В. О. Краєвський

ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

В. О. Краєвський

ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2013

УДК 517.53 (075)
ББК 22.16
К78

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол №11 від 30.06.2011 р.)

Рецензенти:
С. Й. Ткаченко, доктор технічних наук, професор
В. І. Сивак, доктор технічних наук, професор
Д. А. Найко, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Краєвський, В. О.
К78 Функції комплексної змінної : навчальний посібник / В. О. Краєвський. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 143 с.

У навчальному посібнику містяться основні формули, теореми, означення теорії функції комплексної змінної. Також є значна кількість покрокових алгоритмів, які стануть у пригоді студентам при розв'язанні практичних завдань. Підібрано достатню кількість завдань для розв’язання на практичних заняттях та для самостійної роботи студентів. Розглянуто розв’язання прикладів з кожної теми, надається 100 варіантів завдань для типових розрахунків та контрольних робіт. Розглянута можливість застосування математичного додатка Maple для розв'язання відповідних задач.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК 517.53 (075)
ББК 22.16

Зміст

Вступ 4
1 Поняття комплексного числа. Алгебраїчні дії над комплексними числами 7
Завдання для розв'язання 13
2 Геометричні поняття 14
Завдання для розв'язання 19
3 Поняття функції комплексної змінної. Виділення дійсної і уявної частини 19
Завдання для розв'язання 22
4 Границя і неперервність функції комплексної змінної. Диференційовність та аналітичність 23
Завдання для розв'язання 30
5 Інтеграл від функції комплексної змінної. Інтегральні теореми Коші 31
Завдання для розв'язання 41
6 Інтегральна формула Коші 41
Завдання для розв'язання 48
7 Ряди в комплексній області. Степеневі ряди 49
Завдання для розв'язання 55
8 Ряди Тейлора та Лорана 56
Завдання для розв'язання 64
9 Нулі функції. Ізольовані особливі точки. Лишки функції 65
Завдання для розв'язання 69
10 Теорема Коші про лишки 70
Завдання для розв'язання 74
11 Застосування теорії функцій комплексної змінної до задач гідродинаміки 74
12 Застосування Maple для аналізу функцій комплексної змінної 86
Завдання для типових розрахунків 93
Запитання на колоквіум та іспит 140
Література 141
Словник найбільш вживаних термінів 142

ВСТУП

Поняття числа, яке є одним із найголовніших математичних понять, має свою багатовікову історію. Число, як і всі наукові поняття, виникло не в результаті вільної творчості людського розуму, а було створено для задоволення практичних потреб людей. Із часом практична діяльність людей розвивалася, тому й поняття числа також змінювалося й удосконалювалося.

Поняття про число виникло в доісторичні часи у зв'язку з необхідністю рахунку різних предметів, тварин, рослин і т. д. Тому спочатку розглядалися лише цілі й додатні числа, які тепер називають натуральними числами. Натуральні числа цілком задовольняли потреби практики тих часів, і лише через багато століть виникли дробові числа як результат ділення, що виконувалося над об'єктами, для яких має сенс дроблення одиниці на рівні частки. Потреба більш точних вимірів таких величин, як довжина, площа, вага, час та ін. привела до дроблення основної одиниці міри на більш дрібні частини, що одержали особливі найменування. Так, наприклад, були введені хвилина для позначення 1/60 години або градуса, секунда для позначення 1/60 хвилини (1/3600 години) або градуса.

Незважаючи на те, що дробові числа зустрічаються в найпрадавніших з відомих нам рукописів, поняття дробу як абстрактного числа проникало в науку з надзвичайними труднощами й почало одержувати визнання лише в XVI-XVII століттях після винаходу десяткових дробів і логарифмів. Особливо великі логічні труднощі становив той факт, що при множенні на правильний дріб у результаті виходило число не більше, а менше вихідного. Цікаво також відзначити, що ще Штифель в 1553 г. називав дроби «уявними числами».

Цілі додатні числа разом із числами дробовими отримали назву раціональних чисел.

Задачі виміру безперервних величин, тобто вираження всякого значення такої величини числом, привели до введення чисел ірраціональних.

Історичний переказ приписує так зване «відкриття» ірраціональних чисел Піфагору, який виявив несумірність діагоналі квадрата з його стороною. Інакше кажучи, Піфагор виявив, що відношення довжини діагоналі квадрата до довжини його сторони не може бути виражене ніяким раціональним числом.

Значно пізніше почали з'являтися й узвичаюватися від'ємні числа. Систематичне застосування від'ємних чисел у загальних формулах і їх використання як коефіцієнтів алгебраїчних рівнянь одночасно із уведенням нуля як самостійного числа вперше зустрічаються в індусів (VI – XI століття) і трохи пізніше в народів Середньої Азії й Закавказзя — хорезмійців, таджиків, узбеків, азербайджанців і ін. Індусам же належить і правильне тлумачення нуля, від'ємних чисел і дій над ними на прикладах найпростіших направлених величин, таких як прибуток–збиток, переміщення в протилежних напрямках тощо.

Щодо цього середньовічні європейські алгебраїсти довгий час відставали від учених Сходу або й зовсім не розглядали від'ємних розв'язків рівнянь, або, одержуючи такі рівняння, уважали від'ємні числа фіктивними, абсурдними числами, «числами меншими, ніж ніщо». Лише в XVI столітті Декарт, розробляючи аналітичну геометрію, дав геометричне тлумачення від'ємних чисел як направлених відрізків, яке з тих пір і стало загальноприйнятим.

Числа раціональні й ірраціональні, додатні й від'ємні одержали загальну назву дійсних чисел.

Однак не встигло ще закріпитися нове розширене поняття числа, як у процесі подальшого розвитку математики виявилося, що й нове поняття також є незадовільним. Зокрема, розв'язок квадратних рівнянь уже на початковому етапі розвитку алгебри призвів до неможливої в області дійсних чисел операції знаходження квадратного кореня з від'ємного числа.

Величина y^2 при будь-якому числовому значенні y буде невід'ємною, тобто вона може бути або додатною або рівною нулю, наприклад при $y = \pm 8$ маємо $y^2 = +64$; при $y = 0$ і $y^2 = 0$.

Таким чином серед дійсних чисел немає жодного, квадрат якого дорівнював би від'ємній величині. Отже, і корінь квадратний із від'ємної величини $\sqrt{-y^2}$ не може бути виражений жодним дійсним числом.

Чи означає це, що величина $\sqrt{-y^2}$ є «уявною», «неіснуючою», як її називали внаслідок традиції, що незмінно повторювалась при всякому наступному розширенні поняття числа? Авжеж ні. Величина $\sqrt{-y^2}$ є реально існуючою величиною, яка не може бути виражена вузьким, недосконалим поняттям дійсного числа. Для розширення поняття числа крім дійсної одиниці, за допомогою якою виражаються усі дійсні числа, необхідно ввести принципово нову одиницю, яку будемо позначати буквою i, маючи на увазі під цим позначенням величину

$$i = \sqrt{-1} \text{ або } i^2 = -1. \qquad (1)$$

Тоді $\sqrt{-y^2}$ може бути виражено через нову одиницю i так:

$$\sqrt{-y^2} = \sqrt{(-1) \cdot y^2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{y^2} = iy. \qquad (2)$$

За історичною традицією число i назвали уявною одиницею **(уявна одиниця – *imaginary unit*)**, а числа iy – чисто уявними числами. Число виду

$$x + iy \qquad (3)$$

одержало назву комплексного числа, у якому розрізняють дійсну частину

x **(дійсна частина – *real part*)** і уявну частину y **(уявна частина – *imaginary part*)**.

Комплексні числа почали з'являтися в роботах окремих математиків починаючи з XVI століття. Але широке визнання й поширення вони одержали лише в XIX столітті, після того як на рубежі XVIII - XIX століть одночасно й незалежно один від одного К. Гауссом (в 1797-1799 р.), К. Весселем (в 1798-1799 р.) і Ж. Арганом (в 1806 р.) була дана геометрична інтерпретація комплексних чисел як точок числової площини, і після того, як за допомогою комплексних чисел удалося вирішити ряд практично важливих задач, нерозв'язаних в області дійсних чисел.

Доти до комплексних чисел ставилися з великою недовірою й не розуміли їхньої суті навіть багато великих математиків. Наприклад, Лейбніц писав: «Комплексне число – це тонкий і разючий засіб божественного духу, майже амфібія між буттям і небуттям».

На закінчення зауважимо, що для комплексних чисел залишаються справедливими всі основні закони арифметики й алгебри та як значення функції від комплексного аргументу ми одержуємо знову комплексне число.

Крім того, ціла низка питань, які в області дійсного змінної не могли бути вирішені й часто розглядалися як парадокси, одержали просте й природнє пояснення в області комплексної змінної.

Наприклад, в області комплексної змінної алгебраїчне рівняння n-степеня завжди має точно n коренів, у той час як в області дійсної змінної воно може мати й меншу кількість коренів і навіть жодного.

В області комплексної змінної існує логарифм від від'ємних чисел, функції синус і косинус можуть набувати будь-яких значень, а не тільки значень, що не перевищують одиниці, та ін.

Посібник містить теоретичний матеріал, де подані основні формули, теореми, означення, які підкріплюються великою кількістю прикладів. Також є значна кількість покрокових алгоритмів, які стануть у пригоді студентам при розв'язанні практичних завдань. В кінці кожної теми містяться завдання, необхідні для проведення практичних занять. Окремо розглядається можливість застосування інформаційних технологій при аналізі функцій комплексної змінної. Зокрема акцент зроблений на застосуванні математичного додатка Maple. Крім того з кожної теми подано 100 варіантів завдань для контрольних робіт.

У посібнику вміщено значну кількість докладних розв’язань прикладів, що дає змогу використовувати його для самостійного вивчення функції комплексної змінної, зокрема студентами заочної форми навчання.

1 ПОНЯТТЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. АЛГЕБРАЇЧНІ ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ

Комплексним числом **(комплексне число – *complex number*)** z називається вираз виду

$$z = x + iy \tag{4}$$

(**алгебраїчна форма (*algebraic form*)** комплексного числа), де x і y – будь-які дійсні числа, а i – уявна одиниця.

Числа x і y називають відповідно дійсною та уявною частинами комплексного числа z і позначають

$$x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z. \tag{5}$$

Комплексне число $\overline{z} = x - iy$ називається спряженим **(спряжене – *adjoined*)** комплексному числу $z = x + iy$.

Комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ вважаються рівними тоді і лише тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Комплексне число $z = x + iy$ зображається на площині Oxy точкою M із координатами (x, y) чи вектором, початок якого знаходиться у точці $O(0;0)$, а кінець у точці $M(x, y)$ (рис. 1).

Довжина ρ вектора $\overline{OM}$ називається м о д у л е м **(модуль – *modulus*)** комплексного числа і позначається $|z|$, так що $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Кут φ, утворений вектором $\overline{OM}$ із віссю Ox, називається аргументом **(аргумент – *amplitude*)** комплексного числа z і позначається $\varphi = \operatorname{Arg} z$; він визначається не однозначно, а із точністю до доданка, який кратний 2π:

$$Argz = \arg z + 2k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{6}$$

де $\arg z$ – головне значення $\operatorname{Arg} z$, що визначається умовами

$$-\pi < \arg z \le \pi. \tag{7}$$

Модуль і аргумент комплексного числа є параметрами, які визначають тригонометричну та показникову форму запису комплексних чисел:

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – **тригонометрична форма (*goniometric form*);**

$z = \rho e^{i\varphi}$ – **показникова форма (*exponential form*)**.

При виконанні алгебраїчних дій над комплексними числами потрібно вміти переходити від алгебраїчної форми запису до тригонометричної (показникової) і навпаки. Для цього використовуються формули переходу, очевидні з рис. 1.

Формули переходу від тригонометричної (показникової) форми запису до алгебраїчної:

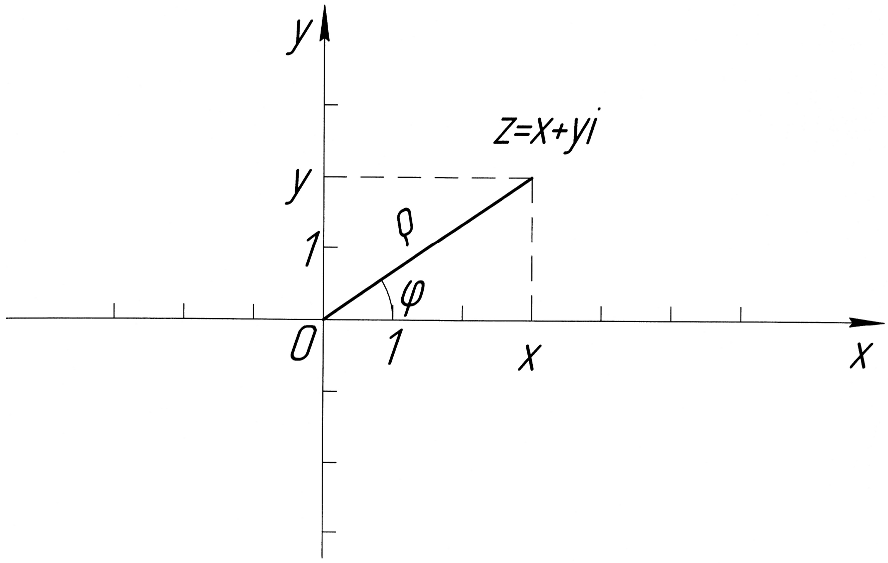


Рисунок 1

$$\rho,\varphi \to x,y \Rightarrow \begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{8}$$

Формули переходу від алгебраїчної форми запису до тригонометричної (показникової):

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2};$$

$$x,y \to \rho,\varphi \Rightarrow \quad \varphi=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x>0, \\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x<0, y\geq 0, \\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x<0, y<0, \\ \dfrac{\pi}{2}, x=0, y>0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, x=0, y<0. \end{cases} \tag{9}$$

Два комплексні числа z_1 і z_2 рівні тоді і лише тоді, коли їх модулі рівні, а їх аргументи або рівні, або відрізняються на величину, що кратна 2π:

$$\begin{cases} |z_1|=|z_2|, \\ \operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg} z_2+2\pi k, (k=0,\pm1,\pm2...), \end{cases} \Leftrightarrow z_1=z_2. \tag{10}$$

Дійсна та уявна частини комплексного числа виражаються через спряжені комплексні числа таким чином:

$$\operatorname{Re} z=\frac{z+\overline{z}}{2},\ \operatorname{Im} z=\frac{z-\overline{z}}{2i}. \tag{11}$$

Приклад 1. Подати в тригонометричній та показниковій формах число $z = 2\sqrt{3} + 2i$.

Розв'язання.

З алгебраїчної форми числа визначаємо:

$$x = 2\sqrt{3};\ y = 2.$$

Тоді

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12+4} = 4;$$

$$\varphi = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

Отже,

$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ – *тригонометрична форма* z;

$z = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$ – *показникова форма* z.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^2 + 4x + 13 = 0$.

Розв'язання.

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 4\cdot 13 = -36;$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}\cdot\sqrt{-1}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i.$$

Відповідь: $x_1 = -2 + 3i,\ x_2 = -2 - 3i$.

Приклад 3. При яких дійсних значеннях x *та* y *виконується рівність* $x(2-i) + y(2i-1) = 4 - 5i$?

Розв'язання.

Розкриваючи дужки в лівій частині рівняння та групуючи дійсні та уявні частини, отримаємо

$$(2x - y) + i(-x + 2y) = 4 - 5i.$$

Використовуючи означення рівності комплексних чисел, прирівняємо дійсні та уявні частини справа та зліва:

$$\begin{cases} 2x - y = 4; \\ -x + 2y = -5. \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння на 2 та додамо його до першого. Отримаємо

$$\begin{cases} 3y = -6; \\ x = 2y + 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = -2. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 1,\ y = -2$.

В алгебраїчній формі запису дії над комплексними числами потрібно виконувати, вважаючи що i звичайний символьний множник, єдина його особливість, що $i^2 = -1$.

Додавання і віднімання комплексних чисел виконується лише в алгебраїчній формі. Отже, якщо комплексні числа задано в тригонометричній (показниковій) формі, перше, що необхідно зробити, щоб виконати операцію додавання або віднімання, використовуючи формули переходу перейти до алгебраїчної форми запису.

Додавання

$$\begin{aligned} z_1 = x_1 + iy_1, \\ z_2 = x_2 + iy_2; \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (iy_1 + iy_2) = \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \end{aligned} \tag{12}$$

Віднімання

$$\begin{aligned} z_1 = x_1 + iy_1, \\ z_2 = x_2 + iy_2; \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + (iy_1 - iy_2) = \\ &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \end{aligned} \tag{13}$$

Приклад 4.

$$\begin{aligned} z_1 = 2 - 3i \\ z_2 = -7 + 5i \end{aligned} \Rightarrow z_1 + z_2 = 2 - 3i - 7 + 5i = (2 - 7) + i(-3 + 5) = -5 + 2i.$$

Операції множення і ділення можна виконувати у будь-якій формі запису (бажано використовувати ту форму запису, у якій задано обидва комплексні числа).

Множення

а) алгебраїчна форма запису

$$\begin{aligned} z_1 = x_1 + iy_1, \\ z_2 = x_2 + iy_2; \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + y_1y_2i^2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (ix_1y_2 + ix_2y_1) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned} \tag{14}$$

б) тригонометрична форма запису

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right), \\ z_2 &= \rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right); \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\cdot\rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = \\ &= \rho_1\rho_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right). \end{aligned} \tag{15}$$

в) показникова форма запису

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1 e^{i\varphi_1}, \\ z_2 &= \rho_2 e^{i\varphi_2}; \end{aligned} \Rightarrow z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1}\cdot\rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \tag{16}$$

Ділення

а) алгебраїчна форма запису

Для ділення двох комплексних чисел в алгебраїчній формі необхідно і ділене, і дільник помножити на спряжене до дільника комплексне число.

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1, \\ z_2 &= x_2 + iy_2; \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2i^2}{x_2^2+y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{ix_2y_1 - ix_1y_2}{x_2^2+y_2^2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \end{aligned} \tag{17}$$

б) тригонометрична форма запису

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right), \\ z_2 &= \rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right); \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{\rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right). \tag{18}$$

в) показникова форма запису

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1 e^{i\varphi_1}, \\ z_2 &= \rho_2 e^{i\varphi_2}; \end{aligned} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{19}$$

Приклад 5. Обчислити $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2-\sqrt{3}i}$.

Розв'язання.

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2-\sqrt{3}i}\cdot\frac{2+\sqrt{3}i}{2+\sqrt{3}i} = \frac{2\sqrt{3}+2i+3i-\sqrt{3}}{4+3} = \frac{\sqrt{3}}{7} + \frac{5}{7}i.$$

Операції піднесення до степеня та пошук кореня виконуються лише у тригонометричній (показниковій) формі запису комплексного числа.

Піднесення до натурального степеня

а) тригонометрична форма

$$z=\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\ \Rightarrow\ z^n=\rho^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right). \tag{20}$$

б) показникова форма

$$z=\rho e^{\varphi i}\Rightarrow z^n=\rho^n e^{n\varphi i}. \tag{21}$$

Знаходження кореня

а) тригонометрична форма

$$z=\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,...n-1. \tag{22}$$

б) показникова форма

$$z=\rho e^{\varphi i}\Rightarrow\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}i},k=0,1,2...n-1. \tag{23}$$

Приклад 6. Обчислити $\left(-\sqrt{3}-i\right)^5$.

Розв'язання.

Визначимо тригонометричну форму комплексного числа, що підноситься до степеня. Згідно з умовою $x=-\sqrt{3},\ y=-1$. *Тоді,*

$$\rho=\sqrt{3+1}=2;$$

$$\varphi=-\pi+arctg\frac{y}{x}=-\pi+arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{5\pi}{6}.$$

Отже,

$$\left(-\sqrt{3}-i\right)^5=\left(2\cdot\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)\right)^5=$$

$$=2^5\left(\cos\left(-5\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-5\frac{5\pi}{6}\right)\right)=32\left(\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=32\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=32\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=16\sqrt{3}-16i.$$

Завдання для розв'язання

1. Подати в тригонометричній та показниковій формах:

а) $z = 1 + i$;
б) $z = -\sqrt{3} - i$;
в) $z = 2i$;
г) $z = -5$.

2. Знайти модуль і головне значення аргументу комплексних чисел

а) $z = 4 + 3i$;
б) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$;
в) $z = \cos\alpha - i\sin\alpha$.

3. Подати в алгебраїчній формі

а) $z = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$;
б) $|z| = 1, \arg z = \pi$;
в) $z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right)$.

4. Знайти корені квадратних рівнянь:

а) $x^2 - 2x + 2 = 0$;
б) $x^2 + 6x + 13 = 0$;
в) $x^2 + 16 = 0$.

5. Знайти z, якщо

а) $z = z_1 z_2,\ z_1 = (1+i),\ z_2 = (1-3i)$;
б) $z = \dfrac{2}{-i} + i \cdot \overline{(1-i)}$;
в) $z = \dfrac{2}{1+i} - \dfrac{1-i}{1+i}\dfrac{2-2i}{1-2i}$;
г) $z = \left(-\sqrt{3} - i\right)^5$;
д) $z = \sqrt[3]{1+i}$;
е) $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$;
ж) $z^2 + i = 0$.

6. Знайти дійсні розв'язки рівнянь:

а) $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$;
б) $(x - iy)(a - ib) = i^5$, де a, b – задані дійсні числа, $|a| \neq |b|$;
в) $\dfrac{1}{z-i} + \dfrac{2+i}{1+i} = \sqrt{2}$, де $z = x + iy$.

7. Знайти усі комплексні числа, що задовольняють умову $\overline{z} = z^2$.

2 ГЕОМЕТРИЧНІ ПОНЯТТЯ

Будь-яку область, яка містить у собі деяку точку z_0, називають околом **(окіл – *neighborhood*)** цієї точки. Здебільшого за окіл беруть круг радіусом r з центром у т. z_0, такий окіл називається r-околом точки z_0. Під околом нескінченно віддаленої точки розуміють область, що знаходиться зовні довільного круга з центром у початку координат.

Якщо існує r-окіл точки z_0, який повністю належить області D, то точка z_0 називається внутрішньою точкою **(внутрішня точка – *internal point*)** області D.

Якщо існує r окіл точки z_0, який повністю не належить області D, то z_0 – **зовнішня точка (*outside point*)** області D.

Якщо для будь-якого r-околу точки z_0 існують точки, які належать області D і точки, які їй не належать, то точка z_0 називається межовою або точкою границі **(точка границі – *frontier point*)** області D.

Якщо область складається лише з внутрішніх точок, то така область є відкритою **(відкрита область – *open domain*)** (позначається D). Якщо з внутрішніх точок і точок границі – замкненою **(замкнена область – *closed domain*)** (позначається $\bar{D}$).

Область D називається однозв’язною **(однозв'язна область – *simply connected domain*),** якщо будь-яка проста замкнена крива, яка повністю належить області D, може бути стягнена у точку шляхом неперервних деформацій без виведення з цієї області. Приклади однозв'язних областей наведені на рис. 2. Всі інші області називаються багатозв'язними **(багатозв'язна область – *multiply-connected domain*)** (рис. 3). Границя багатозв'язної області не може складатись з однієї замкненої кривої.

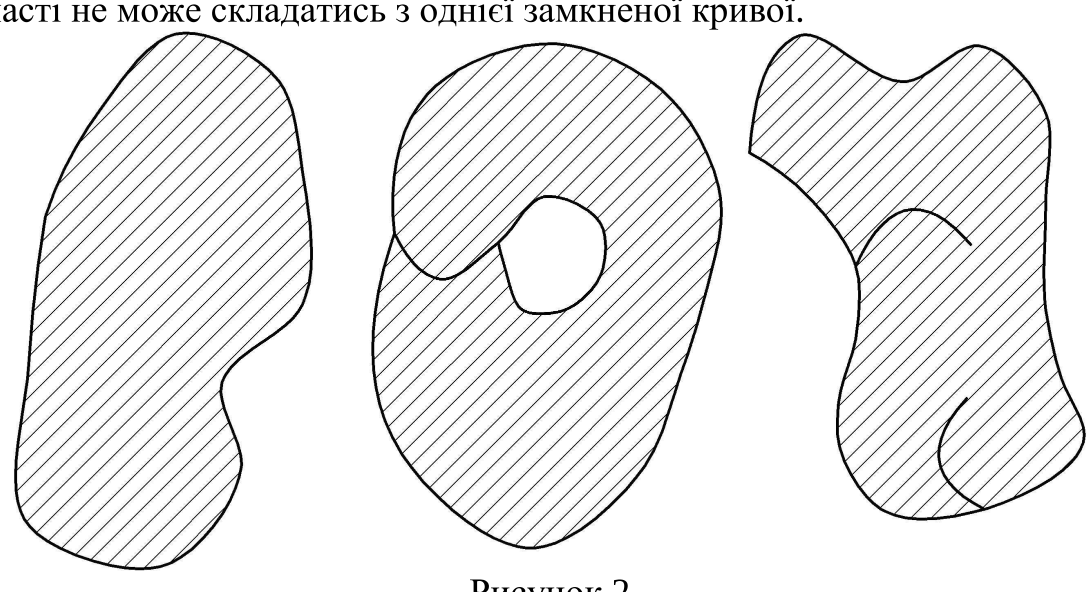


Рисунок 2

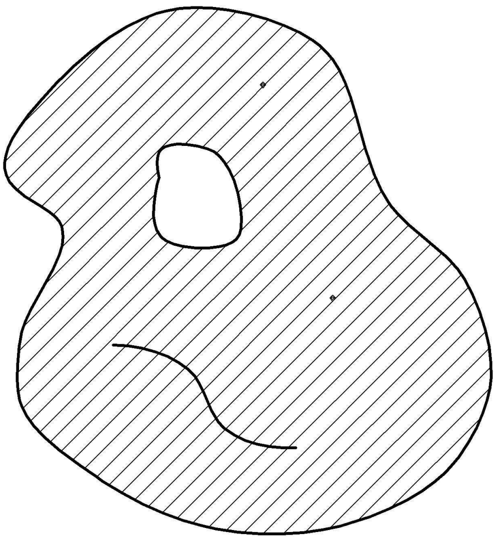


Рисунок 3

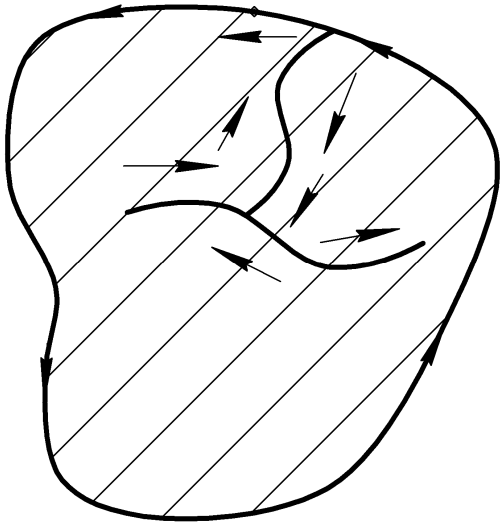


Рисунок 4

Границя області складається із замкнених ліній, незамкнених ліній, які називаються розрізами **(розріз – *cut set*)** і окремих точок, що мають назву виколоті точки **(виколота точка – *pricked point*)**. Кількість зв'язаних частин, якими будується границя області, визначає порядок зв'язності області.

Розглянемо однозв'язну область (рис. 4). Виберемо на границі області деяку точку і, починаючи з неї, будемо обходити границю області. За додатний напрям обходу границі однозв'язної області беруть той напрям, при якому область залишається весь час зліва. По розрізах обхід виконується двічі в різних напрямах (рис. 4).

Рівність

$$f_1(z) = f_2(z) \tag{24}$$

визначає на комплексній площині лінію або скінченну кількість точок. Для їх побудови на комплексній площині необхідно замість z у (24) підставити алгебраїчну форму запису комплексного числа $x+iy$ або його тригонометричну (показникову) форму. У результаті отримаємо рівняння лінії із дійсними аргументами x, y (рівняння лінії в декартовій системі координат Oxy, вісь x якої збігається із дійсною віссю комплексної площини, а вісь y – із уявною) або ρ, φ (рівняння лінії в полярній системі координат, полярна вісь якої збігається із дійсною віссю, а полюс – із перетином дійсної та уявної осей).

Приклад 7. Побудувати лінію на комплексній площині, що визначається рівнянням

$$|z-2+i| = 3. \tag{25}$$

Розв'язання.

Підставимо у (25) $z = x+iy$

$$|z-2+i| = |x+iy-2+i| = |(x-2)+i(y+1)| = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = 3.$$

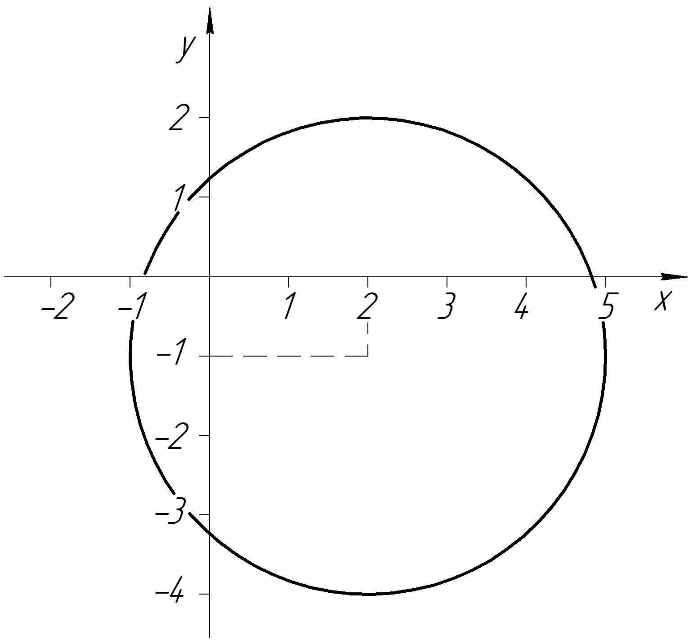


Рисунок 5

Звідки

$(x-2)^2+(y+1)^2=3^2$ – *це рівняння кола, із центром у точці* $(2;-1)$ *радіусом* $R=3$ *(рис. 5).*

Рівнянням

$$|z-z_0|=R \tag{26}$$

(де z – комплексна змінна; $z_0=x_0+iy_0$ – довільне комплексне число; R – невід'ємне дійсне число) на комплексній площині задається коло з центром у точці $(x_0;y_0)$ і радіусом R. Наприклад, $|z+1-3i|=2$ – рівняння кола з центром у точці $(-1;3)$ і радіусом 2.

Здебільшого множина точок на комплексній площині, що задовільняють нерівності

$$f_1(z)<f_2(z) \tag{27}$$

(замість $<$ може бути $>, \le, \ge$) є областю (тобто деякою частиною комплексної площини). Для побудови цієї області користуємось таким алгоритмом.

1. Замість z у (27) підставляємо алгебраїчну форму запису комплексного числа $x+iy$ або його тригонометричну (показникову) форму. У результаті отримаємо

$$\varphi_1(x,y)<\varphi_2(x,y) \tag{28}$$

або

$$\psi_1(\rho,\varphi)<\psi_2(\rho,\varphi). \tag{29}$$

2. Будуємо границю області. Для цього в нерівності (28) (або (29) замінимо знак нерівності на «$=$». У результаті отримаємо рівняння границі області

$$\varphi_1(x,y)=\varphi_2(x,y) \tag{30}$$

або

$$\psi_1(\rho,\varphi)=\psi_2(\rho,\varphi). \tag{31}$$

Якщо нерівність (27) строга, то границя не входить до шуканої області і її потрібно побудувати штриховою лінією. У випадку нестрогої нерівності (27) границя входить до шуканої області і її потрібно побудувати суцільною лінією.

3. Границя розбила усю комплексну площину на декілька областей, які ми пронумеруємо: I, II, III …. Ми повинні заштрихувати лише ті, у яких виконується нерівність (28) (або (29). Для цього у кожній області вибираємо по одній точці. По черзі підставляємо координати точок у нерівність (28) (або (29). Якщо у результаті отримаємо правильну нерівність, то заштриховуємо усю область, якій належить точка – у цій області виконується нерівність (27). У іншому випадку область не заштриховуємо.

4. Заштрихована частина комплексної площини і є шуканою множиною точок, які визначаються нерівністю (27).

Зауваження: запропонований алгоритм не можна застосовувати у випадку, якщо існують точки координатної площини, у яких хоча б одна з функцій $\varphi_1(x,y)$ або $\varphi_2(x,y)$ ($\psi_1(\rho,\varphi)$ або $\psi_2(\rho,\varphi)$) не визначена.

Приклад 8. Побудувати множину точок на комплексній площині, що визначаються нерівністю

$$\operatorname{Im} z^2 > 2. \tag{32}$$

Розв'язання.

Підставляємо у (32) $z = x + iy$

$$\operatorname{Im} z^2 = \operatorname{Im}(x+iy)^2 = \operatorname{Im}(x^2+2xyi-y^2) = 2xy;$$

$$2xy > 2. \tag{33}$$

Визначимо рівняння границі області. Підставимо «=» замість знака нерівності у (33). Отже, рівняння границі

$$2xy = 2;$$

$$xy = 1.$$

Ми визначили, що границя – гіпербола, яка розбиває комплексну площину на три області: I, II, III (рис. 6). Враховуючи, що нерівність (32) строга, границю ми побудували штриховою лінією.

Вибираємо у кожній області точку і підставляємо її координати у нерівність (33)

I область – точка $A(2;2)$*:*

$$2\cdot 2\cdot 2 > 2;$$

$8 > 2$ *– нерівність правильна, тому всю I область заштриховуємо.*

II область – точка $O(0;0)$*:*

$0 > 2$ *– нерівність неправильна, тому II область не заштриховуємо.*

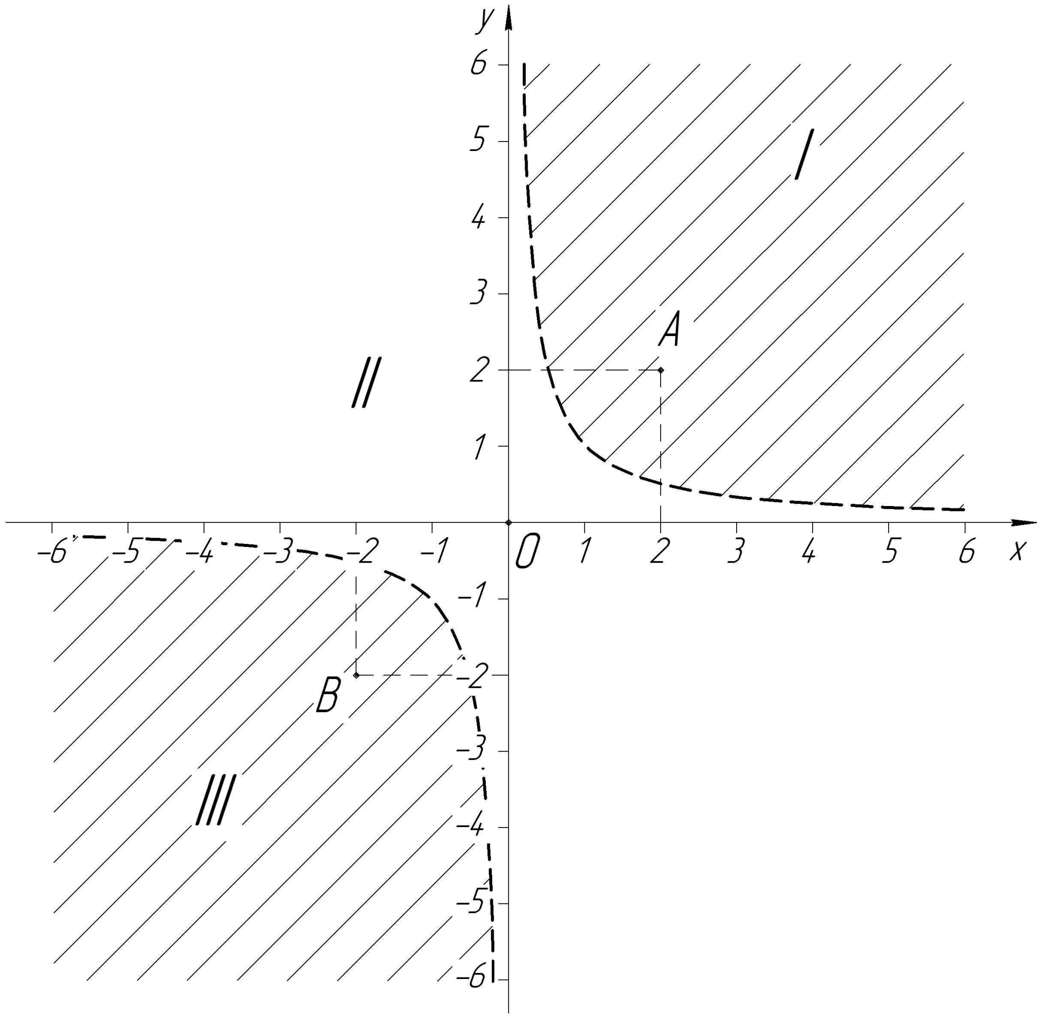


Рисунок 6

III область – точка $B(-2;-2)$

$8 > 2$ *– III область заштриховуємо.*

Заштрихована множина точок (рис. 6) – шукана множина, яка визначається нерівністю (32).

Нерівність

$$|z - z_0| < R \tag{34}$$

(де z – комплексна змінна; $z_0 = x_0 + iy_0$ – довільне комплексне число; R – невід'ємне дійсне число) визначає на комплексній площині круг з центром у точці (x_0, y_0) і радіусом R.

Множина точок, що визначаються нерівністю

$$|z - z_0| > r \tag{35}$$

(де z – комплексна змінна; $z_0 = x_0 + iy_0$ – довільне комплексне число; r – невід'ємне дійсне число), знаходиться ззовні круга з центром у точці (x_0, y_0) і радіусом r.

Завдання для розв'язання

8. Зобразити на комплексній площині лінії, що визначаються рівнянням:

а) $|z| = 2$;

б) $|z + 2 - i| = 3$;

в) $\operatorname{Re}\overline{z}^2 = 1$;

г) $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2 - z}\right) = 2 - \operatorname{Im} z$;

д) $z^2 + \overline{z}^2 = 1$;

е) $|z - i| + |z + i| = 4$;

ж) $|z| - \operatorname{Re} z = 12$.

9. Зобразити на комплексній площині області, що задовольняють такі нерівності:

а) $|z + 2| > 1$;

б) $\left|\frac{1}{z}\right| \ge 1,\ z \ne 0$;

в) $-1 < \operatorname{Im} z < 1$;

г) $2 < |z - 1 + 2i| < 4$;

д) $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{6}$;

е) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \le 1$;

ж) $4 \le |z - 1| + |z + 1| \le 8$;

и) $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$;

к) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < -\frac{1}{2}$.

10. Написати у комплексній формі рівняння кола $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

3 ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ВИДІЛЕННЯ ДІЙСНОЇ І УЯВНОЇ ЧАСТИНИ

Розглянемо дві площини комплексних чисел $z = x + iy$ та $w = u + iv$ (рис. 7). Розглянемо деяку множину G точок у площині z і множину E у площині w.

Якщо кожному числу z з області G за деяким законом поставлено у відповідність певне комплексне число $w \in E$, то говорять, що на множині G задано однозначну функцію **(функція – *function*)** комплексної змінної, яка відображає множину G у множину E. Символьно це позначають $w = f(z)$.

Множину G називають множиною визначення **(множина визначення – *domain*)** функції $f(z)$. Якщо кожна точка множини E є значенням функції, то E – **множина значень (*range*)** цієї функції або образ множини G, заданий за допомогою функції $f(z)$.

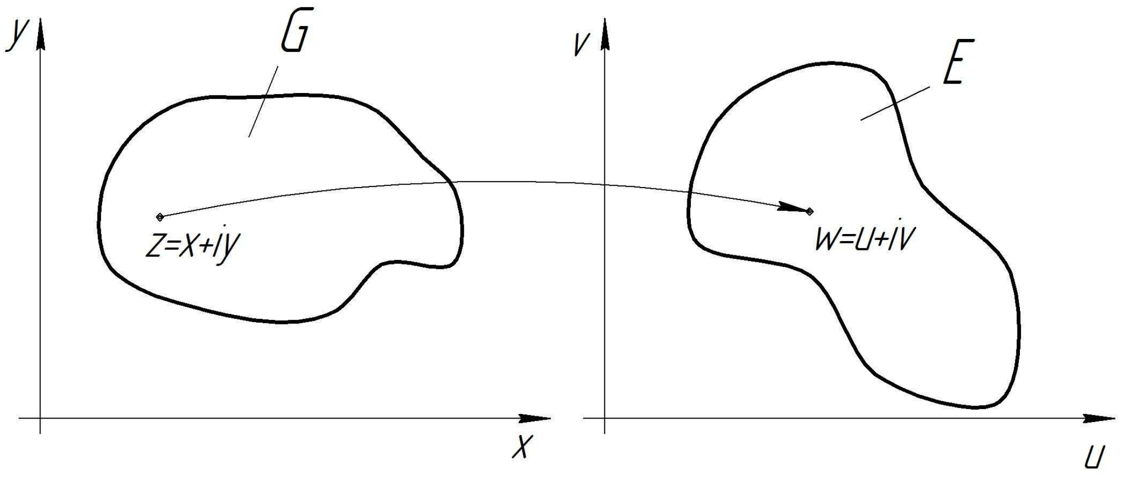


Рисунок 7 – Геометрична інтерпретація функції комплексної змінної

Якщо функція $w = f(z)$ однозначна на множині E і при цьому двом різним точкам множини G відповідає дві різні точки множини E, то таке відображення називають взаємооднозначним або однолистим.

Будь-яку функцію комплексної змінної $f(z)$ можна записати у вигляді $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $(x, y) \in G$, де $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z)$, $v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z)$ – функції дійсних змінних x і y. Ця операція називається операцією виділення дійсної та уявної частини функції комплексної змінної.

Елементарні функції комплексної змінної

1. Показникова функція

$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y),$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \text{ – формула Ейлера}$$

2. Тригонометричні функції

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \ \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

3. Гіперболічні функції

$$\mathrm{ch}\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \ \mathrm{sh}\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},$$

$$\mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}, \ \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.$$

4. Логарифмічна функція

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k \text{ – довільне ціле число;}$$

головне значення логарифма:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

5. Узагальнена показникова функція:

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a},$$

де a, z – довільні комплексні числа, $a \neq 0$.

6. Узагальнена степенева функція:

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z},$$

де α, z – довільні комплексні числа.

7. Обернені тригонометричні функції

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\frac{z + i}{z - i}.$$

Головні значення обернених тригонометричних функцій $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ отримаємо, якщо взяти головні значення відповідних логарифмічних функцій.

Алгоритм виділення дійсної і уявної частини функції комплексної змінної

1. Замість z підставляємо алгебраїчну форму запису комплексного числа $x + iy$.

2. За допомогою елементарних алгебраїчних дій над комплексними числами (бажано в алгебраїчній формі) та таблиці елементарних функцій, зводимо функцію до скінченної кількості доданків, кожен з яких пропорційний або дійсний або уявний одиниці.

3. Групуємо окремо доданки, які пропорційні дійсній і уявній одиниці «i», «i» виносимо за дужки.

Приклад 9. Виділити дійсну та уявну частину функції $w = z^2$.

Розв'язання.

$$w = z^2 = \left| z = x + iy \right| = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi + i^2 y^2 =$$

$$= x^2 + 2xyi - y^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2xyi,$$

$u(x,y) = x^2 - y^2$ – *дійсна частина;*
$v(x,y) = 2xy$ – *уявна частина.*

Приклад 10. Виділити дійсну і уявну частину функції $w = ze^{-\bar{z}}$ *та обчислити значення цієї функції у точці* $z_0 = i$.

Розв'язання.

$$w = ze^{-\bar{z}} = \left| \begin{matrix} z = x+iy \\ \bar{z} = x - iy \end{matrix} \right| = (x+iy)e^{-(x-iy)} = (x+iy)e^{-x+iy} =$$

$$= (x+iy)e^{-x}(\cos y + i\sin y) = xe^{-x}\cos y + ixe^{-x}\sin y + iye^{-x}\cos y +$$

$$+ i^2 ye^{-x}\sin y = \left(xe^{-x}\cos y - ye^{-x}\sin y\right) + \left(ixe^{-x}\sin y + iye^{-x}\cos y\right) =$$

$$= \left(xe^{-x}\cos y - ye^{-x}\sin y\right) + i\left(xe^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y\right);$$

$u(x,y) = xe^{-x}\cos y - ye^{-x}\sin y$;

$v(x,y) = xe^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y$.

Знайдемо значення функції w *в точці* $z_0 = i$

$$w(z) = \left(xe^{-x}\cos y - ye^{-x}\sin y\right) + i\left(xe^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y\right) \Rightarrow$$

$$w(i) = \left| z_0 = i \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix} \right| = \left(0 \cdot e^0 \cos 1 - 1 \cdot e^0 \sin 1\right) +$$

$$+ i\left(0 \cdot e^0 \sin 1 + 1 \cdot e^0 \cos 1\right) = -\sin 1 + i\cos 1.$$

Завдання для розв'язання

11. Знайти дійсну $u(x,y)$ та уявну $v(x,y)$ частини ФКЗ $\omega(z)$

а) $w = 2z - 1$;
б) $w = z^2 + \operatorname{Re} z$;
в) $w = z^3 - i\bar{z}$;
г) $w = \dfrac{|z+i|}{z-i}$;
д) $w = \dfrac{iz+1}{i+\bar{z}}$;
е) $w = e^{z^2}$;
ж) $w = \sin 3z$;
и) $w = ch(z-i)$.

12. Розв'язати рівняння $e^{-z} + 1 = 0$.

4 ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ТА АНАЛІТИЧНІСТЬ

Нехай функція $w = f(z)$ визначена і однозначна в деякому околі точки $z_0 = x_0 + iy_0$, крім, можливо, самої точки z_0.

Говорять, що функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в точці z_0 має границю **(границя – *limit*)** (позн. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$), якщо існують границі $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0$, при цьому

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = u_0 + iv_0. \tag{36}$$

Правила обчислення границь

1. $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z) \pm g(z)\right] = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \pm \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$;
2. $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)\cdot g(z)\right] = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$;
3. $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}, \left(\lim\limits_{z\to z_0} g(z) \neq 0\right).$

Функція комплексної змінної $w = f(z)$ називається неперервною **(неперервна функція – *continuous function*)** в точці z_0, якщо вона визначена в деякому околі точки z_0 (включаючи саму точку z_0) і виконується рівність

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Очевидно, що для неперервності функції $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ необхідно і достатньо, аби функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ були неперервними в точці (x_0, y_0).

Сума, різниця, добуток, частка неперервних функція також є неперервною функцією (крім випадку, коли знаменник перетворюється на 0).

Функція називається неперервною в області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Нехай функція $f(z)$ визначена і однозначна в деякому околі точки z. Говорять, що функція диференційована в точці z, якщо існує границя

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \tag{37}$$

ця границя називається похідною **(похідна – *derivative*)** функції комплексної змінної.

Теорема 1. Нехай функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ визначена в деякому околі точки z, до того ж у цій точці функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ диференційовні, тоді для диференційовності функції $f(z)$ у точці z необхідно і достатньо, щоб у цій точці виконувались умови

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{38}$$

У літературі умови (38) називають умовами Даламбера-Ейлера або умовами Коші-Рімана. У цьому навчальному посібнику надалі будемо використовувати назву умови Коші-Рімана.

Доведення. Доведемо спочатку необхідність. Нехай існує

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \tag{39}$$

Виділило дійсну і уявну частини чисельника і знаменника (39)

$$\begin{aligned} &f(z+\Delta z)-f(z)=\left|f(z)=u(x;y)+iv(x;y)\right|=u(x+\Delta x;y+\Delta y)+\\ &+iv(x+\Delta x;y+\Delta y)-u(x;y)-iv(x;y)=\\ &=u(x+\Delta x;y+\Delta y)-u(x;y)+i(v(x+\Delta x;y+\Delta y)-v(x;y)); \end{aligned} \tag{40}$$

$$\Delta z=\Delta x+i\Delta y. \tag{41}$$

Границя (39) має існувати за будь-якого способу прямування Δz до нуля і дорівнювати одному і тому самому комплексному числу $f'(z)$. Зокрема це має справджуватись, коли $\Delta y=0\Rightarrow\Delta z=\Delta x$

$$\begin{aligned} &f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x;y)-u(x;y)+i(v(x+\Delta x;y)-v(x;y))}{\Delta x}=\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x;y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x;y)-v(x;y)}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \tag{42}$$

Знайдемо ту саму границю, припускаючи, що $\Delta z=0+\Delta yi=\Delta yi$. Дістанемо

$$\begin{aligned} &f'(x)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x;y+\Delta y)-u(x;y)+i(v(x;y+\Delta y)-v(x;y))}{\Delta yi}=\\ &=-i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x;y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x;y+\Delta y)-v(x;y)}{\Delta y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \tag{43}$$

Враховуючи незалежність границі від шляху прямування з виразів (42) і (43), отримаємо рівність

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}i. \tag{44}$$

Враховуючи означення рівності двох комплексних чисел, отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{45}$$

Доведемо достатність. За означенням диференціала функції двох дійсних змінних виконуються рівності

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x; y+\Delta y)-u(x;y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\alpha_1|\Delta z|, \\ v(x+\Delta x; y+\Delta y)-v(x;y)=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\alpha_2|\Delta z|, \end{aligned} \qquad (46)$$

де $|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, α_1 і α_2 прямують до нуля при $\Delta z\to 0$. Тоді приріст функції $f(z)$ визначається

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\alpha_1|\Delta z|+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\alpha_2|\Delta z|\right)=$$

$$=dx\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+idy\left(\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)+(\alpha_1+i\alpha_2)|\Delta z|.$$

Якщо врахувати умови Коші-Рімана (38), то отримаємо

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z)-f(z)=dx\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+idy\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+(\alpha_1+i\alpha_2)|\Delta z|= \\ =\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(dx+idy)+(\alpha_1+i\alpha_2)|\Delta z|=A\Delta z+\eta|\Delta z|, \end{aligned} \qquad (47)$$

де $A=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ – функція, яка не залежить від Δz; $\eta=\alpha_1+i\alpha_2$ – прямує до нуля при $\Delta z\to 0$.

Поділивши співвідношення (47) на Δz, бачимо, що границя

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{A\Delta z+\eta|\Delta z|}{\Delta z}=A \qquad (48)$$

існує. Теорему доведено.

Наслідки з теореми:

1. З урахуванням умов Коші-Рімана похідну $f'(z)$ можна визначити за однією з формул

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad (49)$$

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}; \qquad (50)$$

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad (51)$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (52)$$

2. Якщо для функції $f(z)$ в деякій точці z_0 умови Коші-Рімана (38) не виконуються, то похідна $f'(z)$ у цій точці не існує.

Приклад 11. Записати вираз для похідної функції $w = z^3$ та обчислити значення похідної у точці $z_0 = 2-3i$.

Розв'язання.

Насамперед необхідно визначити дійсну та уявну частини функції

$$w = z^3 = \left| z = x+iy \right| = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 =$$

$$= \left| \begin{matrix} i^2 = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = -i \end{matrix} \right| = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(3x^2y - y^3\right).$$

Тоді

$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$;

$v(x,y) = 3x^2y - y^3$.

Перевіримо виконання умов Коші-Рімана

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2; \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2, \end{matrix}\right. \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ – перша умова Коші-Рімана виконується.}$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -6xy; \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 6xy, \end{matrix}\right. \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ – друга умова Коші-Рімана виконується.}$$

Обидві умови Коші-Рімана виконуються на усій комплексній площині, а це означає, що похідна у будь-якій точці визначається виразом

$$f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + 6xyi.$$

Обчислимо значення похідної у точці $z_0 = 2-3i$

$$f'(2-3i) = \left| \begin{matrix} x = 2 \\ y = -3 \end{matrix} \right| = 3\cdot 2^2 - 3\cdot(-3)^2 + 6\cdot 2\cdot(-3)i = -15 - 36i.$$

Правила диференціювання функцій комплексної змінної

$$\left(f(z) \pm g(z)\right)' = f'(z) \pm g'(z); \quad (53)$$

$$\left(f(z)g(z)\right)' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z); \quad (54)$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}; \quad (55)$$

$$\left(f(g(z))\right)' = f'(g)g'(z). \quad (56)$$

Функція $f(z)$ називається аналітичною **(аналітична функція – *analytic function*)** в області D, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області (в кожній точці області виконуються умови Коші-Рімана). Наголосимо, що дане означення аналітичної функції передбачає її однозначність в області D, оскільки поняття границі й похідної визначені раніше лише для однозначних функцій.

Приклад 12. Показати, що функція $w = z^2$ аналітична на усій комплексній площині.

Розв'язання.

По-перше, функція $w = z^2$ однозначна. Перевіримо виконання умов Коші-Рімана. Користуючись розв'язанням прикладу 9:

$$u(x, y) = x^2 - y^2;$$

$$v(x, y) = 2xy.$$

Тоді

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x, \end{aligned}\right. \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ – перша умова виконується,}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y, \end{aligned}\right. \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ – друга умова виконується.}$$

Отже, умови Коші-Рімана виконуються в усіх точках комплексної площини. Таким чином, функція $w = z^2$ є аналітичною на всій комплексній площині.

Приклад 13. Показати, що при $z \neq 0$ функція $w = z\,\mathrm{Re}\,z$ не має похідних.

Розв'язання.

Виділимо дійсну та уявну частини

$$w = z\,\mathrm{Re}\,z = \left| \begin{matrix} z = x + iy \\ \end{matrix} \right| = (x + i\,y)\,x = x^2 + i\,x\,y.$$

Тоді

$u(x,\ y) = x^2,$

$v(x,\ y) = x\ y.$

Перевіримо виконання умов Коші-Рімана:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=2x;\\&\frac{\partial v}{\partial y}=x,\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ \textit{лише при}\ x=0;$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial y}=0;\\&\frac{\partial v}{\partial x}=y,\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\ \textit{лише при}\ y=0.$$

Отже, умови Коші-Рімана виконуються лише у точці $z=0$.

Зауваження. Функція $w=z\operatorname{Re} z$ у точці у точці $z=0$ диференційовна, але не аналітична, тому що вона не диференційовна в околі цієї точки.

Відновлення аналітичної функції

Використовуючи умови Коші-Рімана аналітичну функцію можна відновити за відомою її дійсною або уявною частинами.

Приклад 14. Відновити аналітичну функцію $\omega=f(z)$, *якщо відома її дійсна частина* $u(x;y)=2e^x\cos y$ *і додаткова умова* $f(0)=2$.

Розв'язання.

Використаємо першу умову Коші-Рімана: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2e^x\cos y\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=2e^x\cos y.$$

$$v=\int 2e^x\cos y\,dy+\varphi(x)=2e^x\int\cos y\,dy+\varphi(x)=2e^x\sin y+\varphi(x),$$

де $\varphi(x)$ – *довільна функція від* x.

Використаємо другу умову $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial y}=-2e^x\sin y;\\&\frac{\partial v}{\partial x}=2e^x\sin y-\varphi'(x),\end{aligned}\right\}\Rightarrow -2e^x\sin y=-2e^x\sin y-\varphi'(x);$$

$$\varphi'(x)=0;$$

$$\varphi(x)=\int 0\,dx+C=C.$$

У результаті отримали множину однопараметричних аналітичних функцій, які мають задану дійсну частину:

$$f(z)=2e^x\cos y+i(2e^x\sin y+C). \qquad (57)$$

Для визначення шуканої функції необхідно скористатись додатковою умовою $f(0)=2$. *Згідно з (57)*

$$f(0)=\begin{vmatrix} x=0 \\ y=0 \end{vmatrix}=2e^0\cos 0+i\left(2e^0\sin 0+C\right)=2+Ci;$$

$$2+Ci=2\Rightarrow C=0.$$

Отже, шукана аналітична функція

$$f(z)=2e^x\cos y+i\,2e^x\sin y\,.$$

Крім того, аналітичну в околі z_0 функцію $f(z)$ відновити, використовуючи формули:

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2},\frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right)-\overline{C_0}; \tag{58}$$

$$f(z)=2iv\left(\frac{z+\overline{z_0}}{2},\frac{z-\overline{z_0}}{2i}\right)+\overline{C_0}, \tag{59}$$

де $f(z_0)=C_0$ – додаткова умова.

Приклад 15. Відновити аналітичну функцію, якщо $u(x,y)=1-e^x\sin y,\ f(0)=1+i$.

Розв'язання.

$$\begin{matrix} z_0=0; \\ c_0=1+i, \end{matrix}\ \Rightarrow\ \begin{matrix} \overline{z_0}=0; \\ \overline{c_0}=1-i. \end{matrix}$$

$$u\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2},\frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right)=u\left(\frac{z-0}{2},\frac{z-0}{2i}\right)=u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)=1-e^x\sin y\Big|_{x=\frac{z}{2},y=\frac{z}{2i}}=$$

$$=1-e^{\frac{z}{2}}\sin\frac{z}{2i}=\left|\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right|=1-\frac{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}{2i}e^{\frac{z}{2}}=1-\frac{e^2-1}{2i};$$

$$f(z)=2\left(1-\frac{e^z-1}{2i}\right)-1+i=1+i-\frac{e^z-1}{i}=\frac{i-1-e^z+1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}=1+ie^z.$$

Отже, шукана функція $f(z)=1+ie^z$.

Відомо, що для функцій дійсних змінних із факту існування першої похідної ще не випливає існування похідних вищих порядків. Для функцій комплексної змінної справедлива така теорема.

Теорема 2. Якщо однозначна функція $f(z)$ має скрізь в області D першу похідну, то вона в цій області має похідні будь-якого порядку.

Геометричний зміст модуля та аргументу похідної

Якщо функція $f(z)$ аналітична у точці z_0 і $f'(z) \neq 0$, тоді $|f'(z)|$ дорівнює коефіцієнту розтягу r у точці z_0 при відображенні $w = f(z)$ площини z на площину w. При $|f'(z)| > 1$ має місце розтяг, а при $|f'(z)| < 1$ – стиск.

Аргумент похідної $f'(z)$ геометрично дорівнює куту φ, на який потрібно повернути дотичну у точці z_0 до довільної кривої на площині z, що проходить через точку z_0, щоб отримати напрямок дотичної у точці $w_0 = f(z_0)$ до образу цієї кривої на площині w при відображенні $w = f(z)$. Якщо $\arg f'(z) > 0$, то поворот відбувається проти годинникової стрілки, а при $\arg f'(z) < 0$ – за годинниковою.

Приклад 16. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту при відображенні $w = z^2$ у точці $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Розв'язання.

У прикладі 12 дійшли висновку, що функція $w = z^2$ аналітична на усій комплексній площині. При цьому похідна у будь-якій точці визначається виразом

$$f'(z) = 2x + i2y.$$

Визначимо значення похідної у точці $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

$$f'\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = 2x + i2y\Big|_{x=\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}.$$

Тоді коефіцієнт розтягу

$$r = |f'(z)| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4,$$

а кут повороту

$$\varphi = \arg f'(z) = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Завдання для розв'язання

13. Перевірити виконання умов Коші-Рімана і, якщо це можливо, вираз для знаходження похідної

а) $w = z^2 + z - 1$;

б) $w = ze^z$;

в) $w = \bar{z}\operatorname{Re} z$;

г) $w = \sin(3z + 1) - i$;

д) $w = |z|\operatorname{Im} z$.

14. Визначити значення похідної функції $w=\left(z-2i\right)^2+1$ у точці $z_0=-1+2i$.

15. Відновити аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою дійсною частиною $u=x^2-y^2+2x$ та значенням $f(i)=2i-1$.

16. Відновити аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою уявною частиною $v=-2\sin 2x\operatorname{sh}2y+y$ та значенням $f(0)=2$.

17. Знайти коефіцієнт розтягу r та кут повороту φ при заданих відображеннях $w=f\left(z\right)$ у заданих точках:

а) $w=e^z$ у точках $z_1=\ln 2+i\dfrac{\pi}{4}$ і $z_2=-1-i\dfrac{\pi}{2}$;

б) $w=\sin z$ в точках $z_1=0$ і $z_2=1+i$.

18. Вияснити, яка частина комплексної площини розтягується, а яка стискається при відображенні $w=\dfrac{1}{z}$.

5 ІНТЕГРАЛ ВІД ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ІНТЕГРАЛЬНІ ТЕОРЕМИ КОШІ

Нехай функція $\omega=f(z)$ визначена та неперервна в деякій області D, C – кусково-гладка крива з початком у точці A і кінцем у точці B, що повністю лежить в області D (рис. 8). Розіб'ємо криву C на довільну кількість частин за допомогою точок $z_0=z_A, z_1, z_2, \ldots, z_n=z_B$, що розташовані послідовно у додатному напрямку кривої C. Нехай ξ_k – деяка точка на дузі $z_{k-1}z_k$. Складемо суму добутків

$$I_n=f\left(\xi_1\right)\Delta z_1+f\left(\xi_2\right)\Delta z_2+\ldots+f\left(\xi_n\right)\Delta z_n=\sum_{k=1}^{n}f\left(\xi_k\right)\Delta z_k, \qquad (60)$$

де $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$ – приріст змінної z.

Границя суми (60) при $\Delta z_{k\max}\to 0$ (коли кількість розбиттів необмежено зростає, тобто $n\to\infty$) називається інтегралом **(інтеграл – *integral*)** від функції комплексної змінної $f\left(z\right)$ по кривій C і позначається $\int\limits_C f\left(z\right)dz$.

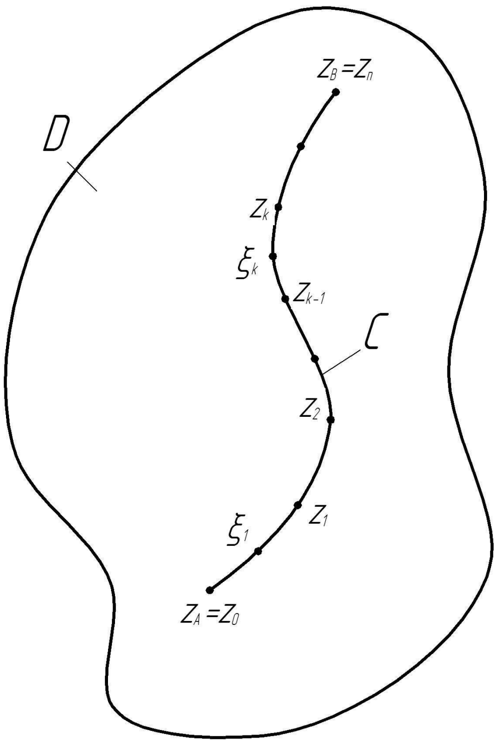


Рисунок 8

Отже, згідно з означенням

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\Delta z_{k\,\max}\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\,. \tag{61}$$

Введемо позначення

$$\xi_k = x_k + iy_k\,;$$
$$f(\xi_k) = u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k)\,;$$
$$\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k\,.$$

При цих позначеннях

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\left[u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k)\right]\left[\Delta x_k + i\Delta y_k\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[u(x_k, y_k)\Delta x_k - v(x_k, y_k)\Delta y_k\right] + i\sum_{k=1}^{n}\left[u(x_k, y_k)\Delta y_k + iv(x_k, y_k)\Delta x_k\right].$$

При зроблених обмеженнях на функцію $f(z)$ та на криву C обидві суми, що стоять у правій частині прямують до границь, що дорівнюють криволінійним інтегралам другого роду від функцій дійсної змінної $u(x, y)$ і $v(x, y)$ по кривій C:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\int_C v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy. \tag{62}$$

Формулу (62) легко запам'ятати, якщо записати її у вигляді

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u + iv)(dx + i\,dy). \tag{63}$$

Властивості інтегралів від функції комплексної змінної

Зважаючи на формулу (62) всі властивості інтегралів від функції комплексної змінної визначаються властивостями криволінійних інтегралів другого роду.

1. Властивість лінійності

$$\int_C \left(A_1 f_1(z) \pm A_2 f_2(z)\right)dz = A_1\int_C f_1(z)dz \pm A_2\int_C f_2(z)dz. \qquad (64)$$

2. Властивість адитивності

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz, \qquad (65)$$

де C_1, C_2 – дві криві, з яких складається крива C.

3. При зміні напряму інтегрування знак інтеграла змінюється на протилежний

$$\int_{C_{AB}} f(z)dz = -\int_{C_{BA}} f(z)dz. \qquad (66)$$

4. Якщо на кривій С виконується нерівність $\left|f(z)\right| \le M \quad \left(M \ge 0\right)$, то

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le Ml, \qquad (67)$$

де l – довжина кривої С.

Правила обчислення інтегралів від функції комплексної змінної

1. Виділити дійсну та уявну частини підінтегральної функції та скористатись формулою

$$\int_C f\left(z\right)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy. \qquad (68)$$

2. Якщо крива C задана параметричним рівнянням $z = z(t) = x(t) + y(t)i$, α, β – значення параметра, що відповідає початку і кінцю кривої C, відповідно

$$\int_C f(z)dz = \begin{vmatrix} z = z(t) \\ dz = z'(t)dt \end{vmatrix} = \int_\alpha^\beta f\left(z(t)\right)z'(t)dt. \qquad (69)$$

3. Якщо C – коло або частина кола з центром у точці z_0 і радіусом ρ, то потрібно робити заміну $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$, де $\rho = const$, а φ – змінна інтегрування

$$\int_C f(z)dz = \begin{vmatrix} z - z_0 = \rho e^{i\varphi} \\ dz = i\rho e^{i\varphi}d\varphi \\ z = z_0 + \rho e^{i\varphi} \end{vmatrix} = i\rho\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(z_0 + \rho e^{i\varphi}\right)e^{i\varphi}d\varphi, \qquad (70)$$

де φ_1 і φ_2 визначаються з рис. 9 (якщо C – коло і обхід виконується проти руху годинникової стрілки, то $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$).

4. Якщо C – відрізок, який виходить з точки z_0 під кутом φ (рис. 10), то потрібно робити заміну $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$, де $\varphi = const$, а ρ – змінна інтегрування

$$\int_C f(z)dz = \begin{vmatrix} z - z_0 = \rho e^{i\varphi} \\ dz = e^{i\varphi} d\rho \\ z = z_0 + \rho e^{i\varphi} \end{vmatrix} = e^{i\varphi} \int_0^{\rho_C} f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\rho, \tag{71}$$

де ρ_C – довжина відрізка.

Приклад 17. Обчислити інтеграл $\int_C \operatorname{Re} z dz$, *де* C *– відрізок, який сполучає точку 0 з точкою 1+i (рис. 11).*

Розв'язання.

Перший спосіб

Виділимо дійсну та уявну частини підінтегральної функції

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x + iy) = x \Rightarrow \begin{matrix} u(x,y) = x; \\ v(x,y) = 0. \end{matrix}$$

Скористаємось формулою (68)

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_C x dx + i \int_C x dy.$$

Знайдемо рівняння прямої, на якій лежить відрізок C *в декартовій системі координат*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

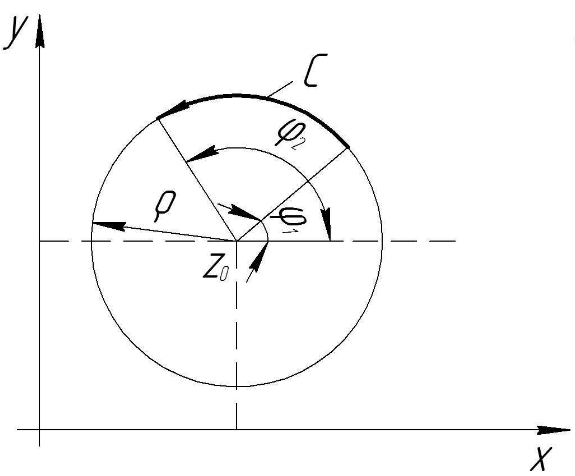


Рисунок 9

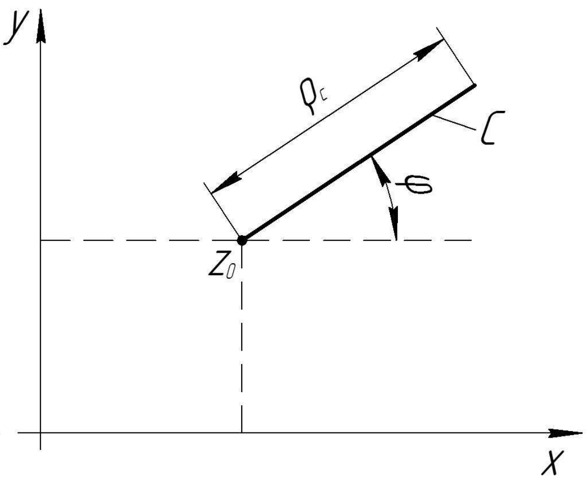


Рисунок 10

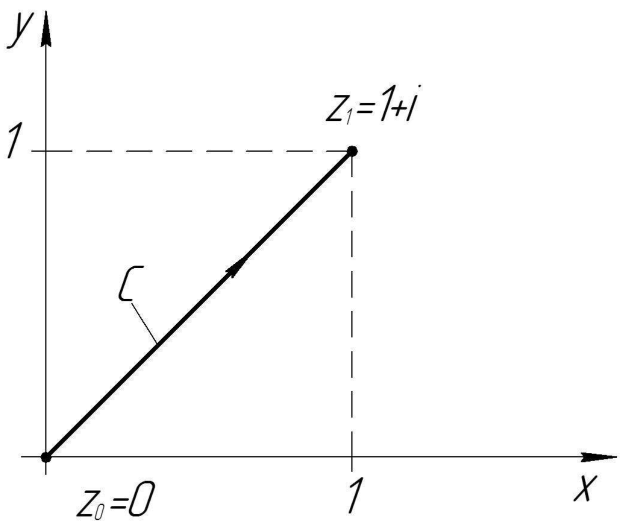


Рисунок 11

де (x_1, y_1), (x_2, y_2) *– координати точок, через які проходить пряма. В нашому випадку* $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = 1$ *і* $y_2 = 1$. *Тоді рівняння прямої*

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{1-0} \Rightarrow y = x.$$

У результаті отримаємо

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_C x dx + i\int_C x dy = \begin{vmatrix} y = x & x_1 = 0 \\ dy = dx & x_2 = 1 \end{vmatrix} = \int_0^1 x dx + i\int_0^1 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + i\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Другий спосіб

Складемо параметричне рівняння прямої, на якій лежить відрізок C:

$$y = x = t \Rightarrow \begin{cases} x = t; \\ y = t; \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Тобто на комплексній площині рівняння прямої можна записати так

$$z(t) = t + it, (0 \le t \le 1).$$

Тоді, використовуючи формулу (69), отримаємо

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \begin{vmatrix} z = t + it & \alpha = 0 \\ dz = (1+i)dt & \beta = 1 \end{vmatrix} = \int_0^1 \operatorname{Re}(t + it)(1+i)dt =$$

$$= (1+i)\int_0^1 t dt = (1+i)\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = (1+i)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Третій спосіб

Враховуючи, що C *– відрізок прямої, можна скористатись заміною, що запропонована у формулі (71)*

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \left| \begin{matrix} z = \rho e^{\frac{\pi}{4}i} & \rho_C = \sqrt{2} \\ dz = e^{\frac{\pi}{4}i} d\rho & \end{matrix} \right| = e^{\frac{\pi}{4}i} \int_0^{\sqrt{2}} \operatorname{Re}\left(\rho e^{\frac{\pi}{4}i} \right) d\rho =$$

$$= \left| \begin{matrix} \operatorname{Re}\left(\rho e^{\frac{\pi}{4}i} \right) = \operatorname{Re}\left[\rho \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right) \right] = \\ = \operatorname{Re}\left(\rho \cos\frac{\pi}{4} + i\rho \sin\frac{\pi}{4} \right) = \rho \cos\frac{\pi}{4} \end{matrix} \right| = e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho =$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right) \cos\frac{\pi}{4} \frac{\rho^2}{2} \bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i.$$

Приклад 18. Обчислити $\int_C \left(z^2 + z\bar{z} \right) dz$, $C: |z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi$.

Розв'язання.

Враховуючи, що C – частина кола, скористаємось заміною, яка запропонована у формулі (70)

$$\int_C \left(z^2 + z\bar{z} \right) dz = \left| \begin{matrix} z - z_0 = \rho e^{i\varphi} \\ \begin{cases} \rho = 1 \\ z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = e^{i\varphi} \\ dz = i e^{i\varphi} d\varphi \\ \bar{z} = \left(\overline{e^{i\varphi}} \right) = \left(\overline{\cos\varphi + i \sin\varphi} \right) = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = e^{-i\varphi} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(e^{2\varphi i} + e^{i\varphi} e^{-i\varphi} \right) i e^{i\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi} e^{3\varphi i} i d\varphi + \int_0^{\pi} e^{i\varphi} i d\varphi = \left| \begin{matrix} d(3\varphi i) = 3i d\varphi \\ d(i\varphi) = i d\varphi \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\pi} e^{3\varphi i} 3i d\varphi + \int_0^{\pi} e^{i\varphi} i d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} e^{3\varphi i} d(3\varphi i) + \int_0^{\pi} e^{i\varphi} d(i\varphi) = \frac{e^{3\varphi i}}{3} \bigg|_0^{\pi} + e^{i\varphi} \bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{e^{3\pi i}}{3} - \frac{1}{3} + e^{i\pi} - 1 = \frac{\cos(3\pi) + i \sin(3\pi)}{3} + \cos\pi + i \sin\pi - \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}.$$

Теорема 3 (інтегральна теорема Коші для однозв'язної області). Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній D і крива C повністю належить області D, то інтеграл $\int_C f(z) dz$ не залежить від форми кривої C, а залежить лише від її кінцевих точок.

Доведення.

Для простоти доведення припустимо додатково, що похідна $f'(z)$ неперервна (в означенні аналітичності обов'язковим є лише існування $f'(z)$).

Нехай $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. З огляду на співвідношення

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C udy+vdx \tag{72}$$

питання про незалежність інтеграла $\int_C f(z)dz$ від шляху інтегрування зводиться до питання про незалежність від шляху інтегрування криволінійних інтегралів, що стоять у правій частині виразу (72)

$$\int_C udx-vdy; \tag{73}$$

$$\int_C vdx+udy. \tag{74}$$

За теоремою Гріна для незалежності від шляху інтегрування криволінійного інтеграла $\int_C X(x,y)dx+Y(x,y)dy$ необхідно і достатньо, щоб у кожній точці області D виконувалось співвідношення $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$. Для інтегралів (73) і (74) це співвідношення має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ , \tag{75}$$

Рівняння (75) збігаються з умовами Коші-Рімана (38) й задовольняються, оскільки $f(z)$ – аналітична функція. Теорему доведено.

Наслідки з теореми 3

1. Якщо функція $f'(z)$ аналітична в однозв'язній області D, яка містить точки z_1 і z_2, то має місце формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz=F(z_2)-F(z_1)=F(z)\Big|_{z_1}^{z_2}, \tag{76}$$

де $F(z)$ – будь-яка первісна для функції $f(z)$, тобто $F'(z)=f(z)$ в області D.

2. Якщо функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ аналітичні в однозв'язній області D, а z_1 та z_2 – довільні точки цієї області, то має місце формула інтегрування частинами:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\varphi'(z)dz=\left[f(z)\varphi(z)\right]\Big|_{z_1}^{z_2}-\int_{z_1}^{z_2}\varphi(z)f'(z)dz. \tag{77}$$

3. Заміна змінних в інтегралі від функції комплексної змінної виконується аналогічно випадку функції дійсної змінної. Нехай аналітична функція $z=\varphi(\omega)$ відображає взаємооднозначно C_1 в $\omega-$площині на C в z-

площині. Тоді

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f[\varphi(\omega)]\varphi'(\omega)d\omega. \qquad (78)$$

Зауваження. Якщо функція комплексної змінної не містить специфічних для комплексних чисел функцій (знаходження модуля, аргументу, дійсної і уявної частин, спряженого числа), то вона здебільшого є аналітичною на множині визначення. Для знаходження первісної і похідної такої функції можна застосовувати усі правила й таблиці первісних і похідних для функції дійсного аргументу.

Приклад 19. Знайти похідну функції $\omega = \sin 3z - i$.

Розв'язання.

$$\omega' = (\sin 3z - i)' = \left| \begin{array}{l} \textit{функція } (\sin 3z - i) \textit{ є аналітичною} \\ (\textit{тому що не містить специфічних функцій}) \end{array} \right| =$$

$$= \left| (u \pm v)' = u' \pm v' \right| = (\sin 3z)' - (i)' = \left| \begin{array}{l} (\sin u)' = \cos u \cdot u' \\ (C)' = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \cos 3z \cdot (3z)' + 0 = \left| \begin{array}{l} (Cu)' = Cu' \\ (u^{\alpha}) = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u' \end{array} \right| = 3\cos 3z.$$

Приклад 20. Обчислити $\int_C z^2 dz$, *де* C *– відрізок* $z_1 z_2$, $z_1 = -1 - i$, $z_2 = 1 + i$.

Розв'язання.

Враховуючи, що z^2 *є аналітичною функцією на всій комплексній площині:*

$$\int_C z^2 dz = \int_{-1-i}^{1+i} z^2 dz = \left| \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right| = \frac{z^3}{3}\Bigg|_{-1-i}^{1+i} = \frac{1}{3}\left((1+i)^3 - (-1-i)^3\right) =$$

$$= \frac{2}{3}(1 + 3i - 3 - i) = \frac{2}{3}(-2 + 2i) = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}i.$$

Теорему 3 можна сформулювати інакше.

Теорема 4. В однозв'язній області інтеграл від аналітичної функції по будь-якому замкненому контуру C, який лежить в цій області, дорівнює нулю.

Інтегральна теорема Коші для однозв'язної області узагальнюється на випадок, коли контур інтегрування не належить області аналітичності функції $f(z)$, а є її границею.

Теорема 5. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D і неперервна в замкненій області $\overline{D}$, то інтеграл від $f(z)$, обчислений вздовж границі C цієї області, дорівнює нулю.

Для багатозв'язних областей вище вказані інтегральні теореми Коші не виконуються. У зв'язку з цим інтегральну теорему Коші можна сформулювати й для багатозв'язної області.

Теорема 6 (інтегральна теорема Коші для багатозв'язної області). Нехай функція $f(z)$ аналітична в багатозв'язній області D і неперервна в замкненій багатозв'язній області $\overline{D}$; крива C – складена границя цієї області. Тоді, якщо при інтегруванні вздовж C цю границю проходити так, що область D завжди буде розташована по один бік, то інтеграл від функції $f(z)$ уздовж границі C дорівнюватиме нулю.

Пояснимо цю теорему. Двозв'язну область зі складеною границею $C = C_1 + C_2$, яка зорієнтована в додатному напрямі, зображено на рис. 12, а. Проведемо розріз γ (рис. 12, б), який перетворює D на однозв'язну область D^*, обмежену замкненим складним контуром $C^* = C_1 + \gamma^+ + C_2 + \gamma^-$. При обході цього контуру область D^* весь час залишається зліва, розріз γ при цьому проходиться двічі в протилежних напрямах.

Тепер функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D^*, отже, за теоремою 5

$$\int_{C^*} f(z)dz = 0. \tag{79}$$

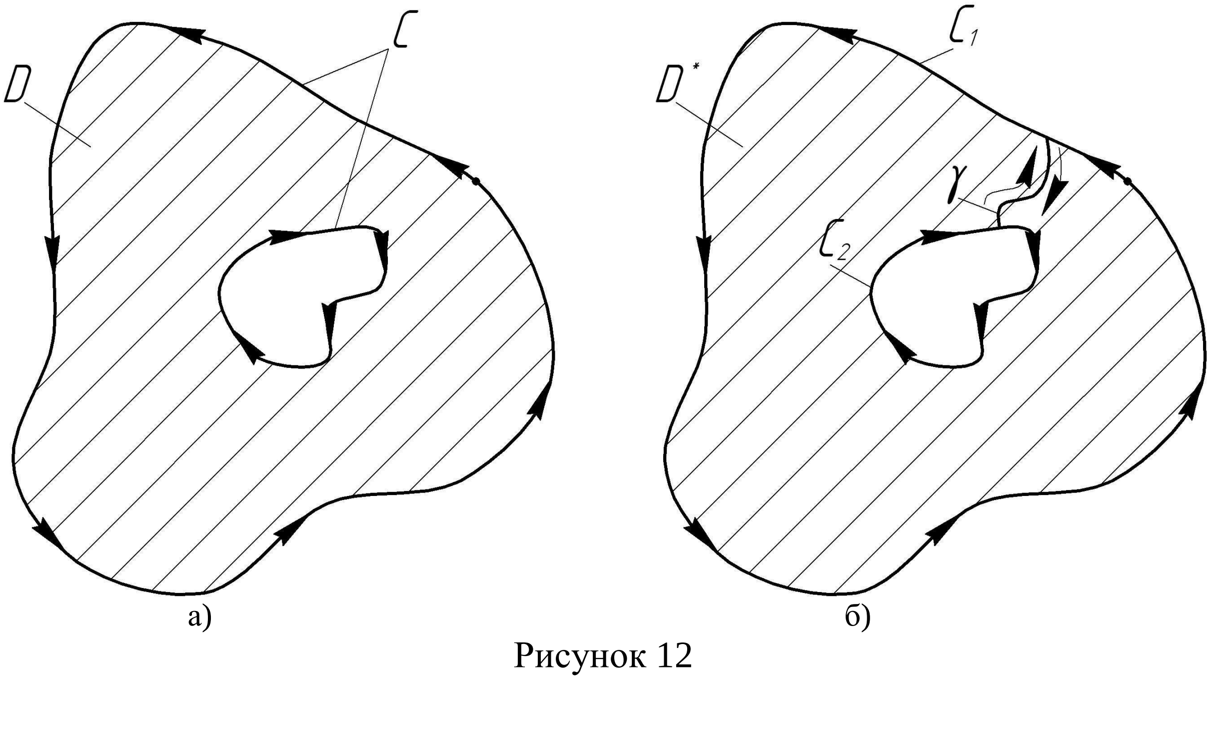


Рисунок 12

Але

$$\int_{C^*} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{\gamma^+} f(z)dz + \int_{\gamma^-} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz =$$
$$= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{\gamma^+} f(z)dz - \int_{\gamma^+} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 0. \qquad (80)$$

Отже,

$$\int_{C=C_1+C_2} f(z)dz = 0. \qquad (81)$$

У випадку більшої кількості внутрішніх контурів до кожного з них проводиться розріз, який сполучає його із зовнішнім контуром, перетворюючи багатозв'язну область на однозв'язну.

Теорема 7. Нехай функція $f(z)$ аналітична в багатозв'язній області D і неперервна в замкненій області $\overline{D}$, C_0 – зовнішній контур границі області D, а $C_1, C_2, ..., C_n$ – її внутрішні контури. Тоді справедлива формула

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz, \qquad (82)$$

де контури $C_0, C_1, C_2, ..., C_n$ зорієнтовані в одному і тому ж напрямі (рис. 13).

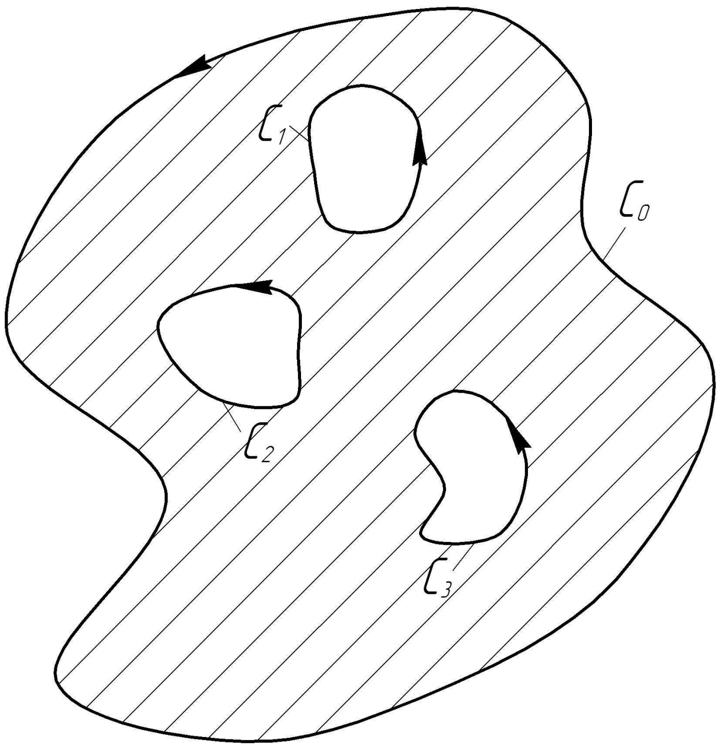


Рисунок 13

Завдання для розв'язання

19. Знайти інтеграл від функції комплексної змінної:

а) $\int\limits_C e^{|z|^2}\,\mathrm{Re}\,z dz$, C: пряма $z_1 z_2$, де $z_1 = 0, z_2 = 1 + i$;

б) $\int\limits_C \mathrm{Re}\,z dz$, C: ламана $z_1 z_2 z_3$, де $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = 2 + i$;

в) $\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz$, C: $|z| = 1$, $-\pi \le \arg z \le 0$;

г) $\int\limits_C z\,\mathrm{Re}\,z dz$, C: $|z| = 1$, обхід проти руху годинникової стрілки;

д) $\int\limits_C \mathrm{Re}\,z dz$, C: $z = (2 + i)\cdot t$, $0 \le t \le 1$;

е) $\oint\limits_{|z|=1} z\bar{z} dz$;

ж) $\int\limits_{1+i}^{-1-i} (2z + 1) dz$;

и) $\int\limits_1^i z e^z dz$.

6 ІНТЕГРАЛЬНА ФОРМУЛА КОШІ

Теорема 8. Нехай D – однозв'язна область, обмежена додатно зорієнтованою простою кривою C, $f(z)$ – функція аналітична в замкненій області $\overline{D}$. Тоді для будь-якої точки $z \in D$ справедлива інтегральна формула Коші

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{83}$$

Доведення.

Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в однозв'язній області, що обмежена контуром C. Візьмемо довільну внутрішню точку z_0 і побудуємо замкнутий контур γ, що повністю лежить в D і всередині якого знаходиться точка z_0 (рис. 14). Розглянемо допоміжну функцію:

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}. \tag{84}$$

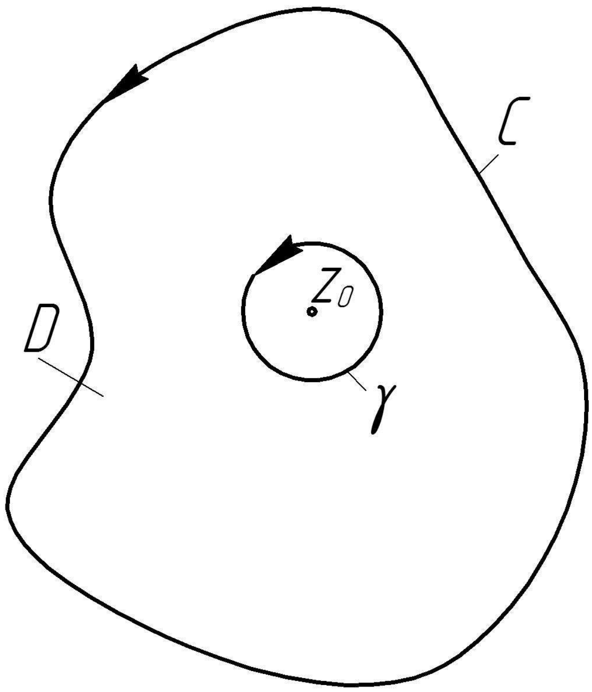


Рисунок 14

Функція $\varphi(z)$, очевидно, є аналітичною функцією по всій області D за виключенням точки z_0. Тому функція $\varphi(z)$ буде аналітичною в двозв'язній області, що міститься між контурами C та γ. Згідно з теоремою 6 інтеграл від функції $\varphi(z)$ по складеній границі двозв'язної області дорівнює 0, тобто

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz + \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 0. \tag{85}$$

Змінивши напрям інтегрування в другому інтегралі, рівняння (85) можна переписати у вигляді:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{\gamma^-} \frac{f(z)}{z-z_0}dz. \tag{86}$$

Рівність (86) не залежить від вибору контуру γ, тому для подальшого розгляду зручно як контур інтегрування γ вибрати коло радіусом ρ з центром в точці z_0. Застосувавши формулу (70), отримаємо

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{\gamma^-} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \begin{vmatrix} z = z_0 + e^{i\varphi} & \varphi_1 = 0 \\ dz = ie^{i\varphi}d\varphi & \varphi_2 = 2\pi \end{vmatrix} =$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z_0 + e^{i\varphi} - z_0} ie^{i\varphi} d\varphi = i\int_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi. \tag{87}$$

Останній інтеграл перетворюємо таким чином:

$$\int_0^{2\pi} f(z)d\varphi = \int_0^{2\pi}[f(z) - f(z_0)]d\varphi + \int_0^{2\pi} f(z_0)d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}[f(z) - f(z_0)]d\varphi + 2\pi f(z_0). \tag{88}$$

Жодних обмежень на радіус ρ при виведенні виразів (87) і (88) ми не накладали, тому можемо розглянути випадок, коли $\rho \to 0$. Враховуючи, що $f(z)$ – аналітична, а, отже, і неперервна функція в області D, то

$$\lim_{\rho \to 0} \int_0^{2\pi}[f(z) - f(z_0)]d\varphi = 0. \tag{89}$$

Оскільки в формулі (88) останній додаток не залежить від ρ, тому

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz = i\int_0^{2\pi} f(z)d\varphi = 2\pi i f(z_0), \tag{90}$$

звідки

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz. \tag{91}$$

Теорему доведено.

Приклад 21. Обчислити інтеграл $\oint_C \frac{z^2}{z - 2i}dz$, *де C – коло радіусом 2 з центром у точці 3i.*

Розв'язання.

Усередині області, обмеженої колом радіусом 2 з центром у точці 3i, міститься точка $z_0 = 2i$, *в якій знаменник підінтегральної функції перетворюється в нуль (рис. 15).*

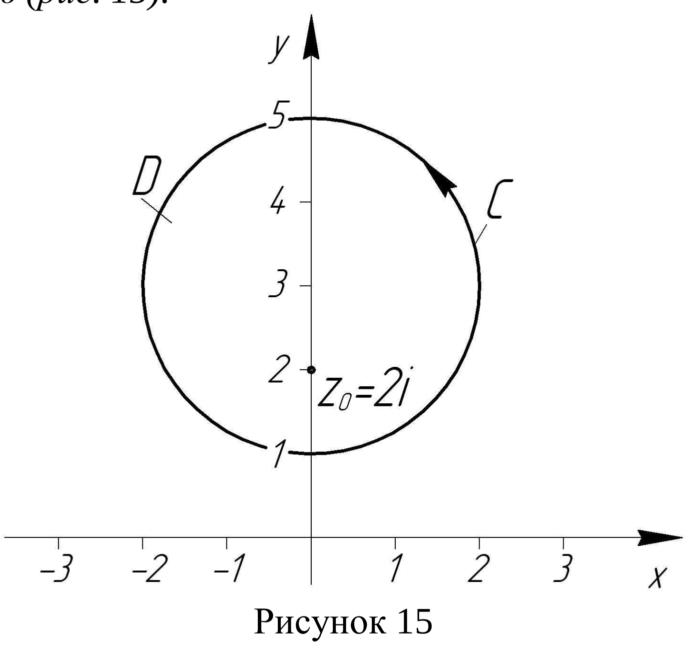


Рисунок 15

Функція $f(z)=z^2$ аналітична всередині кола С, тому за формулою Коші (83) дістанемо

$$\oint_C \frac{z^2}{z-2i}dz=\oint_C \frac{1}{z-2i}z^2dz=\left|\begin{array}{l} f(z)=z^2 \\ z_0=2i \end{array}\right|=2\pi i\cdot z^2\Big|_{z=2i}=2\pi i(2i)^2=-8\pi i.$$

Узагальнена інтегральна формула Коші

Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D і на її границі C, то для будь-якого натурального n має місце формула

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \tag{92}$$

де $z_0 \in D$.

Зауваження. Формули (83) та (92) здебільшого використовуються для знаходження інтегралів, тобто використовується у вигляді

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0}f(z)dz=2\pi i f(z_0), \tag{93}$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}f(z)dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0). \tag{94}$$

Алгоритм застосування інтегральної формули Коші та узагальненої інтегральної формули Коші

1. На комплексній площині будуємо контур інтегрування C.
2. Визначаємо точки $z_0', z_1', ..., z_n'$ в яких підінтегральна функція неаналітична (здебільшого це точки, в яких знаменник перетворюється на нуль).
3. Серед точок $z_0', z_1', ..., z_n'$ вибираємо лише ті точки $z_0, z_1, ..., z_k$, які лежать в області D, що обмежена контуром інтегрування C.

Якщо є лише одна єдина точка z_0, в якій підінтегральна функція неаналітична і яка лежить в області D, то:

4а. Записуємо інтеграл у вигляді $\oint_C \frac{1}{z-z_0}f(z)dz$ або $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}f(z)dz$ і визначаємо структурні елементи інтегральної формули Коші: функцію $f(z)$, точку z_0 (для узагальненої формули Коші ще необхідно визначити n), переконуємось, що $f(z)$ аналітична в області D і визначаємо шуканий інтеграл за однією з формул

$$\oint\limits_C \frac{1}{z-z_0} f(z)dz = 2\pi i f(z_0) \text{ або } \oint\limits_C \frac{1}{\left(z-z_0\right)^{n+1}} f(z)dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Якщо є декілька точок $z_0, z_1, ..., z_k$, в яких підінтегральна функція неаналітична і які лежать в області D, то:

4б. В області D навколо кожної з точок $z_0, z_1, ..., z_k$ проводимо замкнені контури $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_k$, кожен з яких обмежує область, яка містить лише одну єдину точку, в якій функція $f(z)$ неаналітична, і зорієнтований в напрямі контуру C. Використавши теорему 7, отримаємо

$$\oint\limits_C \varphi(z)dz = \oint\limits_{\gamma_0} \varphi(z)dz + \oint\limits_{\gamma_1} \varphi(z)dz + ... + \oint\limits_{\gamma_k} \varphi(z)dz, \tag{95}$$

де $\varphi(z)$ – підінтегральна функція;

5б. Далі знаходимо окремо кожен інтеграл, що стоїть в правій частині виразу (95), використовуючи інтегральні формули Коші. Записуємо кожен інтеграл у вигляді $\oint\limits_{\gamma_i} \frac{1}{z-z_i} f_i(z)dz$ або $\oint\limits_{\gamma_i} \frac{1}{\left(z-z_i\right)^{n+1}} f_i(z)dz$ і визначаємо структурні елементи інтегральної формули Коші: функцію $f_i(z)$, точку z_i (для узагальненої формули Коші ще необхідно визначити n), переконуємось, що $f_i(z)$ аналітична в області, яка обмежена γ_i, і визначаємо шуканий інтеграл за однією з формул

$$\oint\limits_{\gamma_i} \frac{1}{z-z_i} f_i(z)dz = 2\pi i f_i(z_i) \text{ або } \oint\limits_{\gamma_i} \frac{1}{\left(z-z_i\right)^{n+1}} f_i(z)dz = \frac{2\pi i}{n!} f_i^{(n)}(z_i);$$

6б. Знаходимо суму усіх інтегралів $\oint\limits_{\gamma_i} \varphi(z)dz$.

Приклад 22. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{z^2}{(z-i)^2}dz$.

Розв'язання.

Будуємо контур інтегрування – коло з центром у точці $z=i$ і радіусом 1 (рис. 16). Позначаємо область, яка обмежена контуром інтегрування, через D.

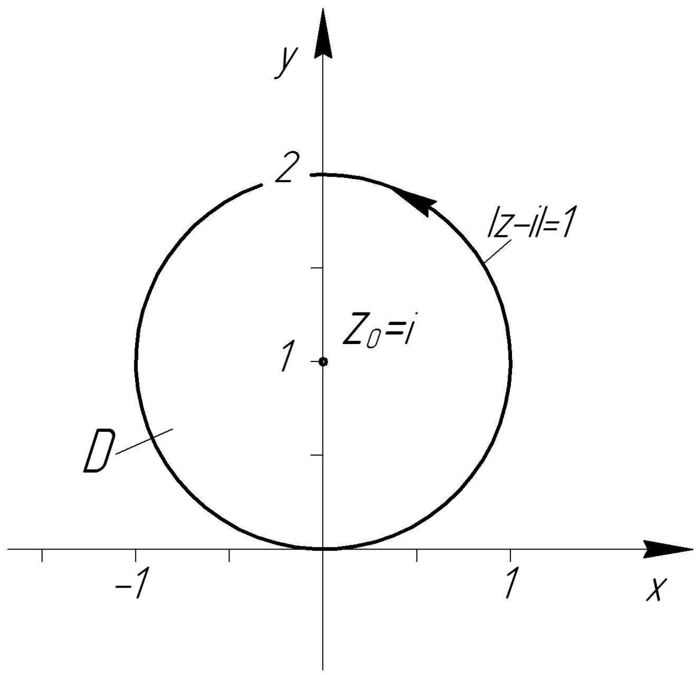


Рисунок 16

Чисельник z^2 *і знаменник* $(z-i)^2$ *підінтегральної функції – аналітичні функції на усій комплексній площині. Тому функція* $\frac{z^2}{(z-i)^2}$ *неаналітична лише у точках, де знаменник перетворюється у нуль. Такою точкою є точка* $z_0 = i$. *Це єдина точка в області* D, *в якій підінтегральна функція неаналітична. Враховуючи, що у знаменнику* $z - z_0$ *знаходиться у степені, який відмінний від одиниці, застосовуємо узагальнену інтегральну формулу Коші (92)*

$$\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{z^2}{(z-i)^2}dz = \oint\limits_{|z-i|=1} \frac{1}{(z-i)^2} z^2 dz = \left| \begin{array}{l} f(z) = z^2 - \textit{аналітична в області } D \\ z_0 = i \in D, n+1 = 2 \Rightarrow n = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2\pi i}{1!}\left(z^2\right)'\Big|_{z=i} = 4\pi i z\Big|_{z=i} = 4\pi i^2 = -4\pi.$$

Приклад 23. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{z^2+1}{z^2(z-i)}dz$.

Розв'язання.

Будуємо контур інтегрування – коло з центром у точці $z = i$ *і радіусом 1 (рис. 17). Позначаємо область, яка обмежена контуром інтегрування, через* D.

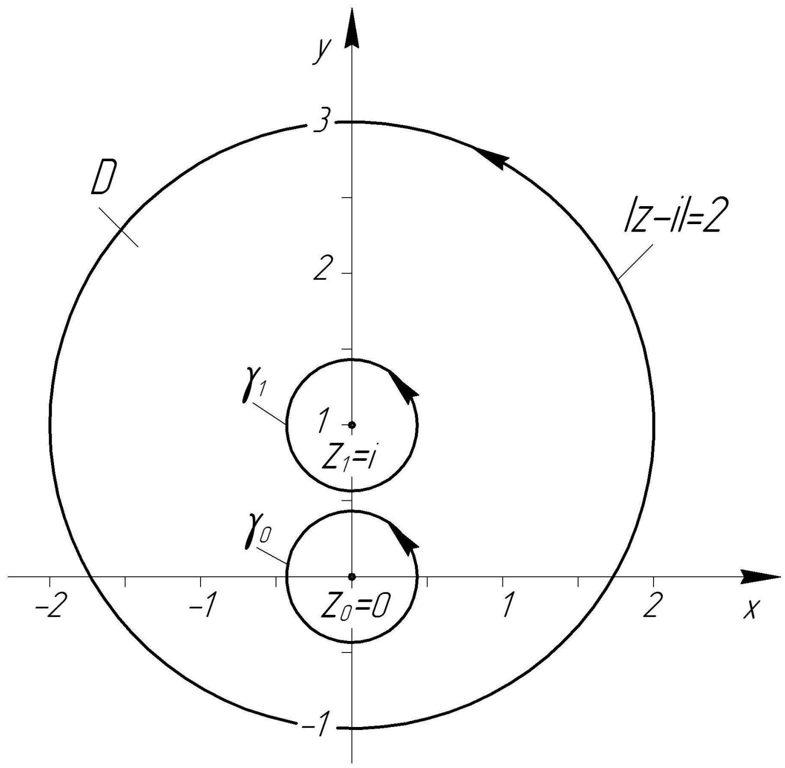


Рисунок 17

Чисельник z^2+1 *і знаменник* $z^2(z-i)$ *підінтегральної функції аналітичні функції на усій комплексній площині. Тому функція* $\dfrac{z^2+1}{z^2(z-i)}$ *неаналітична лише у точках, де знаменник перетворюється у нуль. Таких точок є дві:* $z_0=0$ *і* $z_1=i$. *Обидві ці точки належать області* D. *Тому навколо них проводимо контури* γ_0 *і* γ_1, *кожен з яких обмежує область, яка містить лише одну точку: або* z_0, *або* z_1. *Далі, використовуючи теорему 7, отримаємо*

$$\oint\limits_{|z-i|=2}\frac{z^2+1}{z^2(z-i)}dz=\oint\limits_{\gamma_0}\frac{z^2+1}{z^2(z-i)}dz+\oint\limits_{\gamma_1}\frac{z^2+1}{z^2(z-i)}dz.$$

Розглянемо інтеграл $\oint\limits_{\gamma_0}\dfrac{z^2+1}{z^2(z-i)}dz$. *Область, що обмежується* γ_0, *містить одну точку* $z_0=0$, *у якій підінтегральна функція неаналітична. Запишемо інтеграл у вигляді*

$$\oint\limits_{\gamma_0}\frac{z^2+1}{z^2(z-i)}dz=\oint\limits_{\gamma_0}\frac{1}{z^2}\frac{z^2+1}{z-i}dz=\left|\begin{array}{l} f(z)=\dfrac{z^2+1}{z-i}-\textit{аналітична в} \\ \textit{області, що обмежена } \gamma_0 \\ z_0=0 \\ n+1=2\Rightarrow n=1 \end{array}\right|=$$

$$=\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{z^2+1}{z-i}\right)'\Bigg|_{z=0}=\left|\begin{array}{l}\left(\dfrac{z^2+1}{z-i}\right)'=\dfrac{(z^2+1)'(z-i)-(z-i)'(z^2+1)}{(z-i)^2}=\\ =\dfrac{2z(z-i)-z^2-1}{(z-i)^2}=\dfrac{z^2-2zi-1}{(z-i)^2}\end{array}\right|=$$

$$=2\pi i\frac{z^2-2zi-1}{(z-i)^2}\Bigg|_{z=0}=\frac{2\pi i\left(0^2-2\cdot 0\cdot i-1\right)}{(0-i)^2}=2\pi i.$$

Аналогічно знаходимо інтеграл

$$\oint_{\gamma_1}\frac{z^2+1}{z^2(z-i)}dz=\oint_{\gamma_1}\frac{1}{z-i}\frac{z^2+1}{z^2}dz=\left|\begin{array}{l}f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2}-\textit{аналітична в}\\ \textit{області, що обмежена } \gamma_1\\ z_0=i\end{array}\right|=$$

$$=2\pi i\frac{z^2+1}{z^2}\Bigg|_{z=i}=\frac{2\pi i\left(i^2+1\right)}{i^2}=0.$$

Тоді

$$\oint_{|z-i|=2}\frac{z^2+1}{z^2(z-i)}dz=2\pi i+0=2\pi i.$$

Завдання для розв'язання

20. Знайти інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

а) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2+2z}dz$;

б) $\displaystyle\oint_{|z|=5}\frac{dz}{z^2+16}$;

в) $\displaystyle\oint_{|z-1|=2}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz$;

г) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz$;

д) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

7 РЯДИ В КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Рядом (**ряд – *series***) із комплексними членами називається ряд виду

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \ , \qquad (96)$$

де $z_n = x_n + iy_n$.

Ряд (1) **збіжний (*convergent*)** тоді і лише тоді, коли збіжні ряди

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \, ; \qquad (97)$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \, . \qquad (98)$$

Ряд (96) є абсолютно збіжний, якщо збіжний ряд, що складений з його модулів

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \, . \qquad (99)$$

Ряди (97), (98), (99) є рядами із дійсними членами, і питання про їх збіжність вирішується за допомогою відомих ознак збіжності рядів із дійсними членами.

Приклад 24. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$.

Розв'язання.

Маємо $e^{in} = \cos n + i \sin n$. *Таким чином, питання про збіжність даного ряду зводиться до питання про збіжність рядів з дійсними членами:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \ \ i \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

Дослідимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ *– знакозмінний ряд. Розглянемо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *– збіжний ряд Діріхле.*

Враховуючи, що

$$\left| \frac{\cos n}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2}, \ n = 1, 2, \ldots,$$

за достатньою ознакою збіжності знакозмінних рядів ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ *– абсолютно збіжний. Аналогічно доводимо, що ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ *також абсолютно збіжний. Отже, ряд, що досліджується,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ *– абсолютно збіжний.*

Ряд виду

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{100}$$

де $c_0, c_1, c_2, \ldots$ – деякі комплексні коефіцієнти, z – комплексна зміна, називається степеневим рядом в комплексній області.

Теорема 9 (теорема Абеля). Якщо степеневий ряд (100) збігається при деякому значенні $z = z_0$, то він абсолютно збіжний при всіх значеннях z, для яких виконується нерівність $|z| < |z_0|$. Якщо ряд (100) розбіжний при $z = z_1$, то він розбіжний і при будь-якому значенні z, для якого $|z| > |z_1|$.

Областю збіжності ряду (100) згідно з теоремою Абеля є круг з центром в початку координат (рис. 18)

$$|z| < R. \tag{101}$$

Радіус збіжності R степеневого ряду визначається за однією з формул

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad (c_n \neq 0) \tag{102}$$

або

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \tag{103}$$

якщо вказані границі існують.

Приклад 25. Визначити область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot z^n.$$

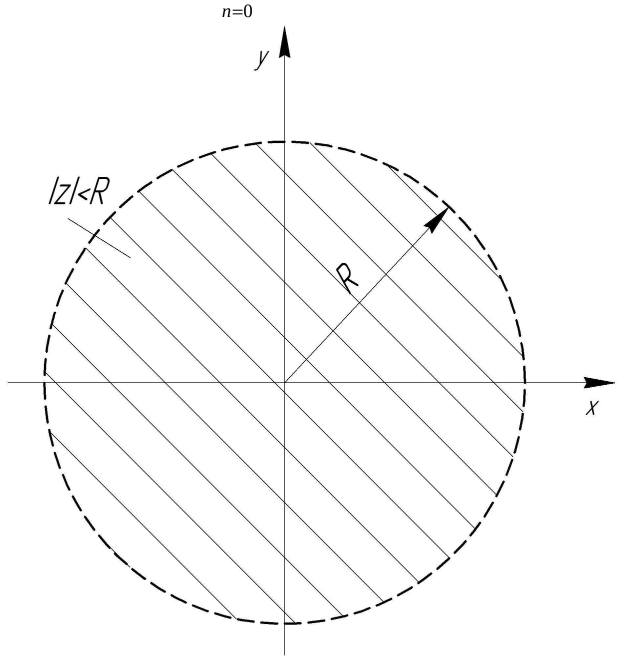


Рисунок 18

Розв'язання.

Область збіжності визначається нерівністю $|z| < R$.

Визначимо радіус збіжності R

$$\mathrm{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\mathrm{c}_n|}{|\mathrm{c}_{n+1}|} = \left| \begin{array}{c} \mathrm{c}_n = \cos(in) \\ \mathrm{c}_{n+1} = \cos(i(n+1)) \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\cos(in)|}{|\cos(i(n+1))|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e^{-n} + e^{n}|}{|e^{-(n+1)} + e^{(n+1)}|} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \textit{чисельник і знаменик} - \\ \textit{невід'ємні числа, враховуючи що} \\ |a| = a,\ \textit{при } a \geq 0,\ \textit{отримаємо} \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n} + e^{n}}{e^{-(n+1)} + e^{(n+1)}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \textit{щоб позбутись невизначеності} \\ \textit{чисельник і знаменник поділимо на } e^{n} \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{2n}} + 1}{\frac{1}{e^{2n+1}} + e} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{e^{2n}} + \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{e^{2n+1}} + \lim\limits_{n\to\infty} e} = \frac{0+1}{0+e} = \frac{1}{e}.$$

Тоді область збіжності степеневого ряду $|z| < \dfrac{1}{e}$ *(рис. 19).*

Ряд виду

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad (104)$$

де $c_0, c_1, c_2, \ldots$ – деякі комплексні коефіцієнти, z – комплексна зміна, також називається степеневим рядом.

Область збіжності ряду (104) визначається нерівністю

$$|z - z_0| < R, \qquad (105)$$

тобто є кругом з центром в точці z_0 і радіусом R (рис. 20). Радіус збіжності степеневого ряду R визначається за допомогою формул (102) і (103).

Розглянемо ряд

$$\frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}. \qquad (106)$$

Якщо існує границя

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}, \qquad (107)$$

область збіжності ряду (106) визначається нерівністю

$$|z - z_0| > r, \qquad (108)$$

тобто знаходиться поза кругом з центром у точці z_0 радіусом r (рис. 21).

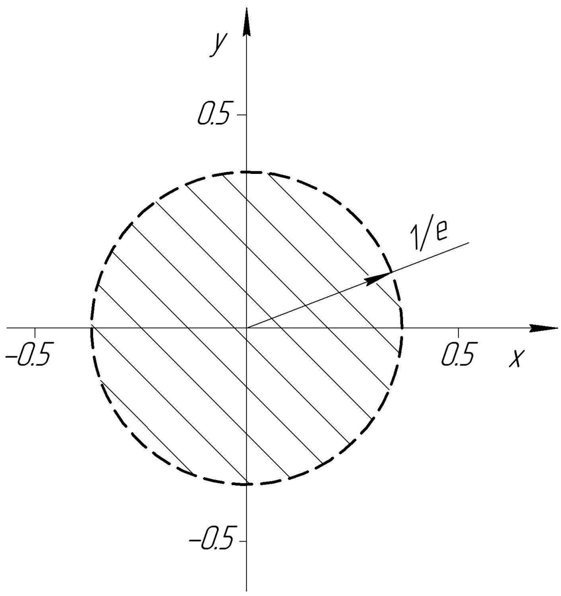


Рисунок 19

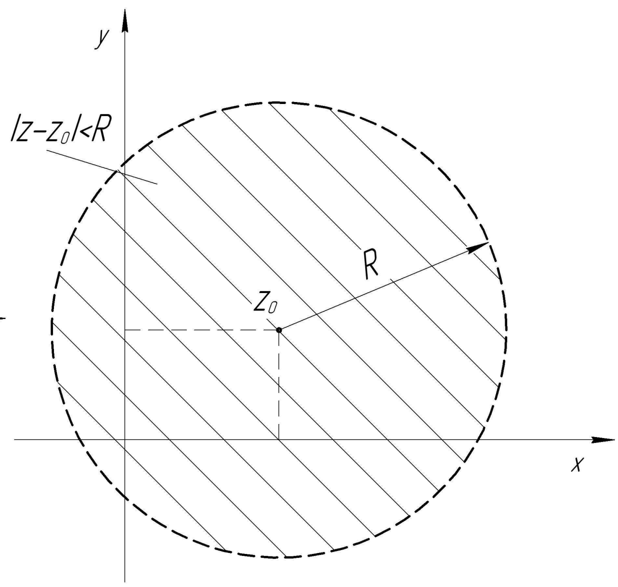


Рисунок 20

Зауваження 1. Ряд (106) іноді записують у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \tag{109}$$

або

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n . \tag{110}$$

Зауваження 2. Для знаходження c_{-n-1} в формулі (107) потрібно у вираз c_{-n} підставити $(n+1)$ замість n.

Якщо ряд подано у вигляді (110), то для визначення c_{-n} (що потрібно використовувати у формулі (107) необхідно у вираз c_n підставити $(-n)$ замість n.

Приклад 26. Визначити область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^{n+1}}{z^n}$.

Розв'язання.

Маємо справу із рядом виду (106). Область збіжності цього ряду визначається нерівністю $|z-z_0|>r$. *Визначимо усі складові цієї нерівності. Так як* $z^n=(z-0)^n$, *то* $z_0=0$.

Для визначення r *скористаємось формулою (107)*

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}=\left|\begin{array}{l} c_{-n}=(1+i)^{n+1} \\ c_{-n-1}=(1+i)^{(n+1)+1}=(1+i)^{n+2}\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(1+i)^{n+2}\right|}{\left|(1+i)^{n+1}\right|}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}|1+i|=|1+i|=\sqrt{2}.$$

Тоді область збіжності $|z|>\sqrt{2}$ *(рис. 22).*

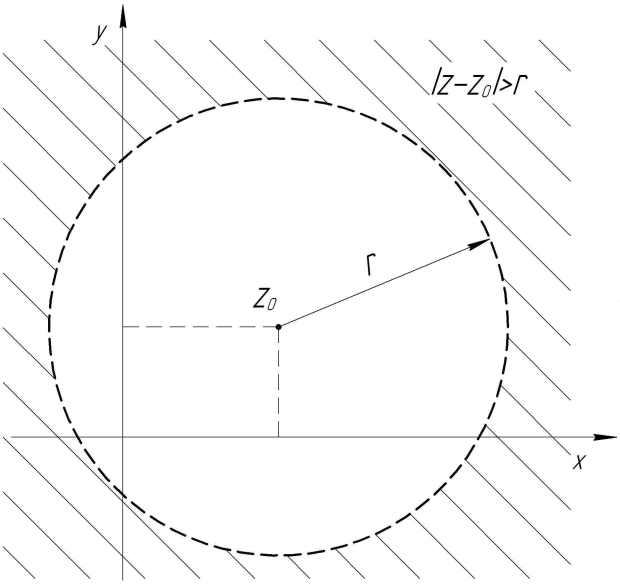


Рисунок 21

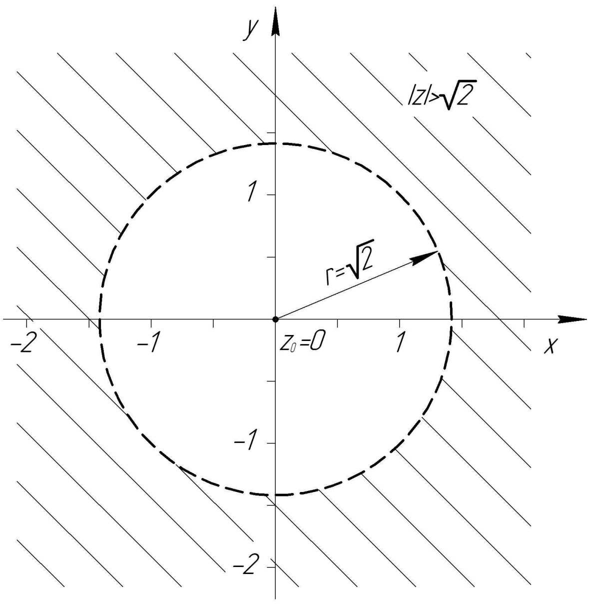


Рисунок 22

Ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \qquad (111)$$

збіжний там і лише там, де збіжні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \qquad (112)$$

і

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n . \qquad (113)$$

Нехай ряд (112) збіжний в області $|z - z_0| > r$, а ряд (113) в крузі $|z - z_0| < R$. Тоді, якщо:

1. $r \geq R$, то ряд (111) розбіжний усюди (рис. 23, а – штриховки, які вказують область збіжності рядів (112) і (113), не перетинаються);

2. $r < R$, то ряд (111) збіжний у кільці $r < |z - z_0| < R$, де $r \geq 0$, $0 \leq R \leq +\infty$ (рис. 23, б).

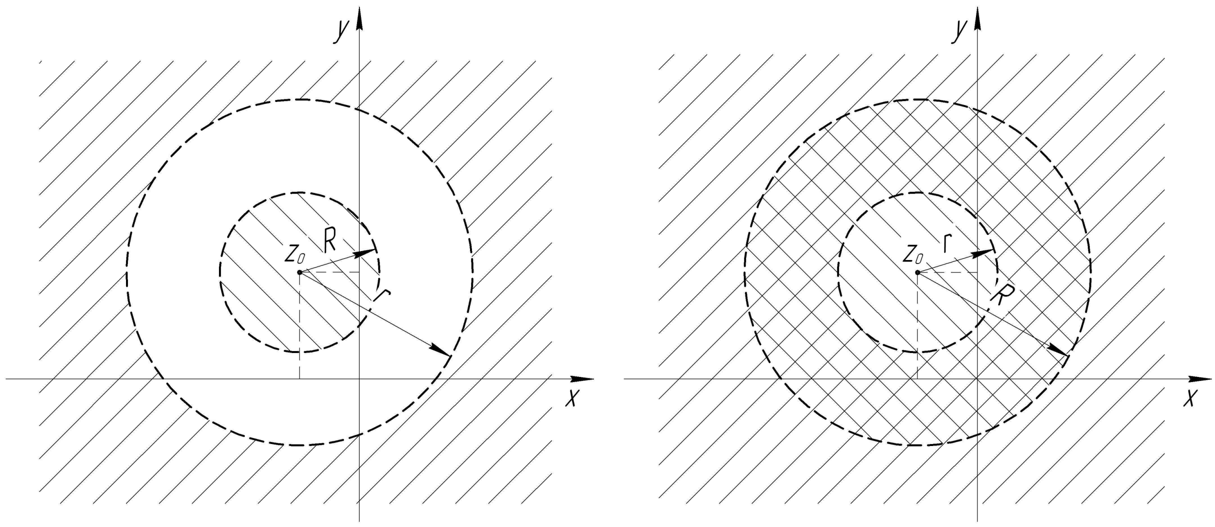
Приклад 27. Визначити область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{6} \right)^n . \qquad (114)$$

Розв'язання.

Ряд (114) збіжний у області, де збіжні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} ; \qquad (115)$$



а) б)

Рисунок 23

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2i}{6}\right)^n. \tag{116}$$

Визначимо область збіжності ряду (115). Це ряд виду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{\left(z-z_0\right)^n}$, *тому його область збіжності визначається нерівністю* $\left|z-z_0\right|>r$.

$z_0=-2i$;

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|c_{-n-1}\right|}{\left|c_{-n}\right|}=\begin{vmatrix}c_{-n}=\left(3+4i\right)^n\\ c_{-n-1}=\left(3+4i\right)^{n+1}\end{vmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left(3+4i\right)^{n+1}\right|}{\left|\left(3+4i\right)^n\right|}=\left|3+4i\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

Отже, ряд (115) збіжний у області

$$\left|z+2i\right|>5. \tag{117}$$

Дослідимо ряд (116). Запишемо його у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z+2i\right)^n}{6^n}. \tag{118}$$

Отже, отримали степеневий ряд виду $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n$. *Його область збіжності визначається нерівністю* $\left|z-z_0\right|<R$.

$z_0=-2i$;

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|c_n\right|}{\left|c_{n+1}\right|}=\begin{vmatrix}c_n=\dfrac{1}{6^n}\\ c_{n+1}=\dfrac{1}{6^{n+1}}\end{vmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|6^{n+1}\right|}{\left|6^n\right|}=6.$$

Область збіжності ряду (118)

$$\left|z+2i\right|<6. \tag{119}$$

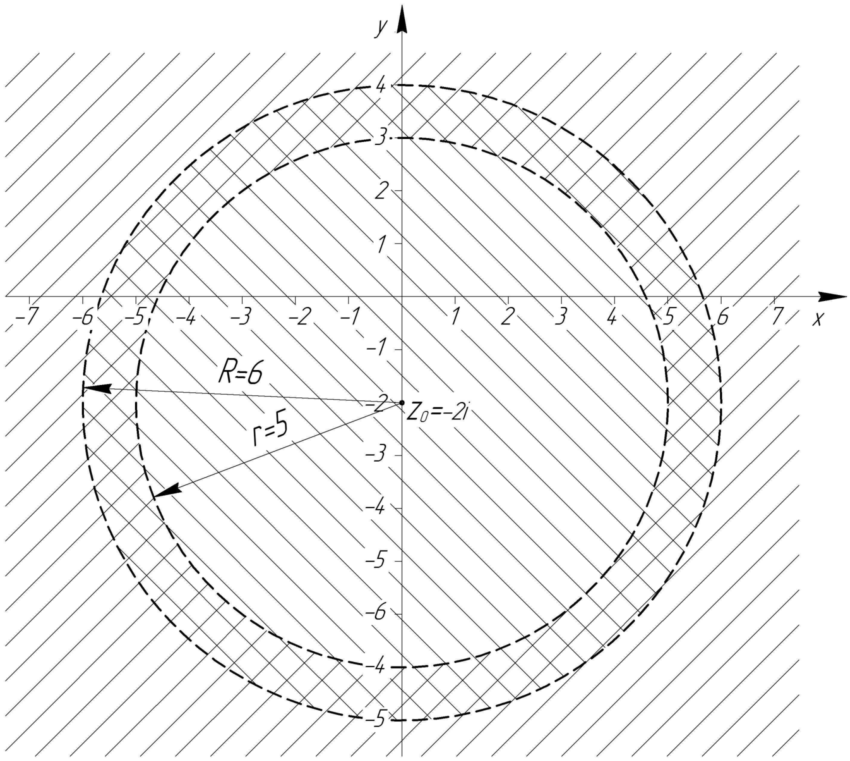


Рисунок 24

Враховуючи (117) і (119) область збіжності ряду (114)

$$5<\left|z+2i\right|<6. \tag{120}$$

Область, що визначається нерівністю (120), зображено на рис. 24.

Завдання для розв'язання

21. Знайти радіус збіжності степеневих рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n$;

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{1-i}\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot z^n$.

22. Визначити та побудувати області збіжності таких рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n+1}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}\left(z-i\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(1-i\right)^n}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\left(z+1\right)^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\left(z+1-i\right)^n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n-1}{\left(z+1\right)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z+1}{i+n}\right)^n$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n\left(n+2\right)}{\left(z+1-i\right)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(z+1-i\right)^n}{3^n\left(n+i\right)}$.

8 РЯДИ ТЕЙЛОРА ТА ЛОРАНА

Якщо функція $f(z)$ однозначна і аналітична в деякій точці z_0, то в околі цієї точки функцію $f(z)$ можна розкласти у ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\,, \tag{121}$$

коефіцієнти якого c_n визначаються за формулою

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\quad n=(0,1,2,...), \tag{122}$$

де Γ – коло з центром в точці z_0, яке повністю лежить в області аналітичності функції $f(z)$. Область збіжності ряду Тейлора функції $f(z)$ є круг з центром в точці z_0 і радіусом, який дорівнює відстані від точки z_0 до найближчої особливої точки.

Якщо існує такий r-окіл точки z_0, в якій функція f (z) аналітична всюди, крім самої цієї точки, то точка z_0 називається особливою точкою **(особлива точка – *singular point*)** функції $f(z)$.

Розклад елементарних функцій в ряд Тейлора при $z_0=0$

$$e^{\xi}=1+\frac{\xi}{1!}+\frac{\xi^2}{2!}+\ldots+\frac{\xi^n}{n!}+\ldots,\ \left(|\xi|<\infty\right); \tag{123}$$

$$\cos\xi=1-\frac{\xi^2}{2!}+\frac{\xi^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{\xi^{2n}}{(2n)!}-\ldots,\ \left(|\xi|<\infty\right); \tag{124}$$

$$\sin\xi=\xi-\frac{\xi^3}{3!}+\frac{\xi^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!}-\ldots,\ \left(|\xi|<\infty\right); \tag{125}$$

$$\ln(1+\xi)=\xi-\frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\xi^n}{n}+\ldots,\left(|\xi|<1\right); \tag{126}$$

$$(1+\xi)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}\xi+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\xi^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}\xi^n+...,\ \left(|\xi|<1\right); \tag{127}$$

$$\frac{1}{1+\xi}=1-\xi+\xi^2-\ldots+(-1)^n\xi^n+\ldots,\ \left(|\xi|<1\right). \tag{128}$$

Здебільшого для розкладу функції в ряд Тейлора застосовують розклад елементарних функцій.

Приклад 28. Розкласти в ряд Тейлора в околі точки $z_0=1$ функцію $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z-3}$ та знайти область збіжності цього ряду.

Розв'язання.

Розкладемо функцію $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z-3}$ *на суму елементарних дробів*

$$f(z)=\frac{z}{z^2-2z-3}=\frac{z}{(z+1)(z-3)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-3}=\frac{A(z-3)+B(z+1)}{(z+1)(z-3)},$$

$$A(z-3)+B(z+1)=z;$$

$$(A+B)z-3A+B=z;$$

$$\begin{cases} z^1: A+B=1; \\ z^0: -3A+B=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{4}; \\ B=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Тоді

$$f(z)=\frac{1}{4}\frac{1}{1+z}+\frac{3}{4}\frac{1}{z-3}.$$

Розкладемо функцію $\dfrac{1}{1+z}$ *в ряд Тейлора*

$$\frac{1}{1+z}=\left|\begin{array}{l}\text{Нам необхідно розкласти у ряд Тейлора} \\ \text{в околі точки } z_0=1, \text{ тобто по степенях } z-1 \\ \text{Тому виділимо в знаменнику } z-1\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{1+(z-1)+1}=\frac{1}{2+(z-1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Використаємо розклад} \\ \dfrac{1}{1+\xi}=1-\xi+\xi^2-\ldots+(-1)^n\xi^n+\ldots \\ \xi=\dfrac{z-1}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{4}-\frac{(z-1)^3}{8}+\ldots+(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{z-1}{4}+\frac{(z-1)^2}{8}-\frac{(z-1)^3}{16}+\ldots+(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}+\ldots,$$

тобто

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{2}-\frac{z-1}{4}+\frac{(z-1)^2}{8}-\frac{(z-1)^3}{16}+\ldots+(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}+\ldots. \qquad (129)$$

Область збіжності ряду (128) визначається нерівністю $|\xi|<1$. *При отриманні розкладу (129) ми використовували підстановку* $\xi=\dfrac{z-1}{2}$, *тому*

$$\left|\frac{z-1}{2}\right|<1.$$

Отже, область збіжності ряду (129)

$$|z-1|<2. \tag{130}$$

Аналогічно по степеням $z-1$ *розкладемо функцію* $\dfrac{1}{z-3}$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-1-2}=\frac{1}{-2+(z-1)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{1+\xi}=1-\xi+\xi^2-\ldots+(-1)^n\xi^n+\ldots \\ \xi=-\dfrac{z-1}{2}\end{array}\right|= \tag{131}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{4}+\frac{(z-1)^3}{8}+\ldots+\frac{(z-1)^n}{2^n}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{z-1}{4}-\frac{(z-1)^2}{8}-\frac{(z-1)^3}{16}-\ldots-\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}-\ldots .$$

Область збіжності ряду (131)

$$|z-1|<2. \tag{132}$$

$$f(z)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{z-1}{4}+\frac{(z-1)^2}{8}-\frac{(z-1)^3}{16}+\ldots+(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}-\frac{z-1}{4}-\frac{(z-1)^2}{8}-\frac{(z-1)^3}{16}-\ldots-\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}-\ldots\right)=\frac{1}{8}-\frac{z-1}{16}+$$

$$+\frac{(z-1)^2}{32}-\frac{(z-1)^3}{64}+\ldots+(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+3}}+\ldots-\frac{3}{8}-\frac{3(z-1)}{16}- \tag{133}$$

$$-\frac{3(z-1)^2}{32}-\frac{3(z-1)^3}{64}-\ldots-\frac{3(z-1)^n}{2^{n+3}}=$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{(z-1)}{8}-\frac{(z-1)^2}{16}-\frac{(z-1)^3}{32}-\ldots-\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}-\ldots$$

Ряд (133) збіжний в області, де збіжні обидва ряди: (129) і (131), тобто в області

$$|z-1|<2.$$

Функція $f(z)$ однозначна і аналітична в кільці $r<|z-z_0|<R$ (не виключаються випадки, коли $r=0$ i $R=+\infty$) розкладається в цьому кільці в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}, \tag{134}$$

де коефіцієнти c_n знаходяться за формулою

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}},\ (n=0,\pm1,\pm2,...). \tag{135}$$

Тут Γ – довільне коло з центром в точці z_0, розміщене всередині даного кільця.

В формулі (134) ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \tag{136}$$

називається головною частиною ряду Лорана, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{137}$$

називається правильною частиною ряду Лорана.

На практиці при знаходженні коефіцієнтів c_n ряду Лорана функції $f(z)$ в околі точки z_0 (по степенях $z-z_0$), як і у випадку пошуку коефіцієнтів розкладу функції у ряд Тейлора, намагаються уникати використання формули (135), оскільки вона призводить до громіздких викладок. Зазвичай, якщо це можливо, використовуються готові розклади в ряд Тейлора елементарних функцій (123) – (128). Для цього необхідно функцію подати у вигляді $f(z)=g\left(a(z-z_0)^k\right)$, де $g(\xi)$ – одна із елементарних функцій (123) – (128) (тобто $g(\xi)=e^{\xi}$, $g(\xi)=\sin\xi$ та ін.); a – довільне комплексне число; k – довільне ціле число, крім 0. Потім у праву частину відповідного розкладу (123) – (128) потрібно виконати підстановку $\xi=a(z-z_0)^k$.

Для функції комплексної змінної $f(z)$ залежно від того, яку область ми розгдядаємо, будуть різні розклади в ряд Лорана.

Приклад 29. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)=z^2\cos\frac{1}{z}$ *в околі точки* $z_0=0$.

Розв'язання.

$$f(z) = z^2 \cos\frac{1}{z} = \left| \begin{array}{l} \cos\xi = 1 - \dfrac{\xi^2}{2!} + \dfrac{\xi^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{\xi^{2n}}{(2n)!}, \ |\xi| < \infty \\ \xi = \dfrac{1}{z} \end{array} \right| =$$

$$= z^2 \left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}} + \ldots \right) =$$

$$= z^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24z^2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n-2}} + \ldots .$$

Область збіжності

$$|\xi| < \infty \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < \infty;$$

$$|z| > 0,$$

тобто уся комплексна площина, крім точки $z = 0$.

Алгоритм пошуку усіх розкладів у ряд Лорана функції $f(z) = \dfrac{a}{z-b}$ в околі точки z_0 (по степенях $z - z_0$), де a, b, z_0 – довільні комплексні числа $(b \neq z_0)$.

1. Будуємо комплексну площину та наносимо на неї точку $z = z_0$ та особливу точку функції $f(z)$: $z = b$ (рис. 25). З центром у точці z_0 через точку b проводимо коло, яке розбиває комплексну площину на дві області. Саме у цих областях будемо мати два різні розклади у ряд Лорана.

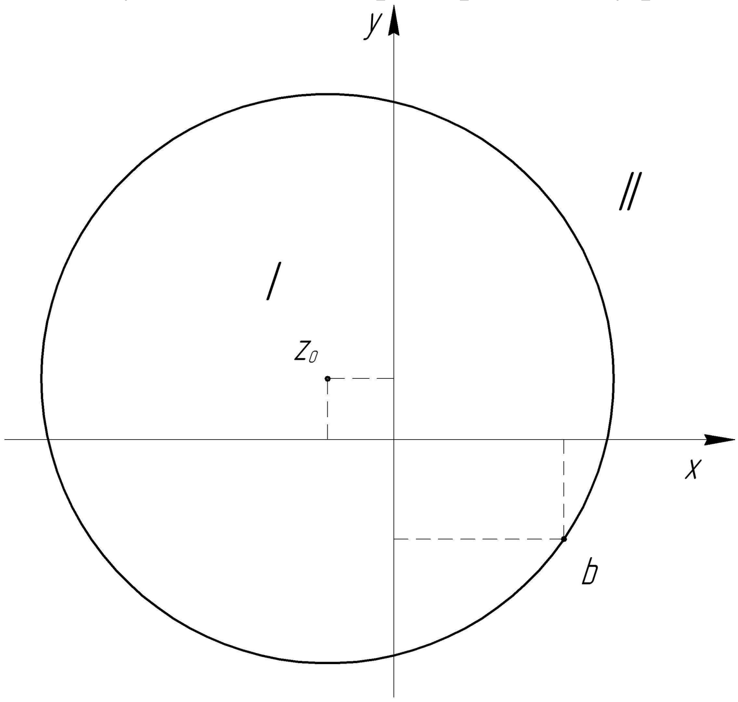


Рисунок 25

2. Шукаємо розклад в I області

$$f(z)=\frac{a}{z-b}=\frac{a}{z-z_0+z_0-b}=\frac{a}{z_0-b}\left(\frac{1}{1+\dfrac{z-z_0}{z_0-b}}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{1+\xi}=1-\xi+\xi^2-\ldots+(-1)^n\xi^n+\ldots,\ |\xi|<1\\ c=z_0-b\\ \xi=\dfrac{z-z_0}{c}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{a}{c}\left(1-\frac{z-z_0}{c}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}-\ldots+(-1)^n\frac{(z-z_0)^n}{c^n}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{a}{c}-\frac{a}{c^2}(z-z_0)+\frac{a}{c^3}(z-z_0)^2-\ldots+\frac{(-1)^n a}{c^{n+1}}(z-z_0)^n+\ldots$$

3. Шукаємо розклад у II області

$$f(z)=\frac{a}{z-b}=\frac{a}{z-z_0+z_0-b}=\frac{a}{z_0-z_0}\left(\frac{1}{1+\dfrac{z_0-b}{z-z_0}}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{1+\xi}=1-\xi+\xi^2-\ldots+(-1)^n\xi^n+\ldots,\ |\xi|<1\\ c=z_0-b\\ \xi=\dfrac{c}{z-z_0}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{a}{z-z_0}\left(1-\frac{c}{z-z_0}+\frac{c^2}{(z-z_0)^2}-\ldots+(-1)^n\frac{c^n}{(z-z_0)^n}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{a}{z-z_0}-\frac{ac}{(z-z_0)^2}+\frac{ac^2}{(z-z_0)^3}-\ldots+\frac{(-1)^n ac^n}{(z-z_0)^{n+1}}+\ldots.$$

Таким чином ми отримали усі можливі розклади функції $f(z)=\dfrac{a}{z-b}$ у ряд Лорана по степенях $z-z_0$.

Приклад 30. Розглянути різні розклади в ряд Лорана функції $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ *в околі точки* $z_0=0$.

Розв'язання.

На комплексній площині відкладаємо точку $z_0=0$ *та особливі точки функції* $f(z)$ *(враховуючи, що чисельник і знаменник є аналітичними функціями, то особливими будуть точки, у яких знаменник перетворюється на нуль):* $z_1=1$, $z_2=-2$. *Через точки* z_1 *і* z_2 *з центром у точці* z_0 *проводимо кола, які розбивають усю комплексну площину на три області (рис. 26).*

Розкладемо функцію на елементарні дроби

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}.$$

Знайдемо усі можливі розклади у ряд Лорана функції $f(z)=\dfrac{1}{z+2}$.

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{1+\xi}=1-\xi+\xi^2-\ldots+(-1)^n\xi^n+\ldots,\ |\xi|<1\\ \xi=\dfrac{z}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right)=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}+\ldots \quad (138)$$

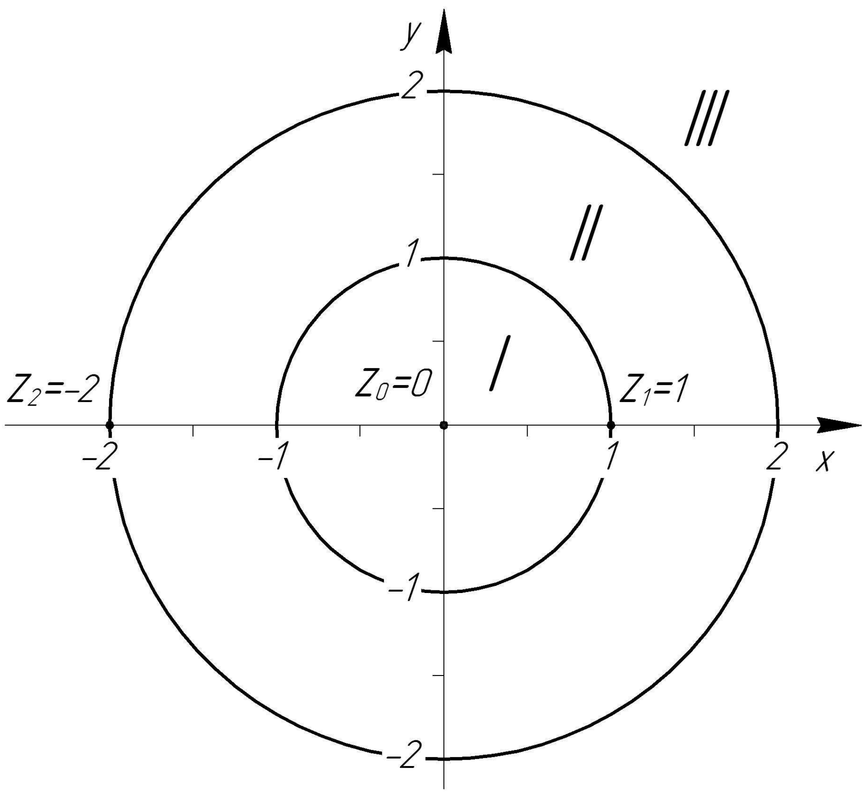


Рисунок 26

Область збіжності ряду (138)

$$|\xi|<1 \Rightarrow \left|\frac{z}{2}\right|<1,$$

$$|z|<2,$$

тобто області I і II.

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{1+\xi}=1-\xi+\xi^2-\ldots+(-1)^n\xi^n+\ldots,\ |\xi|<1\\ \xi=\frac{2}{z}\end{array}\right|= \tag{139}$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\ldots+(-1)^n\frac{2^n}{z^n}+\ldots\right)=\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}-\ldots+(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}+\ldots.$$

Область збіжності ряду (138)

$$|\xi|<1 \Rightarrow \left|\frac{2}{z}\right|<1,$$

$$|z|>2,$$

тобто область III.

Аналогічно знаходимо усі можливі розклади у ряд Лорана функції $\frac{1}{z-1}$.

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{1+\xi}=1-\xi+\xi^2-\ldots+(-1)^n\xi^n+\ldots,\ |\xi|<1\\ \xi=-z\end{array}\right|= \tag{140}$$

$$=-\left(1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots\right)=-1-z-z^2-\ldots-z^n-\ldots.$$

Область збіжності ряду (140): $|z|<1$ *– I область.*

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{1+\xi}=1-\xi+\xi^2-\ldots+(-1)^n\xi^n+\ldots,\ |\xi|<1\\ \xi=-\frac{1}{z}\end{array}\right|= \tag{141}$$

$$=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots+\frac{1}{z^{n+1}}+\ldots.$$

Область збіжності ряду (141): $|z|>1$ *– II і III область.*

Отже, в I області ($|z|<1$*) маємо такий розклад функції* $f(z)$

$$f(z)=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}+\ldots-1-z-z^2-\ldots-z^n-\ldots=$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z-\frac{7}{8}z^2+\ldots+\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n+\ldots.$$

II область $(1<|z|<2)$*:*

$$f(z)=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots+\frac{1}{z^{n+1}}+\ldots.$$

III область $(|z|>2)$*:*

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}-\ldots+(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots+\frac{1}{z^{n+1}}+\ldots=$$

$$=\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}+\ldots+\left((-2)^n+1\right)\frac{1}{z^{n+1}}+\ldots.$$

Завдання для розв'язання

23. Розкласти задані функції у ряд Тейлора, використовуючи розклади (123) – (128), та знайти область збіжності отриманих рядів:

а) $\sin(2z+1)$ за степенями $z+1$;

б) $\cos z$ за степенями $z+\frac{\pi}{4}$;

в) e^z за степенями $2z-1$;

г) $\frac{1}{3z+1}$ за степенями $z+2$.

24. Розкласти функцію $\frac{1}{z-i}$ по степенях z в областях $|z|<1$ та $1<|z|<\infty$.

25. Розглянути усі випадки розкладу у ряд Лорана по степенях z функції $\frac{1}{(z-3)(z-2)}$.

26. Розглянути усі випадки розкладу у ряд Лорана по степенях $z-1$ функції $\frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}$.

9 НУЛІ ФУНКЦІЇ. ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ. ЛИШКИ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в точці z_0. Точка z_0 називається нулем функції $f(z)$ порядку (або кратності) n, якщо виконується умова

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\ ...,\ f^{(n-1)}(z_0)=0,\ f^{n}(z_0)\neq 0.$$

Якщо $n=1$, то точка z_0 називається простим нулем.

Точка z_0 тоді і тільки тоді є нулем n-го порядку функції $f(z)$, аналітичної в точці z_0, коли в деякому околі цієї точки має місце рівність

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z),$$

де функція $\varphi(z)$ аналітична в точці z_0 і $\varphi(z_0)\neq 0$.

Приклад 31. Знайти порядок нуля $z_0=0$ для функції $f(z)=\dfrac{z^8}{z-\sin z}$.

Розв'язання.

Використовуючи розклад функції $\sin z$ в ряд Тейлора в околі точки $z_0=0$ отримаємо

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}=\frac{z^8}{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...\right)}=\frac{z^8}{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+...}=\frac{z^5}{\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+...}=$$

$$=z^5\frac{1}{\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+...}.$$

Припустимо

$$\varphi(z)=\frac{1}{\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+...}.$$

Тоді $f(z)=z^5\varphi(z)$, де $\varphi(z)$ – функція, аналітична в точці $z_0=0$, причому $\varphi(0)=6\neq 0$. Тому точка $z_0=0$ є для даної функції нулем п'ятого порядку.

Точка z_0 називається ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо існує окіл цієї точки такий, в якому функція $f(z)$ аналітична всюди, крім самої точки $z=z_0$.

Точка z_0 називається усувною особливою точкою **(усувна особлива точка – *removable singular point*)** функції $f(z)$, якщо існує скінченна границя функції $f(z)$ в точці z_0.

Точка z_0 називається полюсом **(полюс – *pole*)** функції $f(z)$, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

Для того, щоб точка z_0 була полюсом функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб ця точка була нулем для функції $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Точка z_0 називається полюсом порядку n ($n\geq 1$) функції $f(z)$, якщо ця точка є нулем порядку n для функції $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$. У випадку $n=1$ полюс називають простим.

Для того, щоб точка z_0 була полюсом порядку n функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб функцію $f(z)$ можна було подати у вигляді $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^n}\varphi(z)$, де функція $\varphi(z)$ аналітична в точці z_0 та $\varphi(z_0)\neq 0$.

Якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не існує, то точка z_0 називається ізольованою суттєво особливою точкою (**суттєво особлива точка – *essentially singular point***).

Приклад 32. Визначити особливі точки та їх характер функції $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}$.

Розв'язання.

Функція $f(z)$ *має дві особливі точки* $z=-1$ *і* $z=1$. *Визначимо характер особливої точки* $z=-1$. *Запишемо функцію* $f(z)$ *у вигляді*

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)^2}\frac{\sin z}{z-1}.$$

Функція $\dfrac{\sin z}{z-1}$ *аналітична в околі точки* $z=-1$, *причому* $\left.\dfrac{\sin z}{z-1}\right|_{z=-1}=\dfrac{\sin 1}{2}\neq 0$. *Отже, точка* $z=-1$ *є двократним полюсом даної функції. Аналогічно, записавши функцію* $f(z)$ *у вигляді*

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\frac{\sin z}{(z+1)^2},$$

отримаємо, що точка $z=1$ *є простим полюсом функції* $f(z)$.

Для ізольованих особливих точок мають місце такі твердження

1. Для того, щоб точка z_0 була усувною особливою точкою функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб розклад у ряд Лорана $f(z)$ в околі точки z_0 не містив головної частини.

2. Для того, щоб точка z_0 була полюсом функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб головна частина розкладу у ряд Лорана $f(z)$ в околі точки z_0 містила лише скінченну кількість членів

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\ ,\ (c_{-k}\neq 0)\,.$$

При цьому k (найбільший з показників степенів $z-z_0$, що міститься у знаменниках членів головної частини ряду Лорана) збігається з порядком полюсу.

3. Точка z_0 тоді і лише тоді є суттєво особливою точкою для функції $f(z)$, коли головна частина її лоранівського розкладу в околі точки z_0 містить нескінченну кількість членів.

Приклад 33. Встановити характер ізольованої особливої точки $z_0=0$ *для функції* $f(z)=\dfrac{1-e^{\frac{1}{z}}}{z}$.

Розв'язання.

$$f(z)=\frac{1-e^{\frac{1}{z}}}{z}=\left|\begin{array}{l} e^{\xi}=1+\dfrac{\xi}{1!}+\dfrac{\xi^2}{2!}+\ldots+\dfrac{\xi^n}{n!}+\ldots \\ \xi=\dfrac{1}{z} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1-1-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2 2!}-\frac{1}{z^3 3!}-\ldots}{z}=-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3 2!}-\frac{1}{z^4 3!}-\ldots$$

Враховуючи, що розклад у ряд Лорана функції $f(z)$ *в околі точки* $z_0=0$ *містить нескінченну кількість членів головної частини, точка* $z_0=0$ *– суттєво особлива точка.*

Нехай точка z_0 є ізольованою особливою точкою функції $f(z)$. Лишком **(лишок – *residue*)** функції $f(z)$ в точці z_0 називається число, що позначається символом $\operatorname{res} f(z_0)$ та визначається за формулою

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz, \tag{142}$$

де γ – контур, який не виходить за межі аналітичності функції $f(z)$ і обмежує область, що містить точку z_0 і не містить інших ізольованих особливих точок функції $f(z)$. Здебільшого γ – коло з центром в точці z_0 достатньо малого радіусу, такого, щоб коло не виходило за межі області аналітичної функції $f(z)$ і не мало всередині інших ізольованих особливих точок. Інші позначення, які іноді використовуються у літературі для позначення лишка функції $f(z)$ у точці z_0: $\operatorname{res}\left[f(z);z_0\right]$, $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$.

Якщо порівняти формули (142) і (135), то можна зробити висновок: лишок функції дорівнює коефіцієнту при мінус першому степені в розкладі в ряд Лорана функції $f(z)$ в околі точки z_0

$$\operatorname{res} f(z_0)=c_{-1}. \tag{143}$$

Правила обчислення лишків

1. Лишок в усувній особливій точці дорівнює нулю, тобто

$$\operatorname{res} f(z_0)=0, \tag{144}$$

де z_0 – усувна особлива точка функції $f(z)$.

2. Якщо точка z_0 є полюсом n-го порядку функції $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f(z)(z-z_0)^n\right]. \tag{145}$$

3. Якщо точка z_0 є простим полюсом функції $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)]. \tag{146}$$

4. Якщо функція $f(z)$ в околі точки z_0 подана як частка двох аналітичних функцій

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \tag{147}$$

де $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, а $\psi'(z_0)\neq 0$, тобто z_0 є простим полюсом функції $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{148}$$

5. Якщо точка z_0 є суттєво особливою точкою функції $f(z)$, то для знаходження $\operatorname{res} f(z_0)$ необхідно знайти коефіцієнт c_{-1} в лоранівському розкладі функції $f(z)$ в околі точки z_0, тоді

$$\operatorname{res} f(z_0)=c_{-1}. \tag{149}$$

Приклад 34. Знайти лишки функції $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$ *в особливих точках.*

Розв'язання.

Особливими будуть точки, у яких знаменник перетворюється у нуль

$$(z+1)^3(z-2)=0.$$

Отже, $z_1=-1$ *і* $z_2=2$ *– ізольовані особливі точки функції* $f(z)$*. Враховуючи, що* $z_1=-1$ *– полюс третього порядку функції* $f(z)$*, скористаємось формулою (145)*

$$\operatorname{res} f(-1)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\left[\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}(z+1)^3\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}\left(\frac{e^z}{(z-2)}\right)''=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\left(\dfrac{e^z}{z-2}\right)'=\dfrac{e^z(z-2)-e^z}{(z-2)^2}=\dfrac{e^z(z-3)}{(z-2)^2}\\ \left(\dfrac{e^z}{z-2}\right)''=\left(\dfrac{e^z(z-3)}{(z-2)^2}\right)'=\dfrac{(z^2-6z+10)e^z}{(z-2)^3}\end{array}\right|=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}\frac{(z^2-6z+10)e^z}{(z-2)^3}=-\frac{17}{54e}.$$

Точка $z_2=2$ *– простий полюс, тому за формулою (146)*

$$\operatorname{res} f(2)=\lim_{z\to2}\left[\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}(z-2)\right]=\lim_{z\to2}\left(\frac{e^z}{(z+1)^3}\right)=\frac{e^2}{27}.$$

Завдання для розв'язання

27. Знайти усі особливі точки функції $w=f(z)$ та визначити їх характер

а) $w=\dfrac{1}{z^2+5z+4}$; б) $w=\dfrac{z}{\sin z}$; в) $w=e^{\frac{z}{z-1}}$.

28. Знайти лишки в особливих точках

а) $w=\dfrac{\operatorname{sh} z}{z}$;

б) $w=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$;

в) $w=\cos\dfrac{1}{z}+z^3$;

г) $w=\dfrac{\sin z}{z^2}$;

д) $w=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}$;

е) $w=\dfrac{z}{(z+i)\left(z-\frac{i}{2}\right)^2}$;

ж) $w=z^3e^{\frac{1}{z}}$;

и) $w=\dfrac{e^z}{\frac{1}{4}-\sin^2 z}$.

10 ТЕОРЕМА КОШІ ПРО ЛИШКИ

Теорема 10 (теорема Коші про лишки). Якщо функція $f(z)$ аналітична на границі C області D і всередині області D за виключенням скінченної кількості особливих точок $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{res } f(z_k). \tag{150}$$

Приклад 35. Знайти інтеграл $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$.

Розв'язання.

В області $|z| < 4$ *функція* $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + z}$ *аналітична скрізь, крім точок* $z_1 = 0$ *і* $z_2 = -1$ *(рис. 27).*

За теоремою Коші про лишки

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i \left(\text{res } f(0) + \text{res } f(-1)\right).$$

Враховуючи, що

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \left| e^z - 1 \sim z \right| = \lim_{z\to 0} \frac{z}{z(z+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z+1} = 1,$$

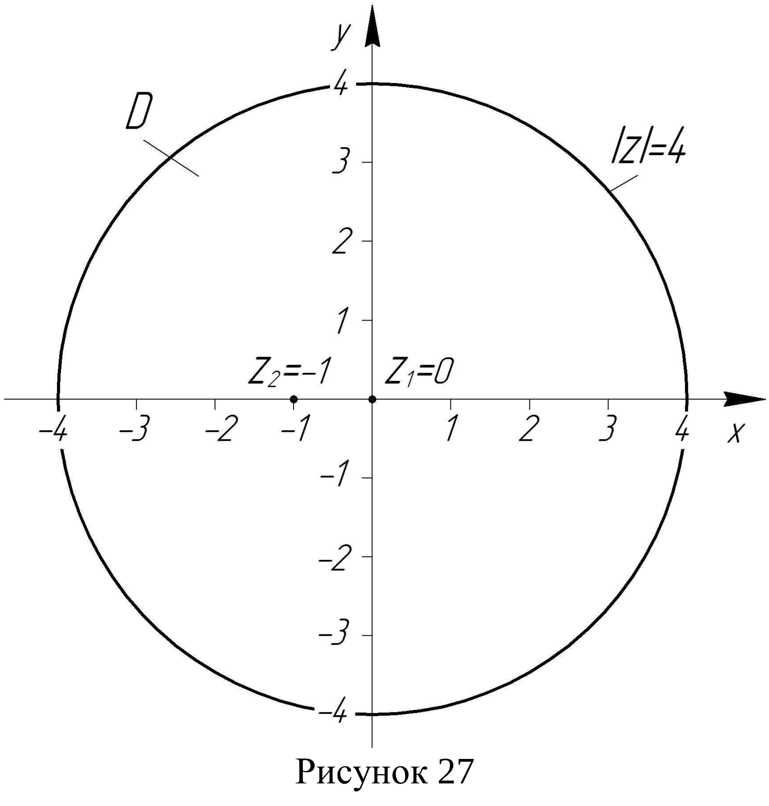


Рисунок 27

точка $z_1 = 0$ *– усувна особлива точка. Тому* $\operatorname{res} f(0) = 0$.

Точка $z_2 = -1$ *– полюс першого порядку, тому*

$$\operatorname{res} f(-1) = \lim_{z \to -1}\left[\frac{e^z - 1}{z(z+1)} \cdot (z+1)\right] = 1 - \frac{1}{e}.$$

Отже,

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^{z-1}}{z^2 + z} dz = 2\pi i\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Приклад 36. Обчислити інтеграл $\oint_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція $f(z) = \operatorname{tg} z$ *аналітична всюди, крім точок* $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. *Але лише дві точки* $z = \frac{\pi}{2}$ *та* $z = -\frac{\pi}{2}$ *лежать всередині області, що обмежена контуром інтегрування* $|z| = 2$ *(рис. 28). Тому*

$$\oint_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz = 2\pi i\left(\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Знайдемо $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. *У точці* $z = \frac{\pi}{2}$ *функцію* $f(z) = \operatorname{tg} z$ *можна подати у вигляді*

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

де $\sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 1 \neq 0$, $\cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0$, $(\cos z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -1 \neq 0$.

Тому за формулою (148)

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin z}{(\cos z)'}\Bigg|_{z=\frac{\pi}{2}} = -1.$$

Аналогічно міркуючи, визначимо

$$\operatorname{res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin z}{(\cos z)'}\Bigg|_{z=-\frac{\pi}{2}} = -1.$$

Тоді

$$\oint_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz = 2\pi i(-1 + (-1)) = -4\pi i.$$

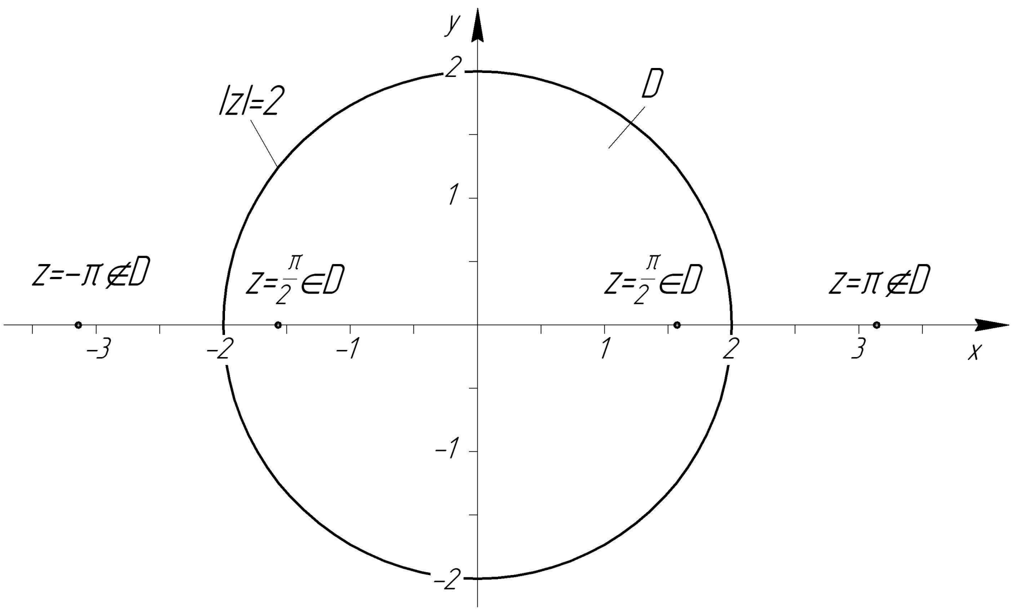


Рисунок 28

Приклад 37. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz$.

Розв'язання.

Чисельник підінтегральної функції $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}$ *аналітичний всюди, крім точки* $z=0$. *Знаменник* $f(z)$ *– аналітична на усій комплексній площині функція. Визначимо точки, у яких знаменник перетворюється на нуль*

$$z^2+1=0 \Rightarrow z=\pm\sqrt{-1};$$
$$z=\pm i.$$

Отже, підінтегральна функція має три особливі точки: $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-i$. *Згідно з рис. 29 лише дві з них –* $z_1=0$, $z_2=i$ *– належать області* D, *що обмежується контуром інтегрування* $|z-i|=\dfrac{3}{2}$. *Тому за теоремою Коші про лишки*

$$\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz = 2\pi i\left(\operatorname{res} f(0)+\operatorname{res} f(i)\right).$$

Оскільки

$$f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}=\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z+i)(z-i)}=\frac{\dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z+i)}}{(z-i)},$$

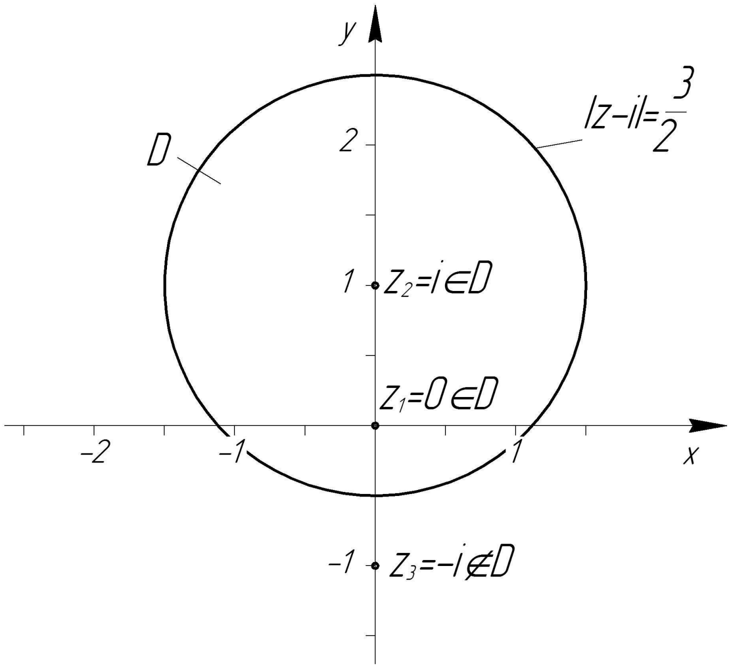


Рисунок 29

то $z_2 = i$ *– простий полюс, тому*

$$\operatorname{res} f(i) = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z+i)(z-i)}\cdot(z-i)\right) = \lim_{z\to i}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z+i)} = \frac{1}{2ei}.$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}$ *не існує, то* $z_1 = 0$ *– суттєво особлива точка. Для визначення лишка у цій точці необхідно мати розклад функції у ряд Лорана за степенями* z. *Але в даному випадку шукати такий розклад немає необхідності: функція* $f(z)$ *парна, тому її лоранівський розклад міститиме лише парні степені* z *і* $\frac{1}{z}$. *Тому* $c_{-1} = 0$ *і, отже,*

$$\operatorname{res} f(0) = 0.$$

Звідки $\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2ei}+0\right) = \frac{\pi}{e}.$

Завдання для розв'язання

29. Використовуючи теорему Коші про лишки, обчислити інтеграли:

а) $\oint\limits_{|z+2i|=3} \dfrac{dz}{z^3\left(z^2+4\right)}$;

б) $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{zdz}{\left(z-1\right)^2\left(z+2\right)}$;

в) $\oint\limits_{|z-i|=1} \dfrac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$;

г) $\oint\limits_{C} \dfrac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}dz,\ C: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$;

д) $\oint\limits_{C} \dfrac{e^{2z}}{z^3-1},\ C: x^2+y^2-2x=0$;

е) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{zdz}{\sin z}$;

ж) $\oint\limits_{|z+2|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}}dz$.

11 ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ДО ЗАДАЧ ГІДРОДИНАМІКИ

Плоский усталений рух рідини. Будемо розглядати плоску потенційну усталену течію нестисливої ідеальної рідини. Як відомо, у випадку потенціального руху в області, що не містить джерел, вектор швидкості $\vec{v}\left(x,y\right)$ задовольняє рівняння

$$\operatorname{rot}\vec{v}=0, \tag{151}$$

$$\operatorname{div}\vec{v}=0, \tag{152}$$

оскільки рух потенціальний, існує скалярна функція $u\left(x,y\right)$, що називається потенціалом швидкостей, пов'язана з вектором швидкості $\vec{v}$ співвідношенням

$$\vec{v}=\operatorname{grad}u\left(x,y\right), \tag{153}$$

тобто

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}; \\ v_y=\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \tag{154}$$

При цьому вектор швидкості $\vec{v}$ у кожній точці течії направлений по нормалі до лінії рівня $u\left(x,y\right)=const$ потенціалу швидкостей. Підставивши (153) у рівняння (152), отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{155}$$

тобто у випадку, що розглядається, потенціал швидкостей є гармонічною функцією.

Побудуємо аналітичну функцію комплексної змінної $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, для якої потенціал $u(x,y)$ течії є дійсною частиною. Як було відзначено (див. С. 29), при цьому функція $f(z)$ визначена з точністю до сталої. При цьому лінії рівня $u(x,y)=const$ і $v(x,y)=const$ дійсної й уявної частин аналітичної функції взаємно ортогональні. Тому вектор швидкості $\vec{v}$ у кожній точці течії направлений по дотичній до лінії рівня $v(x,y)=const$, що проходить через дану точку. Функція $v(x,y)$, що є уявною частиною побудованої в такий спосіб аналітичної функції $f(z)$, називається функцією течії, а сама функція $f(z)$ комплексним потенціалом течії.

Область течії, обмежена двома лініями течії $v(x,y)=C_1$ і $v(x,y)=C_2$, називається трубкою течії. Оскільки швидкість рідини в будь-якій точці направлена по дотичній до лінії течії, то в силу нестисливості рідини й стаціонарного характеру руху, кількість рідини, що протікає за одиницю часу через будь-які два поперечні перерізи S_1 і S_2 трубки течії, залишається постійною. Таким чином, різниця значень сталих C_1 і C_2, визначає витрату рідини в даній трубці течії.

З умов Коші-Рімана й формул (154) випливає, що координати швидкості можуть бути виражені через частинні похідні від функції течії

$$v_x=\frac{\partial u}{\partial x}\Rightarrow v_x=\frac{\partial v}{\partial y}; \tag{156}$$

$$v_y=\frac{\partial u}{\partial y}\Rightarrow v_y=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{157}$$

Комплексне число $w=v_x+iv_y$ можна інтерпретувати як плоский вектор з координатами v_x і v_y. Має місце очевидне співвідношення

$$w=v_x+iv_y=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x}=\overline{f'(z)}, \tag{158}$$

яке пов'язує вектор швидкості й похідну від комплексного потенціалу течії.

У гідродинаміці істотну роль відіграють поняття циркуляції й потоку вектора швидкості. Визначимо ці величини через комплексний потенціал течії.

Розглянемо кусково-гладеньку плоску криву C (замкнену або незамкнену) і введемо на ній вектори диференціалів дуги $d\vec{s}$ і нормалі $d\vec{n}$ за допомогою співвідношень

$$d\vec{s}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}, \tag{159}$$

$$d\vec{n} = dy\,\vec{i} - dx\,\vec{j}. \tag{160}$$

Має місце очевидне співвідношення $\overrightarrow{n^0}ds = d\vec{n}$, де $\overrightarrow{n^0}$ – одинична нормаль до кривої C, а ds – диференціал довжини дуги цієї кривої.

При додатному обході замкненої кривої C формула (160) дає напрямок зовнішньої нормалі.

Потоком вектора швидкості $\vec{v}$ через криву C (замкнену або незамкнену) називається криволінійний інтеграл від нормальної складової швидкості

$$\Pi_C = \int_C (\vec{v} \cdot \vec{n})\,ds. \tag{161}$$

Очевидно, цей інтеграл визначає кількість рідини, що протікає через криву C за одиницю часу. Інтеграл (161) запишемо у вигляді

$$\Pi_C = \int_C \vec{v}\,d\vec{n} = \int_C v_x dy - v_y dx = \int_C \frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx = \int_C \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy. \tag{162}$$

При визначенні підйомної сили, що діє з боку потоку рідини на тіло, яке обтікається нею, велике значення має ступінь завихровості потоку, який характеризується значенням циркуляції. Циркуляцією вектора швидкості уздовж кривої C називається криволінійний інтеграл від дотичної складової вектора швидкості

$$\Gamma_C = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{s}. \tag{163}$$

Виражаючи швидкість $\vec{v}$ через комплексний потенціал, дістанемо

$$\Gamma_C = \int_C \vec{v}\,d\vec{s} = \int_C v_x dx + v_y dy = \int_C \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \int_C \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy. \tag{164}$$

Розглянемо на комплексній площині інтеграл уздовж кривої C від похідної комплексного потенціалу

$$\int_C f'(z)\,dz = \int_C \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy + i\int_C \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy. \tag{165}$$

Порівняння (162), (164) і (165) приводить до формули

$$\int_C f'(z)\,dz = \Gamma_C + i\Pi_C. \tag{166}$$

Ця формула, що дає вираження циркуляції й потоку вектора швидкості через похідну комплексного потенціалу, знаходить численні застосування в гідродинаміці. Зауважимо, що коли область D, у якій розглядається рух, є однозв'язною, то інтеграл (166) по будь-якій замкненій кривій C, що цілком лежить у D, дорівнює нулю в силу теореми Коші. У випадку руху в багатозв'язній області D інтеграл по замкненій кривій C, що цілком лежить у D, може бути відмінний від нуля. Це буде мати місце, коли усередині кривої C міститься область D', що не належить D, в якій містяться джерела й вихрові точки течії, що розглядається. У цій області, очевидно, порушуються рівняння (151) і (152). В окремому випадку область D' може складатися з окремих точок, які при цьому є ізольованими особливими точками аналітичної функції $f(z)$ – комплексного потенціалу течії.

Отже, довільний плоский потенціальний рух в області, у якій відсутні джерела й вихрові точки, може бути описаний за допомогою комплексного потенціалу, що є аналітичною функцією комплексної змінної. Тим самим для вивчення даного класу течії може бути використаний увесь апарат теорії аналітичних функцій.

Розглянемо ряд прикладів найпростіших течій, що описуються елементарними функціями комплексної змінної.

1. Нехай комплексний потенціал течії має вигляд

$$f(z) = az, \tag{167}$$

де $a = a_1 + ia_2$ – задане комплексне число. Тоді

$$u(x, y) = a_1 x - a_2 y, \tag{168}$$

$$v(x, y) = a_2 x + a_1 y \tag{169}$$

і лінії течії $v(x, y) = C$ є прямими, кут нахилу яких до осі x визначається виразом $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_2}{a_1}$. З формули (158)

$$w = v_x + iv_y = \overline{f'(z)} = \bar{a} = a_1 - ia_2, \tag{170}$$

звідки випливає, що швидкість течії постійна й напрямок вектора швидкості збігається із прямими $v(x, y) = C$. Отже функція (167) визначає плоскопаралельну течію.

2. Нехай комплексний потенціал течії має вигляд

$$f(z) = a \ln z, \tag{171}$$

де a – дійсне число. Тоді, перейшовши до показникової форми запису $z = \rho e^{i\varphi}$, одержимо вираз потенціалу й функції течії у полярних координатах:

$$u(\rho, \varphi) = a \ln \rho, \tag{172}$$

$$v(\rho, \varphi) = a\varphi. \tag{173}$$

Звідси випливає, що лінії течії є променями, які виходять із початку координат, а еквіпотенціальні лінії – кола із центром у початку координат. Абсолютна величина швидкості при цьому дорівнює

$$|w| = |f'(z)| = \frac{|a|}{|\rho|} = \frac{|a|}{\rho}, \tag{174}$$

а вектор швидкості направлений по променю $\varphi = const$. З (174) випливає, що у початку координат швидкість прямує до нескінченності. Точка $z = 0$, особлива точка функції $f(z)$, у цьому випадку є джерелом течії (додатним джерелом при $a > 0$, коли швидкість направлена від початку координат, і від'ємним джерелом або стоком при $a < 0$, коли швидкість направлена до початку координат). Взявши довільний замкнений контур C, що містить точку $z=0$ усередині, за формулою (166) одержимо

$$\int_C f'(z)dz = \int_C \frac{a}{z}dz = 2\pi a\, i = \Gamma_C + i\Pi_C. \tag{175}$$

Звідси $\Pi_C = 2\pi a$. Отже, у випадку, що розглядається, потік рідини через будь-який замкнений контур, що містить усередині джерело, постійний і дорівнює $2\pi a$. Цю величину називають потужністю джерела.

3. Нехай комплексний потенціал має вигляд

$$f(z) = i\, a \ln z, \tag{176}$$

де a – дійсне число. У цьому випадку лінії течії являють собою концентричні кола із центром в початку координат. З формули (166), аналогічно як і в попередньому випадку, одержимо $\Pi_c = 0$, $\Gamma_C = -2\pi a$. Точка $z=0$ у цьому випадку називається вихровою точкою течії.

4. Нехай комплексний потенціал течії має вигляд

$$f(z) = a\ln(z+h) - a\ln(z-h), \tag{177}$$

де a – додатне дійсне число, а h – деяка комплексна стала. Згідно із попереднім матеріалом цей потенціал визначає течію з додатним джерелом у точці $z=-h$ і стоком у точці $z=+h$, причому потужність джерела й стоку однакова й дорівнює $2\pi a$. Запишемо (177) у вигляді

$$f(z) = 2ah\frac{\ln(z+h) - \ln(z-h)}{2h} \tag{178}$$

та розглянемо випадок, коли $h \to 0$, вважаючи, що потужність джерела й стоку при цьому зростає так, що величина $m = 2ah$ залишається сталою. У результаті одержимо

$$f_0(z) = \frac{m}{z}. \tag{179}$$

Функція (179) являє собою комплексний потенціал диполя потужності m, що знаходиться в початку координат. Лінії течії диполя, очевидно, визначаються рівняннями

$$-\frac{my}{x^2+y^2} = C \tag{180}$$

або

$$C\left(x^2+y^2\right) + my = 0, \tag{181}$$

тобто є колами із центрами на осі y, що дотикається до осі x у початку координат. При цьому абсолютна величина швидкості, яка дорівнює

$$|w| = \frac{m}{|z|^2} = \frac{m}{x^2+y^2}, \tag{182}$$

прямує до нуля на нескінченності.

5. Розглянемо течію, комплексний потенціал якої має вигляд

$$f(z) = v_\infty z + \frac{m}{z}, \tag{183}$$

де v_∞ і m – додатні дійсні числа. Очевидно, ця течія є суперпозицією плоскопаралельної течії зі швидкістю, що паралельна осі x і дорівнює v_∞, і течії, що створюється диполем потужності m, який знаходиться у початку координат. Лінії течії визначаються рівняннями

$$v_\infty y - \frac{my}{x^2 + y^2} = C. \tag{184}$$

Значенню $C = 0$ відповідає лінія течії, рівняння якої має вигляд

$$y\left(v_\infty - \frac{m}{x^2 + y^2}\right) = 0. \tag{185}$$

Вона розпадається на пряму $y = 0$ і коло $x^2 + y^2 = a^2$, де $a^2 = \dfrac{m}{v_\infty}$. Оскільки

$$f'(z) = v_\infty - \frac{m}{z^2} = v_\infty\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right), \tag{186}$$

то на нескінченності швидкість течії дорівнює v_∞ й направлена уздовж осі x. У точках кола $x^2 + y^2 = a^2$, що є лінією течії, швидкість спрямована по дотичній до цього кола. Для абсолютної величини швидкості в точках кола $z = ae^{i\varphi}$ з формул (158) і (186) одержимо

$$|w|\Big|_{|z|=a} = \left|\overline{f'(z)}\right|\Big|_{|z|=a} = v_\infty \left|1 - e^{2i\varphi}\right| = 2v_\infty |\sin\varphi|. \tag{187}$$

У розглянутих прикладах ми за заданим комплексним потенціалом визначали гідродинамічні характеристики течії. Перейдемо тепер до розв'язання так би мовити оберненої задачі, задачі про визначення комплексного потенціалу течії за його гідродинамічними характеристиками. Зауважимо, що оскільки фізична швидкість течії виражається через похідну комплексного потенціалу (див. формулу (158), то сам комплексний потенціал для заданої течії визначається неоднозначно. Однак його похідна є однозначною аналітичною функцією. Це означає, що в околі будь-якої правильної точки течії має місце розклад

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{188}$$

а в околі ізольованої особливої точки – розклад

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n. \tag{189}$$

З (189) для комплексного потенціалу в околі особливої точки z_0 отримаємо розклад

$$f(z) = b_{-1}\ln(z - z_0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \qquad (190)$$

Зокрема, якщо нескінченно віддалена точка z належить області течії й комплексна швидкість

$$w_\infty = (v_x)_\infty + i(v_y)_\infty \qquad (191)$$

течії в цій точці обмежена, то розклад комплексного потенціалу в околі точки z_∞ має вигляд

$$f(z) = \bar{w}_\infty z + b_{-1}\ln z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}. \qquad (192)$$

Звідси одержимо

$$\int_{C_R} f'(z)dz = 2\pi i b_{-1}, \qquad (193)$$

де C_R – коло $|z| = R$ досить великого радіуса R, поза яким немає особливих точок функції $f(z)$, за винятком точки z_∞. З іншого боку, у силу формули (166) інтеграл (193) визначає потік і циркуляцію вектора швидкості через криву C_R. Оскільки швидкість у точці z_∞ обмежена, то ця точка не є джерелом, тому потік вектора швидкості через криву C_R дорівнює нулю, і формула (193) дає

$$2\pi i b_{-1} = \Gamma_\infty. \qquad (194)$$

Випишемо остаточний розклад комплексного потенціалу в околі нескінченно віддаленої точки, що є правильною точкою течії:

$$f(z) = \bar{w}_\infty z + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi i}\ln z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}. \qquad (195)$$

Розглянемо тепер задачу обтікання замкненого контуру плоскопаралельним потоком. Нехай потік, що має на нескінченності задану швидкість w_∞ і циркуляцію Γ_∞, обтікає тіло S, обмежене замкненим контуром C. Потрібно визначити швидкість у будь-якій точці потоку за заданими гідродинамічними характеристиками на нескінченності за умови, що в точках контуру C швидкість течії направлена по дотичній до контуру C. Остання умова означає, що крива C є лінією течії, тобто уявна частина комплексного потенціалу, що описує течію, повинна зберігати постійне значення на кривій C

$$v(x, y)\Big|_C = const. \qquad (196)$$

Задача зводиться до визначення поза контуром C на комплексній площині аналітичної функції $f(z)$, у розкладі (195) якої задані значення w_∞ і Γ_∞, а на контурі C виконується умова (196). Враховуючи, що комплексний потенціал визначений з точністю до сталої, значення сталої в умові (196) можна вважати рівним нулю.

Почнемо із задачі обтікання кругового циліндра радіуса R із центром у початку координат. Нехай швидкість потоку на нескінченності дорівнює v_∞ і направлена паралельно осі x, а циркуляція відсутня ($\Gamma_\infty = 0$). Ми повинні знайти комплексний потенціал, розклад якого в околі нескінченно віддаленої точки має вигляд

$$f(z) = v_\infty z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} \tag{197}$$

і уявна частина якого перетворюється в нуль при $|z| = R$. Комплексний потенціал такого типу було нами вже розглянуто (183). Тому розв'язок даної задачі має вигляд

$$f(z) = v_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right). \tag{198}$$

При цьому швидкість у точках, що лежать на обтічному циліндрі, визначається формулою (187), звідки випливає, що вона дорівнює нулю у двох критичних точках: у точці $z = -R$, у якій лінія течії $y = 0$ розгалужується на дві лінії течії, що збігаються з верхнім та нижнім напівколами $|z| = R$, і в точці $z = R$, у якій ці лінії течії сходяться знову в пряму $y = 0$. Ці точки називаються точкою розгалуження й точкою сходження, відповідно. Зауважимо, що коли швидкість потоку на нескінченності не паралельна осі x, а має вигляд $w_\infty = v_\infty e^{i\varphi_0}$, то за допомогою перетворення $\zeta = ze^{-i\varphi_0}$ ми приходимо до задачі на площині ζ, що вже розглядалась. Тоді для розв'язку вихідної задачі одержимо вираз

$$f(z) = w_\infty z + \frac{w_\infty R^2}{z}. \tag{199}$$

Нехай тепер циркуляція Γ_∞ не дорівнює нулю. Як ми бачили вище (див. приклад 3), лінії течії у течії з комплексним потенціалом $ia \ln z$ (a – дійсне число) являють собою концентричні кола із центром в початку координат. Тому комплексний потенціал течії, що обтікає круговий циліндр радіуса R із заданою швидкістю на нескінченності v_∞ і заданою циркуляцією Γ_∞, має вигляд

$$f(z) = v_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi i} \ln z. \tag{200}$$

Знайдемо критичні точки течії, у яких швидкість течії дорівнює нулю. Згідно з формулою (158) маємо

$$\overline{w} = f'(z) = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi i z}. \tag{201}$$

Звідси

$$z^2 + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi i v_\infty} z - R^2 = 0 \tag{202}$$

і

$$z_{кр} = i\frac{\Gamma_\infty}{4\pi v_\infty} \pm \sqrt{R^2 - \frac{\Gamma_\infty^2}{16\pi^2 v_\infty^2}}. \tag{203}$$

При $R \geq \left|\frac{\Gamma_\infty}{4\pi v_\infty}\right|$ підкореневий вираз в (203) додатний. Тому

$$\left|z_{кр}\right| = \sqrt{R^2 - \frac{\Gamma_\infty^2}{16\pi^2 v_\infty^2} + \frac{\Gamma_\infty^2}{16\pi^2 v_\infty^2}} = R, \tag{204}$$

тобто обидві критичні точки знаходяться на колі $|z| = R$ обтічного циліндра, причому при $\Gamma_\infty > 0$ ($v_\infty > 0$) обидві точки лежать на верхньому, а при $\Gamma_\infty < 0$ ($v_\infty < 0$) – на нижньому півколі. Тим самим наявність циркуляції зближає точки розгалуження й сходження ліній течії (рис. 30).

При $\left|\frac{\Gamma_\infty}{4\pi v_\infty}\right| = R$ обидві критичні точки збігаються (із точкою $z = iR$ при $\Gamma_\infty > 0$ чи точкою $z = -iR$ при $\Gamma_\infty < 0$). Нарешті, при $\left|\frac{\Gamma_\infty}{4\pi v_\infty}\right| > R$ в області залишається лише одна критична точка, що лежить на уявній осі y. (Як випливає з рівняння (202), добуток коренів цього рівняння дорівнює $-R^2$, тому друга критична точка лежить усередині кола $|z| = R$). Через цю точку проходить лінія течії, що відокремлює замкнені лінії течії від незамкнутих (рис. 31).

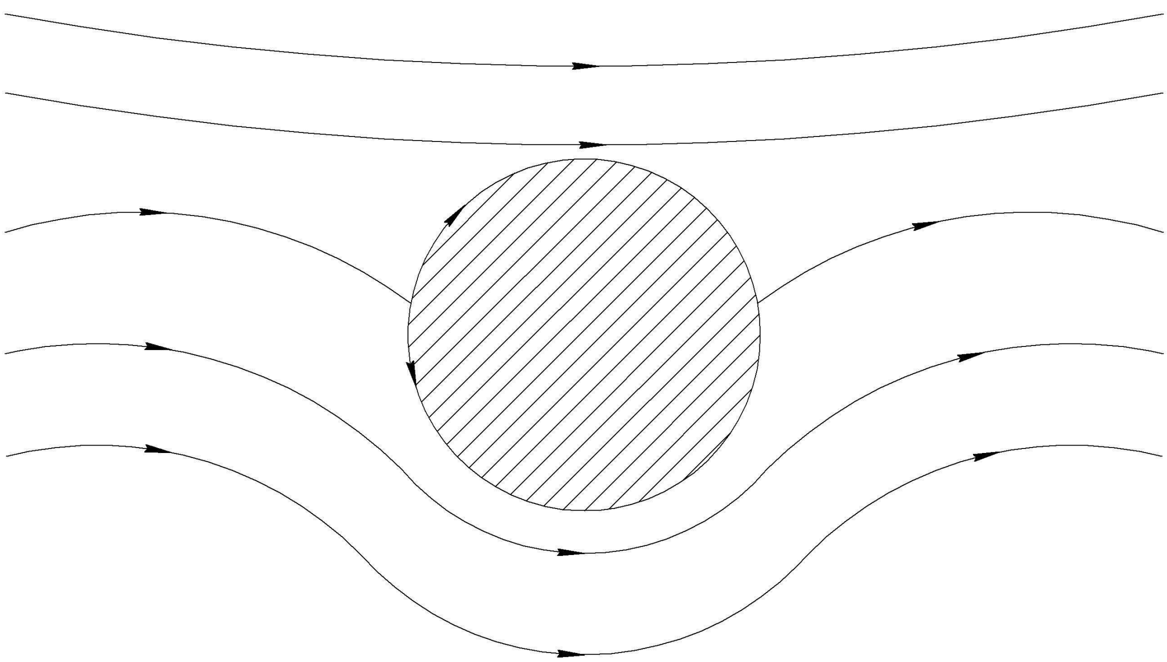


Рисунок 30

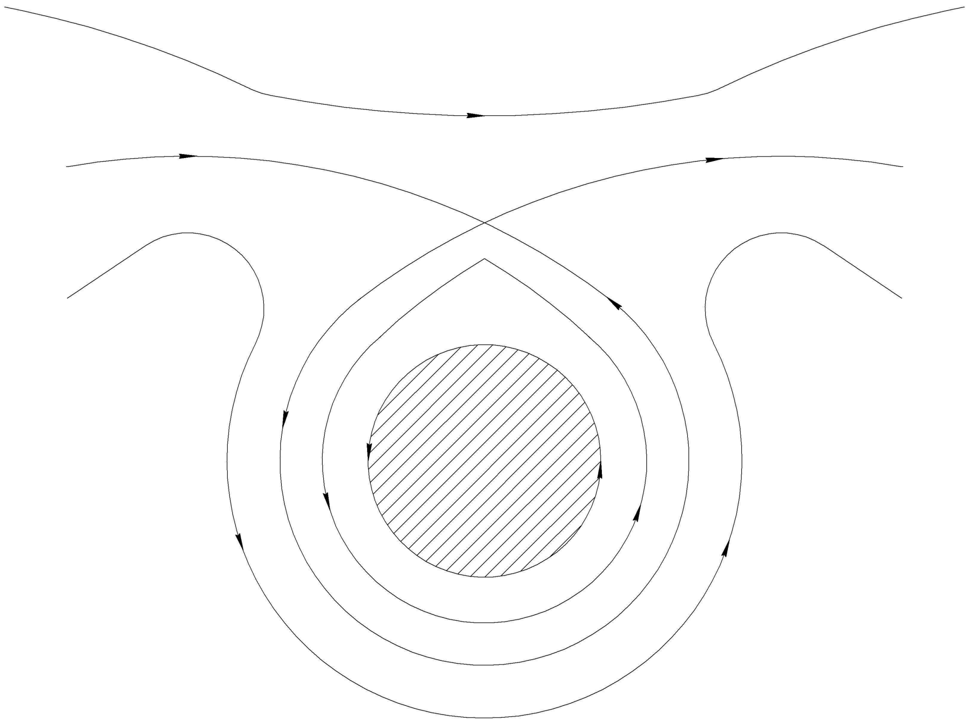


Рисунок 31

Отримані результати дозволяють у принципі розв'язати задачу обтікання довільного замкненого контуру C. Дійсно, нехай функція $\zeta=\varphi(z)$ здійснює відображення області Ω комплексної площини z, що знаходиться зовні контуру C, на область Ω' площини ζ, що зовні одиничного кола $|\zeta|=1$, так що $\varphi(\infty)=\infty$. Тоді, очевидно, задача, що розглядається, виявляється еквівалентною задачі обтікання кругового циліндра одиничного радіуса. При цьому швидкість потоку на нескінченності, яка, взагалі-то зміниться, може бути легко визначена. Комплексний потенціал $f(z)$ вихідної течії при даному відображенні перейде у функцію $F(\zeta)=f\left[z(\zeta)\right]$. Тому за формулою (158) знайдемо

$$\bar{W}_\infty=\left.\frac{dF}{d\zeta}\right|_{\zeta=\infty}=\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=\infty}\left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=\infty}=\bar{w}_\infty\left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=\infty} \tag{205}$$

та

$$W_\infty=w_\infty\left.\overline{\frac{dz}{d\zeta}}\right|_{\zeta=\infty}. \tag{206}$$

У силу формул (199) і (200) розв'язок перетвореної задачі має вигляд

$$F(\zeta)=\bar{W}_\infty\zeta+\frac{W_\infty}{\zeta}+\frac{\Gamma_\infty}{2\pi i}\ln\zeta. \tag{207}$$

Звідси для розв'язку вихідної задачі отримаємо вираз

$$f(z)=F\left[\zeta(z)\right]=\bar{w}_\infty\left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=\infty}\varphi(z)+\frac{w_\infty\left.\overline{\frac{dz}{d\zeta}}\right|_{\zeta=\infty}}{\varphi(z)}+\frac{\Gamma_\infty}{2\pi i}\ln\varphi(z). \qquad (208)$$

Як приклад розглянемо безциркуляційне обтікання нескінченної пластинки плоским потоком рідини. Нехай площина Oxy перетинає пластинку по відрізку $-a\le x\le a$, а вектор швидкості потоку лежить у площині Oxy й на нескінченності має задане значення w_∞. Як випливає з розгляду властивостей функції Жуковського функція

$$z=\frac{a}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)=\psi(\zeta) \qquad (209)$$

здійснює відображення області, яка знаходиться зовні одиничного кола площини ζ, на площину z, що розрізана по відрізку $-a\le x\le a$. При цьому $\psi(\infty)=\infty$ та $\left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=\infty}=\frac{a}{2}$. Тому задача, що розглядається, еквівалентна задачі обтікання без циркуляції кругового циліндра одиничного радіуса на площині ζ потоком, що мають на нескінченності комплексну швидкість $W_\infty=\frac{a}{2}w_\infty$. Комплексний потенціал останньої задачі має вигляд

$$F(\zeta)=\frac{a}{2}\left(\bar{w}_\infty\zeta+\frac{w_\infty}{\zeta}\right). \qquad (210)$$

Підставимо сюди замість ζ і $\frac{1}{\zeta}$ знайдені з (209) величини

$$\xi=\frac{z+\sqrt{z^2-a^2}}{a}, \qquad (211)$$

$$\frac{1}{\xi}=\frac{z-\sqrt{z^2-a^2}}{a}. \qquad (212)$$

Тут $\sqrt{z^2-a^2}>0$ при $z=x>a$. Розіб'ємо w_∞ на дійсну й уявну частини

$$w_\infty=\left(v_x\right)_\infty+i\left(v_y\right)_\infty. \qquad (213)$$

Тоді для комплексного потенціалу вихідної задачі одержимо остаточний вираз

$$f(z)=\left(v_x\right)_\infty z-i\left(v_y\right)_\infty\sqrt{z^2-a^2}. \qquad (214)$$

На закінчення знайдемо силу, що діє з боку потоку на обтічне ним тіло. Сила тиску, що діє на елемент дуги ds контуру C, пропорційна гідродинамічному тиску p у даній точці потоку й спрямована у напрямку внутрішньої нормалі $-d\vec{n}=-\vec{i}dy+\vec{j}dx$. Тому для координат сили, що діє на контур C, одержимо вираз

$$R_x = -\int_C p dy, \tag{215}$$

$$R_y = \int_C p dx. \tag{216}$$

Визначивши гідродинамічний тиск p з інтеграла Бернуллі

$$p = A - \frac{\rho v^2}{2}, \tag{217}$$

де A – стала, а ρ – густина рідини, і ввівши комплексну величину $R = R_y + iR_x$, отримаємо

$$R = -\frac{\rho}{2}\int_C v^2 \left(dx - idy\right) = -\frac{\rho}{2}\int_C v^2 \overline{dz}. \tag{218}$$

(Інтеграл від сталої A по замкненому контуру C, очевидно, дорівнює нулю.) Перетворимо інтеграл (218). Оскільки в точках контуру C швидкість спрямована по дотичній до контуру, то комплексна швидкість течії w пов'язана з величиною фізичної швидкості v співвідношенням $w = ve^{i\varphi}$, де φ – кут між дотичною до контуру та віссю x. Тоді формула (158) дає $ve^{-i\varphi} = f'(z)$. З іншого боку, $\overline{dz} = ds\, e^{-i\varphi}$. Тому

$$v^2 \overline{dz} = v^2 e^{-i2\varphi} ds\, e^{i\varphi} = \left(f'(z)\right)^2 dz \tag{219}$$

і формула (7.74) набуде вигляду

$$R = -\frac{\rho}{2}\int_C \left(f'(z)\right)^2 dz. \tag{220}$$

Це так звана формула Чаплигіна, що виражає силу, яка діє з боку потоку на обтічне ним тіло, через похідну комплексного потенціалу. З виразу (195) для комплексного потенціалу поза обтічного тіла одержимо

$$f'(z) = \overline{w}_\infty + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi i}\frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n'}{z^n}, \tag{221}$$

$$\left(f'(z)\right)^2 = \frac{\overline{w}_\infty}{\pi i}\cdot\frac{\Gamma_\infty}{z} + \overline{w}_\infty^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}. \tag{222}$$

Отже,

$$\int_C \left(f'(z)\right)^2 dz = 2\overline{w}_\infty \Gamma_\infty. \tag{223}$$

Підставивши цей вираз у формулу (220) і відокремивши дійсну й уявну частини, знайдемо

$$R_x = \rho\left(v_y\right)_\infty \Gamma_\infty, \tag{224}$$

$$R_y = -\rho\left(v_x\right)_\infty \Gamma_\infty. \tag{225}$$

Звідси

$$|R| = \rho|v_\infty|\cdot|\Gamma_\infty|. \tag{226}$$

Формула (226) являє собою теорему Жуковського про підйомну силу: сила тиску безвихрового потоку, що має на нескінченності швидкість v_∞ і обтікає контур C із циркуляцією Γ_∞, виражається формулою $|R| = \rho |v_\infty| \cdot |\Gamma_\infty|$. Напрямок цієї сили утворюється поворотом вектора v_∞ на прямий кут у бік, протилежний циркуляції.

Використання апарата аналітичних функцій комплексної змінної дозволило Н. Е. Жуковському й С. А. Чаплигіну розвинути методи розв'язання задач гідро- і аеродинаміки, що послужили теоретичною основою для практики авіабудування. Тим самим методи теорії функцій комплексної змінної зіграли величезну роль у розвитку сучасної авіації.

12 ЗАСТОСУВАННЯ MAPLE ДЛЯ АНАЛІЗУ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Комплексні числа $x + iy$ вводяться у командний рядок у вигляді

```
> x+y*I;
```

Наприклад,

```
> 2+3*I;
```

$$2 + 3I$$

Дійсна та уявна частини комплексного числа (функції комплексної змінної) знаходяться вбудованими функціями Re(z) і Im(z), відповідно.

```
> Re(2+3*I);
```

$$2$$

```
> Im(2+3*I);
```

$$3$$

Як задати комплексно-спряжене число зрозуміло з прикладу

```
> conjugate(2+3*I);
```

$$2 - 3I$$

Модуль та головне значення аргументу комплексного числа визначаються вбудованими функціями abs і argument.

Приклад 38. Знайти модуль та головне значення аргументу комплексного числа $1 + i\sqrt{3}$.

Розв'язання.

```
> abs(1+sqrt(3)*I);
```

$$2$$

```
> argument(1+sqrt(3)*I);
```

$$\frac{\pi}{3}$$

Відповідь: $\left|1 + \sqrt{3}\right| = 2$, $\arg\left(1 + \sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Модуль та головне значення аргументу комплексного числа одночасно виводяться вбудованою функцією polar(z)

```
> polar(1+sqrt(3)*I);
```

$$\mathrm{polar}\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$$

Як виконувати алгебраїчні дії із комплексними числами, показано на прикладах:

```
> (2+3*I)*(1+2*I);
```

$$-4+7\,I$$

```
> (2-I)/(1+I);
```

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}I$$

```
> (1+I)^10;
```

$$32\,I$$

Приклад 39. Обчислити число $z=\dfrac{1}{i}+(1+i)^2\left(3-2i\right)$.

Розв'язання.

```
> 1/I+(1+I)^2*(3-2*I);
```

$$4+5\,I$$

Відповідь: $z=4+5i$.

Значення функції комплексної змінної знаходяться за допомогою функції evalc. Наприклад,

```
> evalc(cos(1+I));
```

$$\cos(1)\cosh(1)-\sin(1)\sinh(1)\,I$$

```
> evalc(exp(x+y*I));
```

$$\mathbf{e}^x\cos(y)+\mathbf{e}^x\sin(y)\,I$$

```
> evalc(I^I);
```

$$\mathbf{e}^{\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

```
> evalc(Re(exp(x+y*I)));
```

$$\mathbf{e}^x\cos(y)$$

Функція evalc визначає лише головне значення $w=\sqrt[n]{z}$. Наприклад,

```
> evalc((-1)^(1/4));
```

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2}$$

Усі значення $w=\sqrt[n]{z}$ знаходяться як корені рівняння $w^n=z$. Для знаходження коренів рівняння або систем рівнянь в Maple використовується функція fsolve. Структура функції fsolve:
для розв'язання одиничних рівнянь

$\mathrm{fsolve}(eq, var, complex);$

для розв'язання системи рівнянь

$\mathrm{fsolve}(\{eq1, eq2, ..., eqn\}, \{var1, var2, ..., varn\}, complex);$

де $eq, eq1, eq2, ..., eqn$ – рівняння; $var, var1, var2, ..., varn$ – змінні, значення яких визначаються; *complex* – вводиться лише тоді, коли потрібно знаходити також комплексні корені (випадок, який нас цікавить).

Приклад 40. Знайти число $z = \sqrt[4]{-1}$.

Розв'язання.

```
> fsolve(z^4=-1,z,complex);
```

$-0.7071067812 - 0.7071067812I, -0.7071067812 + 0.7071067812I,$
$0.7071067812 - 0.7071067812I, 0.7071067812 + 0.7071067812I$

Відповідь: $z_1 = -0.7071067812 - 0.7071067812i$,

$z_2 = -0.7071067812 + 0.7071067812i$,

$z_3 = 0.7071067812 - 0.7071067812i$,

$z_4 = 0.7071067812 + 0.7071067812i$.

Приклад 41. Знайти корені системи $\begin{cases} z^2 + w^2 = -1, \\ z + w = 2. \end{cases}$

Розв'язання.

```
> fsolve({z^2+w^2=-1,z+w=2},{z,w},complex);
```

$\{w = 1.000000000 + 1.224744871I, z = 1.000000000 - 1.224744871I\}$

Відповідь: $w = 1 + 1.224744871i$, $z = 1 - 1.224744871i$.

Побудова точок на комплексній площині виконується за допомогою функції complexplot, що входить у пакет plots. Перед використанням complexplot необхідно активувати пакет plots

```
> with(plots):
```

Структура функції complexplot:

$\mathrm{complexplot}(expr, t = a..b, r, s, options);$

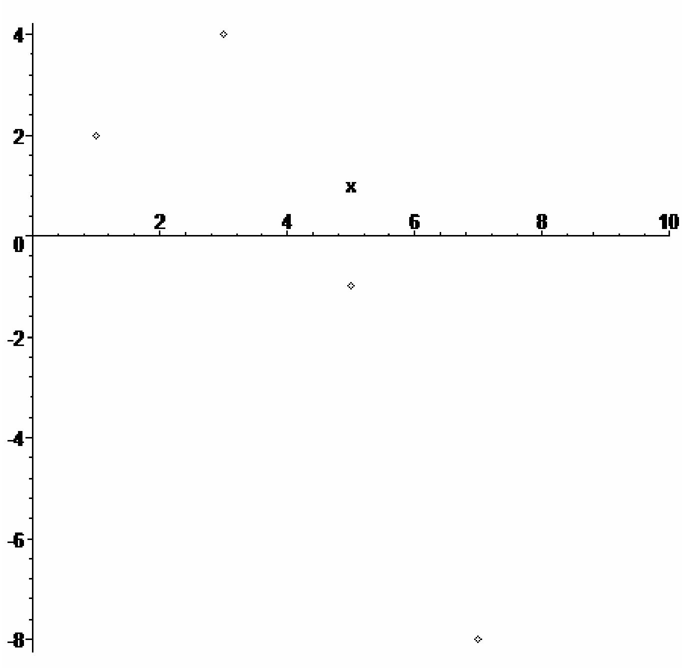
$\mathrm{complexplot}(L, r, s, options);$

де *expr* – вираз з параметром t, що визначає криву на комплексній площині; t – параметр кривої; a, b – граничні значення параметра t; L – перелік комплексних чисел; r – межі горизонтальної осі (необов'язковий параметр); s – межі вертикальної осі (необов'язковий параметр); *options* – додаткові властивості графіка (необов'язковий параметр).

Приклад 42. Зобразити на комплексній площині комплексні числа $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 + 4i$, $z_3 = 5 - i$, $z_4 = 7 - 8i$.

Розв'язання.

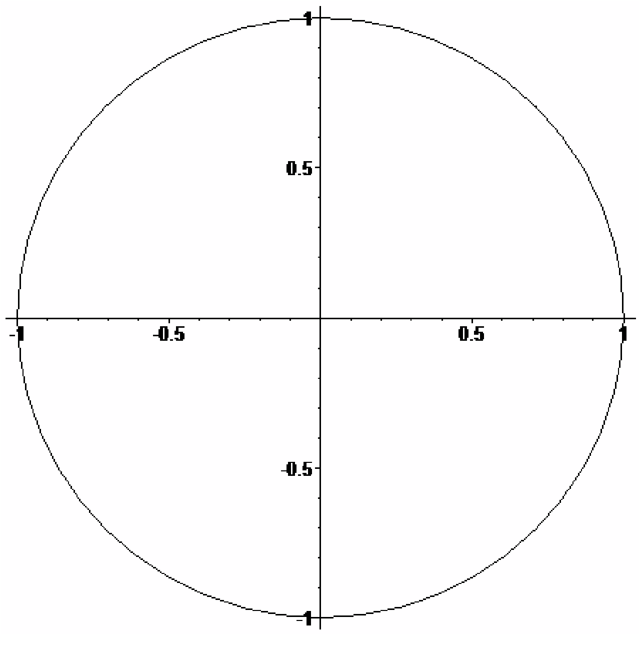
```
> complexplot([1+2*I, 3+4*I, 5-I, 7-8*I], x=0..10,
style=point);
```



Приклад 43. Побудувати на комплексній площині криву, яка описується рівнянням $z(t) = \cos t + i \sin t$, $-\pi \le t \le \pi$.

Розв'язання.

```
> complexplot(cos(t)+sin(t)*I, t=-Pi..Pi);
```



Для знаходження повних та частинних похідних в Maple застосовується функція diff. Структура функції:

$\mathrm{diff}(f, x_1, x_2, ..., x_n)$;

де f – функція (однієї або багатьох змінних), похідна якої визначається; $x_1, x_2, ..., x_n$ – змінні, за якими визначається похідна; n – порядок похідної.

Приклад 44. Знайти усі похідні першого та другого порядків функції $x^2 - \sin(xy)$.

Розв'язання.

```
> diff(x^2-sin(x*y),x);
```

$$2x - \cos(xy)\,y$$

```
> diff(x^2-sin(x*y),y);
```

$$-\cos(xy)\,x$$

```
> diff(x^2-sin(x*y),x,y);
```

$$\sin(xy)\,x\,y - \cos(xy)$$

```
> diff(x^2-sin(x*y),x,x);
```

$$2 + \sin(xy)\,y^2$$

```
> diff(x^2-sin(x*y),y,y);
```

$$\sin(xy)\,x^2$$

Відповідь: $\left(x^2 - \sin(xy)\right)'_x = 2x - \cos(xy)y$;

$\left(x^2 - \sin(xy)\right)'_y = -\cos(xy)x$;

$\left(x^2 - \sin(xy)\right)''_{xy} = \sin(xy)xy - \cos(xy)$;

$\left(x^2 - \sin(xy)\right)''_{xx} = 2 + \sin(xy)y^2$;

$\left(x^2 - \sin(xy)\right)''_{yy} = \sin(xy)x^2$.

Якщо функція диференціюється декілька раз за однією змінною, то для скорочення можна застосовувати оператор $. Записи

```
> diff(sin(x),x$3);
```

$$-\cos(x)$$

```
> diff(sin(x),x,x,x);
```

$$-\cos(x)$$

еквівалентні, і таким чином визначається третя похідна від функції $\sin x$.

В Maple для знаходження визначених та невизначених інтегралів застосовується функція int.

Структура функції int для знаходження невизначених інтегралів:

$\mathrm{int}(f, x)$;

де f – підінтегральна функція; x – змінна інтегрування.

Приклад 45. Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^2(x)dx$.

Розв'язання.

```
> int((sin(x))^2,x);
```

$$-\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)+\frac{x}{2}$$

Відповідь: $\int \sin^2(x)dx = -\frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + \frac{x}{2} + C$.

Структура функції int для знаходження визначених інтегралів:

int$(f, x = a..b)$;

де f – підінтегральна функція; x – змінна інтегрування; a і b – нижня і верхня межі інтегрування, відповідно.

Приклад 46. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x\sin(nx)dx$.

Розв'язання.

```
> int(x*sin(n*x),x=0..1);
```

$$\frac{\sin(n)-\cos(n)\,n}{n^2}$$

Відповідь: $\int_0^1 x\sin(nx)dx = \frac{\sin n - n\cos n}{n^2}$.

Позначення в Maple деяких математичних функцій наведено у таблиці 1.

Таблиця 1 – Позначення математичних функцій у Maple

Математична функція	Її позначення в Maple	Математична функція	Її позначення в Maple
$x \cdot y$	x*y	$\mathrm{th}\, x$	tanh(x)
x^y	x^y	$\mathrm{cth}\, x$	coth(x)
$\sqrt{x}$	sqrt(x)	$\arcsin x$	arcsin(x)
e^x	exp(x)	$\arccos x$	arccos(x)
$\sin x$	sin(x)	$\mathrm{arctg}\, x$	arctan(x)
$\cos x$	cos(x)	$\mathrm{arcctg}\, x$	arccot(x)
$\mathrm{tg}\, x$	tan(x)	$\mathrm{arcsh}\, x$	arcsinh(x)
$\sec x$	sec(x)	$\mathrm{arcch}\, x$	arccosh(x)
$\mathrm{ctg}\, x$	cot(x)	$\mathrm{arcth}\, x$	arctanh(x)
$\mathrm{sh}\, x$	sinh(x)	$\mathrm{arccth}\, x$	arccoth(x)
$\mathrm{ch}\, x$	cosh(x)		

Приклад 47. Визначити область аналітичності функції $w=\cos(3z+2i)$ *і, якщо можливо, обчислити значення похідної цієї функції у точці* $z_0=i$.

Розв'язання.

Виділимо дійсну і уявну частини функції $\cos(3z+2i)$

```
> evalc(cos(3*(x+I*y)-2*I));
```

$$\cos(3\,x)\cosh(3\,y-2)-\sin(3\,x)\sinh(3\,y-2)\,I$$

Отже,

$$u(x,y)=\cos(3x)\operatorname{ch}(3y-2);$$

$$v(x,y)=-\sin(3x)\operatorname{sh}(3y-2).$$

Перевіримо виконання умов Коші-Рімана

```
> diff(cos(3*x)*cosh(3*y-2),x);
```

$$-3\sin(3\,x)\cosh(3\,y-2)$$

```
> diff(-sin(3*x)*sinh(3*y-2),y);
```

$$-3\sin(3\,x)\cosh(3\,y-2)$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=-3\sin(3x)\operatorname{ch}(3y-2)$ – *перша умова Коші-Рімана виконується.*

```
> diff(cos(3*x)*cosh(3*y-2),y);
```

$$3\cos(3\,x)\sinh(3\,y-2)$$

```
> diff(-sin(3*x)*sinh(3*y-2),x);
```

$$-3\cos(3\,x)\sinh(3\,y-2)$$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=3\cos(3x)\operatorname{sh}(3y-2)$ – *друга умова Коші-Рімана також виконується. Отже, обидві умови Коші-Рімана виконуються на усій комплексній площині, а це означає, що функція аналітична на усій комплексній площині. Тому ми можемо обчислити значення похідної у точці* $z_0=i$. *Для цього ми можемо використати Maple-функцію subs. Її структура:*

$$\operatorname{subs}(expr11=expr21, expr12=expr22, ..., expr1n=epr2n, expr);$$

де $expr, expr11, expr12, ..., expr1n, expr21, expr22, ..., expr2n$ *– деякі вирази. У результаті виконання цієї функції у останній вираз* $expr$ *замість виразів* $expr11$, $expr12$, …, $expr1n$ *будуть підставлені вирази* $expr21$, $expr22$, …, $expr2n$, *відповідно.*

```
> evalc(subs(x=0,y=1,-3*sin(3*x)*cosh(3*y-2)-
I*3*cos(3*x)*sinh(3*y-2)));
```

$$-3\,I\sinh(1)$$

Відповідь: $f'(i)=-3\operatorname{sh}1\,i$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ

Завдання 1. Побудувати лінію (область) на комплексній площині, що визначається рівнянням (нерівністю).

1. $\mathrm{Re}(z^2 - \overline{z}) = 0.$
2. $2 < |z - 1 + 2i| < 4.$
3. $\mathrm{Im}\, z^2 < 4.$
4. $|z - 3i| < 3, \quad \mathrm{Im}\, \overline{z} \le -3.$
5. $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = 1.$
6. $|z - 0{,}5| < |1 - 0{,}5\overline{z}|.$
7. $1 \le |z + 2 + i| \le 2.$
8. $|z - 4| + |z + 4i| < 1.$
9. $|z| - \mathrm{Re}\, z \le 0.$
10. $z^2 + \overline{z}^2 = 1.$
11. $2 < |z - 2| + |z + 2i| < 8.$
12. $-1 < \mathrm{Re}\, z < 5, \quad -5 < \mathrm{Im}\, z < 1.$
13. $\dfrac{\pi}{3} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}, \quad |z| \le 5.$
14. $\left|\dfrac{z+2}{z-2}\right| \le 1.$
15. $|z + 4 - 6i| > 6.$
16. $\dfrac{1}{|z|} \ge 1, \quad |z| \ne 0.$
17. $\mathrm{Im}\, z^2 \ge 4.$
18. $|z - 2i| = |z + 2i|.$
19. $\left|\dfrac{z+2i}{z-2i}\right| < 2.$
20. $\mathrm{Re}\, \overline{z}^2 = 1.$
21. $4 \le |z + i| + |z + 1| \le 8.$
22. $\mathrm{Re}(1 + z) = |z|.$
23. $|z - 5i| = 8, \quad \dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{2\pi}{3}.$
24. $\left|\dfrac{z-5}{z+i}\right| \ge 4.$

25. $1 < |z| + |z+2| < 4.$

26. $1 \le \operatorname{Re} z < 2, \quad 0 < \operatorname{Im} z \le 1.$

27. $|z| + \operatorname{Re} z < 1.$

28. $\frac{-\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}, \quad |\bar{z}| < 4.$

29. $2 < |z| < 4, \quad \operatorname{Im} z > 0.$

30. $|z-i| - |z+i| = 2.$

31. $|z-1| + |z-3| < 3$

32. $|z-5i| < 5, \quad 0 < \arg z < \frac{5}{6}\pi.$

33. $|z-1| < |z-i|.$

34. $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}, \quad 2 < |z| < 3.$

35. $|z+i| = 5, \quad \operatorname{Im} z < 4.$

36. $\operatorname{Im} z^2 = 2, \quad 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}.$

37. $\left|\frac{1}{2}\right| \le 2, \quad (z \ne 0).$

38. $3|z| - \operatorname{Re} z = 12.$

39. $|z-i| > 3, \quad \operatorname{Im} z \le 5.$

40. $|z| < 2 + \operatorname{Im} z.$

41. $|z-1-i| < 4, \quad \operatorname{Im} z > 0.$

42. $\operatorname{Im} z^2 = 2.$

43. $|z| - 3\operatorname{Im} z = 6.$

44. $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}.$

45. $\operatorname{Im} z^2 \le 1.$

46. $\frac{\pi}{8} < \arg z \le \frac{4}{3}\pi.$

47. $|z-i| + |z+i| = 2.$

48. $|z-2| = |1-2\bar{z}|.$

49. $|z+1| + |z-2| = 5.$

50. $\operatorname{Im} z^2 = 4.$

51. $|z-2| < 3, \operatorname{Im} z > 0.$

52. $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| \le 1.$

53. $\operatorname{Re}(1+z) = |z+1|.$

54. $|z-2i| \ge 2.$

55. $|z-2| + |z+2i| < 2.$

56. $|z+2i| = 2, 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{3}.$

57. $1 < |z+1| + |z| < 4.$

58. $\operatorname{Im}\left(z^2+1\right) = 4.$

59. $|z-2i| = 1 + 2\operatorname{Re} z.$

60. $\operatorname{Im}\left(\overline{z}^2 - 3\right) < 4.$

61. $|z+1| + |z-2| = 4.$

62. $\operatorname{Im} z^2 \ge 2.$

63. $\operatorname{Im}\left(\overline{z} + i\right) \le -3.$

64. $|z+i| < 4, 0 < \arg z < \dfrac{5}{6}\pi.$

65. $|z-1| + |z-2| < 4$

66. $\operatorname{Re}(z^2 - 3\overline{z}) = 0.$

67. $\dfrac{-\pi}{4} < \arg z < \pi, |\overline{z} - 1| < 2.$

68. $|z| + \operatorname{Re} z < 2.$

69. $\operatorname{Re} z^2 = 4.$

70. $\operatorname{Im} \overline{z}^2 = 2.$

71. $\dfrac{\pi}{6} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}, 1 < |z| < 3.$

72. $\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}, |z| \le 3.$

73. $|z-2| < |z-i|.$

74. $|z-1| - |z+2i| = 1.$

75. $\dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{2}{3}\pi.$

76. $\operatorname{Im} z^2 = 1, \dfrac{\pi}{6} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{3}.$

77. $0 \le \operatorname{Re} z < 1, 1 < \operatorname{Im} z \le 3.$

78. $|z - 0{,}5| < 1.$

79. $|z-1+i|>3, \operatorname{Re} z \le 2.$

80. $z^2-\overline{z}^2=1.$

81. $\left|\dfrac{z+2i}{z-i}\right|<2.$

82. $|z-2|+|z+1|<2.$

83. $|z|-4\operatorname{Re} z=5.$

84. $|z|\le 2.$

85. $\operatorname{Re} z^2 \le 1.$

86. $2\le |z+i|+|z+1|\le 4.$

87. $2\le |z+1+i|\le 3.$

88. $1<|z+2i|<4.$

89. $|z+2|\le 3.$

90. $|z+1-3i|>5.$

91. $|z+3i|\ge 1.$

92. $|z|-6\operatorname{Re} z=7.$

93. $|z|<2+2\operatorname{Re} z.$

94. $|z|-2\operatorname{Im} z\le 0.$

95. $|1-2\overline{z}|=2.$

96. $|z-1|+|z+i|=2.$

97. $\left|\dfrac{z-2}{z+i}\right|\ge 3.$

98. $|z+i|\le 5, 1<\operatorname{Im} z<2.$

99. $-1<\operatorname{Im} z<5, \operatorname{Re}(z-2+i)<1.$

100. $1<\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<4, \operatorname{Im} z>0.$

Завдання 2. Для даного z знайти z^m та всі значення $\sqrt[n]{z}$.

1. $z=81-81\sqrt{3}i, \quad m=3, \quad n=4.$
2. $z=-8, \quad m=4, \quad n=3.$
3. $z=\sqrt{3}-3i, \quad m=n=4.$
4. $z=12-12\sqrt{3}i, \quad m=5, \quad n=4.$
5. $z=-36+36i, \quad m=3, \quad n=2.$
6. $z=-16i, \quad m=5, \quad n=4.$

7. $z = -\sqrt{3} + i, \quad m = 6, \quad n = 3.$

8. $z = 144 - 144i, \quad m = 2, \quad n = 4.$

9. $z = 27i, \quad m = n = 3.$

10. $z = -27 - 27i, \quad m = n = 3.$

11. $z = -i, \quad m = 5, \quad n = 4.$

12. $z = 81, \quad m = 3, \quad n = 4.$

13. $z = -\sqrt{3} - i, \quad m = 5, \quad n = 4.$

14. $z = \sqrt{3} - i, \quad m = 5, \quad n = 3.$

15. $z = 2 - 2i, \quad m = n = 4.$

16. $z = -64 - 64i, \quad m = n = 4.$

17. $z = -1 + i\sqrt{3}, \quad m = 5, \quad n = 4.$

18. $z = -40, \quad m = n = 4.$

19. $z = \dfrac{1-i}{1+i}, \quad m = 3, \quad n = 4.$

20. $z = 16, \quad m = 8, \quad n = 6.$

21. $z = 1 + i\sqrt{3}, \quad m = 5, \quad n = 4.$

22. $z = -4i, \quad m = 5, \quad n = 4.$

23. $z = 25i, \quad m = 5, \quad n = 3.$

24. $z = 8 - 8i, \quad m = 4, \quad n = 3.$

25. $z = -1 + i, \quad m = 5, \quad n = 4.$

26. $z = -8, \quad m = 5, \quad n = 6.$

27. $z = -1, \quad m = n = 4.$

28. $z = 2 + 2\sqrt{3}i, \quad m = 5, \quad n = 4.$

29. $z = -4 - 4i, \quad m = 5, \quad n = 4.$

30. $z = 36i, \quad m = 3, \quad n = 4.$

31. $z = \sqrt{3} + i\sqrt{3}, \quad m = 5, \quad n = 3.$

32. $z = 16, \quad m = 5, \quad n = 3.$

33. $z = 16i, \quad m = 3, \quad n = 4.$

34. $z = -7, \quad m = n = 4.$

35. $z = 17, \quad m = 5, \quad n = 4.$

36. $z = -2i, \quad m = n = 3.$

37. $z = 27i, \quad m = 6, \quad n = 3.$

38. $z = 25 + 25i, \quad m = 3, \quad n = 4.$

39. $z = 1 + i, \quad m = 4, \quad n = 3.$

40. $z = 64i, \quad m = n = 3.$

41. $z = 8\sqrt{3} - 8i, \quad m = 4, \quad n = 3.$

42. $z = -5, \quad m = 5, \quad n = 4.$

43. $z = 2\sqrt{3} - 6i, \quad m = 5, \quad n = 4.$

44. $z = -12 + 12\sqrt{3}i, \quad m = 3, \quad n = 4.$

45. $z = 2 - 2i, \quad m = n = 4.$

46. $z = i, \quad m = 6, \quad n = 3.$

47. $z = -1 + \sqrt{3}i, \quad m = 6, \quad n = 4.$

48. $z = 4i, \quad m = n = 4.$

49. $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}, \quad m = 10, \quad n = 4.$

50. $z = 8 - 8i, \quad m = 6, \quad n = 3.$

51. $z = -81, m = 3, n = 4.$

52. $z = -36i, m = 4, n = 2.$

53. $z = 9i, m = n = 2.$

54. $z = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}, m = 5, n = 2.$

55. $z = -8, m = 5, n = 4.$

56. $z = -4 + 4\sqrt{3}i, m = 2, n = 3.$

57. $z = 125i, m = 2, n = 3.$

58. $z = 1 + i, m = 3, n = 4.$

59. $z = -4 - 4i, m = n = 5.$

60. $z = -81i, m = 2, n = 4.$

61. $z = -i, m = 4, n = 2.$

62. $z = 125i, m = 4, n = 3.$

63. $z = 1 + 1i, m = 3, n = 4.$

64. $z = -1 + i, m = 3, n = 4.$

65. $z = 1 - i, m = n = 3.$

66. $z = -16, m = 2, n = 4.$

67. $z = 49i, m = n = 2.$

68. $z = 4 + 4i, m = 3, n = 5.$

69. $z = 2 + 2\sqrt{3}i, m = 3, n = 4.$

70. $z = -8i, m = 6, n = 3.$

71. $z = 1 - i, m = 10, n = 3.$

72. $z = 2 + 2\sqrt{3}i, m = 3, n = 2.$

73. $z = -6 - 6i, m = n = 4.$

74. $z = -1 + \sqrt{3}i, m = 6, n = 2.$

75. $z=-4, m=3, n=2.$

76. $z=27, m=5, n=3.$

77. $z=12-12\sqrt{3}i, m=3, n=2.$

78. $z=-1, m=n=3.$

79. $z=-64, m=n=3.$

80. $z=1-\sqrt{3}i, m=n=2.$

81. $z=-3, m=5, n=3.$

82. $z=-7-7i, m=n=4.$

83. $z=-256, m=n=4.$

84. $z=-64i, m=n=2.$

85. $z=3-3i, m=n=4.$

86. $z=12+12\sqrt{3}i, m=3, n=2.$

87. $z=\sqrt{3}-i, m=5, n=3.$

88. $z=\sqrt{3}-3i, m=n=2.$

89. $z=-144+144i, m=2, n=4.$

90. $z=16i, m=n=4.$

91. $z=-3i, m=5, n=3.$

92. $z=81-81\sqrt{3}i, m=3, n=2.$

93. $z=2\sqrt{3}-6i, m=2, n=3.$

94. $z=1+i, m=3, n=2.$

95. $z=16i, m=2, n=4.$

96. $z=-9+9i, m=3, n=2.$

97. $z=-5i, m=5, n=3.$

98. $z=64, m=8, n=6.$

99. $z=-8\sqrt{3}+8i, m=2, n=3.$

100. $z=-\sqrt{3}+i, m=2, n=4.$

Завдання 3. Встановити аналітичність комплексної функції $w=f(z)$ і, якщо це можливо, обчислити значення її похідної у т. z_0.

1. $w=\left(1-iz^2\right)^2, \quad z_0=-i.$

2. $w=1-3z^2, \; z_0=4-i.$

3. $w=(1+z)(1-\overline{z}), \quad z_0=2i.$

4. $w=e^{z^2-2z}, \quad z_0=1.$

5. $w=\dfrac{e^z}{z}, \quad z_0=i.$

6. $w=(iz-1)^3, \quad z_0=1.$

7. $w=3\sin 3z-i, \quad z_0=1.$

8. $w=2z^2-iz, \quad z_0=-i.$

9. $w=|z|, \quad z_0=2.$

10. $w=\dfrac{1-2z}{1+z}, \quad z_0=i.$

11. $w=\dfrac{1-z^2}{2+z^2}, \quad z_0=i.$

12. $w=\left(z^2 i-7\right)^2, \quad z_0=1.$

13. $w=e^{-3z}, \; z_0=3-3i.$

14. $w=z^2+5z-7, \quad z_0=3-i.$

15. $w=\cos(iz-1), \; z_0=-1.$

16. $w=e^z-z, \quad z_0=-1.$

17. $w=\cos(7-2iz), \quad z_0=1.$

18. $w=z\cos 2iz, \quad z_0=i.$

19. $w=\cos z^2, \quad z_0=1.$

20. $w=z\sin(1-z), \quad z_0=1.$

21. $w=e^{1-2z}, \quad z_0=\dfrac{\pi}{3}i.$

22. $w=\left(1-z^2\right)e^{-z}, \quad z_0=1-i.$

23. $w=z^2-\cos z, \quad z_0=1-i.$

24. $w=ze^{-iz}, \quad z_0=-2.$

25. $w=z^2+iz-1, \quad z_0=-2.$

26. $w=z^2\overline{z}, \quad z_0=2i.$

27. $w=\sin(z+i), \quad z_0=\dfrac{\pi}{6}.$

28. $w=\left(1-z^2\right)(1+z), \quad z_0=2+i.$

29. $w=\operatorname{sh} 7iz, \quad z_0=-i.$

30. $w=\left(z^2-i\right)^3, \quad z_0=2-i.$

31. $w=i(3z-1), \; z_0=1.$

32. $w=|z|\overline{z}, \quad z_0=2i.$

33. $w=(1-z)e^{-z}, \quad z_0=2.$

34. $w=\operatorname{sh} 3iz, \quad z_0=2.$

35. $w=\left(z^2-i\right)^3, \quad z_0=1+2i.$

36. $w=e^{iz^2}, \ z_0=3i.$

37. $w=(6z-1)^2(3z-i)^3, \quad z_0=0.$

38. $w=\operatorname{sh} z\cdot\operatorname{ch}(1-z), \quad z_0=1.$

39. $w=z^4-2iz, \ z_0=-i.$

40. $w=e^{1-2z^2}, \quad z_0=1.$

41. $w=(iz)^3-1, \quad z_0=2.$

42. $w=\overline{z}^3, \quad z_0=2i.$

43. $w=\dfrac{3+2iz}{9+z^2}, \quad z_0=i.$

44. $w=(z+1)\cos iz, \quad z_0=i.$

45. $w=3-7z^2, \quad z_0=2-i.$

46. $w=|z|\operatorname{Re}\overline{z}, \quad z_0=2i.$

47. $w=\left(1-\dfrac{z}{3}\right)\left(z^2-1\right), \quad z_0=2.$

48. $w=z^2e^{-iz}, \quad z_0=2.$

49. $w=\operatorname{ch}(1-z)^2, \quad z_0=i.$

50. $w=\sin\left(7z-z^2\right), \quad z_0=-i.$

51. $w=\operatorname{sh}2iz, \quad z_0=1-i.$

52. $w=\dfrac{e^{iz}}{z}, \quad z_0=i.$

53. $w=\operatorname{sh}(1-z)^2-3i, \quad z_0=1+2i.$

54. $w=|z|e^{-iz}, \quad z_0=-2.$

55. $w=\left(1-\dfrac{z}{2}\right)\left(z^2-2\right), \quad z_0=0.$

56. $w=e^{1-z}, \ z_0=0.$

57. $w=ie^{iz+3}, \quad z_0=-1+i.$

58. $w=7-3z^2+z, \quad z_0=-3i.$

59. $w=e^{\overline{z}-2z}, \quad z_0=\dfrac{\pi}{6}i.$

60. $w=z^3-iz, \ z_0=1-i.$

61. $w=\cos\left(7-z^2\right), \quad z_0=-i.$

62. $w=|z|\operatorname{Im}\overline{z}, \quad z_0=i.$

63. $w=2\sin z-2zi, \quad z_0=-i.$

64. $w=i\cos(2z), \quad z_0=1.$

65. $w=i(3z^2-2), \; z_0=2.$

66. $w=(z+1)\sin iz, \quad z_0=i.$

67. $w=ze^{-i(z+1)}, \quad z_0=1.$

68. $w=(3-z)e^{-z}, \quad z_0=2-i.$

69. $w=e^{2+iz^2}, \; z_0=2i.$

70. $w=\operatorname{ch}5iz, \quad z_0=-i.$

71. $w=z\overline{z}^2, \quad z_0=2i.$

72. $w=\left(z^2-7\right)^2-\left(\overline{2-i}\right), \quad z_0=1.$

73. $w=(z-1)^2(z-3i)^2, \quad z_0=0.$

74. $w=\dfrac{1-z}{2+z^2}, \quad z_0=i.$

75. $w=|z+3-2i|, \quad z_0=2.$

76. $w=\left(z^2-2i\right)^3, \quad z_0=1-2i.$

77. $w=z^3-5z^2, \; z_0=-2-i.$

78. $w=(z-i)^3, \quad z_0=2+i.$

79. $w=(1+z)\overline{z}, \quad z_0=-i.$

80. $w=(iz-1)^3+3, \quad z_0=-2i.$

81. $w=e^z-|z|, \quad z_0=-i.$

82. $w=\overline{z}^3-z^2, \quad z_0=2i.$

83. $w=\cos 2iz+3i, \quad z_0=0.$

84. $w=\dfrac{1-2z}{z}, \quad z_0=i.$

85. $w=iz^2+2z-4, \quad z_0=-2i+1.$

86. $w=(z-i+2)^3, \quad z_0=1+2i.$

87. $w=\operatorname{sh}2z\cdot\operatorname{ch}iz, \quad z_0=1.$

88. $w=\cos(z-2i), \; z_0=-2i.$

89. $w=iz^2-3z-1, \quad z_0=-2i.$

90. $w=\cos(z+i), \quad z_0=\dfrac{\pi}{3}.$

91. $w=\left|z+i\right|z, \quad z_0=-2i.$

92. $w=z^2-e^z, \quad z_0=3-i.$

93. $w=z\cos(1-z), \quad z_0=1.$

94. $w=2z^2+3z, \quad z_0=2-i.$

95. $w=\cos z^2-3z, \quad z_0=0.$

96. $w=\dfrac{1+2iz}{4+z^2}, \quad z_0=i.$

97. $w=\left(i-z^2\right)(1+3z), \quad z_0=2+i.$

98. $w=(1-iz)e^{\bar{z}}, \quad z_0=1.$

99. $w=(1-2z)^3, \quad z_0=-2i.$

100. $w=e^{z^2-2\bar{z}}, \quad z_0=2i.$

Завдання 4. Відновити аналітичну функцію $w(z)$ за відомою дійсною $u(x,y)$ або уявною $v(x,y)$ частиною та відомим значенням $w(z_0)=w_0$.

1. $v(x,y)=\dfrac{y}{2},\ w(2+2i)=1+i;$
2. $v(x,y)=e^{x+1}\sin y,\ w(1)=e^2;$
3. $u(x,y)=-2xy+x, w(0)=0;$
4. $v(x,y)=3y-1,\ w(0)=-1-i;$
5. $v(x,y)=e^{2x}\sin(2y),\ w(1)=e^2+1;$
6. $v(x,y)=-x+2,\ w(2+i)=2;$
7. $v(x,y)=\cos x\,\mathrm{sh}\,y,\ w(-1)=-\sin 1;$
8. $u(x,y)=-\cos x\,\mathrm{sh}\,y,\ w(-3i)=\mathrm{sh}\,3;$
9. $u(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2},\ w(1)=i;$
10. $v(x,y)=-x^2+y^2,\ w(i)=i;$
11. $u(x,y)=1+\dfrac{x}{x^2+y^2},\ w(2i)=1-\dfrac{i}{2};$
12. $v(x,y)=2xy,\ w(i)=-1;$
13. $v(x,y)=x^2-y^2+1,\ w(-1)=2i;$
14. $v(x,y)=y+xy,\ w(i)=-\dfrac{1}{2}+i;$
15. $u(x,y)=e^{-y}\cos x,\ w(3i)=e^{-3};$

16. $v(x,y)=\cos x\ \mathrm{sh}(y-1),\ w(3i)=i\,\mathrm{sh}\,2;$

17. $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos(2xy),\ w(-2)=e^4;$

18. $v(x,y)=2xy+2x,\ w(0)=-1;$

19. $u(x,y)=3x^2-3y^2-x, w(0)=-i;$

20. $u(x,y)=7x+3, w(i)=3+7i;$

21. $u(x,y)=e^x\cos y-e^x\sin y,\ w(0)=1+i;$

22. $v(x,y)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2},\ w(0)=0;$

23. $v(x,y)=\dfrac{y}{3},\ w(1+i)=\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{3}i;$

24. $u(x,y)=2\cos x\ \mathrm{ch}\,y,\ w(3i)=2\,\mathrm{ch}\,3;$

25. $v(x,y)=\dfrac{2x}{x^2+y^2},\ w(-2i)=-1;$

26. $v(x,y)=-3+2xy+x,\ w(-i)=-3i;$

27. $u(x,y)=y+1, w(2+i)=2;$

28. $u(x,y)=-\dfrac{5y}{x^2+y^2},\ w(5)=-i;$

29. $u(x,y)=-2e^x\sin y,\ w(0)=2i;$

30. $u(x,y)=-y+2,\ w(0)=2;$

31. $u(x,y)=-xy, w(0)=0;$

32. $v(x,y)=\mathrm{sh}\,x\sin y, w(1)=\mathrm{ch}1;$

33. $v(x,y)=-\dfrac{x}{x^2+y^2},\ w(-3i)=\dfrac{1}{3};$

34. $v(x,y)=-\sin(2x)\mathrm{sh}(2y),\ w(2i)=\mathrm{ch}\,4;$

35. $u(x,y)=x^2-y^2-3y+4, w(1)=5+3i;$

36. $u(x,y)=2x^2-2y^2+\dfrac{1}{2}x, w(2)=9;$

37. $v(x,y)=e^x\sin y,\ w(-2)=\dfrac{1}{e^2};$

38. $v(x,y)=2xy-y,\ w(1)=0;$

39. $u(x,y)=\cos x\ \mathrm{ch}(y+1), w(0)=\mathrm{ch}1;$

40. $u(x,y)=2x^2-2y^2+1, w(0)=1;$

41. $u(x,y)=\mathrm{ch}\,x\cos y, w(-3i)=\cos 3;$

42. $v(x,y)=2y,\ w(i)=1+2i;$

43. $v(x,y) = 4xy,\ w(0) = 1;$

44. $v(x,y) = -1 + 3y,\ w(-3) = -9 - i;$

45. $u(x,y) = 2\sin(x+2)\operatorname{ch} y,\ w(0) = 2\sin 2;$

46. $v(x,y) = 7y,\ w(i) = 3 + 7i;$

47. $u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + x, w(i) = -2;$

48. $v(x,y) = -\sin x \operatorname{sh}(y+1), w(i) = \operatorname{ch} 2;$

49. $u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + 3x + 4, w(-2) = 6;$

50. $v(x,y) = \sin x \operatorname{ch} y,\ w(1) = i\sin 1;$

51. $u(x,y) = e^x \cos y,\ w(1) = e;$

52. $u(x,y) = -2xy, w(-1) = 2i;$

53. $v(x,y) = 2xy - y,\ w(2) = 3;$

54. $v(x,y) = 2xy + y,\ w(2i) = -3 + 2i;$

55. $v(x,y) = x^2 - y^2 + y,\ w(0) = 0;$

56. $u(x,y) = \sin x \operatorname{ch}(y-1),\ w(-3i) = -i\operatorname{sh} 4;$

57. $u(x,y) = -\operatorname{ch} x \sin y,\ w(-1) = -i\operatorname{sh} 1;$

58. $v(x,y) = 4xy + \dfrac{y}{2},\ w(2) = 9;$

59. $u(x,y) = 2xy,\ w(-2i) = 4i;$

60. $v(x,y) = 4xy + 3y,\ w(-2) = 6;$

61. $v(x,y) = 4xy + y - 1,\ w(i) = -2;$

62. $u(x,y) = \sin x \operatorname{ch} y,\ w(2) = \sin 2;$

63. $u(x,y) = x^2 - y^2 - x + 1, w(2) = 3;$

64. $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2},\ w(3i) = -\dfrac{i}{3};$

65. $u(x,y) = \dfrac{2y}{x^2 + y^2},\ w(-3i) = -\dfrac{2}{3};$

66. $u(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y + x,\ w(0) = 1;$

67. $v(x,y) = 2xy + 3x,\ w(1) = 5 + 3i;$

68. $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2},\ w(-1) = 0;$

69. $u(x,y) = x^2 - y^2, w(i) = -1;$

70. $v(x,y) = -\sin x \operatorname{sh} y + y,\ w(3i) = \operatorname{ch} 3 + 3i;$

71. $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2},\ w(-2i) = \dfrac{i}{2};$

72. $u(x,y)=x^2-y^2-y, w(-2i)=-2+i;$

73. $u(x,y)=\dfrac{x}{3}+1,\ w(1+i)=\dfrac{4}{3}+\dfrac{i}{3};$

74. $u(x,y)=x^2-y^2-y,\ w(3i)=-12-3i;$

75. $v(x,y)=-2\sin x\,\mathrm{sh}\,y,\ w(-i)=2\,\mathrm{ch}1;$

76. $u(x,y)=2x+1,\ w(i)=1+2i;$

77. $v(x,y)=2xy,\ w(1)=0;$

78. $u(x,y)=\cos(2x)\mathrm{ch}(2y),\ w(3)=\cos 6;$

79. $v(x,y)=x,\ w(0)=2;$

80. $u(x,y)=x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}y^2, w(i)=-\dfrac{1}{2}+i;$

81. $u(x,y)=x^2-y^2-2y-1,\ w(0)=-1;$

82. $u(x,y)=-2xy, w(-i)=-i;$

83. $u(x,y)=3x,\ w(3)=9-i;$

84. $u(x,y)=e^{x+1}\cos y,\ w(-1)=1;$

85. $v(x,y)=e^x\cos y+e^x\sin y,\ w(0)=1+i;$

86. $u(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2},\ w(1)=-i;$

87. $u(x,y)=x^2-x-y^2,\ w(1)=0;$

88. $u(x,y)=1+e^{2x}\cos(2y),\ w(0)=2;$

89. $v(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin(2xy),\ w(0)=1;$

90. $u(x,y)=x^2-y^2-1,\ w(1)=0;$

91. $u(x,y)=\dfrac{x}{2}, w(2+2i)=1+i;$

92. $v(x,y)=\mathrm{sh}\,x\cos y,\ w(-2)=-i\,\mathrm{sh}\,2;$

93. $v(x,y)=2e^x\cos y,\ w(1)=2ei;$

94. $v(x,y)=6xy-y-1,\ w(0)=-i;$

95. $v(x,y)=2\cos(x+2)\mathrm{sh}\,y,\ w(1)=2\sin 3;$

96. $v(x,y)=x^2-y^2,\ w(-i)=-i;$

97. $u(x,y)=3x-1,\ w(0)=-1-i;$

98. $u(x,y)=x^2-y^2+x+1, w(2i)=-3+2i;$

99. $v(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2},\ w(-1)=-i;$

100. $v(x,y)=2xy+x+1,\ w(-2i)=-2+i.$

Завдання 5. Обчислити.

1. $\int\limits_C (iz + \overline{z})dz, \quad C: |z| = 4, \quad 0 \le \arg z \le \pi.$

2. $\int\limits_0^{1+i} \left(3z - z^2\right)dz.$

3. $\int\limits_C e^{z^2} \operatorname{Re} z dz, \quad C: \textit{пряма } z_1 z_2, \ z_1 = 0, \ z_2 = 1 + i.$

4. $\int\limits_C e^{7-3z} dz, \quad C: \textit{пряма } z_1 z_2, \ z_1 = i, \ z_2 = 3 + 2i.$

5. $\int\limits_0^{i} z^2 e^{z^3} dz.$

6. $\int\limits_0^{2i} z \sin z^2 dz.$

7. $\int\limits_C \operatorname{Re} z dz, \quad C: |z| = (2 + i)t, \quad 0 \le t \le 1.$

8. $\int\limits_{1+i}^{2i} \left(z - z^3\right) e^{\frac{z^2}{2}} dz.$

9. $\int\limits_C \operatorname{Im} z dz, \quad C - \textit{пряма } z_1 z_2, \ z_1 = 2, \ z_2 = 2 + i.$

10. $\int\limits_C z \operatorname{Im} z dz, \quad C: \textit{пряма } z_1 z_2, \ z_1 = i, \ z_2 = 2 - i$

11. $\int\limits_C \operatorname{Im} z^2 dz, \quad C: \textit{пряма } z_1 z_2, \ z_1 = 0, \ z_2 = 2 + i.$

12. $\int\limits_C \frac{dz}{z - 4}, \quad C: x = 3\cos t, \ y = 2\sin t, \ 0 \le t \le 2\pi.$

13. $\int\limits_i^{1-i} z \sin z dz.$

14. $\int\limits_C z \operatorname{Re} z dz, \quad C: |z| = 1.$

15. $\int\limits_0^{1} z e^{-z^2} dz.$

16. $\int\limits_C e^{-3z}dz, \quad C: пряма\ z_1z_2,\ z_1=0,\ z_2=1+i.$

17. $\int\limits_1^i z\sin z dz.$

18. $\int\limits_0^2 \cos z e^{\sin z} dz.$

19. $\int\limits_{-i}^i z e^{z^2} dz.$

20. $\int\limits_C (3z+2\overline{z})dz, \quad C: |z|=1, \quad -\frac{\pi}{2}\le \arg z \le \frac{\pi}{2}.$

21. $\int\limits_C \cos z dz, \quad C - пряма\ \ z_1z_2,\ z_1=\frac{\pi}{2},\ z_2=\pi+i.$

22. $\int\limits_C (z^2-2z)dz, \quad C: пряма\ z_1z_2,\ z_1=i,\ z_2=1-i.$

23. $\int\limits_C z\operatorname{Re} z dz, \quad C: |z|=4, \quad -\frac{\pi}{2}\le \arg z \le \frac{\pi}{2}.$

24. $\int\limits_C e^z dz, \quad C: y=x^2,\ z_1=0,\ z_2=1+i.$

25. $\int\limits_C (x^2+iy^2)dz, \quad C: пряма\ z_1z_2,\ z_1=1+i,\ z_2=2+3i.$

26. $\int\limits_C z\operatorname{Im} z^2 dz, \quad C: |z|=1, \quad -\pi\le \arg z \le 0.$

27. $\int\limits_C (i\overline{z}+1)dz, \quad C: пряма\ z_1z_2,\ z_1=1,\ z_2=-i.$

28. $\int\limits_C \operatorname{Im} z dz, \quad C: |z|=(3+i)t, \quad 0\le t\le 1.$

29. $\int\limits_C \overline{z}dz, \quad C: |z|=1.$

30. $\int\limits_{-i}^i (z-i)e^{-z}dz.$

31. $\int\limits_C (3z-\overline{z})dz, \quad C: пряма\ z_1z_2,\ z_1=0,\ z_2=2+2i.$

32. $\int\limits_C \left(3\overline{z} - z^2\right)dz, \quad C:|z|=1, \quad 0 \le \arg z \le \frac{3}{2}\pi.$

33. $\int\limits_{-1+i}^{1+i} (1+2z)dz.$

34. $\int\limits_1^i ze^{-z}dz.$

35. $\int\limits_{2i}^{2-i} \sin(3i - z)dz.$

36. $\int\limits_C \left(1 - i + 2\overline{z}\right)dz, \quad C: y = x^2, \quad 0 \le x \le 1.$

37. $\int\limits_1^i \left(3z^4 - 2z^3\right)dz.$

38. $\int\limits_i^{1+i} z^3 dz.$

39. $\int\limits_C z\overline{z}dz, \quad C:|z| = 2, \quad 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}.$

40. $\int\limits_{i-1}^{2+i} \left(3z^2 - 2z\right)dz.$

41. $\int\limits_C \left(1 - i + \overline{z}\right)dz, \quad C: \textit{ламана } z_1z_2z_3, \; z_1 = 0, \; z_2 = 1 + i, \; z_3 = 1.$

42. $\int\limits_0^{1+i} \sin z \cos z dz.$

43. $\int\limits_C \cos 3z dz, \quad C: \textit{пряма } z_1z_2, \; z_1 = \frac{\pi}{2}, \; z_2 = \pi + i.$

44. $\int\limits_C \left(3\overline{z} + 5\right)dz, \quad C: z = (1+i)t, \quad 0 \le t \le 1.$

45. $\int\limits_0^{1+i} \left(z^3 - 1\right)dz.$

46. $\int\limits_C \left(z + \overline{z}\right)dz, \quad C:|z| = 1.$

47. $\int\limits_0^{1+i} (z+1)\sin z dz.$

48. $\int\limits_C (7z+5)dz, \quad C: \textit{пряма } z_1z_2, \; z_1=3, \; z_2=i-1.$

49. $\int\limits_C \overline{z}\,\mathrm{Im}\,z dz, \quad C: |z|=1, \quad 0\le \arg z\le \pi.$

50. $\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z dz, \quad C: |z|=1, \quad 0\le \arg z\le 2\pi.$

51. $\int\limits_i^{1+i} z^2 dz.$

52. $\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z dz, \quad C: \textit{пряма } z_1z_2, \; z_1=-i, \; z_2=2-i$

53. $\int\limits_0^1 z^2 e^{-z^3} dz.$

54. $\int\limits_0^i (z-2z^2)dz.$

55. $\int\limits_C (\overline{z}+i)dz, \quad C: \textit{пряма } z_1z_2, \; z_1=1, \; z_2=-i.$

56. $\int\limits_{2i}^{2-i} \sin^2(3i-z)dz.$

57. $\int\limits_C z\overline{z}dz, \quad C: |z|=1, \quad -\pi\le \arg z\le \frac{\pi}{2}.$

58. $\int\limits_1^i (2z-3)\sin 5z dz.$

59. $\int\limits_C (\overline{z}+2z)dz, \quad C: |z|=1, \quad 0\le \arg z\le \pi.$

60. $\int\limits_{-1+i}^{1+i} (i+2z)dz.$

61. $\int\limits_0^{1+i} \sin^2 z \cos z dz.$

62. $\int\limits_C (z-3i)dz, \quad C: \textit{пряма } z_1z_2, \; z_1=i, \; z_2=1-i.$

63. $\int\limits_C (\overline{z}+2)dz, \quad C: |z|=1.$

64. $\int\limits_{-i}^{i} z^2 e^{zi} dz.$

65. $\int\limits_C (3z + \overline{z}) dz, \quad C: |z| = 2.$

66. $\int\limits_C \sin(3z - i) dz, \quad C:$ *пряма* $z_1 z_2, \ z_1 = \dfrac{\pi}{2}, \ z_2 = \pi + i.$

67. $\int\limits_C (z + \operatorname{Re} z) dz, \quad C: y = x^3, \ z_1 = 0, \ z_2 = 1 + i.$

68. $\int\limits_C e^{z^2} \operatorname{Re} z dz, \quad C:$ *пряма* $z_1 z_2, \ z_1 = -1 - i, \ z_2 = 1 + i.$

69. $\int\limits_C z \operatorname{Re} z dz, \quad C: |z| = 3, \quad -\dfrac{\pi}{6} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}.$

70. $\int\limits_C (2 - i + \overline{z}) dz, \quad C:$ *ламана* $z_1 z_2 z_3, \ z_1 = 0, \ z_2 = 1 + i, \ z_3 = 1.$

71. $\int\limits_C \operatorname{Re} z dz, \quad C: z = (2 + i)t, \quad 0 \le t \le 1.$

72. $\int\limits_C z \operatorname{Im} z dz, \quad C: |z| = 2.$

73. $\int\limits_C \operatorname{Im} z dz, \quad C -$ *пряма* $z_1 z_2, \ z_1 = i, \ z_2 = 2 + i.$

74. $\int\limits_{i}^{2i} (z - z^3) e^{z^2} dz.$

75. $\int\limits_C (x^2 + iy^2) dz, \quad C:$ *пряма* $z_1 z_2, \ z_1 = 0, \ z_2 = 1 + i.$

76. $\int\limits_{0}^{1+i} (z + 1) \operatorname{sh} z dz.$

77. $\int\limits_{-i}^{i} z \cos(z^2 - 3) dz.$

78. $\int\limits_{0}^{2i} z \cos z^2 dz.$

79. $\int\limits_C \operatorname{Re}(z - 2) dz, \quad C: |z| = (1 + i)t, \quad 0 \le t \le 1.$

80. $\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z dz, \quad C: |z| = 1, \quad 0 \le \arg z \le \pi.$

81. $\int\limits_C \frac{dz}{z-4}, \quad C: x = 3\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

82. $\int\limits_C e^{-2z-1} dz, \quad C: \textit{пряма}\ z_1 z_2,\ \ z_1 = 0,\ \ z_2 = 1 + i.$

83. $\int\limits_C \left(2\overline{z} - z^2\right) dz, \quad C: |z| = 1, \quad \frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}.$

84. $\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz, \quad C: |z| = 1, \quad 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}.$

85. $\int\limits_C \left(1 - i + 2\overline{z}\right) dz, \quad C: y = x^2, \quad 0 \le x \le 1.$

86. $\int\limits_0^2 \sin 2z e^{\sin^2 z} dz.$

87. $\int\limits_0^{1+i} \left(4z^3 - 2z\right) dz.$

88. $\int\limits_i^{3-2i} e^{5-3z} dz.$

89. $\int\limits_C \left(iz + \overline{z}\right) dz, \quad C: |z| = 2, \quad 0 \le \arg z \le \pi.$

90. $\int\limits_C \left(7\overline{z} + 5\right) dz, \quad C: \textit{пряма}\ z_1 z_2,\ \ z_1 = 2,\ \ z_2 = i - 1.$

91. $\int\limits_i^{2i} z\left(3z^2 - 2\right) dz.$

92. $\int\limits_1^{i} z^2 e^{-z} dz.$

93. $\int\limits_C \mathrm{Im}\left(z^2 + 5\right) dz, \quad C: \textit{пряма}\ z_1 z_2,\ \ z_1 = 3i,\ \ z_2 = 2 + 3i.$

94. $\int\limits_C \left(\overline{z} + 2\right) dz, \quad C: z = \left(1 + i\right) t, \quad -1 \le t \le 1.$

95. $\int\limits_{-i}^{0} z^2 e^{z^3} dz.$

96. $\int_C (3z + 2\bar{z})dz, \quad C: |z| = 2, \quad -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}.$

97. $\int_C e^z dz, \quad C - \textit{пряма} \;\; z_1 z_2, \;\; z_1 = \frac{\pi}{2}, \;\; z_2 = \pi + i.$

98. $\int_i^{1-i} (z+1)\cos z dz.$

99. $\int_0^{1+i} \left(z^3 - 3z^2\right)dz.$

100. $\int_C (3z - \bar{z})dz, \quad C: \textit{пряма} \; z_1 z_2, \;\; z_1 = 1 + i, \;\; z_2 = 2 + 2i.$

Завдання 6. Знайти область збіжності рядів.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{8z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7iz}{8}\right)^n.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(3+2i)^n (z+i)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(i(n+1)\right)(z+i)^n.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i+n}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(10z)^n.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{3n+2}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}(3i+1)^n z^n.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2in)}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}e^{-n} z^n.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2in}}{(z+3i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sh}(in)(z+3i)^n.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}e^{2n} z^n.$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-4)^{-n}}{2^{n^2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-4)^n}{(2n+1)!}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2in)}{(z-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(ez)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n.$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{0,3z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\cos(2in)}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-i}{3}\right)^n z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(1+i)^n}.$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n^2}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}e^n z^n.$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{n-2n^2}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}(i-3n)^n z^n.$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2in}(z-2)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{ch}(n+2)(z-2)^n.$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+e^n}{(2z)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n.$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^n z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(in)}{nz^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n z^n.$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e+2}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+\sin(in)}.$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(z-4i)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sh}(-n)(z-4i)^n.$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{z+1}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2n+1}\right)^n.$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(i+1)^n}.$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}i^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(i(7n+1)\right)z^n.$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(in)}{1+n^2}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{\cos(in)}z^n.$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z-4)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-4)^n}{i^n}.$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{i^{2n+1}z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2i+n}{n^n}z^n.$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{\sin\left(i(n+1)\right)}+\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(in\right)\cdot z^{n}.$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{n}+n\right)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(3in\right)\cdot z^{n}.$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!(z-1)^{n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n}}{2^{n+1}}.$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(in\right)}{z^{n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{\operatorname{ch} n}.$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{z}\right)^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{25}\right)^{n}.$

32. $\sum_{n=1}^{\infty}i^{n+1}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{e^{n}}.$

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3i}{2-i}\right)^{n+1}\left(z-3i\right)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(z-3i\right)^{n}.$

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2i}{2-i}\right)^{n}\left(z-1\right)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(2in\right)\left(z-1\right)^{n}.$

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2z\right)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4z}{3}\right)^{n}.$

36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n+1\right)^{2}}{\left(z-1\right)^{n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(3i\right)^{n}\left(z-1\right)^{n}.$

37. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2n-i}\left(z-i\right)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-i\right)^{n}}{2n+3}.$

38. $\sum_{n=1}^{\infty}i^{2n+1}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(2ni+i\right)z^{n}.$

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(in\right)}{\left(z-2\right)^{n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{ch} n\left(z-2\right)^{n}.$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{\left(i+1\right)^{n}}\left(z-1\right)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-1\right)^{n}}{\cos\left(2ni+i\right)}.$

41. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2z\right)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4z}{3}\right)^{n}.$

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10}{2z+1}\right)^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+0{,}5}{0{,}5}\right)^{n}.$

43. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+i}{2}\right)^n z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^n}{2^n}.$

44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^{-n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}2^n(z-1)^n.$

45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(in)}{n}(z-4)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\cos(2in)}(z-4)^n.$

46. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-in)^n z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\cos(3in)}.$

47. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+3i}{5z-10}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(2z-4)^n.$

48. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(ni)}{z+2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z+4)^n}{3^n}.$

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}+1}{nz^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}.$

50. $\sum_{n=1}^{\infty}(iz-i)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5z-5}{7}\right)^n.$

51. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{(z-1)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(3i)^n}.$

52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{(3+4i)^{2n-1}}.$

53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-4i)^{-n}}{2i^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-4i)^n}{(2n+3)!}.$

54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2n}z^n.$

55. $\sum_{n=1}^{\infty}\left((3+2i)(z+i)\right)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}(z+i)^n.$

56. $\sum_{n=1}^{\infty}n!(z-2)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}n(z-2)^n.$

57. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}.$

58. $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-2n^2}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}(i-3)^n z^n.$

59. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{i^{2n-1}z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n^n}z^n.$

60. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4+i}{z+1}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{6+3i}\right)^n.$

61. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2-1}.$

62. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1+i)^n}{(z-2)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{2^n}.$

63. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-in)^n z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(3i+1)^{n+3}}.$

64. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-3}(z-i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{2^{n+1}}.$

65. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n+1}z^n.$

66. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2-i}\right)^{n+1}(z-3i)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(z-3i)^n.$

67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2+i)^{-n}}{(2i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2+i)^n}{(2n+3)!}.$

68. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^n(z-1)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(3i)^{n-1}}.$

69. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{1+n^2}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{3^n-1}z^n.$

70. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-4)^{-n}}{(n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-4)^n}{(2n-i)^n}.$

71. $\sum_{n=1}^{\infty}(2ez)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+i}\left(\frac{z}{2i-3}\right)^n.$

72. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{(n^3-n+2)z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}z^n.$

73. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-i}{3+i}\right)^n z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+2}}.$

74. $\sum_{n=1}^{\infty}(z-4i)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\cos(-in)(2z-8i)^n.$

75. $\sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1}(z-i)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \cos(3ni)(z-i)^{n}.$

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e+2}{z}\right)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n}}{1+\operatorname{ch} n}.$

77. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(2n)}{(z+3)^{n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z+6)^{n}}{5^{n}}.$

78. $\sum_{n=1}^{\infty} (3z)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4z}{5}\right)^{n} \frac{1}{n+5}.$

79. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^{n}}{(3z)^{n}} + \sum_{n=0}^{\infty} (2iz)^{n}.$

80. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(2i+1)^{n}}(z-1)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^{n}.$

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2z+4i}\right)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{2-2i}\right)^{n}.$

82. $\sum_{n=1}^{\infty} (3z)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^{n}.$

83. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{-n}}{\cos(i+2)(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^{n}}{n+i-3n^{2}}.$

84. $\sum_{n=1}^{\infty} (iz-1)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} (5z+5i)^{n}.$

85. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{0{,}5z}\right)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n)!} z^{n}.$

86. $\sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{n}}{e^{n}}.$

87. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+i}{2}\right)(z-3i)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(z-3i)^{n}}{2^{n-2}}.$

88. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!\,z^{n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n}}{3^{n+1}}.$

89. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{3n}}{(4z-i)^{n}} + \sum_{n=0}^{\infty} (3i+2)^{n} \left(2z-\frac{i}{2}\right)^{n}.$

90. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3z-9}\right)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} (2z-6)^{n}.$

91. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2i+3}{2z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+n}{2n-i}\right)^n z^n$

92. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2in)}{n(z+2-i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(e+1)^{-n}(z+2-i)^n.$

93. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{(z-2)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{i^n}.$

94. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{\sin(in)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n\cos(in)}.$

95. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n-1}{(z+i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(5i+1)^{2n}}.$

96. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6(z+1)}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5i(z+1)}{6}\right)^n.$

97. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(z+2)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^n(z+2)^n.$

98. $\sum_{n=1}^{\infty}(i-1)^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{i^{n+1}}z^n.$

99. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(4^n+n\right)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sh}(3n)z^n.$

100. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh} n}{(z+3)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+3)^n}{\sin(in)}.$

Завдання 7. Розглянути всі випадки розкладу функції $f(z)$ в ряд Лорана за степенями $z-z_0$.

1.1. $f(z)=\frac{6-6i}{z+3-9i},\ z_0=5-9i;$

1.2. $f(z)=\frac{6z+30}{z^2+4z+13},\ z_0=-9-3i;$

2.1. $f(z)=\frac{-6-6i}{z-7+4i},\ z_0=-7-9i;$

2.2. $f(z)=\frac{10z+102}{z^2+18z+117},\ z_0=-1-8i;$

3.1. $f(z)=\dfrac{6-9i}{z+8-10i}$, $z_0=-2+5i$;

3.2. $f(z)=\dfrac{12z}{z^2+20z+136}$, $z_0=-4-10i$;

4.1. $f(z)=\dfrac{-3-i}{z+4+6i}$, $z_0=-8+2i$;

4.2. $f(z)=\dfrac{8z+72}{z^2+20z+116}$, $z_0=7-3i$;

5.1. $f(z)=\dfrac{-6-7i}{z-5+8i}$, $z_0=5i$;

5.2. $f(z)=\dfrac{16z+64}{z^2-2z+65}$, $z_0=1-10i$;

6.1. $f(z)=\dfrac{-8+8i}{z-2+i}$, $z_0=-4-4i$;

6.2. $f(z)=\dfrac{-2z+70}{z^2-10z+125}$, $z_0=3-10i$;

7.1. $f(z)=\dfrac{4+8i}{z-8+3i}$, $z_0=7+5i$;

7.2. $f(z)=\dfrac{-16z+36}{z^2-6z+45}$, $z_0=2-6i$;

8.1. $f(z)=\dfrac{8+6i}{z+10-i}$, $z_0=4-4i$;

8.2. $f(z)=\dfrac{16z-148}{z^2-20z+101}$, $z_0=1+7i$;

9.1. $f(z)=\dfrac{6+2i}{z+1+3i}$, $z_0=4+8i$;

9.2. $f(z)=\dfrac{-2z+44}{z^2+10z+106}$, $z_0=9-9i$;

10.1. $f(z)=\dfrac{3+4i}{z-10+5i}$, $z_0=-7+5i$;

10.2. $f(z)=\dfrac{-2z+54}{z^2+18z+117}$, $z_0=-3+10i$;

11.1. $f(z)=\dfrac{-3-5i}{z+8i}, \ z_0=-5+2i;$

11.2. $f(z)=\dfrac{10z-82}{z^2-14z+58}, \ z_0=9-6i;$

12.1. $f(z)=\dfrac{9+2i}{z+7}, \ z_0=5-8i;$

12.2. $f(z)=\dfrac{-4z-34}{z^2-10z+106}, \ z_0=10+7i;$

13.1. $f(z)=\dfrac{2-i}{z+5+i}, \ z_0=9-5i;$

13.2. $f(z)=\dfrac{11z-27}{z^2-6z+5}, \ z_0=2+9i;$

14.1. $f(z)=\dfrac{-3-4i}{z+8-6i}, \ z_0=8-7i;$

14.2. $f(z)=\dfrac{-2z+110}{z^2+16z+113}, \ z_0=3+6i;$

15.1. $f(z)=\dfrac{8-6i}{z+10+2i}, \ z_0=-5i;$

15.2. $f(z)=\dfrac{14z-124}{z^2-20z+164}, \ z_0=3-8i;$

16.1. $f(z)=\dfrac{6i}{z-4-4i}, \ z_0=-4+2i;$

16.2. $f(z)=\dfrac{6z-114}{z^2-20z+109}, \ z_0=5-3i;$

17.1. $f(z)=\dfrac{6-i}{z-1-3i}, \ z_0=-10-4i;$

17.2. $f(z)=\dfrac{-16z-172}{z^2+14z+58}, \ z_0=2;$

18.1. $f(z)=\dfrac{9}{z-4+3i}, \ z_0=2+2i;$

18.2. $f(z)=\dfrac{-16z-36}{z^2+2z+26}, \ z_0=-1-3i;$

19.1. $f(z)=\dfrac{-1+i}{z-5+7i}$, $z_0=2+7i$;

19.2. $f(z)=\dfrac{-6z-36}{z^2+17z+70}$, $z_0=-9-8i$;

20.1. $f(z)=\dfrac{1+8i}{z+5-9i}$, $z_0=-10i$;

20.2. $f(z)=\dfrac{-2z+104}{z^2-4z+29}$, $z_0=7-10i$;

21.1. $f(z)=\dfrac{6+8i}{z+9+8i}$, $z_0=10+6i$;

21.2. $f(z)=\dfrac{-8z-112}{z^2-4z+68}$, $z_0=4-3i$;

22.1. $f(z)=\dfrac{-1+7i}{z-1+7i}$, $z_0=10+7i$;

22.2. $f(z)=\dfrac{9z+50}{z^2+8z+12}$, $z_0=9+2i$;

23.1. $f(z)=\dfrac{10-2i}{z+4+8i}$, $z_0=-4+4i$;

23.2. $f(z)=\dfrac{-16z+130}{z^2+4z+85}$, $z_0=-7-6i$;

24.1. $f(z)=\dfrac{6+5i}{z-4}$, $z_0=3i$;

24.2. $f(z)=\dfrac{-6z+14}{z^2-10z+9}$, $z_0=7-5i$;

25.1. $f(z)=\dfrac{10-5i}{z-10-2i}$, $z_0=-8-6i$;

25.2. $f(z)=\dfrac{12z+4}{z^2+14z+113}$, $z_0=7-9i$;

26.1. $f(z)=\dfrac{-3+7i}{z+1+5i}$, $z_0=-10+3i$;

26.2. $f(z)=\dfrac{14z+132}{z^2+16z+89}$, $z_0=5+i$;

27.1. $f(z)=\dfrac{4+i}{z+6+4i}$, $z_0=-7+i$;

27.2. $f(z)=\dfrac{12z+18}{z^2-4z-45}$, $z_0=-2-8i$;

28.1. $f(z)=\dfrac{-3+i}{z+3-i}$, $z_0=-10+7i$;

28.2. $f(z)=\dfrac{z-13}{z^2+7z+10}$, $z_0=9+6i$;

29.1. $f(z)=\dfrac{-4}{z-4-8i}$, $z_0=3-10i$;

29.2. $f(z)=\dfrac{14z+114}{z^2+12z+45}$, $z_0=-3+5i$;

30.1. $f(z)=\dfrac{6-4i}{z+4+3i}$, $z_0=4-2i$;

30.2. $f(z)=\dfrac{2z-16}{z^2+8z+52}$, $z_0=-4-9i$;

31.1. $f(z)=\dfrac{-3+10i}{z-7+4i}$, $z_0=-2-5i$;

31.2. $f(z)=\dfrac{-12z+40}{z^2+12z+85}$, $z_0=-9-7i$;

32.1. $f(z)=\dfrac{-7+10i}{z+4+2i}$, $z_0=-1-8i$;

32.2. $f(z)=\dfrac{10z+4}{z^2+2z-8}$, $z_0=-1-3i$;

33.1. $f(z)=\dfrac{-6i}{z+3}$, $z_0=2-5i$;

33.2. $f(z)=\dfrac{-9z+19}{z^2-3z+2}$, $z_0=-4+9i$;

34.1. $f(z)=\dfrac{-4-8i}{z-2-7i}$, $z_0=-3+6i$;

34.2. $f(z)=\dfrac{-18z-34}{z^2+6z+34}$, $z_0=-1+9i$;

35.1. $f(z)=\dfrac{-9+6i}{z+2-2i}, \ z_0=-1-i;$

35.2. $f(z)=\dfrac{18z+82}{z^2+8z+41}, \ z_0=2-3i;$

36.1. $f(z)=\dfrac{4+8i}{z-9+3i}, \ z_0=-9-4i;$

36.2. $f(z)=\dfrac{8z-30}{z^2-8z+17}, \ z_0=2i;$

37.1. $f(z)=\dfrac{-8+5i}{z-5+i}, \ z_0=9-9i;$

37.2. $f(z)=\dfrac{10z+22}{z^2+14z+85}, \ z_0=8+4i;$

38.1. $f(z)=\dfrac{4+4i}{z+7-4i}, \ z_0=0;$

38.2. $f(z)=\dfrac{13z-75}{z^2-12z+35}, \ z_0=2+6i;$

39.1. $f(z)=\dfrac{-6-5i}{z+5+6i}, \ z_0=6-3i;$

39.2. $f(z)=\dfrac{20z+136}{z^2+4z+68}, \ z_0=2-3i;$

40.1. $f(z)=\dfrac{-5+9i}{z-6-5i}, \ z_0=-3+2i;$

40.2. $f(z)=\dfrac{-z+21}{z^2+10z+21}, \ z_0=2+6i;$

41.1. $f(z)=\dfrac{-8-10i}{z+i}, \ z_0=-4+3i;$

41.2. $f(z)=\dfrac{5z+1}{z^2+4z+3}, \ z_0=2+8i;$

42.1. $f(z)=\dfrac{4-7i}{z-8-3i}, \ z_0=-7+6i;$

42.2. $f(z)=\dfrac{9z-32}{z^2-7z+12}, \ z_0=-8-6i;$

43.1. $f(z)=\dfrac{-1-9i}{z-10}$, $z_0=-2-3i$;

43.2. $f(z)=\dfrac{-4z-10}{z^2+1}$, $z_0=2+9i$;

44.1. $f(z)=\dfrac{2-9i}{z-1+5i}$, $z_0=-10$;

44.2. $f(z)=\dfrac{-4z-60}{z^2+20z+101}$, $z_0=-1-10i$;

45.1. $f(z)=\dfrac{-8-i}{z-5-10i}$, $z_0=4+6i$;

45.2. $f(z)=\dfrac{16z-56}{z^2+8z+52}$, $z_0=8+2i$;

46.1. $f(z)=\dfrac{-4+6i}{z+6+i}$, $z_0=7-4i$;

46.2. $f(z)=\dfrac{-14z-148}{z^2+16z+73}$, $z_0=5+9i$;

47.1. $f(z)=\dfrac{6+i}{z-3+3i}$, $z_0=-8-10i$;

47.2. $f(z)=\dfrac{-z+31}{z^2-6z-7}$, $z_0=-1+i$;

48.1. $f(z)=\dfrac{6-7i}{z-2+4i}$, $z_0=-2+10i$;

48.2. $f(z)=\dfrac{14z-118}{z^2-4z+85}$, $z_0=-10-7i$;

49.1. $f(z)=\dfrac{-6-9i}{z+9+4i}$, $z_0=-10-9i$;

49.2. $f(z)=\dfrac{2z+78}{z^2-6z-27}$, $z_0=6$;

50.1. $f(z)=\dfrac{9i}{z-2-i}$, $z_0=8-4i$;

50.2. $f(z)=\dfrac{-20z-288}{z^2+18z+162}$, $z_0=-5+5i$;

51.1. $f(z)=\dfrac{6-6i}{z+2+3i}$, $z_0=-10+i$;

51.2. $f(z)=\dfrac{-18z+30}{z^2-3z}$, $z_0=-8-8i$;

52.1. $f(z)=\dfrac{4+5i}{z-10+10i}$, $z_0=-6+10i$;

52.2. $f(z)=\dfrac{18z+90}{z^2+14z+85}$, $z_0=-8-3i$;

53.1. $f(z)=\dfrac{-7+4i}{z+5-5i}$, $z_0=-3i$;

53.2. $f(z)=\dfrac{8z-18}{z^2-2z+2}$, $z_0=-3-7i$;

54.1. $f(z)=\dfrac{-3+10i}{z+6-5i}$, $z_0=10$;

54.2. $f(z)=\dfrac{-6z-148}{z^2+12z+85}$, $z_0=-9-4i$;

55.1. $f(z)=\dfrac{-7-9i}{z-6}$, $z_0=-8-2i$;

55.2. $f(z)=\dfrac{2z-2}{z^2-14z+58}$, $z_0=-1+i$;

56.1. $f(z)=\dfrac{-10-5i}{z-4-i}$, $z_0=-10-8i$;

56.2. $f(z)=\dfrac{-12z+12}{z^2-2z-24}$, $z_0=-2+8i$;

57.1. $f(z)=\dfrac{-10+10i}{z+10-5i}$, $z_0=4+2i$;

57.2. $f(z)=\dfrac{2z}{z^2-16}$, $z_0=5+3i$;

58.1. $f(z)=\dfrac{6-8i}{z+10+8i}$, $z_0=-10-7i$;

58.2. $f(z)=\dfrac{-14z-18}{z^2+6z-27}$, $z_0=-9+5i$;

59.1. $f(z)=\dfrac{1-2i}{z-9-3i}$, $z_0=10-3i$;

59.2. $f(z)=\dfrac{10z-54}{z^2+2z+65}$, $z_0=1$;

60.1. $f(z)=\dfrac{8-9i}{z-8+5i}$, $z_0=-4-5i$;

60.2. $f(z)=\dfrac{2z+20}{z^2-16z+145}$, $z_0=-10+4i$;

61.1. $f(z)=\dfrac{10-4i}{z-10}$, $z_0=-6+5i$;

61.2. $f(z)=\dfrac{-5z-90}{z^2-3z-54}$, $z_0=-6-4i$;

62.1. $f(z)=\dfrac{-2+2i}{z-10+3i}$, $z_0=-8-7i$;

62.2. $f(z)=\dfrac{-16z+168}{z^2-18z+85}$, $z_0=3-4i$;

63.1. $f(z)=\dfrac{-5+2i}{z+7}$, $z_0=9-7i$;

63.2. $f(z)=\dfrac{-14z-14}{z^2+3z-10}$, $z_0=2+5i$;

64.1. $f(z)=\dfrac{5+4i}{z+6+10i}$, $z_0=4+3i$;

64.2. $f(z)=\dfrac{-11z+6}{z^2+3z-54}$, $z_0=3-i$;

65.1. $f(z)=\dfrac{4-3i}{z-4-7i}$, $z_0=-1-4i$;

65.2. $f(z)=\dfrac{11z+106}{z^2+19z+90}$, $z_0=3-9i$;

66.1. $f(z)=\dfrac{-3}{z-7+3i}$, $z_0=7+9i$;

66.2. $f(z)=\dfrac{12z+66}{z^2-4z+85}$, $z_0=-10-3i$;

67.1. $f(z)=\dfrac{-4}{z+10i}$, $z_0=-2+10i$;

67.2. $f(z)=\dfrac{12z-92}{z^2-15z+56}$, $z_0=-2+7i$;

68.1. $f(z)=\dfrac{4}{z+8+7i}$, $z_0=-4+5i$;

68.2. $f(z)=\dfrac{-18z-56}{z^2+49}$, $z_0=-4-5i$;

69.1. $f(z)=\dfrac{-10-10i}{z+1-5i}$, $z_0=-9+9i$;

69.2. $f(z)=\dfrac{-14z-118}{z^2-6z+109}$, $z_0=9i$;

70.1. $f(z)=\dfrac{1-6i}{z-5+10i}$, $z_0=-4-3i$;

70.2. $f(z)=\dfrac{-6}{z^2-5z+6}$, $z_0=-2+4i$;

71.1. $f(z)=\dfrac{-7-3i}{z+4-6i}$, $z_0=i$;

71.2. $f(z)=\dfrac{-11z-33}{z^2+6z+9}$, $z_0=-1-5i$;

72.1. $f(z)=\dfrac{8-i}{z-1+9i}$, $z_0=9+i$;

72.2. $f(z)=\dfrac{-14z+38}{z^2-2z+17}$, $z_0=9+6i$;

73.1. $f(z)=\dfrac{-9-i}{z-8-6i}$, $z_0=-1+i$;

73.2. $f(z)=\dfrac{4z-64}{z^2-8z+25}$, $z_0=-3+5i$;

74.1. $f(z)=\dfrac{10-3i}{z+10+6i}$, $z_0=7-9i$;

74.2. $f(z)=\dfrac{z+26}{z^2-11z+18}$, $z_0=-2+7i$;

75.1. $f(z)=\dfrac{8-10i}{z+4+6i}$, $z_0=10+6i$;

75.2. $f(z)=\dfrac{-20z+40}{z^2+2z+37}$, $z_0=-2+4i$;

76.1. $f(z)=\dfrac{-10+4i}{z-10-6i}$, $z_0=-6+4i$;

76.2. $f(z)=\dfrac{-3z+45}{z^2-13z+40}$, $z_0=-3-3i$;

77.1. $f(z)=\dfrac{-3+10i}{z-2+3i}$, $z_0=8-4i$;

77.2. $f(z)=\dfrac{6z+48}{z^2+16z+64}$, $z_0=6-7i$;

78.1. $f(z)=\dfrac{-8-8i}{z+1+7i}$, $z_0=-3+3i$;

78.2. $f(z)=\dfrac{7z-31}{z^2+4z-21}$, $z_0=-5+9i$;

79.1. $f(z)=\dfrac{-3-2i}{z+1-6i}$, $z_0=-9-7i$;

79.2. $f(z)=\dfrac{-2z+36}{z^2-11z+24}$, $z_0=6+4i$;

80.1. $f(z)=\dfrac{-4+8i}{z-10i}$, $z_0=6+8i$;

80.2. $f(z)=\dfrac{-7z-98}{z^2+6z-40}$, $z_0=-8-10i$;

81.1. $f(z)=\dfrac{-5+9i}{z-4+3i}$, $z_0=-6+7i$;

81.2. $f(z)=\dfrac{-5z-78}{z^2+7z-18}$, $z_0=1+7i$;

82.1. $f(z)=\dfrac{7-5i}{z-5-2i}$, $z_0=3$;

82.2. $f(z)=\dfrac{20z-80}{z^2-16z+164}$, $z_0=-10-7i$;

83.1. $f(z)=\dfrac{5+8i}{z-6-9i}$, $z_0=1+5i$;

83.2. $f(z)=\dfrac{-14z+126}{z^2-18z+81}$, $z_0=-10-5i$;

84.1. $f(z)=\dfrac{-10-2i}{z-1-3i}$, $z_0=-10-10i$;

84.2. $f(z)=\dfrac{10z+30}{z^2+10z+29}$, $z_0=7$;

85.1. $f(z)=\dfrac{-9-6i}{z+9-3i}$, $z_0=5+5i$;

85.2. $f(z)=\dfrac{10z+182}{z^2+14z+113}$, $z_0=6-7i$;

86.1. $f(z)=\dfrac{-3-6i}{z-6+8i}$, $z_0=-8-3i$;

86.2. $f(z)=\dfrac{-3z-50}{z^2-12z+20}$, $z_0=7-3i$;

87.1. $f(z)=\dfrac{-4+3i}{z+8+4i}$, $z_0=-2+8i$;

87.2. $f(z)=\dfrac{2z-32}{z^2-16z+60}$, $z_0=-10-10i$;

88.1. $f(z)=\dfrac{1-9i}{z+5+4i}$, $z_0=5+10i$;

88.2. $f(z)=\dfrac{10z-38}{z^2-9z+8}$, $z_0=-9-6i$;

89.1. $f(z)=\dfrac{7+3i}{z-10-4i}$, $z_0=-1-6i$;

89.2. $f(z)=\dfrac{14z+20}{z^2+8z+52}$, $z_0=9-i$;

90.1. $f(z)=\dfrac{10-9i}{z+6+4i}$, $z_0=2+4i$;

90.2. $f(z)=\dfrac{z+4}{z^2+15z+56}$, $z_0=9-9i$;

91.1. $f(z)=\dfrac{2+2i}{z+7-9i},\ z_0=-9+5i;$

91.2. $f(z)=\dfrac{-14z-28}{z^2-12z+100},\ z_0=-4-2i;$

92.1. $f(z)=\dfrac{-4+8i}{z+4-2i},\ z_0=5+5i;$

92.2. $f(z)=\dfrac{-4z-1}{z^2-7z+6},\ z_0=-2i;$

93.1. $f(z)=\dfrac{8-3i}{z-4},\ z_0=10+8i;$

93.2. $f(z)=\dfrac{4z+64}{z^2-7z-30},\ z_0=2-7i;$

94.1. $f(z)=\dfrac{-4+8i}{z+8+10i},\ z_0=-8-8i;$

94.2. $f(z)=\dfrac{8z+66}{z^2+14z+48},\ z_0=7-4i;$

95.1. $f(z)=\dfrac{3-10i}{z-8+8i},\ z_0=10-2i;$

95.2. $f(z)=\dfrac{18z-254}{z^2-14z+113},\ z_0=-10+8i;$

96.1. $f(z)=\dfrac{2+9i}{z+3-10i},\ z_0=-8-5i;$

96.2. $f(z)=\dfrac{16z+6}{z^2+2z-24},\ z_0=-1+5i;$

97.1. $f(z)=\dfrac{8+5i}{z-2+5i},\ z_0=-10+3i;$

97.2. $f(z)=\dfrac{-5z-13}{z^2-8z+7},\ z_0=-2+9i;$

98.1. $f(z)=\dfrac{3+7i}{z-1-5i},\ z_0=-6-10i;$

98.2. $f(z)=\dfrac{10z+16}{z^2-4},\ z_0=-5+7i;$

99.1. $f(z)=\dfrac{10+10i}{z+8+6i},\ \ z_0=8-7i;$

99.2. $f(z)=\dfrac{-z+34}{z^2-3z-40},\ \ z_0=10-8i;$

100.1. $f(z)=\dfrac{-4-4i}{z+8-6i},\ \ z_0=-5-8i;$

100.2. $f(z)=\dfrac{-2z+54}{z^2+10z+9},\ \ z_0=2+8i.$

Завдання 8. Обчислити:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) з використанням теореми Коші про лишки.

1. $\displaystyle\int\limits_{|z|=0,5}\frac{e^z dz}{z^3(z-1)}.$

2. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz.$

3. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^3-2z^2}dz.$

4. $\displaystyle\int\limits_{|z+4i|=5}\frac{\sin\pi z dz}{\left(z^2+16\right)^2}.$

5. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} iz dz}{(z+1)^2(z-1)}.$

6. $\displaystyle\int\limits_{C}\frac{\sin\pi z dz}{\left(z^2-1\right)^2},\quad C:\frac{x^2}{4}+y^2=1.$

7. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4}\frac{z+1}{z^2+2z-3}dz.$

8. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4}\frac{dz}{(z-1)^3}.$

9. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\sqrt{3}}\frac{\sin\pi z dz}{z^2-z}.$

10. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{\left(z^2+1\right)(z-3)}.$

11. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z}{(z-2)^3(z+4)} dz.$

12. $\displaystyle\oint\limits_{|z-4|=1} \frac{izdz}{4z-z^2}.$

13. $\displaystyle\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{e^z}{z^2+4} dz.$

14. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz} dz}{(z-\pi)^3}.$

15. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}.$

16. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=0,5} \frac{e^{iz}}{\left(z^2-1\right)^2} dz.$

17. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z+1)}.$

18. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z-1)^2(z+1)}.$

19. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{z \operatorname{ch} iz}{(z-2i)^3} dz.$

20. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3} dz.$

21. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{iz} dz}{z^3(z+3)}.$

22. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{\pi z} dz}{(z-i)^2}.$

23. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi}{4} z}{(z-1)^2(z-3)} dz.$

24. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz} dz}{z^2+2z-3}.$

25. $\int\limits_C \frac{z\sin z dz}{(z-1)^3}, \quad C: \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1.$

26. $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{(z^2-1)^2}.$

27. $\int\limits_C \frac{\cos\frac{z}{2}dz}{z^2-4}, \quad C: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$

28. $\int\limits_{|z-2|=2} \frac{z}{(z-3)^3}dz.$

29. $\int\limits_{|z|=10} \frac{dz}{z^2-5z+6}.$

30. $\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{i}{z}}}{(z^2+4)^2}dz.$

31. $\int\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^2-z-2}.$

32. $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}dz}{(z-i)(z+1)^2}.$

33. $\int\limits_C \frac{dz}{1+z^4}, \quad C: x^2+y^2=2x.$

34. $\int\limits_C \frac{e^{2z}}{z^3-1}dz, \quad C: x^2+y^2-2x=0.$

35. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch}^2 iz}{(z-1)^2(z+4)^2}dz.$

36. $\int\limits_{|z+2i|=2} \frac{dz}{(z^2+4)(z+9)}.$

37. $\int\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz.$

38. $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin iz dz}{(z-1)^2(1+z)^3}.$

39. $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{iz}dz}{z^2-2z}.$

40. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z^2 dz}{z^2 - 4z}.$

41. $\displaystyle\int\limits_{|z-3i|=2} \frac{(z+5)dz}{z^2 + 16}.$

42. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2} dz.$

43. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=2} \left(\frac{\operatorname{ch}\frac{z}{4}}{z^2 - 4} \right)^2 dz.$

44. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z dz}{\left(z^2 - 1\right)^2}.$

45. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{z dz}{(z-1)^2 (z+2)}, \quad C: x^2 + y^2 = 9.$

46. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-i)^2 (z+4)}.$

47. $\displaystyle\int\limits_{|z|=0,75} \frac{\sin 2z dz}{(z+i)\left(z - \frac{i}{2}\right)}.$

48. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{2iz}}{(z-1)^3} dz.$

49. $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=2} \frac{z^2 + 5}{\left(z^2 - 4\right)^2} dz.$

50. $\displaystyle\int\limits_{|z+3i|=1} \frac{\sin \pi z}{(z-2)(z+3i)^2} dz.$

51. $\displaystyle\int\limits_{|z+3|=2} \frac{z^2 + 5}{z^2 - 4} dz.$

52. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{dz}{z^2 + 4}, \quad C: \frac{x^2}{4} + (y-2)^2 = 1.$

53. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{z dz}{(z-1)^2 (z+2)}, \quad C: x^2 + y^2 = 1.$

54. $\displaystyle\int\limits_{|z-4|=5} \frac{izdz}{4z-z^2}.$

55. $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{dz}{\left(z^2-4\right)^2}.$

56. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{z-1dz}{z^2\left(z+4\right)}, \quad C: x^2+y^2-2y-8=0.$

57. $\displaystyle\int\limits_{|z-2-i|=2} \frac{dz}{z^2-z-2}.$

58. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{\left(z+i\right)\left(z+4\right)^2}.$

59. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{2iz}-3z}{\left(z-1\right)^3}dz.$

60. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} zdz}{\left(z-1\right)\left(z+1\right)^2}.$

61. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=2} \frac{z}{z^2-4z+3}dz.$

62. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z\left(z-1\right)^2}.$

63. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{z+1}{\left(z-1\right)^2\left(z-3\right)}dz.$

64. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=0,5} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz.$

65. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{e^{2z}}{z^3-8}dz, \quad C: x^2+y^2-4x+3=0.$

66. $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=2} \frac{z}{\left(z-2\right)\left(z+3\right)}dz.$

67. $\displaystyle\int\limits_{|z+4i|=2} \frac{(z-1)dz}{\left(z^2+9\right)^2}.$

68. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{i}{z}}}{(z-2)^2}dz.$

69. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{\pi z}dz}{(z-i)^2(z-1)}.$

70. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin izdz}{(z-1)(1+z)}.$

71. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{i\pi z}}{z^3-4z^2}dz.$

72. $\displaystyle\int\limits_{|z+3i|=1} \frac{z}{(z-2)(z+3i)^2}dz.$

73. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2} \frac{e^{iz}}{z^3-z^2-4z+4}dz.$

74. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{e^{\frac{z}{2}}dz}{z^2+4}, \quad C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$

75. $\displaystyle\int\limits_{|z+2i|=i} \frac{e^{z}}{z^2+4}dz.$

76. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=4} \left(\frac{\operatorname{ch}\frac{z}{4}}{z-2}\right)^2 dz.$

77. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\sqrt{3}} \frac{e^{z}dz}{z^2-z}.$

78. $\displaystyle\int\limits_{|z+2i|=2} \frac{dz}{(z^2+4)(z-5)}.$

79. $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{e^{iz}dz}{(z-i)(z+1)^2}.$

80. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\cos zdz}{z^4-3z^2-4}.$

81. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{-zi}}{z^3-2z^2}dz.$

82. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{(z+2i)\left(z-\frac{i}{2}\right)}.$

83. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos iz}{z^2-4z+3}dz.$

84. $\displaystyle\int\limits_{|z+5-i|=3} \frac{\operatorname{ch} iz}{(z-1)^2(z+4)^2}dz.$

85. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z-1)}.$

86. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{dz}{1+z^2}, \quad C: x^2+y^2=2y.$

87. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{iz}+3dz}{(z-1)^3(z+3)}.$

88. $\displaystyle\int\limits_{|z-1-i|=2} \frac{\operatorname{sh}(iz-1)dz}{(z+1)^2(z-1)}.$

89. $\displaystyle\int\limits_{|z+2+i|=2} \frac{e^{iz}dz}{z^2+2z-3}.$

90. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} zdz}{(z^2+1)(z-4)}.$

91. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{(z^2+1)dz}{(z-1)^2}.$

92. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z\operatorname{sh} zdz}{(z-1)(z+3i)}.$

93. $\displaystyle\int\limits_{|z+3i|=2} \frac{dz}{z^2+16}.$

94. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z+5dz}{z^2-4z}.$

95. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz-1}dz}{z^2-2z}.$

96. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{3z^2-7}{z^3}dz.$

97. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} z}{z^2+2z-3}dz.$

98. $\displaystyle\int\limits_{|z-\pi|=1} \frac{e^{iz}dz}{z\left(z-\pi\right)^2}.$

99. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-5z+6}.$

100. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{ch} iz}{\left(z+2i\right)^2}dz.$

ЗАПИТАННЯ НА КОЛОКВІУМ ТА ІСПИТ

1. Поняття комплексного числа. Форми запису комплексних чисел. Формули переходу від однієї форми до іншої. Геометричне зображення комплексного числа.
2. Основні геометричні поняття: область, замкнена область, окіл, границя, класифікація областей, розрізи, виколоті точки.
3. Поняття функції комплексної змінної. Виділення дійсної та уявної частини функції комплексної змінної.
4. Елементарні функції комплексної змінної: e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, $\ln z$.
5. Границя і неперервність функції комплексної змінної.
6. Диференційовність і аналітичність функції комплексної змінної. Умови Коші-Рімана (з доведенням).
7. Відновлення аналітичної функції за відомою дійсною або уявною частиною.
8. Інтеграл від функції комплексної змінної. Його властивості.
9. Інтегральні теореми Коші для однозв'язної області (з доведенням).
10. Інтегральні теореми Коші для багатозв'язної області (з доведенням).
11. Інтегральна формула Коші (з виведенням). Узагальнена інтегральна формула Коші.
12. Умови збіжності рядів з комплексними членами.
13. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Область збіжності степеневих рядів.
14. Область збіжності рядів: $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\left(z-z_0\right)^{-n}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$.
15. Ряд Тейлора. Розклад елементарних функцій у ряд Тейлора: e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\ln(1+z)$, $(1+z)^\alpha$, $\frac{1}{1+z}$.
16. Ряд Лорана. Головна та правильна частини ряду Лорана.
17. Нулі функції, ізольовані особливі точки (означення).
18. Класифікація ізольованих особливих точок.
19. Визначення виду ізольованої особливої точки за розкладом у ряд Лорана.
20. Лишки: означення, правила обчислення.
21. Теорема Коші про лишки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математике / Фильчаков П. Ф. – К. : «Наукова думка», 1972. – 744 с.
2. Вища математика : підручник : [у 2-х кн.]. – К. : Либідь, 2003. – Кн. 2 : Спеціальні розділи / [Кулініч Г. Л. та ін.]. – 2003. – 368 с.
3. Краснов М. А. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / Краснов М. А., Киселев А. И., Макаренко Г. И. – М. : Наука, 1981. – 302 с.
4. Морозова В. Д. Теория функций комплексного переменного : учебник для вузов / Морозова В. Д. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. – 520 с.
5. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / Привалов И. И. – М. : Наука, 1984. – 432 с.

СЛОВНИК НАЙБІЛЬШ ВЖИВАНИХ ТЕРМІНІВ

алгебраїчна форма	algebraic form
аналітична функція	analytic function
аргумент	amplitude
багатозв'язна область	multiply-connected domain
виколота точка	pricked point
відкрита область	open domain
внутрішня точка	internal point
границя	limit
дійсна частина	real part
замкнена область	closed domain
збіжний	convergent
зовнішня точка	outside point
інтеграл	integral
комплексне число	complex number
лишок	residue
множина визначення	domain
множина значень	range
модуль	modulus
неперервна функція	continuous function
однозв'язна область	simply connected domain
окіл	neighborhood
особлива точка	singular point
показникова форма	exponential form
полюс	pole
похідна	derivative
ряд	series
спряжене	adjoined
суттєво особлива точка	essentially singular point
точка границі	frontier point
тригонометрична форма	goniometric form
усувна особлива точка	removable singular point
уявна одиниця	imaginary unit
уявна частина	imaginary part
функція	function

Навчальне видання

Краєвський Володимир Олександрович

ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет підготовлено В. Краєвським

Підписано до друку .
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. .
Наклад прим. Зам. № .

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп’ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.