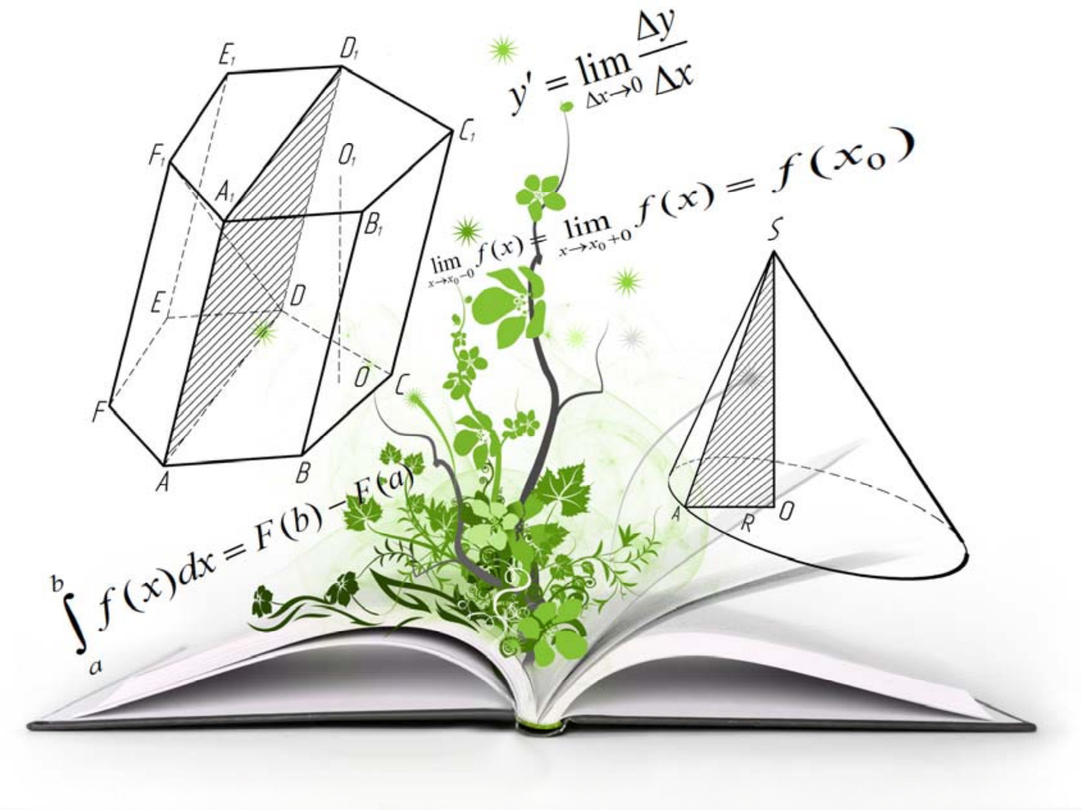
*В.О. Краєвський, О. Д. Краєвська*

# МАТЕМАТИКА

## для довузівської підготовки іноземців

Частина 2




Вінниця, 2009

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

*В.О. Краєвський, О. Д. Краєвська*

# Математика
# для довузівської підготовки іноземців

Частина 2

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для довузівської підготовки студентів-іноземців. Протокол № від 2009р.

Вінниця ВНТУ 2009

УДК 517.958 (075)
К 78

*Рецензенти:*

***В. А. Петрук***, доктор педагогічних наук, професор
***В. І. Клочко***, доктор педагогічних наук, професор
***Д. А. Найко***, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

**Краєвський В. О., Краєвська О. Д.**
К 78 **Математика для довузівської підготовки студентів-іноземців. Частина 2.** Навчальний посібник. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 138 с.

У другій частині посібника містяться матеріали із векторної алгебри, тригонометрії, початкам аналізу, комбінаторики, теорії комплексних чисел та геометрії. До кожної теми розроблений теоретичний матеріал, в якому основний акцент робиться на вивченні студентами математичних термінів українською мовою. Теоретичний матеріал супроводжується великою кількістю прикладів розв'язання типових завдань. Після кожної теми приводяться практичні завдання для самостійної роботи.

Посібник розрахований на студентів-іноземців підготовчих факультетів вузів України.

УДК 517.958 (075)

# Зміст

Вступ.......................................................................5
Тема 21. Елементи векторного числення.......................................6
Тема 22. Тригонометричні функції ..........................................12
Тема 23. Границя. Неперервність функції..................................24
Тема 24. Похідна функції ...................................................33
Тема 25. Первісна. Інтеграл ................................................40
Тема 26. Комплексні числа .................................................45
Тема 27. Комбінаторика. Біном Ньютона....................................54
Тема 28. Точка. Пряма. Кут..................................................59
Тема 29. Коло. Круг ..........................................................65
Тема 30. Трикутник...........................................................70
Тема 31. Многокутники.......................................................78
Тема 32. Многогранні кути. Многогранники.................................86
Тема 33. Тіла обертання .....................................................95
Список літератури............................................................100
Словник математичних термінів ............................................101

# Вступ

Математика вивчає кількісні відношення та просторові форми навколишнього світу. Поняття та об'єкти математики являють собою абстракції кількісних відношень та просторових форм, які спостерігаються в природі. Вивчаючи матеріальні процеси з кількісної сторони, мають справу з багатьма величинами. Наприклад, різноманітні фізичні процеси характеризуються такими величинами, як маса, густина, температура, теплоємність, сила та напруга струму тощо. У хімії користуються такими поняттями, як валентність, атомна маса, моль, в геометрі – довжина відрізка, площа, об'єм і т. д. Вивчаючи математичний бік явищ, цікавляться тільки числовими значеннями величин, не зважаючи на їхній конкретний зміст.

Елементарна математика в основному має справу із сталими величинами та з найпростішими геометричними фігурами (трикутник, коло тощо) і обмежується лише початковим вивченням кількісних відношень та просторових форм. Понять та методів елементарної математики не досить для опису процесів, які характеризуються змінними величинами. Введення в математику поняття змінної величини і функції дало змогу перейти від розв'язування окремих фізичних та геометричних задач до створення загальних методів розв'язування цих задач.

Навчальний посібник відповідає програмі курсу математики для студентів-іноземців підготовчих факультетів вузів України. Крім того може використовуватись абітурієнтами, які готуються до вступних іспитів у вузи. Мета його – забезпечити ґрунтовне засвоєння теоретичного матеріалу з основних розділів математики, сприяти формуванню навичок застосування теоретичного матеріалу для розв'язання конкретних прикладів, допомогти студентам при самостійному розв'язанні задач.

Складається посібник із двох частин, які видаються окремими книжками. У першій частині містяться матеріали з арифметики і алгебри. У другу частини увійшли теоретичний матеріал та завдання із векторної алгебри, тригонометрії, початкам аналізу, комбінаторики, теорії комплексних чисел та геометрії.

*Тема 21*

## ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО ЧИСЛЕННЯ

### *Elements of vector calculus*

Вектором **(вектор – *vector*)** називається напрямлений відрізок прямої.

Будь – який вектор має початок **(початок вектора – *origin of vector*)** і кінець **(кінець вектора – *terminus*)**. Якщо початок вектора позначити $A$, а кінець $-B$, то вектор позначається символом $\overrightarrow{AA}$ або $\vec{a}$ (рис. 1).

Початок вектора називають точкою прикладання **(точка прикладання – *point of application*)**.

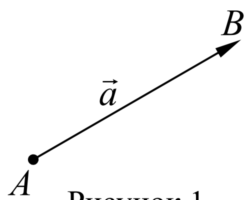


Рисунок 1

Довжина відрізка, що зображує вектор $\overrightarrow{AA}$, називається модулем вектора **(модуль вектора – *modulus of vector*)** або довжиною вектора і позначається $\left|\overrightarrow{AA}\right|$. Довжина вектора $\vec{a}$ позначається $\left|\vec{a}\right|$.

Якщо відомі координати кінця $B\left(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B\right)$ і початку $A\left(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A\right)$, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$, можна знайти з формули

$$\overrightarrow{AB}=\left\{x_B-x_A\,;\,y_B-y_A\,;\,z_B-z_A\right\}.$$

Довжина (модуль) вектора:

$$\left|\,\vec{a}\,\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,$$

де $x$, $y$, $z$ – координати вектора $\vec{a}$.

*Приклад 1:*

*Знайти модуль вектора* $\overrightarrow{AB}$, *якщо* $A\left(1\,;-2\,;3\right)$, $B\left(2\,;-5\,;4\right)$.

*Розв'язання:*

*Знайдемо спочатку координати вектора* $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{AB}=\left\{2-1\,;-5-\left(-2\right);\,4-3\right\}=\left\{1\,;-3\,;1\right\}.$$

*Тоді довжина вектора* $\overrightarrow{AB}$:

$$\left|\,\overrightarrow{AB}\,\right|=\sqrt{1^2+\left(-3\right)^2+1^2}=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}\ \textit{ë³í . î ä.}$$

Вектор називається нульовим (нуль-вектором), якщо його початок і кінець збігаються.

Вектори називаються колінеарними **(колінеарний – collinear)**, якщо вони лежать або на одній прямій, або на паралельних прямих. Умова колінеарності двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ :

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b},$$

де $x_a, y_a, z_a$ – координати вектора $\vec{a}$; $x_b, y_b, z_b$ – координати вектора $\vec{b}$ .

Вектори рівні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову довжину і однаковий напрям (рис. 2).

Якщо вектори мають однакову довжину і протилежні напрями, то вони називаються протилежними (рис. 3).

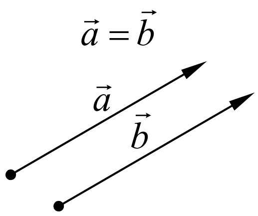


Рисунок 2

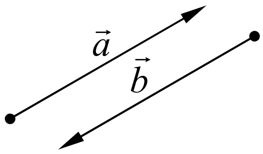


Рисунок 3

*Приклад 2:*

*Перевірити, чи вектори* $\vec{a} = (1\,; -2\,; 3)$ *та* $\vec{b} = (2\,; -4\,; 1)$ *є колінеарними.*

*Розв'язання:*

*З умови (3) маємо:*

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{3}{1}.$$

*Очевидно, що вектори* $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ *не є колінеарними.*

## Лінійні операції над векторами

Сума $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор, який іде з початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$ , за умови, що вектор $\vec{b}$ прикладено до кінця вектора $\vec{a}$ (рис. 4).

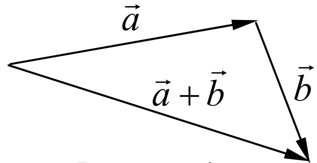


Рисунок 4

Операція додавання векторів підпорядкована таким властивостям:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ ( комутативний закон);

2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{n}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{n}\right)$ (асоціативний закон);

Для кожного вектора $\vec{a}$ існує вектор $\vec{a}'$ такий, що $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$ ($\vec{0}$- нульовий вектор); $\vec{a}'$ – вектор, протилежний до вектора $\vec{a}$.

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ і вектора $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{n}$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

Правило побудови різниці $\vec{a}-\vec{b}$: різниця $\vec{a}-\vec{b}$ прикладених до спільного початку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ являє собою вектор, що йде з кінця від'ємника (вектора $\vec{b}$ ) до кінця зменшуваного вектора $\vec{a}$ (рис. 5).

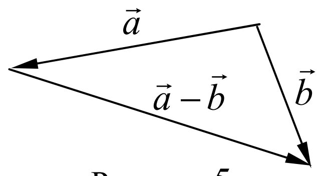


Рисунок 5

Добутком $\alpha\vec{a}\left(\vec{a}\alpha\right)$ вектора $\vec{a}$ на дійсне число α називається вектор $\vec{b}$, який колінеарний вектору $\vec{a}$, має довжину $|\alpha||\vec{a}|$ і має напрям, що збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо α>0 і протилежний цьому напряму, якщо α<0.

Операція множення вектора на число підпорядкована таким властивостям:

$$\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b};$$

$$\left(\alpha+\beta\right)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a};$$

$$\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\vec{a}.$$

### **Проекція (*projection*)** вектора на вісь та її властивості

Нагадаємо, що числовою віссю (або просто віссю) називається пряма, на якій вибрано початкову точку (початок), додатний напрям (що відзначається на рисунках стрілкою) та одиничний відрізок (одиницю масштабу).

Нехай $u$ – деяка вісь, $\overrightarrow{AA}$ – вектор, довільно розміщені на площині. Позначимо через $\grave{A}'$ і $B'$ проекції на вісь $u$ відповідно початку $A$ і кінця $B$ цього вектора (рис. 6). Припустимо, що $\grave{A}'$, на осі $u$ має координату $\tilde{o}_1$, а $B'$ – координату $\tilde{o}_2$.

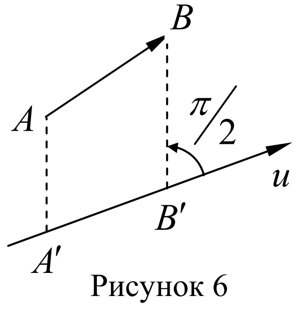


Рисунок 6

Різниця $õ_2 - õ_1$ між координатами проекії кінця та початку вектора $\overrightarrow{AA}$ на вісь $u$ називається проекцією вектора $\overrightarrow{AA}$, на цю вісь і позначається $ïð_è\overrightarrow{AA}$.

Якщо φ – кут між вектором $\vec{a}$ і віссю $u$, то, очевидно, що

$$ïð_è\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi.$$

## Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів, називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\widehat{}\,\vec{b}),$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначаються своїми декартовими координатами

$$\vec{a} = (x_a\,;\,y_a\,;\,z_a), \quad \vec{b} = (x_b\,;\,y_b\,;\,z_b),$$

то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат, тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b + z_a\cdot z_b.$$

*Приклад 3:*

*Знайти скалярний добуток векторів* $\vec{a} = (1\,;-2\,;3)$ *та* $\vec{b} = (2\,;-4\,;1)$.

*Розв'язання:*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b + z_a\cdot z_b = 1\cdot 2 + (-2)\cdot(-4) + 3\cdot 1 = 13.$$

Косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, знаходиться як відношення скалярного добутку цих векторів до добутку їх довжин, а саме:

$$\cos(\vec{a}\,\widehat{}\,\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$:

$$ïð_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos(\vec{a}\,\widehat{}\,\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

*Приклад 4:*

*Знайти кут між векторами* $\vec{a} = (3\,;-2\,;0)$ *та* $\vec{b} = (-1\,;1\,;2)$, *та проекцію вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ .

*Розв'язання:*

$$\cos\,(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\,) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{3\cdot(-1)+(-2)\cdot 1+0\cdot 2}{\sqrt{3^2+(-2)^2+0^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}} =$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{4}} = \frac{-5}{2\sqrt{13}}\,.$$

$$\text{ï ð}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{|3\cdot(-1)+(-2)\cdot 1+0\cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{5}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5\,.$$

Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ :

$$x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b + z_a\cdot z_b = 0\,.$$

**Вправи:**

**1.** По заданим векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектор $\vec{c}$ , якщо:

а) $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ;

б) $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$ ;

в) $\vec{c} = -3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ .

**2.** Визначити значення $x$ та $y$, при яких вектори $\overrightarrow{AB}$ $\big(A(7;3;-1),$ $B(8;8;-3)\big)$ і $\vec{b}(x;y;-1)$ будуть колінеарними.

**3.** Модуль вектора $\vec{a}(1;1;m)$ дорівнює 4. Знайдіть $m$ .

**5.** Проекція вектора $\vec{b}(0,4,-3)$ на вектор $\vec{a}$ дорівнює 2. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ .

**4.** Знайдіть вектор $\vec{c}$, якщо задано вектори $\vec{a}(1;2;4)$ і $\vec{b}(-1;0;5)$ і відомо що:

а) $\vec{c}=\vec{a}+7\vec{b}$;

б) $\vec{c}=3\left(-\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)+2\vec{a}$;

в) $\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$;

г) $\vec{c}=3\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)$.

**6.** Знайти вершини $B$ і $C$ трикутника $ABC$, якщо $A(1;-1;3)$, $\overrightarrow{AB}=(1;0;4)$, $\overrightarrow{BC}=(1;-4;5)$.

**7.** При яких значеннях $x$ вектори $\left(x^3-1\right)\vec{a}$ та $2x\vec{a}$ будуть однаково напрямлені, якщо $\vec{a}\neq\vec{0}$?

**8.** Дано вектори $\vec{a}(2;-3;5)$, $\vec{b}(-1;1;-3)$ і $\vec{c}(3;7;1)$. Знайти координати вектора $\vec{p}(x;y;z)$, якщо $\vec{p}\vec{a}=12$, $\vec{p}\vec{b}=-6$ і $\vec{p}\perp\vec{c}$.

**9.** Дано вектори $\vec{a}\left(6;-8;5\sqrt{2}\right)$ і $\vec{b}(2;-4;-\sqrt{2})$. Знайти кут, утворений вектором $\vec{a}-\vec{b}$ із віссю $Oz$.

**10.** Знайти вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}\left(2\sqrt{2};-1;4\right)$, якщо $\left|\vec{b}\right|=10$.

*Тема 22*

## ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

## *Trigonometrical functions*

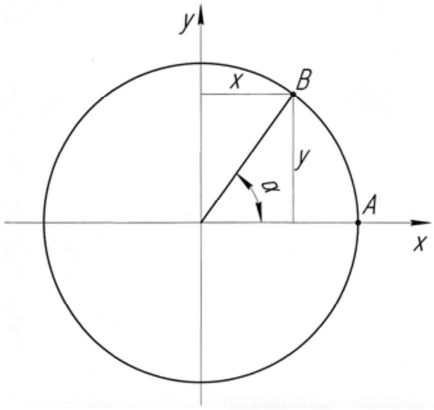



Рисунок 1

$$\sin\alpha = \frac{y}{R};\ \cos\alpha = \frac{x}{R};\ tg\alpha = \frac{y}{x};\ ctg\alpha = \frac{x}{y};\ \sec\alpha = \frac{R}{x};\ \mathrm{cosec}\ \alpha = \frac{R}{y}.$$

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z;$$

$$\mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \neq \pi n,\ n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x = 1,\ x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;$$

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z;$$

$$1 + c\,\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n,\ n \in Z.$$

Формули додавання:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

$$\operatorname{tg}\left(x+y\right)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y},\ x,y,x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$\operatorname{tg}\left(x-y\right)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y},\ x,y,x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$$

Формули подвійного аргументу:

$$\sin 2x=2\cdot\sin x\cdot\cos x;$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x;$$

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x},\ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z,\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$$

Формули половинного аргументу (для функцій sin і cos – формули пониження степеня):

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2};$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x},\ x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z.$$

Формули перетворення суми в добуток:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin\left(x+y\right)}{\cos x\cos y},\ x,y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y},\ x,y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$$

Формули перетворення добутку в суму:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right);$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right);$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right).$$

Співвідношення між $\sin x$, $\cos x$ і $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\ x \neq (2n+1)\pi,\ n \in Z;$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\ x \neq (2n+1)\pi,\ n \in Z.$$

Формули зведення:

| Назва функції не змінюється | | | | Назва функції змінюється на схожу | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $-\alpha$ | $\pi-\alpha$ | $\pi+\alpha$ | $\frac{\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{\pi}{2}+\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ |
| sin | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ |
| cos | $\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ |
| tg | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ |
| | $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z$ | | | $\alpha \neq \pi n,\ n \in Z$ | | | |
| ctg | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ |
| | $\alpha \neq \pi n,\ n \in Z$ | | | $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z$ | | | |

## Вказівки до розв'язування тригонометричних рівнянь

1. Найпростішими тригонометричними рівняннями називаються рівняння виду $\sin x = a$ (де $|a|<1$), $\cos x = a$ (де $|a|<1$), $tg\, x = a$, $ctg\, x = a$. Фо-

рмули розв'язування цих рівнянь мають такий вигляд (тут і далі $n \in Z$ означає, що $n$ – ціле число):

$$\sin x = a,\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z;$$
$$\cos x = a,\ x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z;$$
$$\operatorname{tg} x = a,\ x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z;$$
$$\operatorname{ctg} x = a,\ x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z.$$

В окремих випадках при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ маємо такі формули:

$$\sin x = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z;$$
$$\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$
$$\sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$
$$\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$
$$\cos x = 1,\ x = 2\pi n,\ n \in Z;$$
$$\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z;$$
$$\operatorname{tg} x = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z;$$
$$\operatorname{ctg} x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

Рівняння виду $\sin(\omega x + \varphi) = a$, $\cos(\omega x + \varphi) = a$, $\operatorname{tg}(\omega x + \varphi) = b$, $\operatorname{tg}(\omega x + \varphi) = b$ ($|a| < 1$, $\omega \neq 0$, $\varphi$, $b$ - будь-які дійсні числа) також відносяться до найпростіших. їх слід розв'язувати зразу за попередніми формулами, замінивши $x$ на $\omega x + \varphi$.

*Приклад 1:*

*Розв'язати рівняння* $\sqrt{3} + 2\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

*Розв'язання:*

$$2\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3};$$

$$\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$5x-\frac{\pi}{4}=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi n,\quad n\in Z;$$

$$5x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in Z;$$

$$5x=\pm\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z;$$

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi n,\quad n\in Z.$$

*Відповідь:* $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi n,\quad n\in Z$.

2. При розв'язуванні тригонометричних рівнянь часто використовуються розклад на множники і введення нової змінної (метод підстановки).

*Приклад 2:*

*Розв'язати рівняння* $2\sin^2 5x+3\cos 5x-3=0$..

*Розв'язання:*

*За формулою* $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$:

$$2\left(1-\cos^2 5x\right)+3\cos 5x-3=0;$$

$$2\left(1-\cos^2 5x\right)+3\cos 5x-3=0;$$

$$-2\cos^2 5x+3\cos 5x-1=0;$$

$$2\cos^2 5x-3\cos 5x+1=0.$$

*Нехай* $\cos 5x=t$*, тоді*

$$2t^2-3t+1=0;$$

$$D=9-4\cdot 2=1;$$

$$t = \frac{3 \pm 1}{4};$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{1}{2};$$

*1)* $\cos 5x = 1;$

$5x = 2\pi n, \ n \in Z;$

$x_1 = \frac{2}{5}\pi n, \ n \in Z.$

*2)* $\cos 5x = \frac{1}{2};$

$5x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi k, \ k \in Z;$

$5x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in Z;$

$x_2 = \pm\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}\pi k, \ k \in Z.$

*Відповідь:* $x_1 = \frac{2}{5}\pi n, \ x_2 = \pm\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}\pi k, \ n, k \in Z.$

3. Однорідними рівняннями називаються рівняння виду

$$a\sin kx + b\cos kx = 0;$$

$$a\sin^2 kx + b\sin kx\cos kx + c\cos^2 kx = 0;$$

$$a\sin^2 kx + b\sin^2 kx\cos kx + c\sin kx\cos^2 kx + d\cos^2 kx = 0.$$

Рівняння

$$a\sin^2 kx + b\sin kx\cos kx + c\cos^2 kx = d$$

при $d \neq 0$ не є однорідним, але його можна звести до однорідного рівняння виду, замінивши $d$ тотожно рівним йому виразом $d\left(\sin^2 kx + \cos^2 kx\right)$.

Для розв'язування однорідних рівнянь у випадку $a \neq 0$ розглянемо ті значення $x$, при яких $\cos kx = 0$. Тоді з кожного рівняння випливає, що при тих самих значеннях $x$ повинно і $\sin kx = 0$, а це неможливо. Отже, розв'язками цих рівнянь можуть бути тільки ті значення x, при яких $\cos kx \neq 0$. Тому якщо (при $a \neq 0$) розділити обидві частини першого рівняння на $\cos kx$, друге рівняння – на $\cos^2 kx$, третє рівняння – на $\cos^3 kx$, то втрати коренів не буде.

У результаті дістаємо алгебраїчне рівняння відносно $\operatorname{tg} kx$, для розв'язування якого слід ввести заміну $\operatorname{tg} kx = z$.

*П р и к л а д  3:*

*Розв'язати рівняння* $\sin^2 3x + 7\sin 6x = 15\cos^2 3x$.

*Розв'язання:*

$$\sin^2 3x + 14\sin 3x\cos 3x - 15\cos^2 3x = 0 .$$

*Це однорідне тригонометричне рівняння ІІ-ого степеня. Поділимо ліву і праву частину його на* $\cos^2 3x$.

$$\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x} + 14\frac{\sin 3x\cos 3x}{\cos^2 3x} - 15\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 3x} = \frac{0}{\cos^2 3x};$$

$$\operatorname{tg}^2 3x + 14\operatorname{tg} 3x - 15 = 0.$$

*Нехай* $\operatorname{tg} 3x = y$, *тоді*

$$y^2 + 14y - 15 = 0;$$

$$y_1 = 1,\ y_2 = -15.$$

*1)* $\operatorname{tg} 3x = 1;$

$3x = \operatorname{arctg} 1 + \pi k,\ k \in Z;$

$3x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;$

$x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k,\ k \in Z.$

*2)* $\operatorname{tg} 3x = -15;$

$3x = -\operatorname{arctg} 15 + \pi n,\ n \in Z;$

$x_2 = -\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 15 + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$

*Відповідь:* $x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k$, $x_2 = -\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 15 + \frac{\pi n}{3}$, *де* $k, n \in Z$.

***Вправи:***

**1.** Знайдіть радіанну міру наступних кутів:

$1^\circ;\ 18^\circ;\ 45^\circ;\ 105^\circ;\ 360^\circ;\ 1080^\circ;\ 27^\circ 45'.$

**2.** Порівняйте:

1) $\sin 25^\circ$ і $\operatorname{tg} 25^\circ$;

2) $\cos 75^\circ$ і $\operatorname{ctg} 75^\circ$;

3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ і $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.

**3.** Спростити вирази:

а) $a^2\sin\frac{\pi}{2}+2ab\sec\pi-b^2\sin\frac{3\pi}{2}$;

б) $a^2\sin 2\pi+2ab\cos\frac{3\pi}{2}+b^2\operatorname{tg}2\pi$;

в) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$;

г) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

д) $\frac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha-1}+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}$;

е) $\left(1-\sin^2\alpha\right)\operatorname{ctg}^2\alpha+1-\operatorname{ctg}^2\alpha$.

**4.** Довести тотожності:

а) $\frac{1+\operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$;

б) $\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha-\frac{\cos^2\alpha-1}{1-\sin^2\alpha}=\sec^2\alpha$;

в) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin^2\alpha$;

г) $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$.

**5.** Обчислити:

а) $\sin\left(-1125^\circ\right)$;

б) $\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}$;

в) $4\sin 810^\circ+3\cos 720^\circ-3\sin 630^\circ+5\cos 900^\circ$;

г) $\frac{2\sin 3281^\circ-\sin 1481^\circ}{2\operatorname{tg}585^\circ}$.

**6.** Спростити вирази:

а) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right);$

б) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right);$

в) $1-\cos(2\alpha-\pi)-\cos(4a+\pi)+\cos(6a-2\pi);$

г) $1+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-4\alpha\right)+\operatorname{cosec}\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right);$

д) $\operatorname{tg}^2\frac{11\pi}{3}+\sin 5{,}5\pi-\cos\left(-\frac{26\pi}{3}\right);$

е) $\dfrac{\sin(x-\pi)\cdot\cos(x-2\pi)\cdot\sin(2\pi-x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{ctg}(\pi-x)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}.$

**7.** Знайти область визначення функцій:

а) $y=\arccos(1-x);$

б) $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x};$

в) $y=\arccos 2^x;$

г) $y=\arcsin|x|.$

**8.** Довести тотожності:

а) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2};$

б) $\operatorname{tg}(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ -1\le x\le 1,\ x\ne 0;$

в) $\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)=\cos^2 a-\sin^2 b;$

г) $\sin 2a-\cos 2a\cdot\operatorname{tg} a=\operatorname{tg} a;$

д) $\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4}}.$

**9.** Спростити вирази:

а) $\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cos 12^\circ$;

б) $\cos 5 \cos 2 - \sin 5 \sin 2$;

в) $\sin\varphi \cos 2\varphi + \cos\varphi \sin 2\varphi$;

г) $\dfrac{\sin 56^\circ \sin 124^\circ - \sin 34^\circ \cos 236^\circ}{\cos 28^\circ \cos 88^\circ + \cos 178^\circ \sin 208^\circ}$;

д) $\dfrac{\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \operatorname{tg} 25^\circ \operatorname{tg} 20^\circ}$;

е) $2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$;

є) $\cos^2 \dfrac{\pi}{8} - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$;

ж) $\sin^2 26^\circ - \sin^2 64^\circ$;

з) $1 - 2\sin^2 \dfrac{\pi}{4}$;

и) $\cos^2 \dfrac{\pi}{12} - 1$;

і) $2\sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ$.

**10.** Обчислити:

а) $\sin\left(\arcsin\left(\dfrac{15}{17}\right) + \arccos\left(-\dfrac{12}{18}\right)\right)$;

б) $\sin\left(\operatorname{arcctg}(-1{,}05) - \operatorname{arctg} 2{,}4\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{9}\right) + \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{4}{5}\right)\right)\right)$;

г) $\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ$;

д) $\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$.

**11.** Спростити вирази:

а) $\dfrac{1+\cos 2a}{1-\cos 2a}$;

б) $2\sin^2 \dfrac{a}{2} + \cos a$;

в) $\sqrt{1+\cos 8a}$;

г) $\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}{1+\cos(2\pi - 2\alpha)}$.

**12.**Довести тотожності:

а) $\dfrac{2\sin a - \sin 2a}{2\sin a + \sin 2a} = \operatorname{tg}^2 \dfrac{a}{2};$

б) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = \cos 2x;$

в) $2\operatorname{cosec} 4a - \operatorname{ctg} 2a = \operatorname{tg} 2a.$

**13.**Спростити вирази:

а) $2\sin 10^\circ \cdot \sin 40^\circ + \cos 50^\circ;$

б) $\cos 4 \cdot \cos 6 - \sin 1 \cdot \sin 3;$

в) $\dfrac{\sin\alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}.$

**14.**Розв'язати рівняння:

а) $\sin 3x = -1;$

б) $\sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1;$

в) $\cos 3x = -0{,}2586;$

г) $\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3};$

д) $\dfrac{\cos x - \sqrt{5}}{\cos x - 10} = \dfrac{\cos x}{\cos x + \sqrt{5}};$

е) $3\sin x - 7\cos x = 0;$

є) $2\sin^2 x - \sin x = 0;$

ж) $3\sin x = 2\cos^2 x;$

з) $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x;$

и) $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x;$

і) $\cos x(2\cos x + 1) = 1.$

**15.** Розв'язати рівняння:

а) $3\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 0;$

б) $5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 2;$

в) $\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 3\cos^2 x;$

г) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{ctg}(2\pi - x) = 0;$

д) $\sin x - \cos x - 4\cos^2 x \cdot \sin x = 4\sin^3 x;$

е) $2\sin x \cdot \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + 3\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\cos x - 5\cos^2 x \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = 0;$

є) $2\sin x+\cos x\,\mathrm{ctg}\,x+2=0;$

ж) $\sin^2 x+\mathrm{ctg}^2\,x=1;$

з) $\mathrm{tg}^2\,5x=\cos 3x-1;$

и) $\sin^4-\cos^4 x=\dfrac{1}{2}.$

**16.** Розв'язати рівняння:

а) $\sin 2x-\dfrac{\sin 4x}{4\cos^2 x}=1;$

б) $\sin 2x\cdot\sin x+\cos 3x=0;$

в) $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=1-\cos 2x;$

г) $\sin x\cdot\sin 7x=\sin 3x\cdot\sin 5x;$

д) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x};$

е) $4\sin x+3\cos x=5;$

є) $3(1-\sin 2x)=1+\cos 2x;$

ж) $\sin x+\sin 2x=\mathrm{tg}\,x;$

з) $\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{tg}\,x}{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x}=1.$

**17.**Розв'язати нерівності:

а) $|\sin x|>|\cos x|;$

б) $\sin x>\dfrac{1}{2};$

в) $\sin x<\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

г) $6\cos^2 x-11\cos x+4>0;$

д) $\mathrm{tg}\,x\geq\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

*Тема 23*

## ГРАНИЦЯ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

### *Limit. Function continuity*

Границя числової послідовності

Розглянемо числову послідовність $y_n = \dfrac{2n+1}{2n+3}$, $n \in N$.

Обчислимо кілька членів цієї послідовності

$$y_1 = \frac{3}{5},\ y_2 = \frac{5}{7},\ y_3 = \frac{7}{9},\ y_4 = \frac{9}{11},\ \ldots$$

Як бачимо, із зростанням номера $n$ члени послідовності дедалі ближче наближаються до числа 1. Це означає, що із зростанням номера $n$ величина $|y_n - 1|$ стає дедалі все меншою. Виникає запитання: чи може ця величина стати меншою, ніж $\dfrac{1}{100}$, $\dfrac{1}{1000}$, $\dfrac{1}{1000000}$ і взагалі меншою за довільне наперед задане додатне число. З'ясуємо, наприклад, коли (для яких номерів $n$) справджується нерівність

$$|y_n - 1| < \frac{1}{100}.$$

Розглянемо ліву частину цієї нерівності:

$$|y_n - 1| = \left|\frac{2n+1}{2n+3} - 1\right| = \left|\frac{-2}{2n+3}\right| = \frac{2}{2n+3}.$$

Отже, щоб виконувалась нерівність $|y_n - 1| < \dfrac{1}{100}$, треба щоб виконувалась нерівність $\dfrac{2}{2n+3} < \dfrac{1}{100}$, звідки $n > \dfrac{197}{2} = 98\dfrac{1}{2}$. Номерами $n$, які задовольияють останню нерівність, є $n = 99, 100, 101, \ldots$, тобто всі $n$, починаючи з $n = 99$.

Таким чином, дістали

$$|y_n - 1| < \frac{1}{100}, \text{ для } n = 99, 100, 101, \ldots$$

Геометрично це означає, що всі члени числової послідовності $\{y_n\}$ при $n > 99$ знаходяться від точки 1 на відстані, яка менша за $\frac{1}{100}$.

Аналогічно можна розв'язати поставлене запитання і для будь-якого іншого наперед заданого додатного числа.

Таким чипом, послідовність $\{y_n\}$має таку властивість: для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N$ (натуральне число), який залежить від $\varepsilon$ ($N = N(\varepsilon) > 0$), що при всіх $n > N$ маємо $|y_n - 1| < \varepsilon$. У цьому разі кажуть, що число 1 є границею числової послідовності $\{y_n\}$ і записують

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 1.$$

Число $A$ називається границею **(границя – *limit*)** числової послідовності $\{y_n\}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon) > 0$, таке, що для усіх $n > N(\varepsilon)$, виконується нерівність $|y_n - A| < \varepsilon$.

Символьно це означення записують

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A.$$

Послідовність, яка має границю, називається збіжною **(збіжна послідовність – *convergent sequence*)**, в іншому випадку – розбіжною **(розбіжна послідовність – *divergent sequence*)**.

### Границя функції неперервного аргументу

Введемо спочатку на основі теорії границь числових послідовностей поняття границі функції неперервного аргументу.

Нехай задано функцію неперервного аргументу $x$ визначену на множині $X$,

$$y = f(x),\ x \in X.$$

Кожній послідовності значень змінної $x$ з множини $X$

$$x_1, x_2, ..., x_n, ...$$

відповідає послідовність відповідних значень функції $f(x)$

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...,$$

тобто послідовності $\{x_n\} \in X$ відповідає послідовність $\{f(x_n)\}$.

Означення границі функції в точці за Гейне. Нехай функція $f\left(x\right)$ визначена в деякому околі $X$ точки $x_0$, крім, можливо, самої точки $x_0$. Число $A$ називають границею функції $f\left(x\right)$ у точці $x_0$, якщо для довільної послідовності значень аргументу $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ взятої із $X$, для якої $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$, $n \in N$, послідовність відповідних значень функції $f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), ..., f\left(x_n\right), ...$ має границю, яка дорівнює числу $A$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A\right)$, і записують

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

(читається: границя $f\left(x\right)$ при $x$, що прямує до $x_0$, дорівнює $A$).

*Приклад 1:*

*Функція* $f\left(x\right) = \dfrac{2x-4}{x^2-4}$ *визначена всюди, крім точок* $x = \pm 2$. *Дослідимо поведінку цієї функції в околі точки* $x_0 = 2$. *Виберемо в області визначення функції довільну послідовність* $\left\{x_n\right\}$ *збіжну до числа 2, тобто* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. *Якщо* $x_n \neq 2,\ n \in N$, *то*

$$f\left(x_n\right) = \frac{2\left(x_n - 2\right)}{\left(x_n - 2\right)\left(x_n + 2\right)} = \frac{2}{\left(x_n + 2\right)}.$$

*Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(x_n + 2\right)} = \frac{1}{2}.$$

*Отже, незалежно від вибору послідовності* $\left\{x_n\right\}$, *для якої* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ *і* $x_n \neq 2$, $n \in N$, *відповідна послідовність* $\left\{f\left(x_n\right)\right\}$ *збігається до числа* $\dfrac{1}{2}$.

Означення границі функції за Коші. Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки $x_0$ (крім, можливо, самої точки $x_0$). Число $A$ називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$ (в точці $x = x_0$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$, таке, що при $0 < \left|x - x_0\right| < \delta$ справедлива нерівність $\left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon$.

### Односторонні границі

Якщо $f(x)$ прямує до границі $b_1$ при $x$, що прямує до деякого числа $x_0$ так, что $x$ приймає лише значення, що менші за $x_0$, то пишуть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b_1$ і називають $b_1$ границею функції $f(x)$ у точці $x_0$ зліва **(ліва границя – *limit from the left*)**. Якщо $x$ приймає лише значення, що більші за $x_0$, то пишуть $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b_2$ і називають $b_2$ границею функції $f(x)$ у точці $x_0$ справа **(права границя – *limit from the right*)**.

Якщо дві односторонні границі рівні, то лише тоді говорять про границю функцій у точці $x = x_0$. Тоді

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

*Приклад 2:*

*Знайти односторонні границі у точці* $x = 1$ *функції* $f(x) = \begin{cases} x, x < 1 \\ 2, x \geq 1 \end{cases}$.

*Розв'язання:*

$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} x = \{1 - 0\} = 1,$

$\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} 2 = 2.$

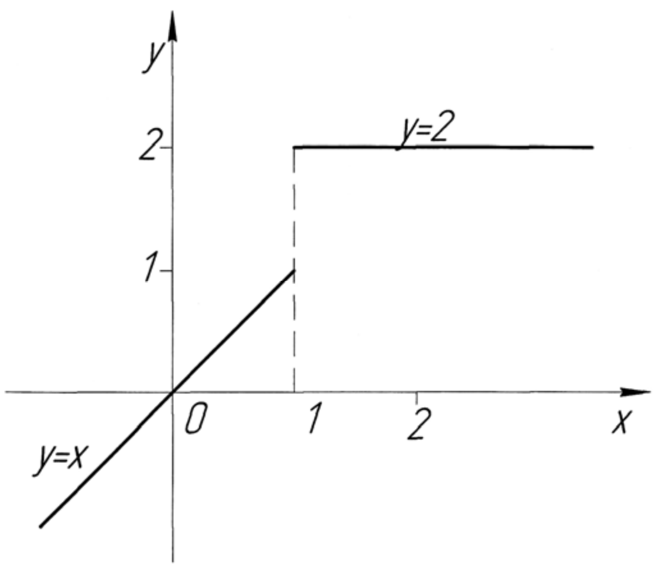



Рисунок 1

### Поняття границі функції на нескінченності

Досі ми розглядали поняття границі функції в точці $x_0$, де $x_0$ – певне дійсне число. Досліджуючи функції, областю визначення яких є інтервали $(-\infty;+\infty)$, $(-\infty;b)$ або $(a;+\infty)$, де $a, b$ – дійсні числа, часто доводиться вивчати поведінку цих функцій при як завгодно великих за модулем значеннях аргументу. Тому доцільно ввести поняття границі функції при $x \to \pm\infty$.

Означення 1. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;+\infty)$. Число $A$ називають границею функції $f(x)$ при $x \to +\infty$ і пишуть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $M(\varepsilon) \geq a$, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ виконується для усіх $x$, які задовольняють умову $x > M(\varepsilon)$.

Означення 2. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty;b)$. Число $A$ називають границею функції $f(x)$ при $x \to -\infty$ і пишуть $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N(\varepsilon) \leq b$, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ виконується для усіх $x$, які задовольняють умову $x < N(\varepsilon)$.

Означення 3. Число $A$ називають границею функції $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $P(\varepsilon) > 0$, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ виконується для всіх $x$, які задовольняють умову $|x| < P(\varepsilon)$.

### Правила обчислення границь функцій

1. Якщо $x_0$ належить області визначення елементарної функції $y = f(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Якщо кожна з функцій $f(x)$ і $g(x)$ мають у точці $x_0$ границю, $C$ – довільне дійсне число, $m$ – довільне натуральне число, то

$$\lim_{x\to x_0} C = C;$$

$$\lim_{x\to x_0} \left( f(x) \pm g(x) \right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0} \left( f(x) \cdot g(x) \right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)},\ \left(\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0\right);$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(C\cdot f(x)\right)=C\lim_{x\to x_0}f(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^m=\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)^m.$$

### Розкриття невизначеностей $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\left\{\infty-\infty\right\}$

Невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\left\{\infty-\infty\right\}$ здебільшого розкриваються за допомогою алгебраїчних перетворень.

*Приклад 3:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{1}=2$$

*Приклад 4:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\left\{\frac{1-4\cdot 1+3}{1-1}\right\}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=$$

$$=\left|x-1\neq 0\right|=\lim_{x\to 1}(x-3)=\left\{1-3\right\}=-2$$

*Приклад 5:*

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\left\{\infty-\infty\right\}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{2-x}{x^2-4}\right)=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{2-x}{(x-2)(x+2)}\right) = -\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

*Приклад 6:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{6-x}-2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(\sqrt{6-x}+2)}{(\sqrt{6-x}-2)\cdot(\sqrt{6-x}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(\sqrt{6-x}+2)}{2-x} = -\lim_{x\to 2}(\sqrt{6-x}+2) = -4$$

## Неперервність функцій

Нехай функція $y = f(x)$ визначена при деякому значенні $x_0$ і у деякому околі із центром в $x_0$. Нехай $y_0 = f(x_0)$.

Якщо $x$ надати деякого приросту $\Delta x$, то функція $y$ отримає деякий приріст $\Delta y$, що виражається формулою

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

Функція $y = f(x)$ називається неперервною у точці $x_0$, якщо вона визначена в деякому околі точки $x_0$ (і в самій точці $x_0$) і якщо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0.$$

Запишемо умову неперервності у вигляді

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Тоді можна сформулювати необхідні умови неперервності функції:

1. Функція $f(x)$ повинна бути визначена у точці $x_0$.
2. Повинні існувати скінченні права і ліва односторонні границі у точці $x_0$.
3. Односторонні границі повинні бути рівні між собою і дорівнювати значенню функції у точці $x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо хоча б одна з цих умов у точці $x_0$ не виконується, то говорять, функція має розрив при $x = x_0$. Точка $x = x_0$ називається точкою розриву.

## Класифікація точок розриву

Точки розриву функції класифікуються залежно від того, як саме порушується необхідна та достатня умова неперервності функції.

Тут можливі такі випадки:

1. Якщо в точці $x_0$ функція $f(x)$ має (скінченну) границю зліва і справа, і вони дорівнюють одна одній, але не дорівнюють значенню функції $f(x)$ в точці $x_0$ або значення $f(x_0)$ не існує, то точку $x_0$ називають точкою усувного розриву функції.

2. Якщо в точці $x_0$ функція $f(x)$ має границю зліва і справа, причому $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то точку $x_0$ називають точкою розриву функції із скінченним стрибком.

Величину $\delta = \left| \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \right|$ називають стрибком функції $f(x)$ у точці $x_0$.

Точки усувного розриву та розриву функції із скінченним стрибком називають точками розриву 1-го роду. Ці точки характеризуються тим, що в кожній з них функція має скінченну границю як зліва, так і справа.

Решту точок розриву функції називають точками розриву 2-го роду. Очевидно, що кожна точка розриву 2-го роду характеризується тим, що в ній функція не має хоча б однієї з односторонніх границь.

*Приклад 7:*

*Дослідити на неперервність функцію* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *у точці* $x_0 = 0$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$f(0) = \left.\dfrac{\sin x}{x}\right|_{x=0}$ − *не визначена.*

*Отже у* $x_0 = 0$ *розрив 1-го роду усувного типу.*

***Вправи:***

**1.** Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2=3x-5}{1-x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+4x^2+3x^3}{x^3-7x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^2+10x+20}{x^3-10x^2-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-1}{2x^2-x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$;

е) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-6x-7}$;

є) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2+x}{1-\sqrt{x+3}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}}$;

з) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$;

і) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2+5x-6}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\right)$;

л) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

**2.** Дослідити на неперервність функцію $y=3^{\frac{1}{x+1}}+1$ в точках $x_1=1$ і $x_2=-1$.

**3.** Дослідити на неперервність функцію $y=\begin{cases}x^2+1,\ x<0;\\ \sin x, 0\le x<\dfrac{\pi}{2};\\ x-\dfrac{\pi}{2}+1,\ x\ge\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

у точках $x=0$ і $x=\dfrac{\pi}{2}$ та побудувати її графік.

**4.** Дана функція $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3},\ x\ne3;\\ A,\ x=3.\end{cases}$

При яких значеннях $A$ функція $f\left(x\right)$ буде неперервною у точці $x=3$? Побудувати графік функції.

*Тема 24*

# ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

## *Derivative of function*

Границя відношення приросту функції **(приріст функції –** ***increment of function*)** $\Delta y$ до приросту аргументу **(приріст аргумента –** ***increment of argument*)** $\Delta x$ при довільному прямуванні $\Delta x$ до нуля називається похідною функції $y = f(x)$ у точці $x$ і позначається одним з наступних символів: $y'$, $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$. Отже,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Якщо вказана границя існує, то функцію $f(x)$ називають диференційованою **(диференційована функція –** ***differentiable function*)** у точці $x$, а операцію знаходження похідної $y'$ – диференціюванням **(диференціювання –** ***differentiation*)**.

Геометричний зміст похідної: похідна у точці $x$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної **(дотична до кривої –** ***tangent to curve*)**, що проведена у точці $M(x, y)$ до графіка функції $y = f(x)$.

Фізичний зміст похідної: похідна визначає швидкість зміни функції у точці $x$ відносно аргументу $x$.

Правила диференціювання

($C$ - стала величина, $u = u(x)$ і $v = v(x)$ - деякі диференційовані функції):

1) $(C)' = 0$;

2) $(x)' = 1$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(Cu)' = Cu'$;

5) $(uv)' = u'v + uv'$;

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \ (v \neq 0)$;

7) $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2} \ (v \neq 0)$;

8) якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$ – **складна функція** ***(composite function)***, що складена із диференційованих функцій, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx};$$

9) якщо для функції $y = f(x)$ існує обернена диференційовна функція $x = g(y)$ і $\dfrac{dg}{dy} = g'(y) \neq 0$, то

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}.$$

Таблиця похідних елементарних функцій

1) $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u' (\alpha \in R)$;

2) $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$;

3) $\left(e^u\right)' = e^u u'$;

4) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} u'$;

5) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} u'$;

6) $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$;

7) $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$;

8) $\left(\mathrm{tg} u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

9) $\left(\mathrm{ctg} u\right)' = \dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

10) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;

11) $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;

12) $\left(\mathrm{arctg} u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} u'$;

13) $\left(\mathrm{arcctg} u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} u'$;

14) $\left(\mathrm{sh} u\right)' = \mathrm{ch} u \cdot u'$;

15) $\left(\mathrm{ch} u\right)' = \mathrm{sh} u \cdot u'$;

16) $\left(\mathrm{th} u\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u} u'$;

17) $\left(\mathrm{cth} u\right)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u} u'$.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$:

$$y - f(x_0) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).$$

Рівняння нормалі до кривої **(нормаль до кривої – *normal to curve*)** $y = f(x)$ у точці $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right).$$

Функція $y = f\left(x\right)$ називається зростаючою в деякому інтервалі, якщо більшому значенню аргумента з цього інтервала відповідають більші значення функції, тобто при $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$. Функція $y = f\left(x\right)$ називається спадною якщо більшому значенню аргумента відповідають менші значення функції, тобто при $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$.

### Ознаки зростання і спадання функції

1. Якщо диференційована функція $y = f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a;b\right]$ зростає, то її похідна на цьому відрізку невід'ємна, тобто $f'\left(x\right) \geq 0$; якщо функція спадає, то її похідна недодатня $\left(f'\left(x\right)\right) \leq 0$.

2. Якщо похідна функції $y = f\left(x\right)$, що неперервна на відрізку $\left[a;b\right]$, додатня $\left(f'\left(x\right) > 0\right)$, то функція зростає на цьому відрізку, якщо похідна від'ємна $\left(f'\left(x\right) < 0\right)$ – функція спадає.

Інтерали у яких функція не спадає чи не зростає, називаються інтервалами монотонності функції **(интервал монотонности – *monotonicity interval*)**. Характер монотонності функції може змінюватись лише у тих точках її області визначення , у яких змінюється знак першої похідної. Точка у якій перша похідна функції перетворюється у нуль чи не існує називається критичною.

*Приклад 1:*

*Знайти інтервали монотонності та критичні точки функції* $y = 2x^2 - \ln x$.

*Розв'язання:*

*Функція визначена при* $x > 0$. *Знаходимо її похідну*

$$y' = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}.$$

В області визначення функції $y' = 0$ при $4x^2 - 1 = 0$, тобто при $x_0 = \frac{1}{2}$. Знайдена точка розбиває область функції на інтервали $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ і $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

| | | |
|---|---|---|
| $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ | $y' < 0$ | функція спадає |
| $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ | $y' > 0$ | функція зростає |

Точка $x_1$ називається точкою локального максимуму ***(локальний максимум – local maximum)*** функції $y = f(x)$, якщо для будь-яких достатньо малих $|\Delta x| \neq 0$ виконується нерівність $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$. Точка $x_2$ називається точкою локального мінімуму ***(локальний мінімум – local minimum)*** функції $y = f(x)$, якщо для будь-яких достатньо малих $|\Delta x| \neq 0$ виконується нерівність $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$. Точки максимуму і мінімуму називаються точками екстремуму функції ***(екстремум функції – extremum of function)***.

**Необхідна ознака *(requirement)*** локального екстремуму: якщо функція $y = f(x)$ має у точці $x = x_0$ екстремум, то чи $f'(x_0) = 0$, чи $f'(x)$ не існує.

**Достатня ознака *(sufficient condition)*** локального екстремуму: Нехай функція $y = f(x)$ неперервна у деякому інтервалі, що містить критичну точку $x = x_0$, і диференційована у всіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки $x_0$). Якщо $f'(x)$ при $x < x_0$ додатна, а при $x > x_0$ від'ємна, то при $x = x_0$ функція $y = f(x)$ має максимум. Якщо $f'(x)$ при

$x < x_0$ від'ємна, а при $x > x_0$ додатна, то при $x = x_0$ функція $y = f(x)$ має мінімум.

*Приклад 2:*

*Дослідити на екстремум функцію* $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ .

*Розв'язання:*

*Область визначення функції* $x \in (-\infty;+\infty)$. *Знайдемо її похідну*

$$y' = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x} + 1\right).$$

*Визначимо критичні точки функції. У критичних точках похідна функції дорівнює 0 або не існує.*

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x} + 1\right) = 0$$

$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 \neq 0 \end{cases}$ – *критичні точки. Вони розбивають область визначення функції на інтервали:* $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;+\infty)$.

| | | |
|---|---|---|
| $(-\infty;-1)$ | $y' > 0$ | *функція зростає* |
| $(-1;0)$ | $y' < 0$ | *функція спадає* |
| $(0;+\infty)$ | $y' > 0$ | *функція зростає* |

$x_1 = -1$ – *точка локального максимуму,* $y_{\max} = y(-1) = 1$; $x_2 = 0$ – *точка локального мінімуму,* $y_{\min} = y(0) = 0$.

***Вправи:***

**1.** Знайти похідні функцій:

а) $y = x^7$;

б) $y = \dfrac{1}{x^2}$;

в) $y = x\sqrt{x}$;

г) $y = \sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^{-1}} + 3x^{-2} - (5x)^{-3} + 4$;

д) $y = \sqrt{3x\sqrt{5x}}$;

е) $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}$;

є) $y = 6x^3 - 4x^2 + 10x$;

ж) $y = 5x^2\left(x - x^2\right)$;

з) $y = \frac{1-x}{1+x}$;

и) $y = \frac{3}{x - x^2 + 3}$;

і) $y = \sin x \cdot \cos x$.

**2.** Знайти похідні функцій:

а) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$;

б) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$;

в) $y = \left(x + 7\right)^3$;

г) $y = \sin 2x$;

д) $y = x \ln x$;

е) $y = -\ln\cos x$;

є) $y = \lg\left(\sin 3x + 2^x\right)$;

ж) $y = a^{2x}$.

**3.** Визначити проміжки зростання, спадання та точки максимуму та мінімуму функцій:

а) $y = 3 + 4x - x^2$;

б) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$;

в) $y = x - \ln x$;

г) $y = \frac{e^x}{x + 1}$.

**4.** Довести зростання функції на усій області визначення:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 21$;

б) $y = x + \dfrac{1}{1+x^2}$.

**5.** Знайти найбільше та найменше значення функції на заданих інтервалах:

а) $f(x) = x^3 - 3x,\ x \in [-0,5; 0,5]$;

б) $f(x) = \dfrac{x}{8} + \dfrac{2}{x},\ x \in [1; 6]$;

в) $y = x - 2\sqrt{x-2} - 3,\ x \in [2; 11]$;

г) $y = 2\left(x^2 + 1\right),\ x \in [-1; 3]$.

**6.** Дослідити функції та побудувати їх графіки:

а) $y = x^2 + 2x + 1$;

б) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$;

в) $y = x^3 - 3x^2 + 2$;

г) $y = xe^x$.

**7.** Знайти рівняння дотичної до графіку функції з абсцисою у точці $x_0$:

а) $f(x) = x^2,\ x_0 = 2$;

б) $f(x) = e^x,\ x_0 = 0$;

в) $f(x) = x^2 + x^{-2},\ x_0 = 1$.

**8.** Нехай $S(t) = 4t^2 + 2$ - закон прямолінійного руху точки, де $S$ - шлях, $t$ - час руху. Знайти швидкість точки у момент часу $t = 1$.

*Тема 25*

# ПЕРВІСНА. ІНТЕГРАЛ

## *Antiderivative. Integral*

Функція $F$ називається первісною для функції $f$ на заданому проміжку, якщо для всіх $x$ з цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Загальний вигляд первісних для функції $f(x)$ є $F(x)+C$, де $C$ - довільна стала, а $F(x)$ — одна з первісних для функції $f(x)$.

Таблиця первісних

| Функція $f(x)$ | Первісна $F(x)$ | Функція $f(x)$ | Первісна $F(x)$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $ax$ | $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $x^p$ | $\frac{x^{p+1}}{p+1}$ | $\cos x$ | $\sin x$ |
| $a^x$ | $\frac{a^x}{\ln a}$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{tg} x$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $\operatorname{ctg} x$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln x$ | | |

Правила знаходження первісних:

1) якщо $F$ первісна для $f$, а $G$ – первісна для $g$, то $F+G$ є первісною для $f+g$;

2) якщо $F$ первісна для $f$, а $k$ – стала, то $kF$ є первісною для $kf$;

3) якщо $F(x)$ первісна для $f(x)$, а $k \neq 0$ і $b$ – сталі, то $\frac{1}{k}F\left(kx+b\right)$ є первісною для функції $f\left(kx+b\right)$

*Приклад 1:*

*Знайти первісну функції* $f\left(x\right) = \left(4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3} + 1\right)$.

*Розв'язання:*

*Знайдемо первісні функцій*

$$f_1(x) = x^3 \Rightarrow F_1(x) = \frac{x^4}{4},$$

$$f_2(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow F_2(x) = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5},$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow F_3(x) = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2},$$

$$f_4(x) = 1 \Rightarrow F_4(x) = x.$$

*Застосовуючи властивості 1 та 2 отримаємо:*

$$F(x) = 4\frac{x^4}{4} - 2\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + 2\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + x = x^4 - \frac{6\sqrt[3]{x^5}}{5} - \frac{1}{x^2} + x.$$

Сума площ усіх прямокутників (рис. 1) дорівнює

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right).$$

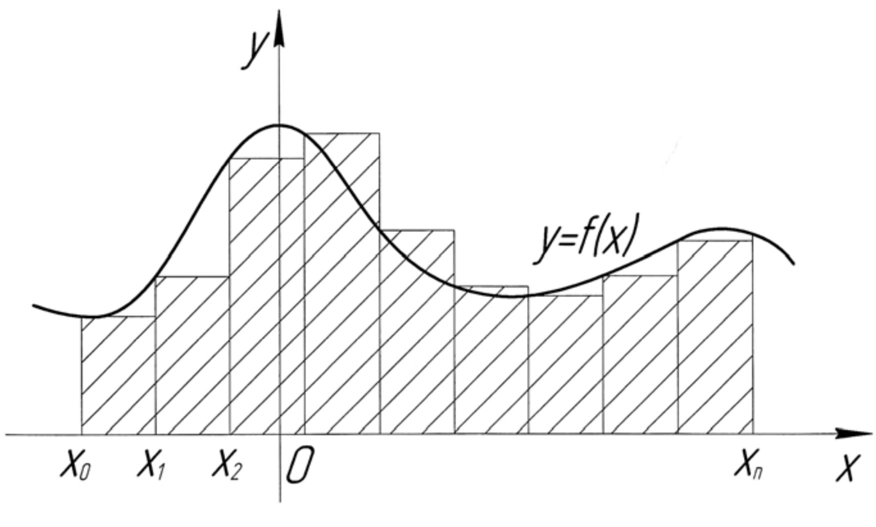



Рисунок 1

Для будь-якої неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $f$ (не обов'язково невід'ємної) $S_n$ прямує до деякого числа, якщо $n \to \infty$. Це число називають інтегралом функції $f$ від $a$ до $b$ і позначають $\int_a^b f(x)dx$ (читається: «Інтеграл від $a$ до $b$ еф від ікс де ікс»). Числа $a$ і $b$ називаються межами інтегрування: $a$ – нижньою межею, $b$ – верхньою. Знак $\int$ називається знаком інтеграла. Функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією, а змінна $x$ – змінною інтегрування.

Формула Ньютона–Лейбніца має вигляд $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Площа криволінійної трапеції $aABb$, обмежена віссю $Ox$, прямими $x = a$ і $x = b$ та графіком невід'ємної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ (рис. 2), визначається за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

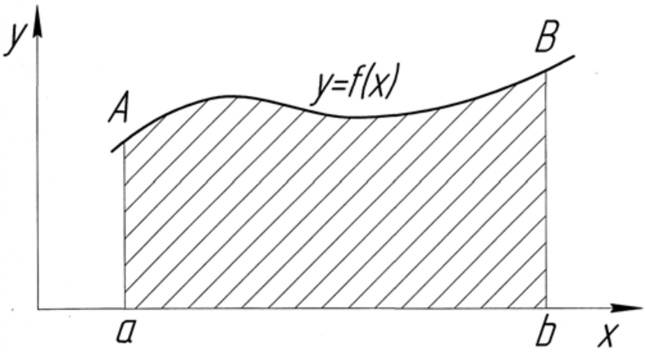


Рисунок 2

*Приклад 2:*

*Обчислити площу фігури, що обмежена лініями* $y = 3x - x^2$ і $y = -x$.

*Розв'язання:*

*Знаходимо точки перетину даних кривих:*

$$\begin{cases} y = 3x - x^2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x = 3x - x^2 \end{cases}$$

*Система має два розв'язки:* $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = -4 \end{cases}$. Маємо дві точки *перетину графіків функцій. Будуємо фігуру, площу якої шукаємо (рис. 3).*

*Тоді*

$$S = \int_0^4 \left(3x - x^2 - (-x)\right)dx = \int_0^4 \left(4x - x^2\right)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}\textit{êâ.î ä.}$$

*Відповідь:* $S = \frac{32}{3}\textit{êâ.î ä.}$

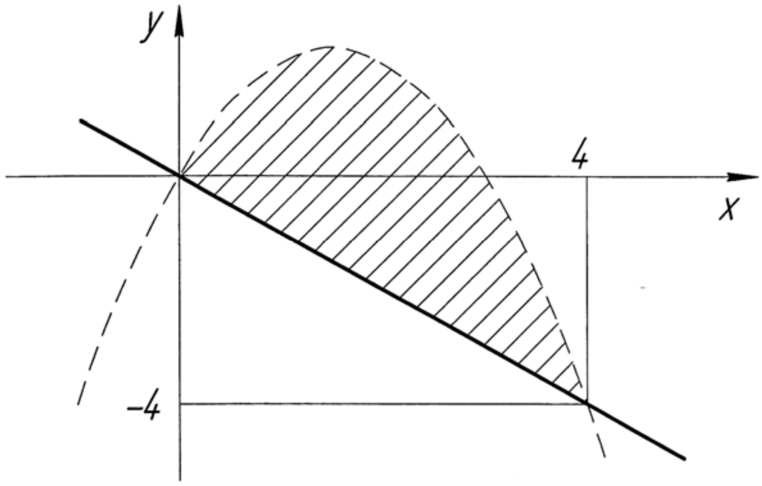



Рисунок 3

***Вправи:***

**1.** Знайти первісну $F(x)$, якщо:

а) $f(x)=7-2x;$

б) $f(x)=x^2+4x-7;$

в) $f(x)=x+\dfrac{1}{x};$

г) $f(x)=2\sin x+\cos 3x;$

д) $f(x)=\dfrac{3}{\cos^2 2x};$

е) $f(x)=2\ln x-x^2;$

є) $f(x)=\dfrac{4}{(x+3)^2}+\dfrac{7}{\sin^2 3x};$

ж) $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}}.$

**2.** Знайти первісну $F(x)$ для функції $y=f(x)$, графік якої проходить через точку $M$:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2^x},\ M\left(1;\dfrac{5}{\ln 2}\right);$

б) $f(x)=e^{-3x},\ M(0;-2);$

в) $f(x)=x^4,\ M(-1;2);$

г) $f(x)=\sin 2x,\ M(0;1).$

**3.** Обчислити визначений інтеграл:

а) $\int\limits_3^6 dx$;

б) $\int\limits_4^5 \sqrt{x}dx$;

в) $\int\limits_1^2 \frac{6}{x^4}dx$;

г) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$;

д) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x}dx$;

е) $\int\limits_0^{3\pi/2} \cos\frac{x}{3}dx$;

є) $\int\limits_{-2}^{14} \sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}dx$;

ж) $\int\limits_2^8 \frac{dx}{x\ln 2}$;

з) $\int\limits_1^{64} \frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}}dx$;

и) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$;

і) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi} \left(\sin 2x\cos 3x + 2\sin^2 x\sin 3x\right)dx$.

**4.** Обчислити площу фігури, що обмежена лініями:

а) $y = 4x - 5,\ x = -3,\ x = 2,\ y = 0$;

б) $y^2 = 9x,\ x = 1,\ x = 9$;

в) $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4$;

г) $y = 9 - x^2,\ y = 0$;

д) $y = x^2 - 2x + 2,\ y = 2 + 4x - x^2$;

е) $y = \frac{5}{x},\ y = 6 - x$;

є) $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$.

*Тема 26*

## КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

## Complex number

Величина $y^2$ при будь-якому числовому значенні $b$ буде не від'ємною, тобто вона може бути або додатньою або рівною нулю, наприклад при $y = \pm 8$ маємо $y^2 = +64$; при $y = 0$ і $y^2 = 0$.

Таким чином серед дійсних чисел немає жодного, квадрат якого дорівнював би від'ємній величині. Отже, і корінь квадратний із від'ємної величини $\sqrt{-y^2}$ не може бути виражений жодним дійсним числом.

Чи означає це, що величина $\sqrt{-y^2}$ є «уявною», «неіснуючою», як її називали внаслідок традиції, що незмінно поторювалась при всякому наступному розширенні поняття числа? Авжеж ні. Величина $\sqrt{-y^2}$ є реально існуючою величиною, яка не може бути виражена вузьким, недосконалим поняттям дійсного числа. Для розширення поняття числа крім дійсної одиниці, за допомогою якою виражаються усі дійсні числа, необхідно ввести принципіально нову одиницю, яку будемо позначати буквою $i$, маючи на увазі під цим позначенням величину

$$i = \sqrt{-1} \text{ або } i^2 = -1$$

Тоді $\sqrt{-y^2}$ може бути виражено через нову одиницю $i$ так:

$$\sqrt{-y^2} = \sqrt{(-1) \cdot y^2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{y^2} = iy.$$

За історичною традицією число $i$ назвали уявною одиницею **(уявна одиниця – *imaginary unit*)**, а числа $iy$ – чисто уявними числами. Число виду

$$x + iy$$

одержало назву комплексного числа, у якому розрізняють дійсну частину ($x$) **(дійсна частина – *real part*)** і уявну частину ($y$) **(уявна частина – *imaginary part*)**.

Комплексні числа почали з'являтися в роботах окремих математиків починаючи з XVI століття. Але широке визнання й поширення вони одержали лише в XIX столітті, після того як на рубежі XVIII - XIX століть одночасно й незалежно один від одного К. Гауссом (в 1797-1799 р.), К. Весселем (в 1798-1799 р.) і Ж. Арганом (в 1806 р.) була дана геометрична інтерпретація комплексних чисел як точок числової площини, і після того, як за допомогою комплексних чисел удалося вирішити ряд практично важливих задач, нерозв'язаних в області дійсних чисел.

Доти до комплексних чисел ставилися з великою недовірою й не розуміли їхньої суті навіть багато великих математиків. Наприклад, Лейбніц писав: «Комплексне число - це тонкий і разючий засіб божественного духу, майже амфібія між буттям і небуттям».

Комплексним числом $z$ називається вираз виду

$$z = x + iy$$

(**алгебраїчна форма (*algebraic form*)** комплексного числа), де $x$ і $y$ - будь-які дійсні числа, а $i$ - уявна одиниця.

Числа $x$ і $y$ називають, відповідно, дійсною та уявною частинами комплексного числа $z$ і позначають

$$x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z.$$

Комплексне число $\overline{z} = x - iy$ називається спряженим **(спряжене – *adjoined*)** комплексному числу $z = x + iy$.

Комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ вважаються рівними тоді і лише тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Комплексне число $z = x + iy$ зображається на площині $Oxy$ точкою $M$ із координатами $(x, y)$ чи вектором, початок якого знаходиться у точці $O(0;0)$, а кінець у точці $M(x, y)$ (рис. 1).

Довжина $\rho$ вектора $\overline{OM}$ називається модулем **(модуль –*modulus*)** комплексного числа і позначається $|z|$, так що $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Кут $\varphi$, утворений вектором $\overline{OM}$ із віссю $Ox$, називається аргументом **(аргумент – *amplitude*)** комплексного числа $z$ і позначається $\varphi = \operatorname{Arg} z$; він визначається не однозначно, а із точністю до доданка, який кратний $2\pi$:

$$Argz = \arg z + 2k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

де $\arg z$ - головне значення $\operatorname{Arg} z$, що визначається умовами

$$-\pi < \arg z \le \pi.$$

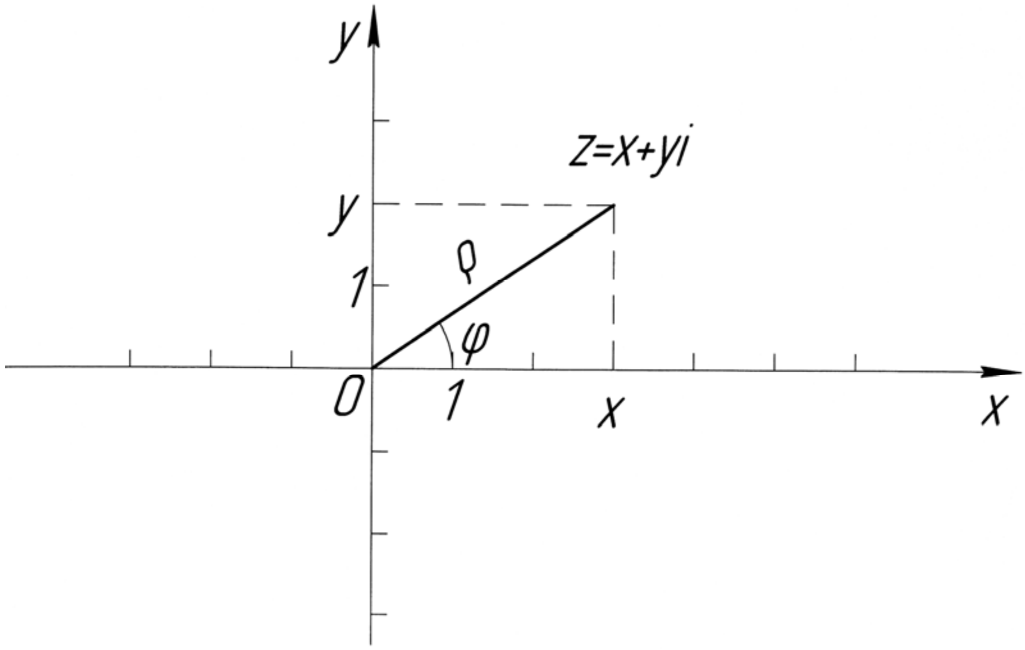



Рисунок 1

Модуль і аргумент комплексного числа є параметрами, які визначають тригонометричну та показникову форму запису комплексних чисел:

$z = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ – **тригонометрична форма (*goniometric form*);**

$z = \rho e^{i\varphi}$ – **показникова форма (*exponential form*)**.

При виконанні алгебраїчних дій над комплексними числами потрібно вміти переходити від алгебраїчної форми запису до тригонометричної (показникової) і навпаки. Для цього використовуються формули переходу, очевидні з рис. 1.

Формули переходу від тригонометричної (показникової) форми запису до алгебраїчної:

$$\rho, \varphi \to x, y: \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi. \end{matrix}$$

Формули переходу від алгебраїчної форми запису до тригонометричної (показникової):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$x, y \to \rho, \varphi: \quad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Два комплексні числа $z_1$ і $z_2$ рівні тоді і лише тоді, коли їх модулі рівні, а їх аргументи чи рівні, чи відрізняються на величину, що кратна $2\pi$:

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2|, \\ \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi k, (k = 0, \pm 1, \pm 2...), \end{cases} \Leftrightarrow z_1 = z_2.$$

Дійсна та уявна частини комплексного числа виражаються через спряжені комплексні числа наступним чином:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \ \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

*Приклад 1:*

*Представити в тригонометричній та показниковій формах число* $z = 2\sqrt{3} + 2i$*:*

*Розв'язання:*

*З алгебраїчної форми числа визначаємо:*

$x = 2\sqrt{3}$

$y = 2$

*Тоді*

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$

$\varphi = arctg \dfrac{y}{x} = arctg \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$

*Отже,*

$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ *- тригонометрична форма* $z$*;*

$z = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$ *- показникова форма* $z$.

*Приклад 2:*

*Розв'язати рівняння* $x^2 + 4x + 13 = 0$.

*Розв'язання:*

$D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 13 = -36$*;*

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i;$$

*Відповідь:* $x_1 = -2 + 3i,\ x_2 = -2 - 3i$.

*Приклад 3:*

*При яких дійсних значеннях* $x$ *та* $y$ *виконується рівність*

$x(2 - i) + y(2i - 1) = 4 - 5i$?

*Розкриваючи дужки в лівій частині рівняння та групуючи дійсні та уявні частини, отримаємо*

$(2x - y) + i(-x + 2y) = 4 - 5i$.

*Використовуючи означення рівності комплексних чисел, прирівняємо дійсні та уявні частини справа та зліва:*

$$\begin{cases} 2x - y = 4; \\ -x + 2y = -5. \end{cases}$$

*Помножимо друге рівняння на 2 та додамо його до першого. Отримаємо*

$$\begin{cases} 3y = -6; \\ x = 2y + 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = -2. \end{cases}$$

*Відповідь:* $x = 1,\ y = -2.$

### Алгебраїчні дії над комплексними числами

В алгебраїчній формі запису дії над комплексними числами потрібно виконувати вважаючи, що $i$ звичайний символьний множник, єдина його особливість, що $i^2 = -1$.

Додавання і віднімання комплексних чисел виконується лише в алгебраїчній формі. Отже, якщо комплексні числа задано в тригонометричній (показниковій) формі перше, що необхідно зробити, щоб виконати операцію додавання або віднімання, використовуючи формули переходу перейти до алгебраїчної форми запису.

Додавання

$$\begin{matrix} z_1 = x_1 + iy_1, \\ z_2 = x_2 + iy_2; \end{matrix} \Rightarrow$$

$$z_1 + z_2 = \left(x_1 + iy_1\right) + \left(x_2 + iy_2\right) = \left(x_1 + x_2\right) + \left(iy_1 + iy_2\right) =$$
$$= \left(x_1 + x_2\right) + i\left(y_1 + y_2\right).$$

Віднімання

$$\begin{matrix} z_1 = x_1 + iy_1, \\ z_2 = x_2 + iy_2; \end{matrix} \Rightarrow$$

$$z_1 - z_2 = \left(x_1 + iy_1\right) - \left(x_2 + iy_2\right) = \left(x_1 - x_2\right) + \left(iy_1 - iy_2\right) =$$
$$= \left(x_1 - x_2\right) + i\left(y_1 - y_2\right).$$

*Приклад 4:*

$$\begin{matrix} z_1 = 2 - 3i \\ z_2 = -7 + 5i \end{matrix} \Rightarrow z_1 + z_2 = 2 - 3i - 7 + 5i = \left(2 - 7\right) + i\left(-3 + 5\right) = -5 + 2i$$

Операції множення і ділення можна виконувати у будь-якій формі запису (бажано використовувати ту форму запису у якій задано обидва комплексні числа).

Множення

а) алгебраїчна форма запису

$$\begin{matrix} z_1 = x_1 + iy_1, \\ z_2 = x_2 + iy_2; \end{matrix} \Rightarrow$$

$$z_1 \cdot z_2 = \left(x_1 + iy_1\right) \cdot \left(x_2 + iy_2\right) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + y_1y_2i^2 =$$
$$= \left(x_1x_2 - y_1y_2\right) + \left(ix_1y_2 + ix_2y_1\right) = \left(x_1x_2 - y_1y_2\right) + i\left(x_1y_2 + x_2y_1\right).$$

б) тригонометрична форма запису

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right), \\ z_2 &= \rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right); \end{aligned} \Rightarrow$$

$$z_1 z_2 = \rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\cdot\rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) =$$

$$= \rho_1\rho_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right).$$

в) показникова форма запису

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1 e^{i\varphi_1}, \\ z_2 &= \rho_2 e^{i\varphi_2}; \end{aligned} \Rightarrow z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1}\cdot\rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i\left(\varphi_1+\varphi_2\right)}.$$

Ділення

а) алгебраїчна форма запису

Для ділення двох комплексних чисел в алгебраїчній формі необхідно і ділене і дільник помножити на спряжене до дільника комплексне число.

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1, \\ z_2 &= x_2 + iy_2; \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2i^2}{x_2^2+y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{ix_2y_1 - ix_1y_2}{x_2^2+y_2^2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

б) тригонометрична форма запису

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right), \\ z_2 &= \rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right); \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{\rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right).$$

в) показникова форма запису

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1 e^{i\varphi_1}, \\ z_2 &= \rho_2 e^{i\varphi_2}; \end{aligned} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\left(\varphi_1-\varphi_2\right)}.$$

*Приклад 5:*

*Обчислити* $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2-\sqrt{3}i}$.

*Розв'язання:*

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2-\sqrt{3}i}\cdot\frac{2+\sqrt{3}i}{2+\sqrt{3}i}=\frac{2\sqrt{3}+2i+3i-\sqrt{3}}{4+3}=\frac{\sqrt{3}}{7}+\frac{5}{7}i.$$

## Піднесення до натурального степеня та пошук кореня із комплексного числа

Операції піднесення до степеня та пошук кореня виконуються лише у тригонометричній (показниковій) формі запису комплексного числа.

Піднесення до натурального степеня

а) тригонометрична форма

$$z=\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\ \Rightarrow\ z^n=\rho^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right).$$

б) показникова форма

$z=\rho e^{\varphi i}\Rightarrow z^n=\rho^n e^{n\varphi i}.$

Знаходження кореня

а) тригонометрична форма

$$z=\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,...n-1.$$

б) показникова форма

$$z=\rho e^{\varphi i}\Rightarrow\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}i},k=0,1,2...n-1.$$

*Приклад 6:*

*Обчислити* $\left(-\sqrt{3}-i\right)^5$.

*Розв'язання:*

*Визначимо тригонометричну форму комплексного числа, що підноситься до степеня. Згідно умови* $x=-\sqrt{3},\ y=-1$. *Тоді,*

$\rho=\sqrt{3+1}=2$

$\varphi=-\pi+arctg\frac{y}{x}=-\pi+arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{5\pi}{6}.$

*Отже,*

$$\left(-\sqrt{3}-i\right)^5=\left(2\cdot\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)\right)^5=$$

$$=2^5\left(\cos\left(-5\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(-5\frac{5\pi}{6}\right)\right)=32\left(\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=32\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=32\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=16\sqrt{3}-16i.$$

***Вправи:***

**1**. Представити в тригонометричній та показниковій формах:

а) $z_1=1+i$;

б) $z_2=-\sqrt{3}-i$;

в) $z_3=2i$;

г) $z_4=-5$.

**2**. Представити в алгебраїчній формі

а) $z_1=2\cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$;

б) $z_2=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\left|z_3\right|=1, \arg z_3=\pi$

**3.** Знайти $z$, якщо

а) $z=z_1z_2,\ z_1=(1+i),\ z_2=(1-3i)$;

б) $z=\frac{2}{-i}+i\cdot\overline{(1-i)}$;

в) $z=\frac{2}{1+i}-\frac{1-i}{1+i}\frac{2-2i}{1-2i}$;

г) $z=\left(-\sqrt{3}-i\right)^5$;

д) $z=\sqrt[3]{1+i}$;

е) $z^2+i=0$.

**4.** Знайти корені квадратних рівнянь:

а) $x^2-2x+2=0$;

б) $x^2+6x+13=0$;

в) $x^2+16=0$.

*Тема 27*

# Комбінаторика. Біном Ньютона

## *Combinatorial analysis. Binomial theorem*

При вивчені теорії ймовірностей важливе значення відіграє теорія сполук, яка розглядає множини по $m$ предметів, взятих із даних $n$ предметів. Такі множини називаються сполуками. Нас завжди цікавитиме лише кількість сполук і не цікавитиме природа тих предметів, з яких складаються сполуки. Предмети, з яких складаються сполуки, називаються елементами. Позначають їх буквами $a, b, c, d, \ldots$.

Сполуки можуть відрізнятися одна від одної або елементами і порядком елементів, або лише порядком елементів, або лише елементами. В залежності від цього розглядають три види сполук: розміщення, перестановки та комбінації.

Сполуки, які відрізняються як складом елементів так і їх порядком, називаються розміщенням **(розміщення – *arrangement*)**, а їх число позначається символом $A$ з верхнім та нижнім індексами.

Наприклад, розміщеннями з трьох елементів $a, b, c$ по два будуть: $ab$, $ac$, $bc$, $ba$, $ca$, $cb$.

Кількість розміщень із $n$ елементів по $m$ позначається через $A_n^m$ і обчислюється за формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

*Приклад 1:*

*Скільки можна написати трицифрових чисел з різними цифрами, не використовуючи 0?*

*Розв'язання:*

*Такі числа можна розглядати як розміщення з дев'яти цифр по три. Таким чином,*

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 7\cdot8\cdot9 = 504.$$

*Приклад 2:*

*Кидають гральний кубик два рази. Скільки може бути випадків, коли цифра, яка з'явиться при першому кидкові відрізняється від цифри, яка з'явиться при другому кидкові?*

*Розв'язання:*

*Розв'язання цієї задачі зводиться до обчислення кількості розміщень із шести елементів по два:*

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 6 = 30.$$

Сполуки, які складені з усіх наявних елементів і відрізняються лише порядком елементів називаються перестановками **(перестановка – *commutation*)**. Число перестановок $n$-елементної множини позначається через *P*.

Наприклад, перестановками з трьох елементів *a, b, c* будуть: *abc, acb, cab, cba, bac, bca*.

Перестановки можна розглядати як окремий випадок розміщень, коли *m* = *n*. Це дає можливість вивести формулу для обчислення кількості перестановок:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

***Зауваження.*** Число *n* може приймати не тільки натуральні значення, воно може також дорівнювати нулеві. Прийнято вважати, що 0! = 1.

*Приклад 3:*

*Скількома способами можна посадити в рядок по одному 6 декоративних дерев?*

*Розв'язання:*

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

*Приклад 4:*

*Скільки різних п'ятицифрових чисел, більших за 20 000, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, якщо цифри 2, 3, 4 входять в кожне число по одному разу, а цифра 1 – два рази?*

*Розв'язання:*

*В даній задачі елементами є числа 1, 1, 2, 3, 4, а тому кожна перестановка дає п'ятицифрове число, і їх буде: $P_5 = 5!$ Але ж в кожне число входить дві одиниці. Змінюючи одиниці місцями, отримуємо теж саме число, тому різних п'ятицифрових чисел буде: $\frac{1}{2}\cdot P_5 = \frac{1}{2}\cdot 5! = 60$. Якщо одиниця зустрічається на першому місці, то числа будуть меншими за 20 000 і їх буде $P_4 = 4! = 24$ (перестановки з чотирма цифрами). Отже, шукана кількість чисел знаходиться як різниця*:

$$\frac{1}{2}\cdot P_5 - P_4 = 60 - 24 = 36.$$

Сполуки, які містять в собі $m$ елементів із даних $n$ і відрізняються одна від одної принаймні одним елементом, називаються комбінаціями **(комбінація – *combination*)** з $n$ елементів по $m$.

Наприклад, комбінаціями з трьох елементів *a, b, c* по два будуть: *ab, ac, bc*.

Кількість комбінацій з $n$ елементів по $m$ позначають як $C_n^m$ і знаходять за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Комбінації мають таку властивість, що $C_n^m = C_n^{n-m}$.

*Приклад 5:*

*На склад поступило 100 деталей. Для вибіркового контролю потрібно взяти дві з цієї сотні. Скількома способами можна виконати цю операцію?*

*Розв'язання:*

*В даній задачі потрібно обчислити кількість комбінацій з 100 елементів по два:*

$$C_{100}^2 = \frac{100!}{2!\,(100-2)!} = \frac{100!}{2!\,98!} = \frac{100\cdot 99}{2} = 4950.$$

Числа $C_1^0$, $C_1^1$, $C_2^0$, $C_2^1$, $C_2^2$, $C_3^0$, $C_3^1$,… зручно записати у вигляді таблиці:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
\end{array}
$$

……………………………………

Якщо обчислити значення цих символів, то одержимо:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\end{array}
$$

……………………………………

Таблицю отриманих чисел називають трикутником Паскаля **(трикутник Паскаля – *Pascal pyramid*)**.

Ряд питань теорії ймовірностей потребують знання так званої формули бінома Ньютона.

З алгебри відомі формули скороченого множення:

$$\left(a+b\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\left(a+b\right)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Коефіцієнти в правих частинах цих формул збігаються відповідно з другим і третім рядками трикутника Паскаля. Неважко довести, що ця закономірність збігається для 4-го, 5-го і т.д. степеня суми. Таким чином, для суми $n$-го степеня можна записати, що:

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \, a^{n-m} \, b^m .$$

Відповідна формула називається формулою бінома Ньютона. Вираз $C_n^m\, a^{n-m}\, b^m$ називається загальним членом бінома Ньютона. В окремих випадках при n = 2, 3, 4,… з формули бінома Ньютона можна вивести відомі формули скороченого множення.

***Вправи:***

**1.** Хлопець забув дві останні цифри телефону свого друга, але пам'ятав, що вони різні і більше за 6. Яку максимальну кількість телефонних дзвінків може зробити хлопець перш ніж почує голос друга?

**2.** Скількома різними способами можна розсадити групу із 8 людей на 8 стільцях?

**3.** Множина складається із десяти літер українського алфавіту. Дослід полягає у виборі без повертання 4 літер і запису слова у порядку вибору літер. Скільки 4-літерних слів можна отримати у такому досліді?

**4.** Треба розподілити виконання досліджень на шести дослідних ділянках між трьома студентами. Скількома способами можна здійснити розподіл, якщо кожен повинен отримати дві ділянки?

**5.** Цифри 1, 2, … , 9 записують у випадковому порядку. Знайдіть кількість можливих сполук цифр, у яких 1 та 2 стоятимуть поряд.

**6.** Із партії, що містить 25 виробів, серед яких є браковані, для контролю беруть 3 вироби. Скільки різних сполук виробів можна утворити таким чином?

*Тема 28*

## ТОЧКА. ПРЯМА. КУТ

## *Point. Line. Angle*

Основними геометричними фігурами на площині є точка і пряма. Точки позначають великими латинськими літерами (на рис. 1 показано точку $A$), а прямі – малими латинськими літерами (на рис. 2. – пряма $a$). На рис. 3 зображено пряму $c$ та точки $E$ і $F$. Точка $F$ лежить на прямій $c$, а точка $E$ не лежить на прямій $c$. По-іншому говорять, що точка $F$ належить прямій $c$, а точка $E$ не належить їй.


Рисунок 1

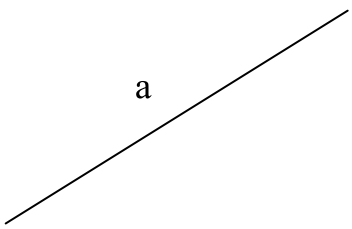



Рисунок 2

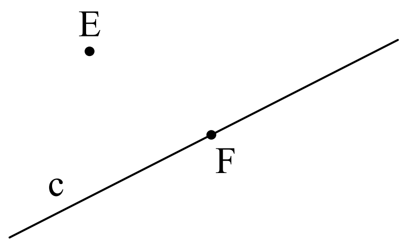



Рисунок 3

Відрізком **(відрізок – *segment*)** називається частина прямої, яка складається з усіх точок прямої, що лежать між двома даними її точками. Ці точки називають кінцями відрізка. Відрізок позначають, записуючи його кінці (відрізок $AB$ на рис. 4).

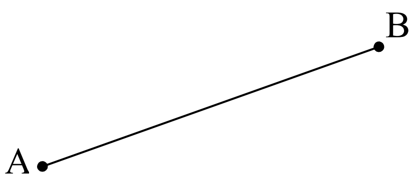



Рисунок 4

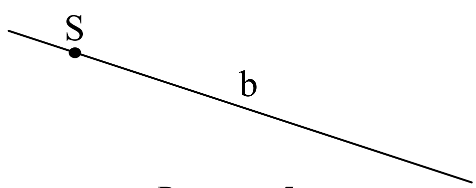



Рисунок 5

Точка $S$ розбиває пряму $b$ на дві півпрямі **(півпряма – *half-line*)**, які називаються променями **(промінь – *ray*)** (рис. 5). Точка $S$ називається початковою точкою **(початкова точка – *initial point*)** променя. Точка $A$ (рис. 6) розбиває пряму на два променя $a_1$ та $a_2$, які називаються доповняльними.

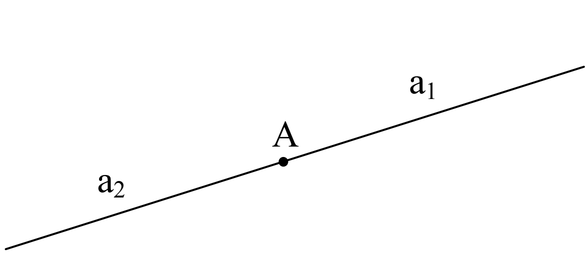



Рисунок 6

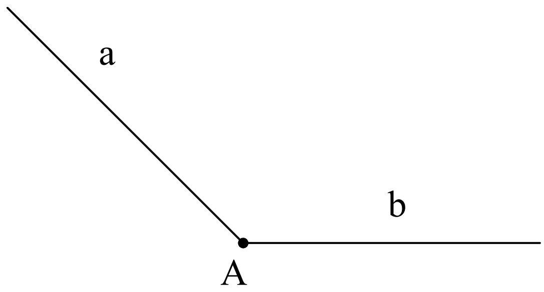



Рисунок 7

Кутом називається фігура, яка складається з точки – вершини кута **(вершина кута – *vertex of angle*)** – і двох різних півпрямих, що виходять з цієї точки, і називаються сторонами кута (рис. 7). Якщо сторони кута є доповняльними півпрямими однієї прямої, то кут називаються розгорнутим **(розгорнутий кут – *flat angle*)** (рис. 6).

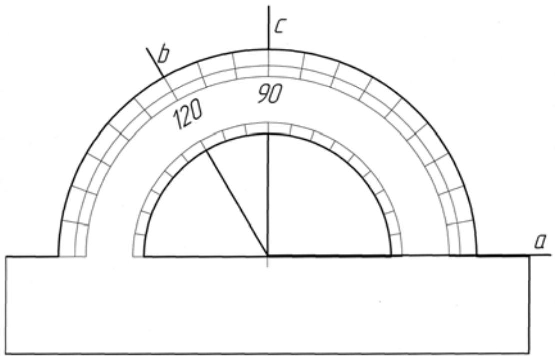
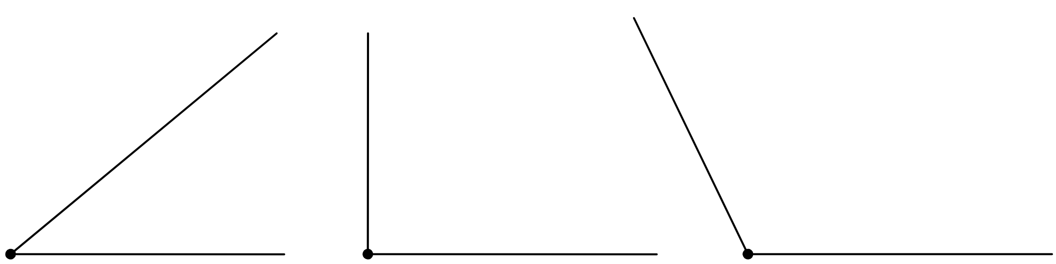



Рисунок 8

Кути вимірюються градусами **(градус – *degree*)** за допомогою транспортира **(транспортир – *protractor*)** (рис. 8). Кут, що дорівнює $90^0$, називається прямим кутом **(прямий кут – *right angle*)** (рис. 8б). Кут, менший за $90^0$, називається гострим кутом **(гострий кут – *sharp angle*)** (рис. 8а). Кут, більший за $90^0$ і менший від $180^0$, називається тупим кутом **(тупий кут – *blunt angle*)** (рис. 8в).



а) б) в)

Рисунок 9

Два кути називаються суміжними **(суміжні кути – *adjacent angles*)**, якщо в них одна сторона спільна, а інші сторони цих кутів є доповняльними півпрямими (рис. 10). Сума суміжних кутів дорівнює $180^0$

$$\angle ACD + \angle BCD = 180^0.$$

Два кути називаються вертикальними **(вертикальні кути – *vertical angles*)**, якщо сторони одного кута є доповняльними півпрямими сторін другого. Кути $(a_1b_1)$ і $(a_2b_2)$ (рис. 11) – вертикальні. Кути $(a_1b_2)$ і $(a_2b_1)$ – також вертикальні. Вертикальні кути рівні

$$\angle(a_1b_1) = \angle(a_2b_2);$$
$$\angle(a_1b_2) = \angle(a_2b_1).$$

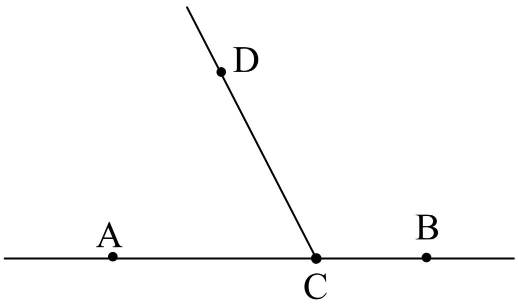


Рисунок 10

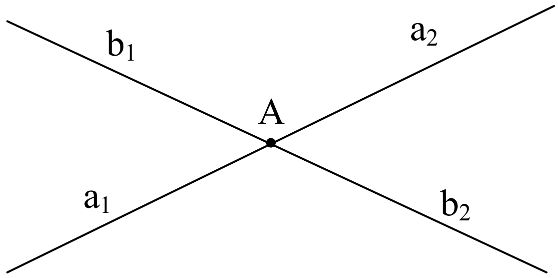


Рисунок 11

Бісектрисою **(біссектриса – *bisecting line*)** кута називається промінь, який виходить з його вершини, проходить між його сторонами і ділить кут пополам (рис. 12)

$$\angle(ac) = \angle(bc).$$

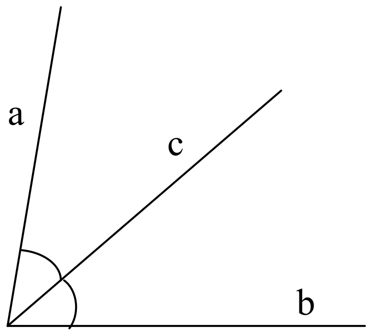


Рисунок 12

Прямі, які лежать в одній площині і не перетинаються, називаються паралельними **(паралельні прямі – *parallel lines*)** (рис. 13).

Дві прямі називаються перпендикулярними **(перпендикулярні прямі – *perpendicular lines*)**, якщо вони перетинаються під прямим кутом (рис. 14).

Нехай $AB$ і $CD$ – дві прямі й $AC$ – третя пряма, що перетинає прямі $AB$ і $CD$ (рис. 15). Пряма $AC$ відносно $AB$ і $CD$ називається січною **(січна – *secant line*)**. Кути, які утворюються в результаті перетину прямих $AB$ і $CD$ січною $AC$, мають спеціальні назви. Якщо точки $B$ і $D$ лежать в одній півплощині відносно прямої $AC$, то кути $\angle BAC$ і $\angle DCA$ називаються внутрішніми односторонніми **(внутрішні односторонні кути – *interior opposite angles*)** (рис. 15а). Якщо точки $B$ і $D$ лежать у різних півплощинах відносно прямої $AC$, то кути $\angle BAC$ і $\angle DCA$ називаються внутрішніми різносторонніми (внутрішні різносторонні кути – ***interior versatile angles***).

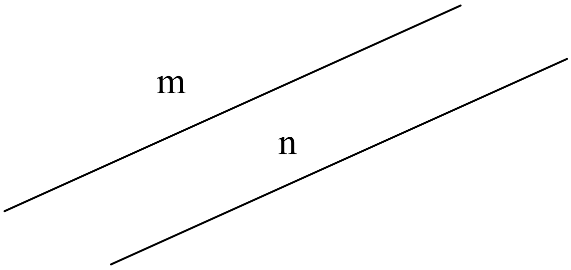



Рисунок 13

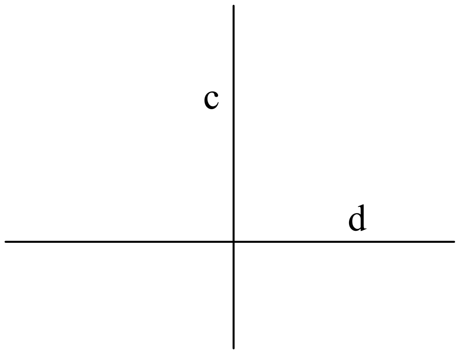



Рисунок 14

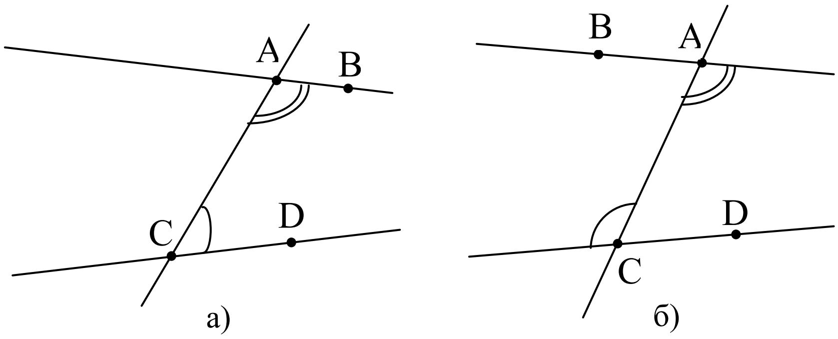



Рисунок 15

Якщо дві паралельні прямі перетнуті третьою прямою (рис. 16), то внутрішні різносторонні кути рівні, а сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює $180^0$

$$\angle CAB = \angle ABF;$$

$$\angle DAB = \angle ABE;$$

$$\angle CAB + \angle ABE = 180^0;$$

$$\angle DAB + \angle ABF = 180^0.$$

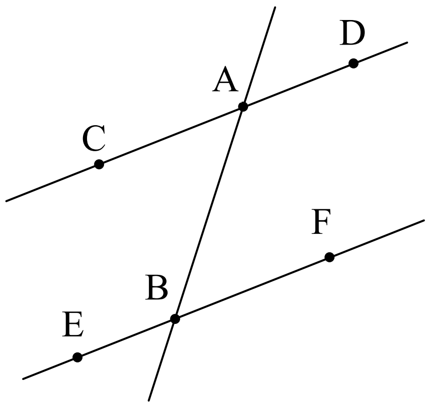



Рисунок 16

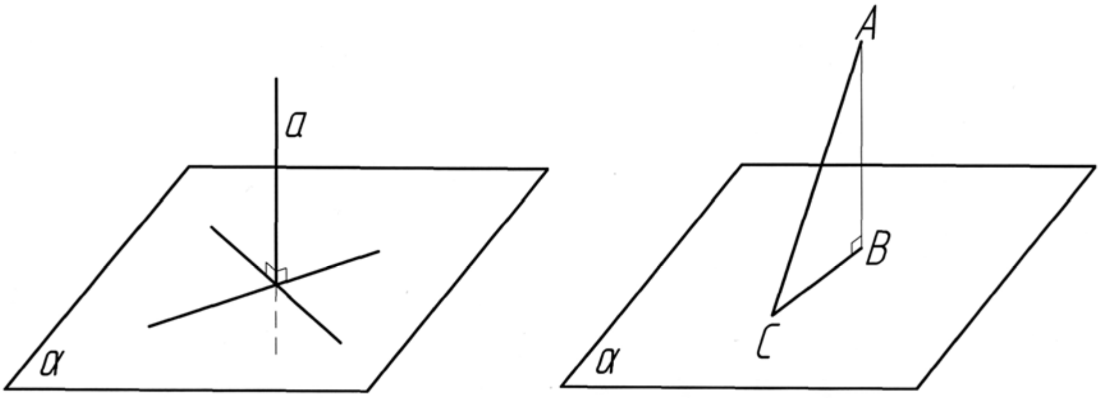
Пряма, яка перетинає площину, називається перпендикулярною до цієї площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині й проходить через точку перетину (рис. 17а).

Перпендикуляром **(перпендикуляр – *perpendicular*)**, опущеним з даної точки на дану площину, називається відрізок, що сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини. Кінець цього відрізка, який лежить на площині, називається основою перпендикуляра.

Відстанню **(відстань – *distance*)** від даної точки до площини називається довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на площину.

Похилою **(похила – *slanting line*)**, проведеною з даної точки до даної площини, називається будь-який відрізок, який сполучає дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром. Кінець відрізка, що лежить у площині, називається основою похилої.

Відрізок, який сполучає основи перпендикуляра і похилої, проведених однієї точки, називається проекцією похилої. На рис. 17б $AC$ – похила, $AB$ – перпендикуляр, $BC$ – проекція похилої $AC$ на площину $\alpha$.




а) б)

Рисунок 17

*Приклад 1:*

*Різниця двох внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній дорівнює* $30^0$ *(рис. 18). Знайдіть ці кути.*

*Розв'язання:*

*Нехай* $\angle ABC = x$, $\angle BAD = y$.

*За умовою задачі* $x - y = 30$. *Так як* $\angle ABC$ і $\angle BAD$ *внутрішні односторонні, то* $x + y = 180$. *Маємо систему*

$$\begin{cases} x - y = 30; \\ x + y = 180. \end{cases}$$

*Розв'язавши систему отримаємо*

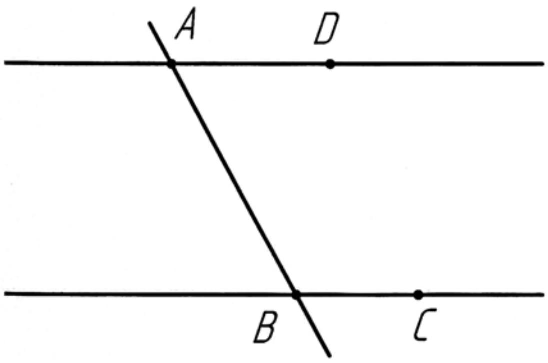



Рисунок 18

$$\begin{cases} x = 105; \\ y = 75. \end{cases}$$

*Відповідь:* $\angle ABC = 105^0$, $\angle BAD = 75^0$.

***Вправи:***

**1.** На відрізку $AB$ завдовжки 15 м взято точку $C$. Знайдіть довжини відрізків $AC$ і $BC$, якщо:

а) відрізок $AC$ на 3 м довший за відрізок $BC$;

б) відрізок $AC$ у два рази довший за відрізок $BC$;

в) точка $C$ - середина відрізка $AB$;

г) довжини відрізків $AC$ і $BC$ відносяться, як $2:3$.

**2.** Доведіть, що кут між бісектрисами суміжних кутів прямий.

**3.** Один з кутів, утворених перетином двох прямих, дорівнює $30^0$. Чому дорівнює решта кутів?

**4.** Прямі $AB$ та $CD$ перетинаються у точці $O$, сума величин кутів $\angle AOD$ і $\angle COB$ дорівнює $220^0$. Знайдіть величину кута $\angle AOC$.

**5.** З вершини розгорнутого кута $(aa_1)$ в одній півплощині проведено промені $b$ і $c$. Чому дорівнює кут $(bc)$, якщо:

а) $\angle(ab) = 50^0$, $\angle(ac) = 70^0$;

б) $\angle(a_1b) = 50^0$, $\angle(ac) = 70^0$.

**6.** Сума двох внутрішніх різносторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній дорівнює $150^0$. Чому дорівнюють ці кути?

**7.** Під яким кутом перетинаються бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих?

**8.** Відрізок $AB$ довжиною 10 см перетинає площину. Точка $A$ віддалена від площини на 5 см, точка $B$ віддалена від площини на 3 см. Знайдіть довжину проекції відрізка $AB$ на площину.

*Тема 29*

# Коло. Круг

## *Circle. Disk*

Колом називається фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї ж площини. Ця точка називається центром кола **(центр кола – *center of circle*)**.

**Радіус (*radius*)** $R$ – це відрізок, що сполучає центр кола з будь-якою його точкою.

**Діаметр (*diameter*)** $D$ – це відрізок, що сполучає дві точки кола і проходить через його центр.

**Хорда (*bisecant*)** – це відрізок, що сполучає дві точки кола.

Пряма, що проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, називається дотичною **(дотична – *tangent*)**. На рис. 1 дотичною до кола є пряма $AK$.

Пряма, яка має з колом дві спільні точки, називається січною **(січна – *secant line*)**. На рис. 1 $PM$ – січна.

Через точку, взяту поза колом, можна провести безліч січних і лише дві дотичних.

Відрізки дотичних, проведених до кола з однієї точки (від даної точки до точок дотику), рівні: $KL = KQ$.

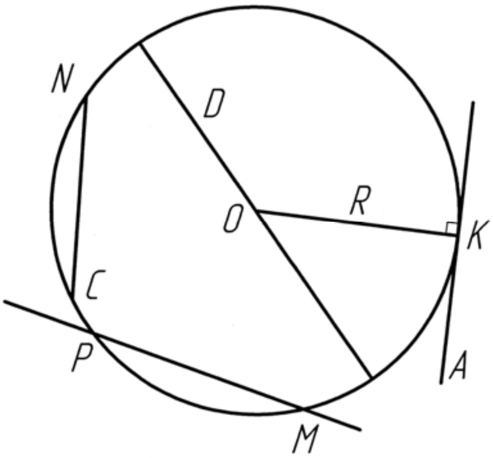



Рисунок 1

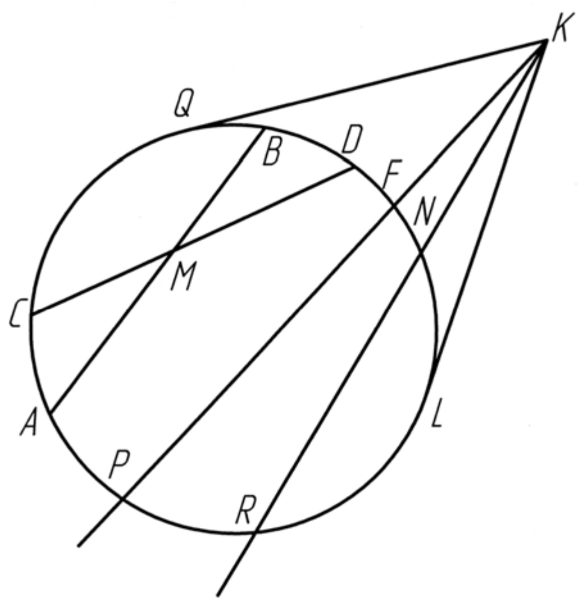



Рисунок 2

Якщо хорди $AB$ і $CD$ перетинаються в точці $M$ (рис. 2), то

$$AM \cdot MB = CD \cdot MD$$

Якщо з точки $K$ проведено дві січні, що перетинають коло в точках $P$, $F$ і $R$, $N$, то $FK \cdot PK = NK \cdot PK$.

Для січної $KP$ і дотичної $KL$ правильна рівність

$$FK \cdot PK = KL^2.$$

Коло називається описаним навколо многокутника **(описане коло – *circumcircle*)**, якщо воно проходить через усі його вершини.

Центр кола, описаного навколо многокутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів, проведених до його сторін.

Коло називається вписаним у многокутник **(вписане коло – *inscribed circle*)**, якщо воно дотикається усіх його сторін.

Центр кола, вписаного у многокутник, є точка перетину бісектрис його кутів.

Центральним кутом **(центральний кут – *central angle*)** у колі називається кут, утворений двома радіусами. $\angle AOB$ – центральний, що впирається в дугу $\overset{\frown}{AB}$ (рис. 3).

Центральний кут дорівнює градусній мірі дуги, в яку він впирається:

$$\angle AOB = \overset{\frown}{AB}.$$

Вписаним у коло кутом називається кут, утворений двома хордами, що виходять з однієї точки. $\angle MPK$ – вписаний , що впирається в дугу $\overset{\frown}{MK}$.

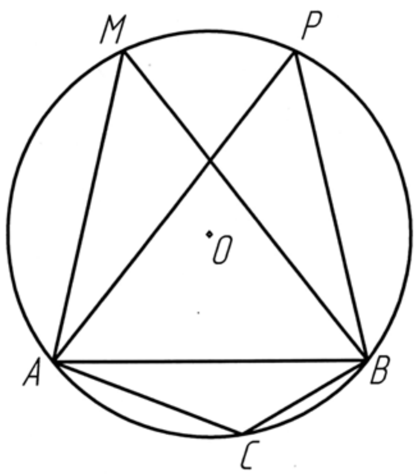



Рисунок 3

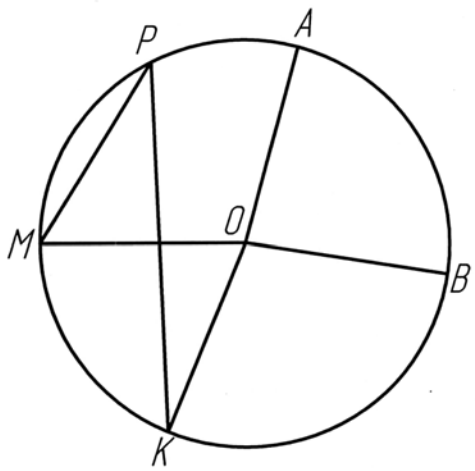



Рисунок 4

**Вписаний кут (*inscribed angle*)** дорівнює половині градусної міри дуги, в яку він впирається (рис. 4)

$$\angle MPK = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MK} = \frac{1}{2}\angle MOK .$$

Вписані кути, що впираються в одну і ту ж дугу, рівні, якщо їхні вершини лежать з однієї сторони відносно хорди, що сполучає кінці дуги, а в сумі становлять $180^0$, якщо їхні вершини лежать по різні сторони відносно цієї хорди:

$$\angle AMB = \angle APB, \angle AMB + \angle ACB = 180^0.$$

Вписані кути, що впираються в діаметр кола, прямі.

Описаним кутом **(описанипй кут – *circumscribed angle*)** називається кут, утворений двома дотичними, що виходять з однієї точки. $\angle MEK$ – описаний кут (рис. 5).

Описаний кут вимірюється піврізницею градусних мір більшої й меншої дуг, на які точки дотику розбивають коло

$$\angle MEK = \frac{\overset{\frown}{MBK} + \overset{\frown}{MAK}}{2}.$$

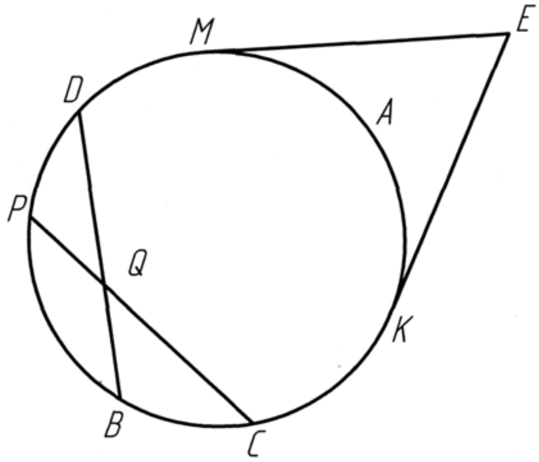


Рисунок 5

Кут між двома хордами, що перетинаються, дорівнює півсумі градусних мір дуг, одна з яких знаходиться між сторонами цього кута, а друга – між продовженням цих сторін.

$$\angle BQC = \angle DQP = \frac{\overset{\frown}{PD} + \overset{\frown}{BC}}{2}.$$

З рис. 6:

$$\angle ACD = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BP}}{2},$$

$$\angle A_1CD = \frac{\overset{\frown}{A_1D} - \overset{\frown}{A_1P}}{2},$$

$$\angle MNK = \frac{\overset{\frown}{MQN}}{2}.$$

Кругом називається частина площини, обмежена колом.

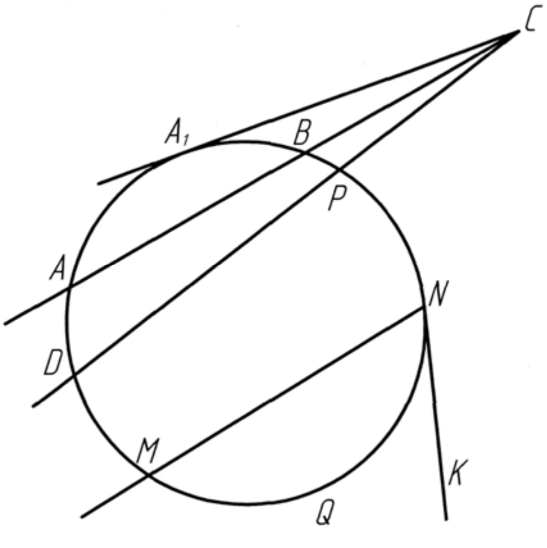



Рисунок 6

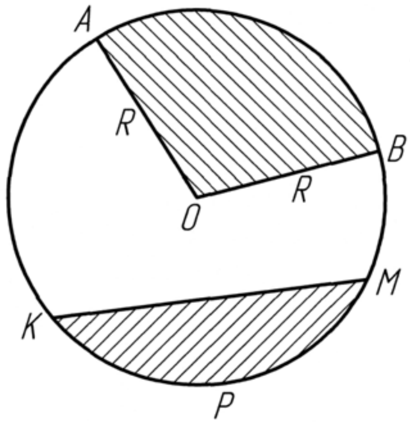



Рисунок 7

Сектором **(сектор – *sector*)** називається частина круга, обмежена дугою кола і двома радіусами, проведеними до кінців цієї дуги. $AOB$ – сектор.

Сегментом **(сегмент – *segment*)** називається частина круга, обмежена дугою і хордою, що її стягує. На рис. 7 $KMP$ – сегмент.

Основні формули

Рівняння кола з центром $O(a;b)$ ($r$ - радіус кола)

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=r^2.$$

**Довжина (*length*)** кола:

$$C=2\pi r.$$

Довжина дуги ($n^0$ – величина дуги у градусах; $\alpha$ – величина дуги в радіанах):

$$l=\frac{\pi r n^0}{180^0};\ \ l=r\alpha\,.$$

**Площа (*area*)** круга

$$S=\pi r^2.$$

Сектор ($l$ – довжина дуги, яка обмежує сектор; $n^0$ – градусна міра центрального кута; $\alpha$ – радіанна міра центрального кута):

$$l=\frac{\pi r n^0}{180^0};\ S=\frac{\pi r^2 n^0}{360^0}=\frac{1}{2}r^2\alpha.$$

Площа сегмента визначається різницею площ сектора і трикутника, утвореного його радіусами і хордою сегмента (рис. 8).

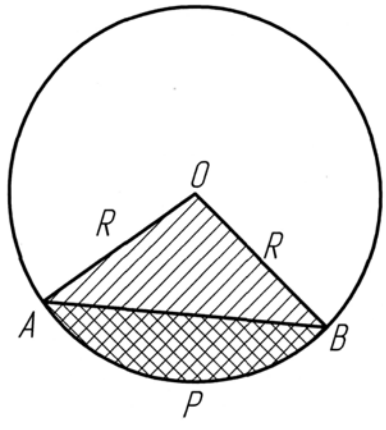


Рисунок 8

*Приклад 1:*

*Знайдіть площу кругового кільця, що обмежена двома колами із спільним центром і радіусами* 4 *ñì* *і* 6 *ñì* .

*Розв'язання:*

*Згідно із рис. 9*

$$S_{\hat{e}^{3}\ddot{e}} = S_{\c{c}\hat{\imath}\,\hat{a}\acute{\imath}} - S_{\hat{a}\acute{\imath}},$$

*де* $S_{\c{c}\hat{\imath}\,\hat{a}\acute{\imath}}$ і $S_{\hat{a}\acute{\imath}}$ *– площі зовнішнього і внутрішнього кругів відповідно. Враховуючи, що площа круга обчислюється за формулою* $S = \pi r^2$, *отримаємо*

$$S_{\hat{e}^{3}\ddot{e}} = \pi \cdot 6^2 - \pi \cdot 4^2 = 20\pi \approx 62{,}83\ \tilde{n}\grave{\imath}^{\,2}.$$

*Відповідь:* $S_{\hat{e}^{3}\ddot{e}} \approx 62{,}83\ \tilde{n}\grave{\imath}^{\,2}$.

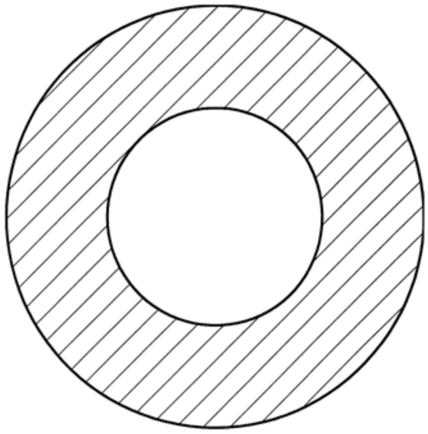


Рисунок 9

***Вправи:***

**1.** Знайдіть довжину радіуса кола, довжина якого дорівнює 78,5.

**2.** Серед двох концентричних кіл одна має має довжину 167 см, а друга – 117 см. Знайдіть ширину кільця.

**3.** Центральний кут сектора величиною $36^0$. Знайдіть довжину його дуги, якщо $R_{\tilde{n}\mathring{a}\hat{e}\grave{o}} = 3$ см.

**4.** Знайдіть довжину радіуса круга, площа якого дорівнює 706,5 см$^2$.

**5.** Площа круга дорівнює $Q$. Знайдіть площу сектора із дугою $30^0$.

**6.** Знайдіть площу сегмента, якщо його радіус довжиною $R$ і дуга містить $90^0$.

*Тема 30*

# **Трикутник**

## ***Triangle***

Трикутником називається фігура утворена замкнутою ламаною, яка складається з трьох ланок.

Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює $180^0$.

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх, не суміжних з ним. Сума зовнішніх кутів трикутника дорівнює $360^0$.

У кожному трикутнику навпроти більшого кута лежить більша сторона, і навпаки.

Будь-яка сторона трикутника менша від суми, але більша від різниці двох інших сторін.

Висотою **(висота – *height*)** трикутника називається перпендикуляр, опущений з будь-якої вершини трикутника на протилежну сторону або на її продовження (рис. 1).

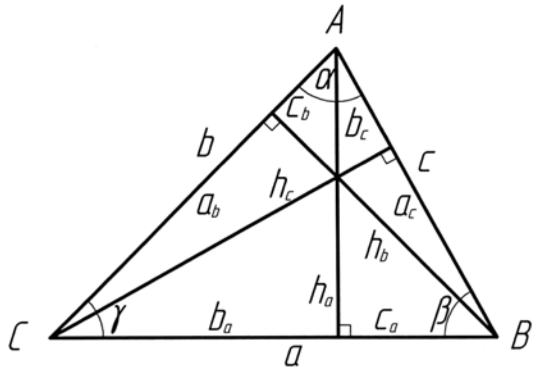



Рисунок 1

Висоти трикутника перетинаються в одній точці (ортоцентр).

Медіаною **(медіана - *median*)** трикутника називається відрізок, що сполучає будь-яку вершину трикутника зі серединою протилежної його сторони (рис. 2).

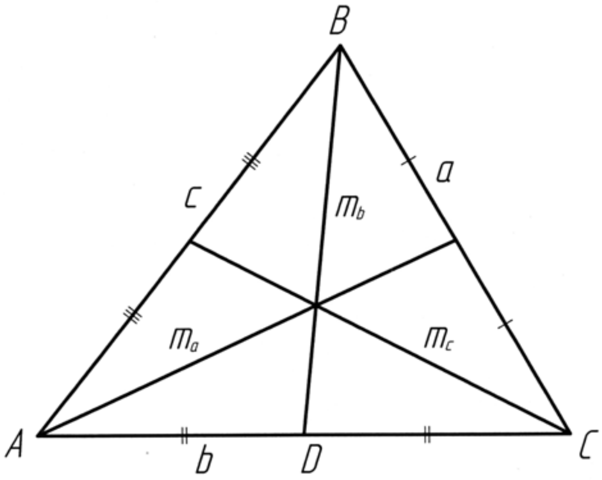



Рисунок 2

Медіани трикутника перетинаються в одній точці. Ця точка є центром ваги трикутника і ділить кожну медіану у відношенні $2:1$ (рахуючи від вершини).

Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси будь-якого кута цього трикутника від вершини до протилежної сторони (рис. 3).

Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці. Ця точка є центром вписаного кола. У будь-якому трикутнику бісектриса лежить між відповідними медіаною і висотою. Центром описаного навколо трикутника кола є точка перетину перпендикулярів до сторін трикутника, проведених через їхні середини.

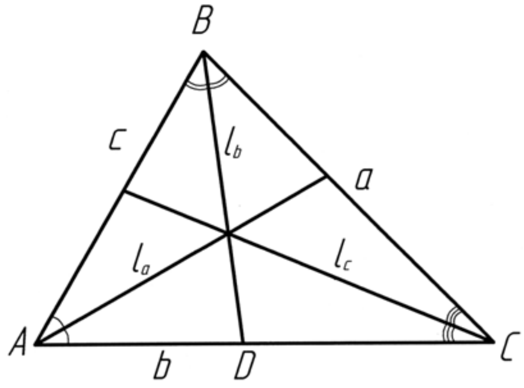


Рисунок 3

**Середня лінія (*medial line*)** трикутника – відрізок, що з'єднує середини двох його сторін. Вона паралельна до третьої сторони і дорівнює її половині.

## Основні формули

### Довільний трикутник

($p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – напівпериметр ; $R$ – радіус описаного кола; $r$ – радіус вписаного кола; $S$ – площа)

Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha .$$

Теорема тангенсів

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Відношення між сторонами

$$a:b:c = \frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}.$$

Висота трикутника

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Медіани трикутника

$$m_a = \frac{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}}{2};$$

$$m_b = \frac{\sqrt{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}}{2};$$

$$m_c = \frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}}{2};$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Медіана ділить трикутник на два рівновеликих трикутники (рис. 2):

$$S_{\vartriangle ABD} = S_{\vartriangle BDC}.$$

Бісектриси трикутника

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)};$$

$$l_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)};$$

$$l_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)};$$

$$l_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc\left[\left(b+c\right)^2-a^2\right]};$$

$$l_b = \frac{1}{a+c}\sqrt{ac\left[\left(a+c\right)^2-b^2\right]};$$

$$l_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab\left[\left(a+b\right)^2-c^2\right]}.$$

Бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону трикутника на частини, пропорційні до прилеглих сторін (рис. 3).

$$h_a \le l_a \le m_a, h_b \le l_b \le m_b, h_c \le l_c \le m_c.$$

Площа трикутника

$$S=\frac{1}{2}ah_a;$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha;$$

$$S=pr;$$

$$S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R};$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ – формула Герона;

$$S=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)}};$$

$$S=\frac{p}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}};$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{2h_ah_bh_cR}.$$

Площі подібних трикутників відносяться як квадрати їх відповідних лінійних елементів: сторін, висот, медіан, бісектрис тощо. Площі подібних многокутників відносяться як квадрати їх відповідних сторін або діагоналей.

**Прямокутний трикутник (*right triangle*)** (рис. 4)

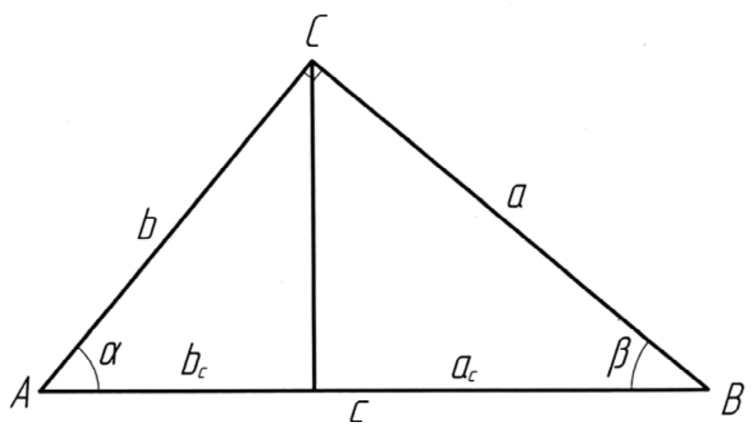



Рисунок 4

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ – теорема Піфагора;}$$

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta;$$

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha = \sin\beta;$$

$$\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,\beta;$$

$$R = \frac{c}{2};$$

$$r = \frac{a+b-c}{2};$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a_c}{a}, \frac{b}{c} = \frac{b_c}{a}.$$

**Рівнобедрений трикутник (*isosceles triangle*)** (рис. 5)

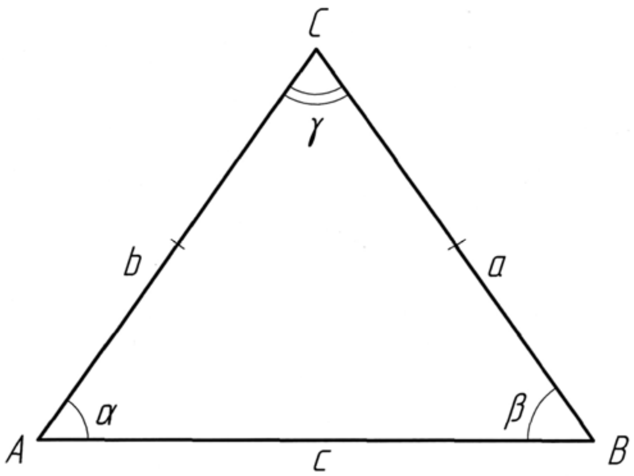



Рисунок 5.

$a = b$, $a$ і $b$ – бокові сторони, $c$ – основа;

$\alpha = \beta$ (кути при основі);

$$h_a = h_b = \frac{2S}{a};$$

$$h_c = m_c = l_c = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2};$$

$$S = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2};$$

$$R = \frac{a^2}{2h_c};$$

$$r = \frac{ch_c}{2a + c}.$$

**Рівнобедрений прямокутний трикутник (*45° right triangle*)** (рис. 6)

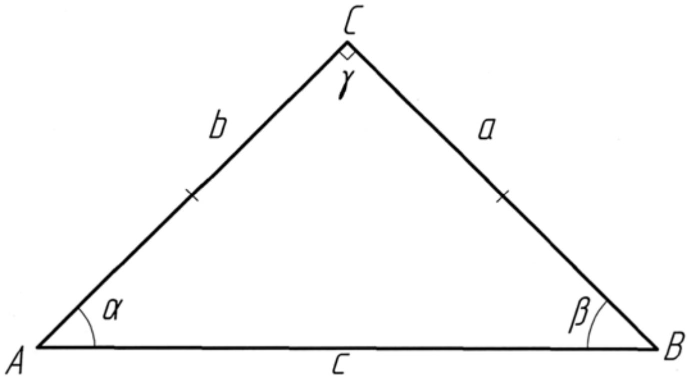



Рисунок 6

$$a = b = \frac{c}{\sqrt{2}};$$

$$\alpha = \beta = 45^0, \gamma = 90^0;$$

$$S = \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{4};$$

$$m_a = m_b = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

$$m_c = h_c = l_c = \frac{c}{2}.$$

**Рівносторонній трикутник (*equilateral triangle*)** (рис. 7)

$$a = b = c;$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^0;$$

$$h_a = h_b = h_c = m_a = m_b = m_c = l_a = l_b = l_c = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{3ar}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4};$$

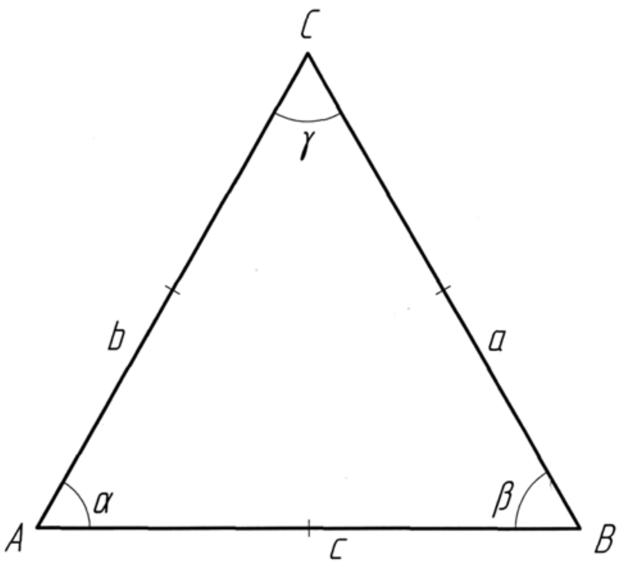


Рисунок 7

$$R = 2r;$$

$$r = \frac{\sqrt{3}a}{6};$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

*Приклад 1:*

*Знайти площу трикутника $ABC$, якщо $AB = 3$ ñì, $BC = 7$ ñì і довжина медіани $BM$ дорівнює $4$ ñì.*

*Розв'язання:*

*Добудуємо трикутник $ABC$ до паралелограма $ABCD$ (рис. 8). Діагоналі паралелограма при перетині діляться навпіл, тому точка $M$ лежить на діагоналі $BD$* і $BD = 2BM = 8$ ñì.

*Площі трикутників $ABC$ і $BCD$ складають половину площі паралелограма $ABCD$, отже, площі цих трикутників рівні:*

$$S_{\vartriangle ABC} = S_{\vartriangle BCD}.$$

*У трикутнику $BCD$ відомі довжини трьох його сторін: $BC = 7$ ñì, $CD = 3$ ñì,*

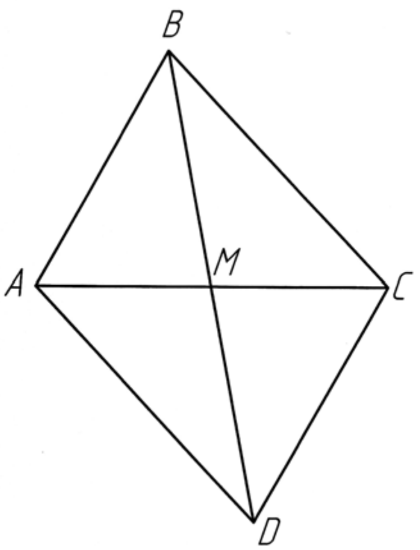


Рисунок 8

*$BD = 8$ ñì . Площу трикутника $BCD$ знайдемо за формулою Герона:*

$$S_{\vartriangle BCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9(9-7)(9-3)(9-8)} = 6\sqrt{3}\ \text{ñì}^{\,2}.$$

*Тоді* $S_{\vartriangle ABC} = 6\sqrt{3}\ \text{ñì}^{\,2}$.

*Відповідь:* $S_{\vartriangle ABC} = 6\sqrt{3}\ \text{ñì}^{\,2}$.

***Вправи:***

**1.** На боковій стороні рівнобедреного трикутника побудовано рівносторонній трикутник; довжина периметра рівностороннього трикутника дорівнює 45 м, а периметр рівнобедреного трикутника 40 м. Визначить довжину основи рівнобедреного трикутника.

**2.** Медіана, що проведена до однієї із бокових сторін рівнобедреного трикутника, ділить його периметр на дві частини довжиною 15 і 6 см. Знайдіть довжини сторін трикутника.

**3.** У рівнобедреному трикутнику одна сторона дорівнює 25 м, а інша 10 м. Яка з них є основою?

**4.** Визначить величини кутів трикутника, якщо відноситься як $1:2:3$.

**5.** У рівнобедреному трикутнику величина кута при основі складає 4/5 величини свого суміжного кута. Знайдіть величини кутів трикутника.

**6.** З вершини прямого кута трикутника $ABC$ проведено висоту $BD$. Знайдіть кут $CBD$, знаючи, що $\angle A = 20^0$.

**7.** Довжини сторін трикутника дорівнюють 8, 10 та 12 см. Знайдіть довжини сторін трикутника, вершинами якого будуть середини сторін даного трикутника.

**8.** Величина кута при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює $60^0$. Довжина бокової сторони цього трикутника 10 см. Знайдіть довжину середньої лінії.

***Тема 31***

## **Многокутники**

### ***Polygon***

Многокутник називається опуклим **(опуклий многокутник – *convex polygon*)**, якщо він розміщений по одну сторону від будь-якої сторони, необмежено продовженої. Сума внутрішніх кутів будь-якого опуклого многокутника ($n$-кутника) дорівнює $n(n-2)$ радіанів, тобто $180^0(n-2)$. Сума зовнішніх кутів опуклого многокутника дорівнює $2\pi$ радіанів, тобто $360^0$.

Правильні многокутники

$\angle A_n = \dfrac{180^0(n-2)}{n}$ – внутрішній кут правильного $n$-кутника.

$$\angle A_1OA_2 = \frac{360^0}{n} \quad \text{(рис. 1)}.$$

Сторона правильного $n$-кутника:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n};$$

$$a_n = 2r\,\mathrm{ctg}\frac{180^0}{n}.$$

Площа

$$S = \frac{a_n \cdot r}{2}n = \frac{R^2\sin\frac{180^0}{n}}{2}n.$$

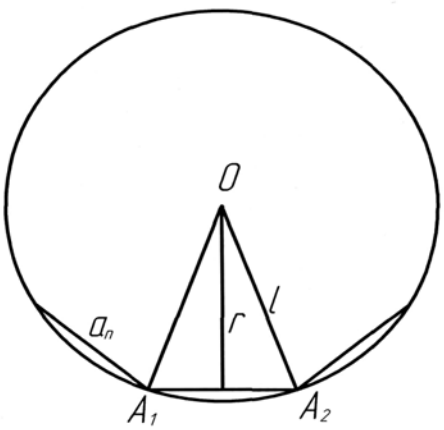



Рисунок 1

## Чотирикутники

### Властивості чотирикутників

Вписаного Описаного

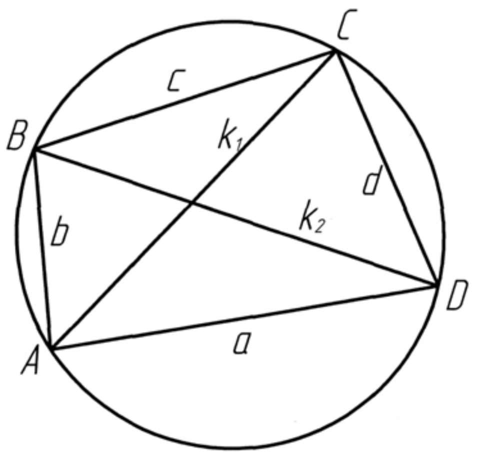



Рисунок 2

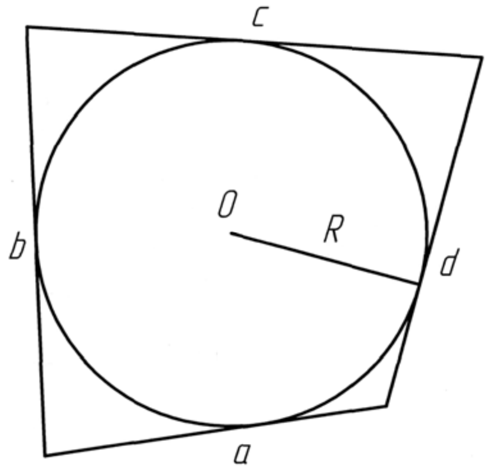



Рисунок 3

$$\angle A + \angle C = 180^0;$$

$$ac + bd = k_1 k_2$$ – теорема Плометея.

$$a + c = b + d;$$

$$S = pr\,.$$

**Паралелограм (*parallelogram*)**

Паралелограм – це чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні (рис. 4).

Ознака паралелограма. Якщо діагоналі **(діагональ – *diagonal*)** чотирикутника перетинаються і в точці перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник є паралелограм.

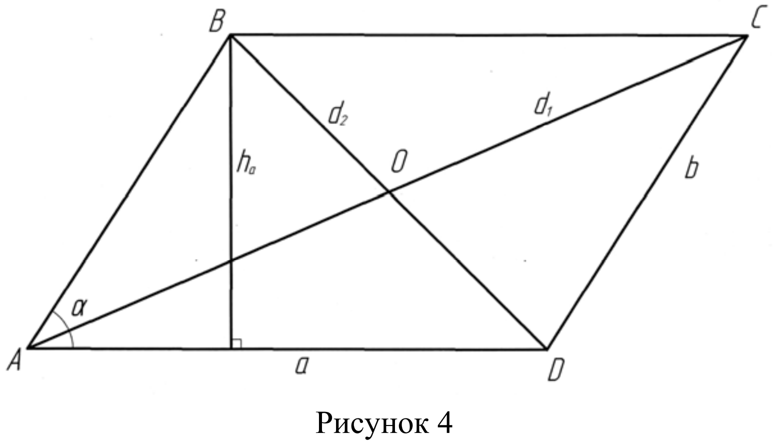



Рисунок 4

Властивості паралелограма

1. Діагоналі в точці перетину діляться навпіл: $AO = OC, \ BO = OD.$

2. Протилежні сторони рівні: $AD = BC, \ AB = CD.$

3. Протилежні кути рівні: $\angle A = \angle C, \ \angle B = \angle D.$

4. Сума сусідніх кутів дорівнює 180°: $\angle A + \angle D = \angle A + \angle B = 180^0.$

5. Сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів, сторін паралелограма:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right).$$

6. Площа $S = ah_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\left(\widehat{d_1 d_2}\right).$

**Прямокутник (*rectangle*)**

Прямокутник – це паралелограм, у якого всі кути прямі (рис. 5).

Властивості прямокутника

1. Протилежні сторони рівні: $AD = BC, \ AB = CD.$

2. Діагоналі рівні: $AC = BD$ .

3. Квадрат діагоналі дорівнює сумі квадратів двох різних його сторін: $d^2 = a^2 + b^2.$

4. Точка перетину діагоналей – центр описаного кола, радіус якого $R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$

5. Площа $S = a \cdot b = \frac{1}{2}d^2 \sin\alpha.$

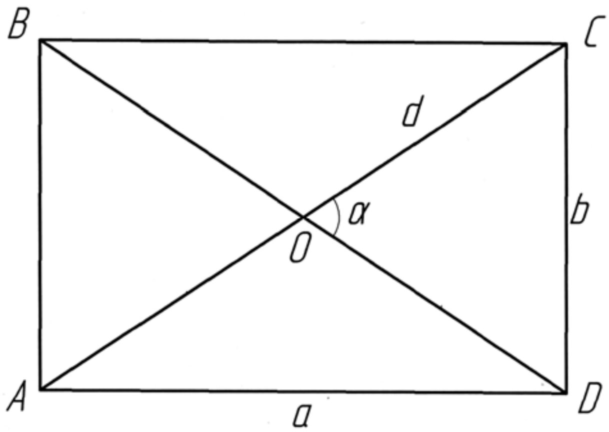



Рисунок 5

**Ромб (*diamond*)**

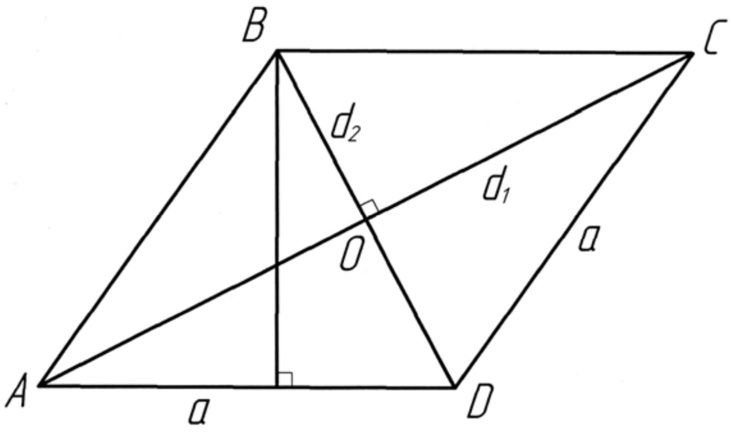



Рисунок 6

Ромб – це паралелограм, у якого всі сторони рівні (рис. 6).

Властивості ромба

1. Протилежні кути рівні: $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D.$

2. Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.

3. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні: $d_1 \perp d_2$.

4. $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2,\ d_1 = 2a\sin\frac{\alpha}{2},\ d_2 = 2a\cos\frac{\alpha}{2}.$

5. Центр кола, вписаного у ромб, є точкою перетину діагоналей. Радіус кола дорівнює половині висоти ромба: $r = \frac{h}{2}.$

Площа $S = ah = \frac{1}{2}d_1 d_2 = a^2 \sin\alpha.$

**Квадрат (*square*)**

Квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні (рис. 7).

Властивості квадрата

1. Всі кути прямі.

2. Діагоналі рівні:

$AC = BD = d = a\sqrt{2}..$

3. Діагоналі є бісектрисами кутів.

4. Діагоналі взаємно перпендикулярні: $AC \perp BD$.

5. Центр вписаного кола і центр описаного кола є точкою перетину діагоналей.

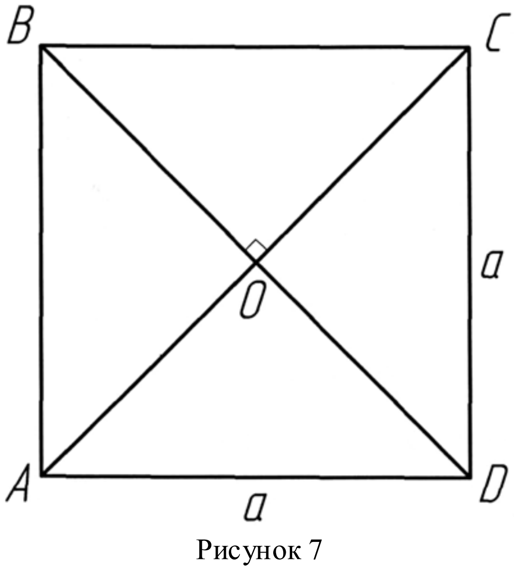


Рисунок 7

6. Радіус описаного кола

$$R = \frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

7. Радіус вписаного кола дорівнює

$$r = \frac{a}{2}.$$

8. Площа

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

## Трапеція (*trapezoid*)

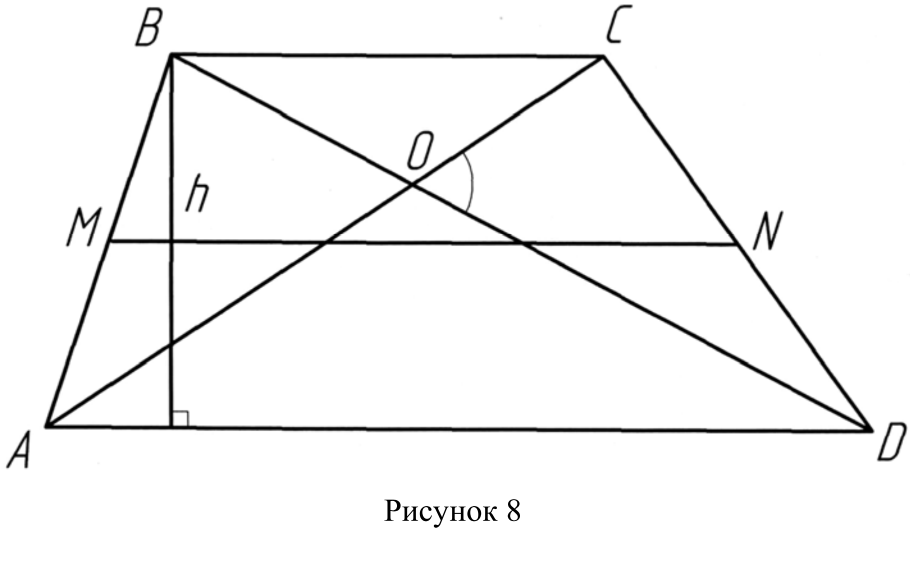


Рисунок 8

Трапеція – це чотирикутник, у якого тільки дві протилежні сторони паралельні. $AD$ і $BC$ – основи трапеції, $AB$ і $CD$ – бічні сторони (рис. 8).

Відрізок $MN$, що сполучає середини бічних сторін трапеції, називається середньою лінією трапеції.

$$MN = \frac{AD + BC}{2};$$

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^0;$$

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC.$$

Площа

$$S = \frac{AD + BC}{2}h = MN \cdot h = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\alpha.$$

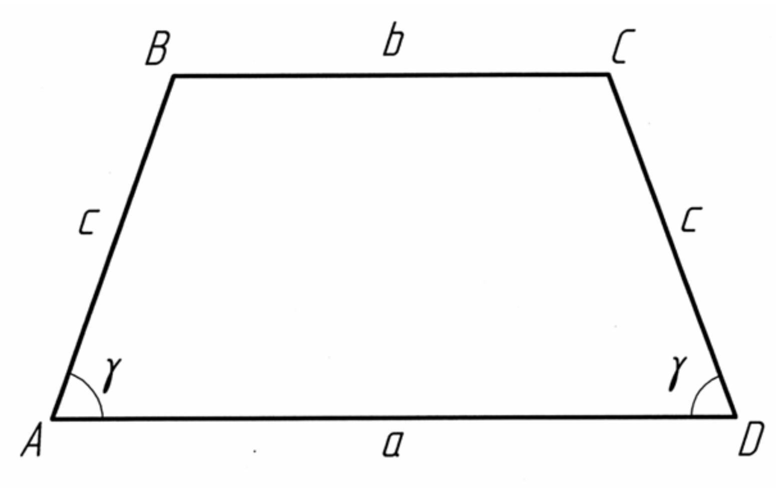



Рисунок 9

Якщо бічні сторони трапеції рівні, то трапеція називається рівнобічною. $AB = CD$; $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$ (рис. 9).

Якщо у рівнобічній трапеції діагоналі взаємно перпендикулярні, то висота дорівнює середній лінії. Тоді $S = h^2$.

Коло можна описати лише навколо рівнобічної трапеції.

Висота рівнобічної трапеції, у яку можна вписати коло, є середнім геометричним між її основами: $h^2 = AD \cdot BC$.

Якщо у рівнобічну трапецію вписано коло, то її бічна сторона дорівнює середній лінії.

*Приклад 1:*

*Знайдіть відношення площі круга , описаного навколо квадрата, до площі круга вписаного у цей квадрат.*

*Розв'язання:*

*Нехай* $a$ *– сторона квадрата,* $r$ *– радіус вписаного кола,* $R$ *– радіус описаного кола.*

*Тоді*

$$\frac{S_{\text{оп}}}{S_{\text{вп}}}=\frac{\pi R^2}{\pi r^2}=\frac{R^2}{r^2}.$$

*Відомо, що*

$$R=\frac{d}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad r=\frac{a}{2}.$$

*Тоді*

$$\frac{S_{\text{оп}}}{S_{\text{вп}}}=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{4}{a^2}=2.$$

*Відповідь:* $\frac{S_{\text{оп}}}{S_{\text{вп}}}=2$.

***Вправи:***

**1.** Довжини двох сторін паралелограма відносяться як $3:4$, а довжина його периметра дорівнює 2,8 см. Визначіть довжини його сторін.

**2.** У паралелограмі $ABCD$ проведена бісектриса кута $A$, яка перетинає сторону $BC$ у точці $E$. Визначить довжини відрізків $BE$ та $EC$, якщо $AB=9$ та $AD=15$ см.

**3.** Периметр прямокутника дорівнює 24 см, а одна сторона довше іншої на 1,4 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей до сторін.

**4.** Довжина середньої лінії трапеції дорівнює 8 дм і ділиться діагоналлю на два відрізки, різниця довжин яких дорівнює 2 дм. Знайдіть довжини основ трапеції.

**5.** У рівнобедреній трапеції довжина більшої основи дорівнює 18 см, довжина висоти 5 см, величина тупого кута дорівнює $135^0$. Знайдіть середню лінії трапеції.

**6.** Периметр ромба 8 см, довжина висоти 1 см. Знайдіть величини кутів ромба.

**7.** Одна з діагоналей ромба дорівнює його стороні. Обчисліть величини кутів ромба.

**8.** Дано квадрат, довжина сторони якого дорівнює 1 м. Діагональ його служить стороною другого квадрата. Знайдіть довжину діагоналі другого квадрата.

**9.** Дано квадрат із стороною, довжина якого 6 см. Середини сторін квадрата послідовно з'єднані відрізками. Доведіть, що отриманий чотирикутник – квадрат та знайдіть його периметр.

**10.** Обчисліть довжину найменшої діагоналі правильного $n$- кутника, якщо сторони якого дорівнюють $a$:

а) $a=1$ см, $n=5$;

б) $a=4$ см, $n=6$.

**11.** Довжина діагоналі прямокутника дорівнює 305 см, а величина площі 37128 см$^2$. Знайдіть периметр прямокутника.

**12.** Знайдіть площу ромба, довжини діагоналей якого дорівнюють 72 і 40 см.

**13.** Знайдіть площу паралелограма, якщо довжина однієї з його сторін дорівнює 51 см, а довжини діагоналей 40 та 74 см.

**14.** Знайдіть площу рівнобедреної трапеції, у якої довжини основ дорівнюють 10 та 26 см, а діагоналі перпендикулярні боковим сторонам.

*Тема 32*

# Многогранні кути. Многогранники

## *Polyhedral angle. Polyhedral solid*

Двогранним кутом **(двогранний кут – *flat-roof angle*)** називається фігура, утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує.

Півплощини називаються гранями **(грань – *bound*)**, а пряма, що їх обмежує, – ребром **(ребро – *edge*)** двогранного кута.

Площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає його грані по двох півпрямих. Кут, утворений цими півпрямими, називається лінійним кутом двогранного кута.

Величина двогранного кута вимірюється величиною його лінійного кута ($\angle CKM$ – лінійний кут двогранного кута з ребром $AB$, рис. 1).

Тригранним кутом $(abc)$ **(тригранний кут – *trihedral angle*)** називається фігура, яка складається з трьох плоских кутів $(ab)$, $(bc)$, і $(ac)$ (рис. 2). Ці кути називаються гранями тригранного кута, а їхні сторони – ребрами. Спільна вершина плоских кутів називається вершиною тригранного кута.

Двогранні кути, утворені гранями тригранного кута, називаються двогранними кутами тригранного кута.

Аналогічно дається означення многогранного кута.

Многогранник – це тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників, які називають його гранями.

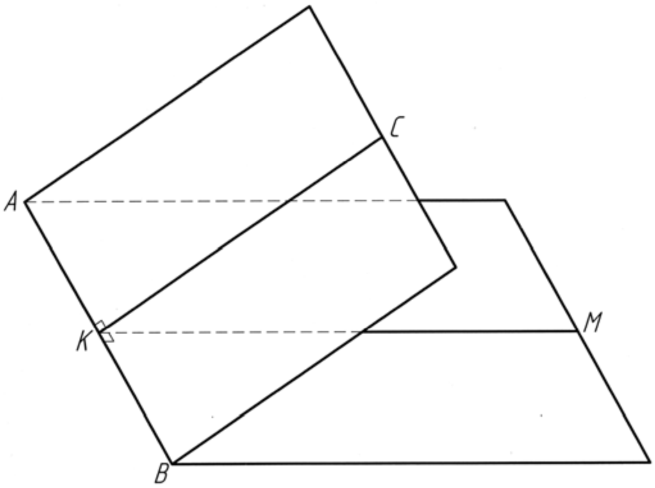



Рисунок 1

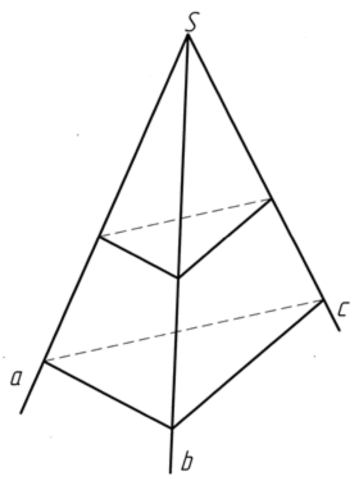



Рисунок 2

Многогранник називається опуклим, якщо він лежить по один бік від площини кожного з плоских многокутників на його поверхні.

Сторони граней називаються ребрами многогранника, а вершини – вершинами многогранника.

## Призма (*prism*)

Многогранник, дві грані якого $n$-кутники (основи) (**основа – *base***), що лежать у паралельних площинах, а решта $n$ граней – паралелограми (бічні грані) **(бічна грань – *lateral face*)**, називається $n$-кутною призмою.

Спільні сторони бічних граней призми називаються бічними ребрами.

Відрізок, перпендикулярний до площин основ призми, кінці якого належать цим площинам **(площина – *plane*)**, називається висотою призми ($OO_1 = H$, рис. 3).

Діагоналлю призми називається відрізок, який сполучає дві вершини призми, що не належать одній грані.

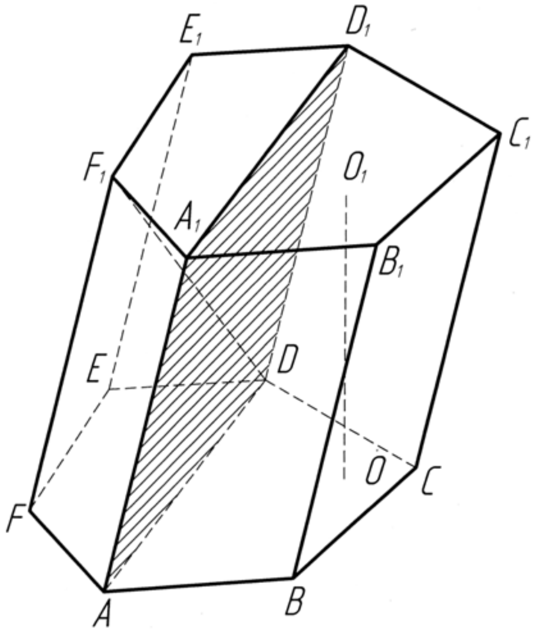


Рисунок 3

Діагональною площиною призми називається площина, що проходить через діагональ основи та бічне ребро, а фігура, одержана при перетині цієї площини з призмою, називається діагональним перерізом призми ($AA_1D_1D$ – діагональний **переріз (*cut set*)**).

Якщо бічні ребра призми перпендикулярні до її основ, то призма називається прямою.

Якщо бічні ребра призми не перпендикулярні до її основ, то призма називається похилою.

**Пряма призма (*right-angle prism*)** називається правильною, якщо її основи є правильними многокутниками.

## Паралелепіпед (*parallelepiped*)

Паралелепіпедом називається призма, основами якої є паралелограми (рис. 4).

Якщо бічні ребра паралелепіпеда перпендикулярні до площин основ, його називають прямим, якщо ж не перпендикулярні, – похилим.

Прямий паралелепіпед, основами якого є прямокутники, називається прямокутним.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, називаються його вимірами.

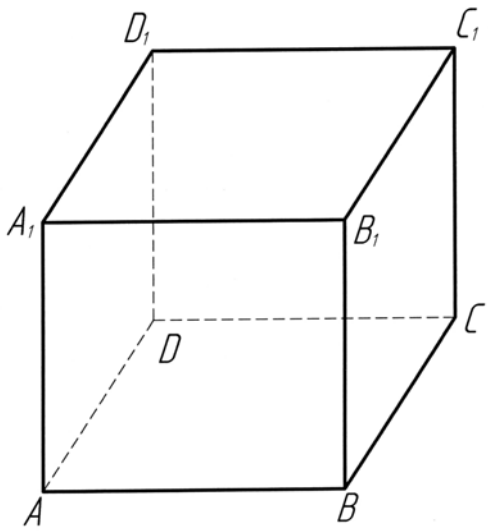


Рисунок 4

Властивості паралелепіпеда

1. Протилежні грані паралелепіпеда паралельні та рівні.

2. Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться навпіл.

3. Середина діагоналі паралелепіпеда є його центром симетрії **(симетрія – *symmetry*)**.

Властивості прямокутного паралелепіпеда

1. Квадрат довжини діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.

2. Усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

3. Прямокутний паралелепіпед має три площини симетрії.

**Піраміда (*pyramid*)**

Многогранник, одна з граней якого – довільний многокутник (основа), а решта граней – трикутники (бічні грані), що мають спільну вершину, називається пірамідою.

Висотою піраміди називається перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи ($SO = H$, рис. 5).

Піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а вершина піраміди проектується в центр основи.

Усі бічні грані правильної піраміди рівні рівнобедрені трикутники.

Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з вершини піраміди, називається апофемою цієї піраміди.

Властивості піраміди

1. Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, то вони нахилені до площини основи під однаковими кутами і вершина цієї піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи піраміди.

2. Якщо всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під однаковими кутами, то вони рівні.

3. Якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під однаковим кутом а, то вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу піраміди, а площа бічної поверхні

$$Q = S_{\text{î ñí}} \cdot \cos\alpha.$$

4. Якщо бічне ребро піраміди утворює рівні кути зі суміжними сторонами основи, то основа висоти піраміди знаходиться на бісектрисі кута, утвореного цими сторонами основи.

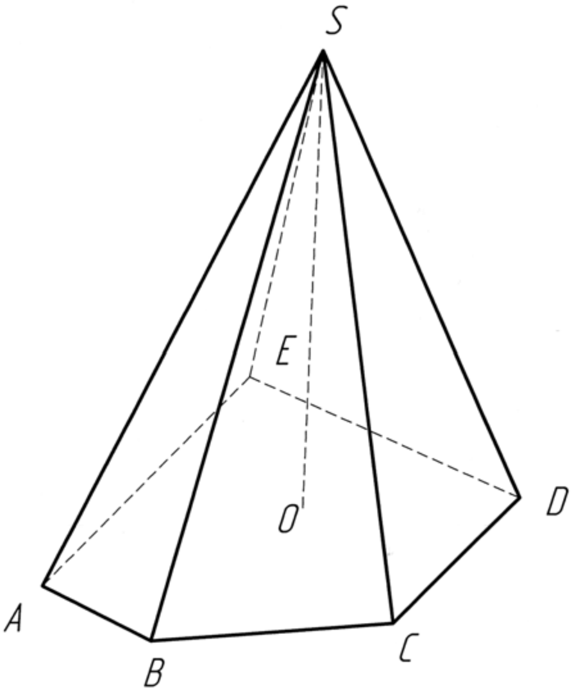


Рисунок 5

5. Якщо піраміду перетнути площиною, паралельною до основи, то:

а) бічні ребра та висота піраміди діляться цією площиною на пропорційні відрізки;

б) у перерізі утворюється многокутник, подібний до основи піраміди;

б) площі перерізу та основи відносяться як квадрати їхніх віддалей від вершини піраміди.

Правильні многогранники

Многогранник називається правильним, якщо всі його грані – рівні правильні многокутники і всі його многогранні кути мають однакове число граней.

Існує п'ять типів правильних опуклих многогранників: **тетраедр** (***tetrahedron***), **гексаедр** (***hexahedron***), **октаедр** (***octahedron***), **додекаедр** (***dodecahedron***), **ікосаедр** (***icosahedron***).

Тетраедр (правильний чотиригранник) – трикутна піраміда, всі ребра якої рівні.

Гексаедр (правильний шестигранник, **куб (*cube*)**) – це многогранник, у якого всі грані квадрати.

Октаедр (правильний восьмигранник) – многогранник, у якого всі грані правильні трикутники. У кожній його вершині сходиться по чотири ребра.

Додекаедр (правильний дванадцятигранник) – многогранник, у якого всі грані правильні п'ятикутники. У кожній вершині його сходиться по три ребра.

Ікосаедр (правильний двадцятигранник) – многогранник, у якого всі грані правильні трикутники. У кожній вершині його сходиться по п'ять ребер.

Формули для правильних многогранників

$a$ – ребро многогранника, $N$ – кількість вершин, $n$ – кількість ребер, $S$ – площа поверхні, $V$ – **об'єм (*volume*)**, $R$ – радіус описаної кулі, $r$ – радіус вписаної кулі

Тетраедр

$$N = 4;\ n = 6;\ S = a^2\sqrt{3};$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12};\ R = \frac{a\sqrt{6}}{4};\ r = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

Гексаедр

$$N = 8;\ n = 12;\ S = 6a^2;$$

$$V = a^3;\ R = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ r = \frac{a}{2}.$$

Октаедр

$$N = 6;\ n = 12;\ S = 2\sqrt{3}a^2;$$

$$V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3};\ R = \frac{a}{\sqrt{2}};\ r = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Додекаедр

$$N = 20;\ n = 30;\ S = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}};$$

$$V = \frac{a^3}{4}\left(15 + 7\sqrt{5}\right);\ R = \frac{a\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{5}\right)}{4};$$

$$r = \frac{a\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{20}.$$

Ікосаедр $N=12;\ n=30;\ S=5\sqrt{3}a^2;$

$$V=\frac{5a^3}{12}\left(3+\sqrt{5}\right);\ R=\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

$$r=\frac{a\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}.$$

## Основні формули для визначення поверхонь і об'ємів многогранників

1. Довільна призма ($l$ – бічне ребро; $P$ – периметр основи; $S$ – площа основи; $H$ – висота; $P_{\text{пер}}$ – периметр перпендикулярного перерізу; $S_{\text{біч}}$ – площа бічної поверхні; $S_{\text{пов}}$ – площа повної поверхні; $V$ – об'єм):

$$S_{\text{біч}}=P_{\text{пер}}l;$$

$$S_{\text{пов}}=S_{\text{б}}+2S;$$

$$V=SH.$$

2. Пряма призма:

$$S_{\text{біч}}=Pl;$$

$$S_{\text{пов}}=S_{\text{б}}+2S;$$

$$V=SH.$$

3. Прямокутний паралелепіпед ($a$, $b$, $c$ – його виміри; $d$ – діагональ):

$$S_{\text{біч}}=2c\left(a+b\right);$$

$$S_{\text{пов}}=2\left(ab+bc+ca\right);$$

$$V=abc;$$

$$d^2=a^2+b^2+c^2.$$

4. Куб ($a$ – ребро):

$$S_{\text{біч}}=4a^2;$$

$$S_{\text{пов}}=6a^2;$$

$$V=a^3;$$

$$d=a\sqrt{3}.$$

5. Довільна піраміда ($S$ – площа основи; $H$ – висота; $V$ – об'єм):

$$V=\frac{1}{3}SH.$$

6. Правильна піраміда ($P$ – периметр основи; $l$ – апофема; $S_{\text{á³÷}}$ – площа бічної поверхні):

$$S_{\text{á³÷}} = \frac{1}{2} Pl;$$

$$V = \frac{1}{3} SH.$$

7. Довільна зрізана піраміда ($S_1$ і $S_2$ – площі основ; $h$ – висота; $V$ – об'єм):

$$V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right).$$

8. Правильна зрізана піраміда ($P_1$ і $P_2$ – периметри основ; $l$ – апофема; $S_{\text{á³÷}}$ – площа бічної поверхні):

$$S_{\text{á³÷}} = \frac{1}{2}\left(P_1 + P_2\right) l.$$

*Приклад 1:*

*Діагоналі трьох граней прямокутного паралелепіпеда, що сходяться в одній вершині, дорівнюють $a$, $b$, $c$. Знайдіть лінійні розміри паралелепіпеда.*

*Розв'язання:*

*Позначимо через $x$, $y$, $z$ лінійні розміри паралелепіпеда (рис. 6). Маємо*

$$x^2 + y^2 = c^2,$$
$$y^2 + z^2 = a^2,$$
$$x^2 + z^2 = b^2.$$

*Почленно додаючи перші два рівняння і віднімаючи третє, дістанемо*

$$2y^2 = c^2 + a^2 - b^2.$$

*Звідки*

$$y = \sqrt{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}}.$$

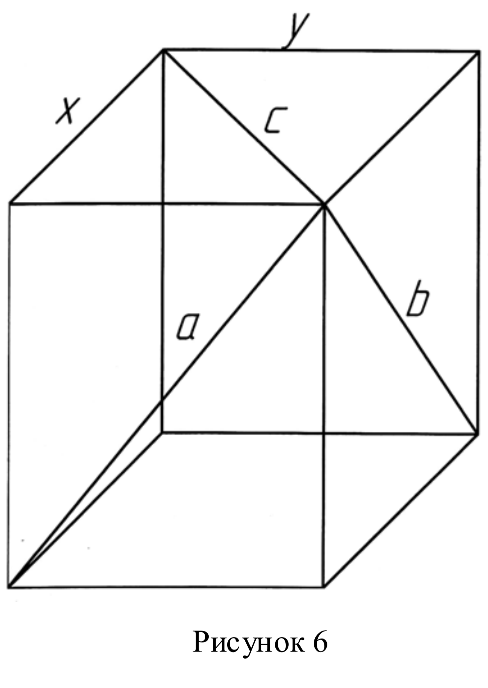



Рисунок 6

*Аналогічно знаходимо*

$$x = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}},$$

$$z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}.$$

***Вправи:***

**1.** Знайдіть діагоналі прямого паралелепіпеда, у якого усі ребра мають довжину $a$, а величина гострого кута основи дорівнює $60^0$.

**2.** Ребро куба має довжину $a$. Знайдіть відстань від вершини куба до його діагоналі

**3.** Основою прямого паралелепіпеда служить ромб. Діагоналі ромба мають довжину 6 та 9см. Довжина діагоналі бокової грані дорівнює 13 см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

**4.** Довжина діагоналі правильної чотирикутної призми дорівнює 9 см, площа повної поверхні дорівнює 144 см$^2$. Знайдіть довжину сторони основи та довжину бокового ребра.

**5.** Якщо довжину кожного ребра куба збільшити на 2 см, то його об'єм збільшиться на 98 см$^3$. Знайдіть довжину ребра куба.

**6.** Діагональ правильної чотирикутної призми довжиною 3,5 м, діагональ бокової грані – 2,5 м. Знайдіть об'єм призми.

**7.** Довжина периметра основи правильної трикутної піраміди дорівнює $30\sqrt{3}$, а довжина бокового ребра дорівнює 26 см. Знайдіть довжину висоти піраміди.

**8.** Знайдіть довжину сторони правильної чотирикутної піраміди, якщо довжина її висоти 6 дм, а довжина апофеми дорівнює 6.5 дм.

**9.** Основа піраміди – прямокутний трикутник із катетами довжиною 6 та 8 см. Усі бокові ребра піраміди мають довжину 13 см. Знайдіть довжину висоти піраміди.

**10.** У правильній чотирикутній піраміді довжина сторони основи дорівнює 14 см, а довжина бокового ребра – 10 см. Знайдіть площу діагонального перерізу.

**11.** Довжини сторін основи трикутної піраміди дорівнюють 6, 10 і 14 см. Площини бокових граней нахилені до основи під кутом $60^0$. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

**12.** Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди мають довжину 4 та 1 см, бокове ребро має довжину 2 см. Знайдіть довжину висоти піраміди.

**13.** У правильній чотирикутній зрізаній піраміді довжина висоти дорівнює 12 см, різниця довжин сторін основ дорівнює 10 см, а площа повної поверхні дорівнює 512 $см^2$. Знайдіть довжини сторін основ.

**14.** Основою піраміди служить ромб, у якого довжина сторони дорівнює 15 дм. Бокові грані нахилені до площини основи під кутом $45^0$. Довжина більшої діагоналі основи дорівнює 24 дм. Знайдіть об'єм піраміди.

**15.** Довжина усіх бокових ребер піраміди дорівнює $\frac{269}{32}$. Основа піраміди – трикутник, довжини сторін якого 13, 14 та 15 см. Знайдіть об'єм піраміди.

**16.** Потрібно визначити об'єм та площу повної поверхні правильної чотирикутної зрізаної піраміди, довжини сторін основ якої дорівнюють 24 та 12 см, а висота - 8 см.

*Тема 33*

## Тіла обертання

## *Body of revolution*

### Циліндр (*cylinder*)

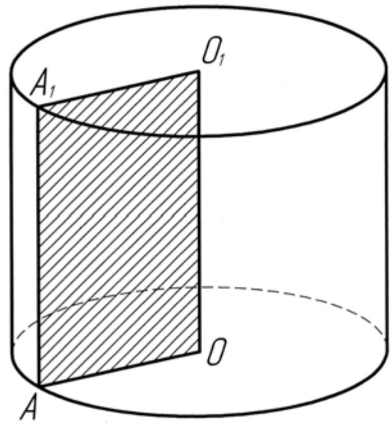


Рисунок 1

Фігура, утворена внаслідок обертання прямокутника навколо осі, що містить його сторону, називається циліндром (рис. 1).

Основи циліндра – рівні круги, що лежать у паралельних площинах, $AA_1 = l$ – **твірна (*generating line*)** циліндра, $AA_1 = OO_1 = H$ – висота циліндра.

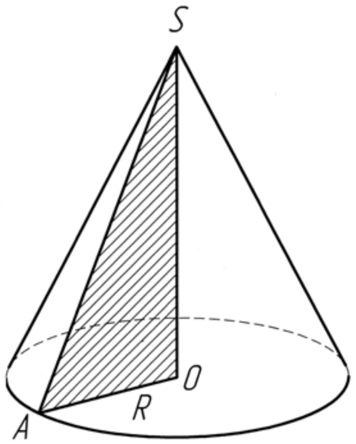


Рисунок 2

### Конус (*cone*)

Фігура, утворена внаслідок обертання прямокутного трикутника навколо осі, що містить його катет, називається прямим круговим конусом (рис. 2).

$SA = l$ – твірна, $SO = H$ – висота, $S$ – вершина, круг з радіусом $OA = R$ – основа конуса.

### Зрізаний конус (*frustum*)

Фігура, утворена внаслідок обертання прямокутної трапеції навколо осі, що містить її меншу бічну сторону, називається зрізаним конусом (рис. 3).

Зрізаний конус можна утворити при обертанні рівнобічної трапеції навколо осі симетрії.

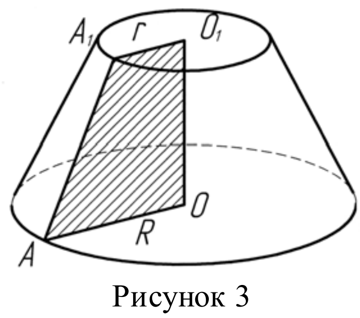


Рисунок 3

Круги з радіусом $OA$ і $O_1A_1$ – основи зрізаного конуса. $AA_1 = l$ – твірна, $OO_1 = H$ – висота зрізаного конуса.

## Куля (*solid sphere*)

Фігура, утворена внаслідок обертання півкруга навколо осі, що містить діаметр, називається кулею (рис. 4).

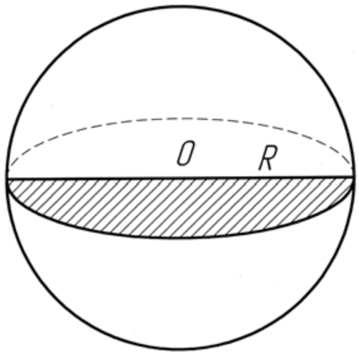



Рисунок 4

Множина усіх точок простору, що міститься на певній додатній відстані $R$ від даної точки, називається сферою.

Частинами кулі є кульовий сегмент і кульовий сектор.

Кульовим сегментом **(кульовий сегмент – *globe calotte*)** називається фігура, утворена внаслідок обертання кругового сегмента навколо його осі симетрії (рис. 5).

Кульовим сектором називається фігура, утворена внаслідок обертання кругового сектора навколо його осі симетрії (рис. 6).

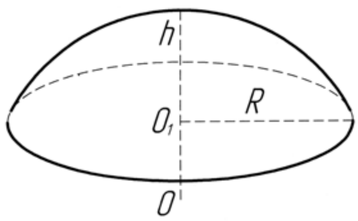



Рисунок 5

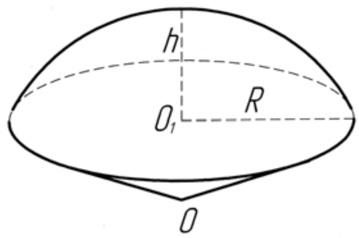



Рисунок 6

### Основні формули для визначення поверхонь і об'ємів тіл обертання

1. Циліндр ($R$ – радіус основи; $H$ – висота; $S_{пов}$ – площа повної поверхні; $S_{біч}$ – площа бічної поверхні; $V$ – об'єм):

$$S_{біч} = 2\pi RH;$$

$$V = \pi R^2 H.$$

2. Конус ($R$ – радіус основи; $H$ – висота; $l$ – твірна; $S_{біч}$ – площа бічної поверхні; $V$ – об'єм):

$$S_{біч} = \pi Rl;$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

3. Куля, сфера ($R$ – радіус кулі; $S$ – площа сферичної поверхні; $V$ – об'єм):

$$S = 4\pi R^2;$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

4. Кульовий сегмент ($R$ – радіус кулі; $h$ – висота сегмента; $S$ – площа сферичної поверхні сегмента; $V$ – об'єм):

$$S = 2\pi Rh;$$

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

5. Кульовий сектор ($R$ – радіус кулі; $h$ – висота сегмента; $V$ – об'єм):

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

*Приклад 1:*

*Розглядаються усі можливі трикутні призми заданого об'єму $V$. Навколо кожної з цих призм описано циліндр. Знайти найменшу площу поверхні цього циліндра.*

*Розв'язання:*

*Висоту призми позначимо $H$, довжину сторони основи $a$, радіус описаного циліндра $R$ (рис. 7).*

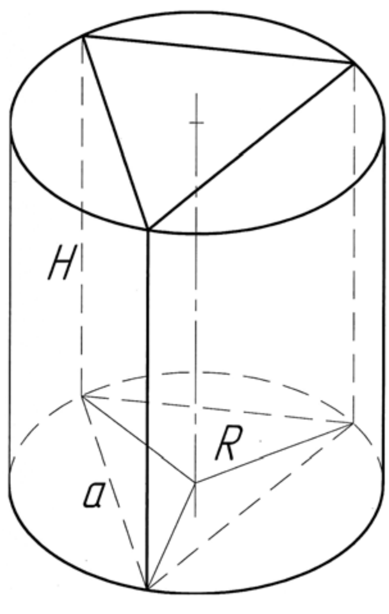



Рисунок 7

*Цей радіус дорівнює радіусу кола, що описане навколо основи призми, а оскільки основа – правильний трикутник, то* $R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

*За умовою* $V = SH = \dfrac{\sqrt{3}}{4} a^2 H$, *звідки* $H = \dfrac{4V}{\sqrt{3}a^2}$. *Враховуючи це знаходимо площу поверхні циліндра* $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH = \dfrac{2\pi}{3}\left(a^2 + \dfrac{4V}{a}\right)$. *Площа* $S$ *є функцією змінної* $a$. *Знаходимо критичну точку цієї функції:*

$$a = \sqrt[3]{2V}.$$

*Очевидно, що функція* $S$ *має при* $a = \sqrt[3]{2V}$ *найменше значення і воно дорівнює*

$$S_{\min} = \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt[3]{4V^2} + \frac{4V}{\sqrt[3]{2V}}\right) = 2\pi\sqrt[3]{4V^2}.$$

*Відповідь:* $S_{\min} = 2\pi\sqrt[3]{4V^2}$.

***Вправи:***

**1.** Висота циліндра на $10$ñì довше радіуса основи, а площа повної поверхні дорівнює $144\pi$ ñì $^2$. Знайдіть довжини радіуса основи та висоти циліндра.

**2.** Площа основи конуса дорівнює $25\pi$ äì $^2$. Твірна конуса довше висоти на $1$äì . Знайдіть площу повної поверхні конуса.

**3.** У зрізаному конусі довжина твірної дорівнює $30$ñì , довжина радіуса нижньої основи - $34$ñì , довжина висоти - $24$ñì . Знайдіть довжину радіуса верхньої основи.

**4.** Бокова поверхня циліндра розгортається у квадрат із довжиною сторони $a$. Знайдіть об'єм циліндра.

**5.** В основі циліндра проведена хорда довжиною $a$. Відповідний їй центральний кут дорівнює $\alpha$ю Довжина висоти циліндра $H$. Знайдіть об'єм циліндра.

**6.** Площа основи конуса $9\pi$ *ñì* $^2$; площа повної поверхні $24\pi$ *ñì* $^2$. Знайдіть об'єм конуса.

**7.** Знайдіть об'єм конуса, якщо площа його бокової поверхні дорівнює 18, а відстань від центра основи до твірної дорівнює 3.

**8.** Об'єм зрізаного конуса дорівнює $584\pi$ *ñì* $^3$, а радіуси основ дорівнюють 10 і 7 *ñì* . Визначте довжину висоти.

**9.** Кулю, довжина радіуса якої дорівнює $41$*äì* , перетнули площиною на відстані 9 *ñì* від центра. Знайдіть площу перерізу.

**10.** На поверхні кулі дано три точки. Прямолінійна відстань між ними дорівнює 6 та 10 *ñì* . Знійдіть відстань від центра кулі до площини, що проходить через ці три точки, якщо довжина радіуса кулі дорівнює 13 *ñì* .

**11.** Довжина радіуса кулі дорівнює 5 *ñì* . Знайдіть площу її поверхні.

**12.** Площа поверхні кулі дорівнює $225\pi$ *ñì* $^2$. Знайдіть об'єм кулі.

# Список літератури


1. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике / П. Ф. Фильчаков. – К.: «Наукова думка», 1972. – 744 с.
2. Волков Ю. І. Лінійна алгебра й аналітична геометрія з елементами програмування мовою Паскаль: навчальний посібник [для студентів інженерно-технічних спеціальностей] / Ю. І. Волков, Д. А. Найко. – К.: НМК ВО, 1990. – 144 с. – ISBN 5-7763-0037-1.
3. Дорохин Д. П. Сборник задач и упражнений по математике: навчальний посібник [для іноземних студентів підготовчих факультетів вищих навчальних закладів] / Д. П. Дорохин , З. Е. Плаксенко, Г. Ф. Бажора. – М.: Высш. шк., 1986. – 248 с.
4. Людвичек К. В. Математика: навчальний посібник [для іноземних студентів підготовчих факультетів вищих навчальних закладів] / К. В. Людвичек. – Харьков, 2003. – 258 с.
5. Математика. Алгебра и начала анализа: підручник / [ред. А. И. Лобанов]. - К.: Вища шк., 1987. - 304 с.
6. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу: підручник [для 10–11 класів середньої школи] / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубінчук. – К.: Зодіак–Еко, 2001. — 688 с.
7. Погорєлов О. В. Геометрія: підручник [для 7—11 класів середньої школи] / О. В. Погорєлов. – К.: Освіта, 1993. – 352 с. – ISBN 5-330-00563-9.
8. Навчальні програми (довузівська підготовка іноземних громадян) / [упорд.: Б. Андрющенко]. – К.: Політехніка, 2005. – 84 с.
9. Алгебра і початки аналізу: навчальний посібник [для 9-10 класів середньої школи] / [ред. А. Колмогоров]. – К.: Радянська школа, 1987. – 336 с.
10. Formula – математика для школи [Електронний ресурс] / І. Виспянський . – Режим доступу: http://www.formula.co.ua.

# Словник математичних термінів

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| абсциса | абсцисса | abscissa | abscisse | abszisse | abscisa |
| алгебраїчна форма | алгебраическая форма | algebraic form | forme algébrique | algebraische form | forma algebraica |
| аргумент | аргумент | argument | argument | argument | argumento |
| арифметична прогресія | арифметическая прогрессия | arithmetical progression | progression arithmétique | arithmetische progression | progresión aritmética |
| арифметичний корінь | арифметический корень | arithmetical root | racine arithmétique | arithmetische wurzel | raíz aritmética |
| біном Ньютона | бином Ньютона | binomial theorem | binôme du Newton | binom des newtons | binomio del newtonio |
| бісектриса | биссектриса | bisecting line | bissectrice | winkelhalbierende | bisectriz |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| бічна грань | боковая грань | lateral face | limite latérale | seitenrand | arista lateral |
| в х раз більше ніж | в х раз больше чем | x times more than | à x fois plus que | in x ist mehr mal als | en x veces más que |
| в х раз важче ніж | в х раз тяжелее чем | x times heavier than | à x une fois est plus lourde que | in x ist mal schwerer als | en x la vez es más pesada que |
| в х раз довше ніж | в х раз длиннее чем | x times longer than | à x une fois est plus longue que | in x ist mal länger als | en x la vez es más larga que |
| в х раз коротше ніж | в х раз короче чем | x times shorter than | à x une fois est plus courte que | in x ist mal kürzer als | en x la vez es más corta que |
| в х раз легше ніж | в х раз легче чем | x times easier than | à x une fois est plus facile que | in x ist mal leichter als | en x la vez es más fácil que |
| в х раз менше ніж | в х раз меньше чем | x times less than | à x une fois est plus petite que | in x ist weniger mal als | en x la vez es más pequeña que |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| вектор | вектор | vector | vecteur | vektor | vector |
| векторне числення | векторное исчисление | vector calculus | calcul vectoriel | vektorielle berechnung | cálculo vectorial |
| вертикальні кути | вертикальные углы | vertical angles | angles verticaux | senkrechten winkel | esquinas verticales |
| вершина кута | вершина угла | vertex of angle | sommet de l'angle | gipfel des winkels | cima de la esquina |
| визначити | определить | evaluate | définir | bestimmen | determinar |
| виконати дії | выполнить действия | to execute operations | accomplir les actions | handlungen zu erfüllen | cumplir las acciones |
| вираз | выражение | expression | expression | ausdruck | expresión |
| висота | высота | height | hauteur | höhe | altura |
| від'ємний | отрицательный | negative | négatif | negativen | negativo |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| від'ємник | вычитаемое | subtrahend | nombre à soustraire | subtrahenden | descontado |
| віднімання | вычитание | subtraction | отнимание | abziehen | sustracción |
| відношення | отношение | ratio | relation | beziehung | relación |
| відповідь | ответ | answer | réponse | antwort | respuesta |
| відрізок | отрезок | segment | segment | abschnitt | trozo |
| відсоток | процент | per cent | pour-cent | prozent | por ciento |
| відстань | расстояние | distance | distance | entfernung | distancia |
| вісь абсцис | ось абсцисс | abscissa axis | axe des abscisses | abszissenachse | eje de las abscisas |
| вісь ординат | ось ординат | ordinate axis | axe des ordonnées | ordinatenachse | eje de las ordenadas |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| внутрішні односторонні кути | внутренние односторонние углы | interior opposite angles | angles intérieurs unilatéraux | inneren einseitigen winkel | esquinas interiores unilaterales |
| внутрішні різносторонні кути | внутренние разносторонние углы | interior versatile angles | angles intérieurs variés | inneren vielseitigen winkel | esquinas interiores multilaterales |
| вписане коло | вписанный круг | inscribed circle | cercle inscrit | eingeschriebenen kreis | círculo insertado |
| вписаний кут | вписанный угол | inscribed angle | angle inscrit | eingeschriebenen winkel | esquina insertada |
| вправа | упражнение | exercises | exercice | übung | ejercicio |
| всього | всего | total | total | insgesamt | total |
| гексаедр | гексаэдр | hexahedron | hexaèdre | hexaeder | hexaedro |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| геометрична прогресія | геометрическая прогрессия | geometric progression | progression géométrique | geometrische progression | progresión geométrica |
| гіпербола | гипербола | hyperbola | hyperbole | hyperbel | hipérbole |
| гострий кут | острый угол | sharp angle | angle aigu | scharfen winkel | ángulo agudo |
| градус | градус | degree | degré | grad | grado |
| границя | предел | limit | limite | limes | frontera |
| грань | грань | bound | limite | fläche | arista |
| графік | график | graph | graphique | zeitplan | gráfico |
| двогранний кут | двугранный угол | flatroof angle | dièdre | diederwinkel | diedro |
| декартові координати | декартовые координаты | Cartesian coordinates | coordonnées cartésiennes | kartesische koordinaten | coordenadas Cartesian |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| десятковий дріб | десятичная дробь | decimal | fraction décimale | dezimalbruch | fracción decimal |
| дискримінант | дискриминант | discriminant | discriminant | diskriminante | discriminador |
| диференційована функція | дифференци-руемая функция | differentiable function | fonction différentable | differenzierte funktion | función diferenciada |
| диференціювання | дифференцирова-ние | differentiation | différenciation | differenzierung | diferenciación |
| діагональ | диагональ | diagonal | diagonale | diagonale | diagonal |
| діаметр | диаметр | diameter | diamètre | durchmesser | diámetro |
| дійсна частина | действительная часть | real part | partie valable | gültige teil | parte válida |
| ділене | делимое | dividend | dividende | teilbare | dividendo |
| ділення | деление | division | division | die teilung | división |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| дільник | делитель | divisor | diviseur | teiler | divisor |
| добуток | произведение | product | oeuvre | werk | obra |
| довжина | длина | length | longueur | länge | longitud |
| додавання | сложение | addition | addition | addition | adición |
| доданок | слагаемое | item | nombre à additionner | abgelegte | sumando |
| додатний | позитивный | positive | positif | positiven | positivo |
| додатний напрям | позитивное направление | positive direction | direction positive | positive richtung | dirección positiva |
| додекаедр | додекаэдр | dodecahedron | dodécaèdre | dodekaeder | dodecaedro |
| достатня ознака | достаточный признак | sufficient condition | signe suffisant | ausreichende merkmal | indicio suficiente |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| дотична | касательная | tangent | tangente | tangente | tangente |
| дробова частина | дробная часть | fractional part | partie fractionnaire | bruchteil | parte fraccionada |
| дужки | скобки | parenthesis | parenthèses | klammern | paréntesis |
| екстремум | экстремум | extremum | extremum | extremum | valor extremo |
| залежна змінна | зависимая переменная | dependent variable | variable dépendante | abhängige variabele | variable dependiente |
| записувати | записывать | write | inscrire | aufzuzeichnen | anotar |
| зведене квадратне рівняння | приведенное квадратное уравнение | reduced quadratic | équation du second degré amenée | gebrachte quadratische angleichung | ecuación de segundo grado llevada |
| звичайний дріб | обычная дробь | fraction | fraction ordinaire | gewöhnliche bruch | fracción regular |
| зменшуване | уменьшаемое | minuend | diminué | verringerte | reducido |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| змінна | переменная | variable | variable | variabele | variable |
| знайти | найти | find | trouver | finden | encontrar |
| знак | знак | sign | signe | zeichen | signo |
| знак віднімання | знак вычитания | sign of subtraction | signe de la soustraction | subtraktionzeichen | signo a la resta |
| знак ділення | знак деления | division sign | signe de la division | divisionszeichen | signo a la división |
| знак додавання | знак сложения | plus sign | signe de l'addition | pluszeichen | signo a la adición |
| знак множення | знак умножения | multiplication sign | signe multiplicatif | malzeichen | signo a la multiplicación |
| знак рівності | знак равенства | equality sign | signe d'égalité | gleichheitszeichen | signo a la igualdad |
| знаменник | знаменатель | denominator | dénominateur | nenner | denominador |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| знаменник геометричної прогресії | знаменатель геометрической прогрессии | geometric ratio | raison géométrique | nenner der geometrischen progression | denominador de la progresión geométrica |
| зрізаний конус | срезанный конус | frustum | cône coupé | abgeschnittenen kegel | cono cortado |
| зростаюча функція | возрастающая функция | increasing function | fonction augmentant | wachsende funktion | función que crece |
| ікосаедр | икосаэдр | icosahedron | icosaèdre | ikosaeder | icosaedro |
| інтеграл | интеграл | integral | intégrale | integral | integral |
| ірраціональна нерівність | иррациональное неравенство | irrational inequality | inégalité irrationnelle | irrationale ungleichheit | desigualdad irracional |
| калькулятор | калькулятор | calculator | calculatrice | rechner | calculador |
| квадрат | квадрат | square | carré | quadrat | cuadrado |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| квадратне рівняння | квадратное уравнение | quadratic | équation du second degré | quadratische angleichung | ecuación de segundo grado |
| квадратний корінь | квадратный корень | square root | racine carrée | quadratwurzel | raíz cuadrada |
| кінець вектора | конец вектора | terminus | fin du vecteur | ende des vektors | fin del vector |
| клас | класс | class | classe | klasse | clase |
| коефіцієнт | коэффициент | coefficient | coefficient | koeffizienten | coeficiente |
| колінеарний | коллинеарный | collinear | colinéaire | kollinear | colineal |
| коло | окружность | circle | circonférence | kreis | circunferencia |
| кома | запятая | decimal point | virgule | komma | coma |
| комбінаторика | комбинаторика | combinatorial analysis | analyse combinatoire | kombinatorik | combinatoria |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| комбінація | комбинация | combination | combinaison | kombination | combinación |
| комплексні числа | комплексные числа | complex number | nombres complexes | komplexen zahlen | números complejos |
| конус | конус | cone | cône | kegel | cono |
| координата | координата | coordinate | coordonnée | koordinate | coordenada |
| координатна площина | координатная плоскость | coordinate plane | plan coordonné | koordinatenebene | plano de coordenadas |
| координатна пряма | координатная прямая | coordinate line | ligne droite coordonnée | koordinatengerade | recta de coordenadas |
| корінь | корень | root | racine | wurzel | raíz |
| корінь n-го степеня | корень n-го степени | n-th root | racine du n-ème degré | wurzel der n. stufe | raíz del n grado |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| крайній член пропорції | крайний член пропорции | extreme | membre extrême de la proportion | äusserste mitglied der proportion | miembro extremo de la proporción |
| круг | круг | disk | cercle | kreis | círculo |
| куб | куб | cube | cube | kubus | cubo |
| кубічний корінь | кубический корень | cube root | racine cubique | kubikwurzel | raíz cúbica |
| куля | шар | solid sphere | globe | kugel | bola |
| кульовий сегмент | шаровой сегмент | globe calotte | calotte sphérique | kugelsegment | segmento |
| кут | угол | angle | angle | winkel | esquina |
| ліворуч | по левую сторону | from the left of | selon une gauche partie | auf der linken seite | por la parte izquierda |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| лінійна функція | линейная функция | linear function | fonction affine | lineare funktion | función lineal |
| лінійне рівняння | линейное уравнение | linear equation | équation linéaire | lineare angleichung | ecuación lineal |
| лічба | счет | counting | compte | rechnung | cuenta |
| логарифмічна нерівність | логарифмическое неравенство | logarithmic inequality | inégalité logarithmique | logarithmische ungleichheit | desigualdad logarítmica |
| логарифмічна функція | логарифмическая функция | logarithmic function | fonction logarithme | logarithmische funktion | función logarítmica |
| локальний максимум | локальный максимум | local maximum | maximum local | lokales maximum | máximo local |
| локальний мінімум | локальный минимум | local minimum | minimum local | lokal mindestens | mínimo local |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| медіана | медиана | median | médiane | mediane | mediana |
| метод підстановки | метод подстановки | substitution method | méthode de la substitution | methode der substitution | método de la substitución |
| мінус | минус | minus | moins | minus | menos |
| многогранний кут | многогранный угол | polyhedral angle | angle polyédrique | vielseitigen winkel | ángulo poliedro |
| многогранник | многогранник | polyhedral solid | polyèdre | polyeder | poliedro |
| многокутники | многоугольник | polygon | polygone | polygon | polígono |
| многочлен | многочлен | polynomial | polynôme | polynom | polinomio |
| множення | умножение | multiplication | multiplication | multiplikation | multiplicación |
| множина | множество | set | multitude | menge | multitud |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| множник | множитель | multiplier | multiplicateur | faktor | multiplicador |
| модуль | модуль | module | module | modul | módulo |
| модуль вектора | модуль вектора | modulus of vector | module du vecteur | modul des vektors | módulo del vector |
| на x більше ніж | на x больше чем | greater by x than | sur x plus que | auf x ist mehr es als | en x más que |
| на x важче ніж | на x тяжелее чем | heavier by x than | sur x il est plus lourd que | auf x ist es schwerer als | en x es más pesado que |
| на x довше ніж | на x длиннее чем | longer by x than | sur x est plus long que | auf x ist länger als | en x es más largo que |
| на x коротше ніж | на x короче чем | shorter by x than | sur x est plus court que | auf x ist kürzer als | en x es más corto que |
| на x легше ніж | на x легче чем | easier by x than | sur x il est plus facile que | auf x ist es leichter als | en x es más fácil que |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| на x менше ніж | на x меньше чем | less by x than | sur x il y a moins de que | auf x ist weniger es als | en x es más pequeño que |
| найменше спільне кратне | наименьшее общее кратное | least common multiple | plus petit multiple | kleinste allgemeine divisibel | mínimo común múltiplo |
| наприклад | например | for example | par exemple | zum beispiel | por ejemplo |
| наступний | следующий | next | suivant | folgende | siguiente |
| натуральне число | натуральное число | natural number | nombre naturel | natürliche zahl | número natural |
| незалежна змінна | независимая переменная | independent variable | variable indépendante | unabhängige variabele | variable independiente |
| необхідна ознака | необходимый признак | requirement | signe nécessaire | notwendige merkmal | indicio necesario |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| непаралельна | непараллельная | nonparallel | non la parallèle | nicht die parallele | no paralelo |
| непарна функція | нечетная функция | odd function | fonction impaire | unpaare funktion | función impar |
| непарний | нечетный | odd | impair | unpaaren | impar |
| неповна частка | неполное частное | partial quotient | privé incomplet | unvollständige private | incompleto privado |
| неповне квадратне рівняння | неполное квадратное уравнение | pure quadratic | équation du second degré incomplète | unvollständige quadratische angleichung | ecuación de segundo grado incompleta |
| неправильний дріб | неправильная дробь | improper fraction | fraction incorrecte | unechte bruch | fracción incorrecta |
| нерівність | неравенство | inequality | inégalité | ungleichheit | desigualdad |
| нескінченний | бесконечный | infinite | infini | unendlichen | infinito |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| нестрога нерівність | нестрогое неравенство | unstrict inequality | inégalité non sévère | nicht strenge ungleichheit | desigualdad no rigurosa |
| нормаль до кривої | нормаль к кривой | normal to curve | normale vers la courbe | normal zur kurve | normal a la curva |
| обернена пропорційність | обратная пропорциональность | inverse proportionality | proportionnalité inverse | rückproportionalität | proporcionalidad de vuelta |
| обернено пропорційний | обратно пропорциональный | inverse proportional | inversement proportionnel | zurück den proportionalen | atrás proporcional |
| об'єм | объем | volume | volume | umfang | volumen |
| область визначення | область определения | definitional domain | domaine de la définition | gebiet der bestimmung | esfera de la definición |
| область значень | область значений | actual range | domaine des significations | gebiet der bedeutungen | esfera de los significados |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| одиничний відрізок | единичный отрезок | unit segment | segment unitaire | einzelnen abschnitt | trozo singular |
| одночлен | одночлен | monomial | monôme | monom | monomio |
| октаедр | октаэдр | octahedron | octaèdre | oktaeder | octaedro |
| описане коло | описанный круг | circumcircle | cercle décrit | beschriebenen kreis | círculo descrito |
| описанипй кут | описанный угол | circumscribed angle | angle décrit | beschriebenen winkel | esquina descrita |
| опуклий многокутник | выпуклый многоугольник | convex polygon | polygone convexe | konvexe polygon | polígono convexo |
| ордината | ордината | ordinate | ordonnée | ordinate | ordenada |
| основа | основа | base | base | grundlage | base |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| основа степеня | основа степени | base of power | base du degré | grundlage der stufe | base del grado |
| остача від ділення | остаток от деления | residue of division | reste de la division | rest von der teilung | resto de la división |
| парабола | парабола | parabola | parabole | parabel | parábola |
| паралелепіпед | параллелепипед | parallelepiped | parallélépipède | parallelepiped | paralelepipedo |
| паралелограм | параллелограмм | parallelogram | parallélogramme | parallelogramm | paralelogramo |
| паралельні прямі | параллельные прямые | parallel lines | lignes droites parallèles | parallelen geraden | rectas paralelas |
| парна функція | четная функция | even function | fonction paire | gerade funktion | función par |
| парний | четный | even | pair | gerade | par |
| первісна | первообразная | antiderivative | primordiale | stammfunktion | primordial |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| перевіряти | проверять | examine | contrôler | prüfen | comprobar |
| переріз | сечение | cut set | section | schnitt | sección |
| перестановка | перестановка | commutation | réarrangement | umstellung | traslado |
| період | период | period | période | periode | período |
| періодичний дріб | периодическая дробь | periodic fraction | fraction périodique | periodische bruch | fracción periódica |
| перпендикуляр | перпендикуляр | perpendicular | perpendiculaire | senkrechte | perpendicular |
| перпендикулярні прямі | перпендикулярн ые прямые | perpendicular lines | lignes droites perpendiculaires | senkrechten geraden | rectas perpendiculares |
| півпряма | полупрямая | halfline | demi-droite | halbgerade | semirecta |
| піраміда | пирамида | pyramid | pyramide | pyramide | pirámide |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| площа | площадь | area | aire | fläche | área |
| площина | плоскость | plane | plan | ebene | plano |
| плюс | плюс | plus | plus | plus | más |
| показник степеня | показатель степени | exponent | paramètre du degré | kennziffer der stufe | exponente |
| показникова нерівність | показательное неравенство | exponential inequality | inégalité indicative | vorbildliche ungleichheit | desigualdad ejemplar |
| показникова форма | показательная форма | exponential form | forme indicative | vorbildliche form | forma ejemplar |
| показникова функція | показательная функция | exponential function | fonction indicative | vorbildliche funktion | función exponencial |
| половина | половина | half | moitié | hälfte | lmitad |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| попередній | предыдущий | previous | précédent | vorhergehenden | anterior |
| порівнювати | сравнивать | compare | comparer | vergleichen | comparar |
| порівняння | сравнение | comparison | comparaison | vergleich | comparación |
| порядок зростання | порядок возрастания | increasing order | ordre de l'augmentation | ordnung des anwachsens | orden del acrecentamiento |
| порядок спадання | порядок убывания | decreasing order | ordre спадания | ordnung der abnahme | orden de la merma |
| послідовність | последовательно сть | consequence | succession | reihenfolge | consecuencia |
| похила | наклонная | slanting line | inclinée | geneigte | inclinado |
| похідна | производная | derivative | dérivée | abgeleitete | derivada |
| початкова точка | начальная точка | initial point | point de départ | anfangspunkt | punto de partida |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| початок вектора | начало вектора | origin of vector | début du vecteur | anfang des vektors | comienzo del vector |
| початок відліку | начало отсчета | zero point | début du décompte | anfang des abzählens | comienzo de la lectura |
| початок координат | начало координат | coordinate origin | début des coordonnées | anfang der koordinaten | comienzo de las coordenadas |
| правильний дріб | правильная дробь | proper fraction | fraction proprement dite | echte bruch | fracción correcta |
| праворуч | по правую сторону | from the right of | selon la droite | auf der rechten seite | por la parte derecha |
| призма | призма | prism | prisme | prisma | prisma |
| приклад | пример | example | exemple | beispiel | ejemplo |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| приріст аргумента | приращение аргумента | increment of argument | accroissement de la variable | zunahme des argumentes | crecimiento del argumento |
| приріст функції | приращение функции | increment of function | accroissement de la fonction | zunahme der funktion | crecimiento de la función |
| проекція | проекция | projection | projection | projektion | proyección |
| промінь | луч | ray | rayon | strahl | rayo |
| пропорція | пропорция | proportion | proportion | proportion | proporción |
| протилежний | противоположны й | opposite | opposé | entgegengesetzten | opuesto |
| процент | процент | per cent | pour-cent | prozent | por ciento |
| пряма | прямая | straight line | ligne droite | gerade | recta |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| пряма призма | прямая призма | rightangle prism | prisme direct | gerade prisma | prisma directo |
| пряма пропорційність | прямая пропорционально сть | direct proportionality | proportionnalité directe | gerade proportionalität | proporcionalidad directa |
| прямий кут | прямой угол | right angle | angle droit | rechten winkel | ángulo recto |
| прямо пропорційний | прямо пропорциональн ый | directly proportional | directement proportionnel | gerade proportionalen | directamente proporcional |
| прямокутний трикутник | прямоугольный треугольник | right triangle | triangle rectangle | rechteckige dreieck | triángulo rectangular |
| прямокутник | прямоугольник | rectangle | rectangle | rechteck | rectángulo |
| радіус | радиус | radius | rayon | radius | radio |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| раціональне число | рациональное число | rational number | nombre rationnel | rationale zahl | número racional |
| ребро | ребро | edge | arête | kante | borde |
| рівність | равенство | equality | égalité | gleichheit | igualdad |
| рівнобедрений прямокутний трикутник | равнобедренный прямоугольный треугольник | 45° right triangle | triangle rectangle isocèle | gleichschenkliges rechteckige dreieck | triángulo isósceles rectangular |
| рівнобедрений трикутник | равнобедренный треугольник | isosceles triangle | triangle isocèle | gleichschenkliges dreieck | isósceles rectángulo |
| рівносильні нерівності | равносильные неравенства | equivalent inequalities | les inégalités équivalentes | gleichbedeutenden ungleichheiten | desigualdades equivalentes |
| рівносильні рівняння | равносильные уравнения | equivalent equations | les équations équivalentes | gleichbedeutenden angleichungen | ecuaciones equivalentes |

| **українська** | **російська** | **англійська** | **французька** | **німецька** | **іспанська** |
|---|---|---|---|---|---|
| рівносторонній трикутник | равносторонний треугольник | equilateral triangle | triangle équilatéral | gleichseitiges dreieck | triángulo equilátero |
| рівняння | уравнение | equation | équation | angleichung | ecuación |
| рівняння першого степеня | уравнение первой степени | simple equation | équation du premier degré | angleichung der ersten stufe | ecuación de primer grado |
| різниця | разность | difference | différence | verschiedenheit | diferencia |
| різниця арифметичної прогресії | разность арифметической прогрессии | common difference | différence de la progression arithmétique | verschiedenheit der arithmetischen progression | diferencia de la progresión aritmética |
| розв'язання | решение | solution | décision | lösung | decisión |
| розв'язати | решить | solve | décider | entscheiden | decidir |
| розгорнутий кут | развернутый угол | flat angle | angle déployé | entfalteten winkel | esquina desenvuelta |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| розміщення | размещение | arrangement | placement | unterbringung | instalación |
| розряд числа | разряд числа | number position | catégorie du nombre | kategorie der zahl | categoría del número |
| ромб | ромб | diamond | losange | rhombus | rombo |
| сегмент | сегмент | segment | segment | segment | segmento |
| сектор | сектор | sector | secteur | sektor | sector |
| середній член пропорції | средний член пропорции | mean | terme moyen de la proportion | mittlere mitglied der proportion | término medio de la proporción |
| середня лінія | средняя линия | medial line | moyenne ligne | mittlere linie | línea media |
| симетричний | симметричный | symmetric | symétrique | symmetrischen | simétrico |
| симетрія | симметрия | symmetry | symétrie | symmetrie | simetría |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| система нерівностей | система неравенств | inequality system | système des inégalités | system der ungleichheiten | sistema de las desigualdades |
| система рівнянь | система уравнений | combined equations | système des équations | system der angleichungen | sistema de las ecuaciones |
| січна | секущая | secant line | sécante | peitschende | secante |
| скінченний | конечный | finite | final | endlichen | final |
| складна функція | сложная функция | compodite function | fonction complexe | komplizierte funktion | función difícil |
| скоротити дроби | сократить дроби | reduce fraction | réduire les fractions | brüche zu verringern | reducir las fracciones |
| спадна функція | нисходящая функция | dropdown function | fonction descendant | absteigende funktion | función decreciente |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| спільний множник | общий множитель | common factor | multiplicateur total | allgemeinen faktor | multiplicador general |
| спряжений | сопряженный | adjoined | associé | verknüpften | conjugado |
| степенева функція | степенная функция | power function | fonction grave | gesetzte funktion | función pausada |
| степінь | степень | power | degré | stufe | grado |
| строга нерівність | строгое неравенство | strict inequality | inégalité sévère | strenge ungleichheit | desigualdad rigurosa |
| сума | сумма | sum | somme | summe | suma |
| суміжні кути | сопряженные углы | adjacent angles | angles associés | verknüpften winkel | ángulos conjugados |
| таблиця | таблица | table | tableau | tabelle | tabla |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| твірна | образующая | generating line | génératrice | bildende | generatriz |
| тетраедр | тетраэдр | tetrahedron | tétraèdre | tetraeder | tetraedro |
| тіло обертання | тело вращения | body of revolution | corps de révolution | körper des drehens | cuerpo del giro |
| тотожний | тождественный | identical | identique | identischen | idéntico |
| точка | точка | point | point | punkt | punto |
| точка прикладання | точка приложения | point of application | point de l'applicage | punkt des auflegens | punto de aplicación |
| транспортир | транспортир | protractor | rapporteur | winkelmesser | transportador |
| трапеція | трапеция | trapezoid | trapèze | trapez | trapecio |
| третина | треть | one third | un tiers | drittel | tercio |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| тригонометрична форма | тригонометричес кая форма | goniometric form | forme trigonométrique | trigonometrische form | forma trigonométrica |
| тригонометричні функції | тригонометричес кие функции | trigonometrical functions | fonctions trigonométriques | trigonometrischen funktionen | funciones trigonométricas |
| тригранний кут | трехгранный угол | trihedral angle | angle trièdre | dreikant | esquina triangular |
| трикутник | треугольник | triangle | triangle | dreieck | triángulo |
| трикутник Паскаля | треугольник Паскаля | Pascal pyramid | triangle de Pascal | Pascal-dreieck | triángulo del Pascal |
| тупий кут | тупой угол | blunt angle | angle obtus | stumpfen winkel | ángulo obtuso |
| уявна одиниця | мнимая единица | imaginary unit | unité imaginaire | scheinbare einheit | unidad imaginaria |
| уявна частина | мнимая часть | imaginary part | partie imaginaire | scheinbare teil | parte imaginaria |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| формула | формула | formula | formule | formel | fórmula |
| функція | функция | function | fonction | funktion | función |
| хорда | хорда | bisecant | corde | chorde | cuerda |
| центр кола | центр круга | center of circle | centre du cercle | zentrum des kreises | centro del círculo |
| центральний кут | центральный угол | central angle | angle central | zentralen winkel | ángulo central |
| циліндр | цилиндр | cylinder | cylindre | zylinder | cilindro |
| цифра | цифра | figure | chiffre | zahl | cifra |
| ціла частина | целая часть | integer part | partie entière | ganzer teil | parte entera |
| ціле число | целое число | integer | nombre entière | ganze zahl | número entero |

| українська | російська | англійська | французька | німецька | іспанська |
|---|---|---|---|---|---|
| частка | частное | quotient | privé | private | privado |
| чверть | четверть | quarter | quart | viertel | cuarto |
| чисельник | числитель | numerator | numérateur | zähler | numerador |
| читати | читать | read | lire | lesen | leer |

*Навчальне видання*

**Володимир Олександрович Краєвський**
**Ольга Дмитрівна Краєвська**

**МАТЕМАТИКА**
**ДЛЯ ДОВУЗІВСЬКОЇ ПІДГОТОВКИ ІНОЗЕМЦІВ**
**Частина 2**
Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено автором

Редактор

Видавництво ВНТУ "УНІВЕРСУМ – Вінниця"
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29,7x42
Друк різографічний
Тираж прим.

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк.

Зам. №

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ