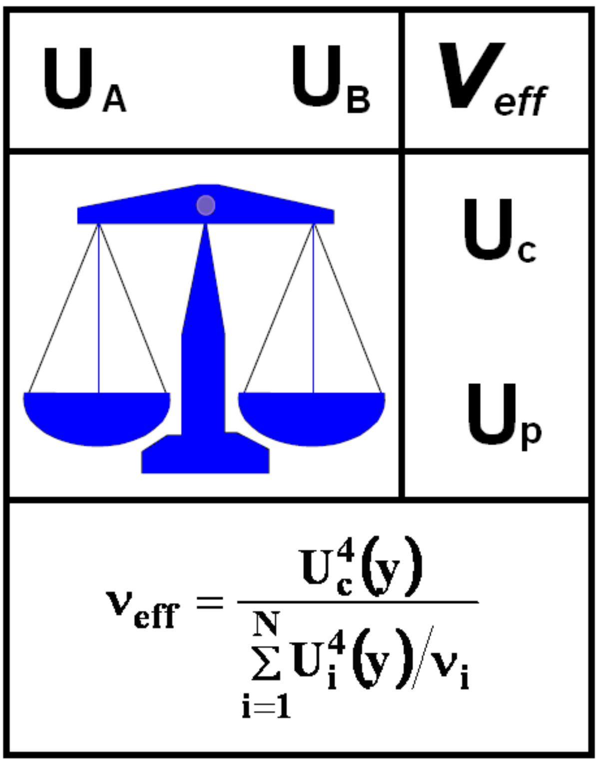
О. М. Васілевський

В. Ю. Кучерук

Є. Т. Володарський

ОСНОВИ ТЕОРІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

О. М. Васілевський
В. Ю. Кучерук
Є. Т. Володарський

ОСНОВИ ТЕОРІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ

Підручник

Вінниця
ВНТУ
2015

УДК 621.317: 389.14
ББК 30.10
В19

Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих навчальних закладів технічних спеціальностей. Лист № 1/11-19296 від 08.12.2014 р.

Рецензенти:
П. Г. Столярчук, доктор технічних наук, професор
Ю. В. Куц, доктор технічних наук, професор
М. В. Мислович, доктор технічних наук, професор

Васілевський, О. М.
В19 Основи теорії невизначеності вимірювань : підручник / О. М. Васілевський, В. Ю. Кучерук, Є. Т. Володарський. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 230 с.
ISBN 978-966-641-632-5

У підручнику викладено основні положення міжнародного підходу до оцінювання характеристик точності вимірювань. Підручник містить послідовний виклад основ теорії невизначеності вимірювань, алгоритмів оцінювання невизначеностей, оцінки кількісних результатів випробувань та форм подання невизначеностей вимірювань. Підручник відповідає вимогам державних стандартів України та навчальній програмі дисципліни «Основи теорії невизначеності вимірювань» і призначений для студентів технічних напрямів, науковців та аспірантів спеціальностей 05.01.02, 05.11.01, 05.11.08, 05.11.13, 05.13.05.

УДК 621.317: 389.14
ББК 30.10

ISBN 978-966-641-632-5

ЗМІСТ

ВСТУП

При складанні звіту про результат вимірювання фізичної величини необхідно подати кількісне зазначення якості результату так, щоб можна було правильно оцінити його надійність. Без такого зазначення результати вимірювань не можна порівняти ні між собою, ні з довідковими величинами, поданими у специфікації чи стандарті. Тому необхідно, щоб була легкоздійсненна, зрозуміла і загальноприйнята методика опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності у вимірюваннях.

Поняття невизначеності як кількісної характеристики є порівняно новим у вимірюваннях, хоча похибка та аналіз похибки давно використовуються в метрології. На сьогоднішній день загальновизнано, що, коли вже оцінені всі відомі й допустимі компоненти похибки і внесені відповідні поправки, все ще залишається невизначеність відносно істинності встановленого результату, тобто сумніви у тому, наскільки добре результат вимірювання відображає значення вимірюваної величини.

Так само як практично універсальне використання Міжнародної системи одиниць (SI) внесло узгодженість у всі наукові і технологічні вимірювання, так і всесвітня узгодженість в оцінюванні та вираженні невизначеності вимірювання повинна забезпечити належне розуміння і правильне використання широкого спектра результатів вимірювань в науці, техніці, торгівлі, промисловості. В еру світового ринку визначальним є те, щоб методика оцінювання і вираження невизначеності була однаковою у цілому світі, в результаті чого вимірювання, проведені в різних країнах, можна було легко порівняти.

Ідеальна методика оцінювання і визначення невизначеності результату вимірювання повинна бути універсальною: придатною для всіх видів вимірювань і для всіх типів вхідних даних, що використовуються у вимірюваннях.

Величина, яка безпосередньо використовується для вираження невизначеності, повинна бути внутрішньо узгоджена: безпосередньо виведена з компонентів, які її утворюють, а також не повинна залежати від групування цих компонентів і від їх розкладу на субкомпоненти; повинна бути можливість прямого використання невизначеності одного результату як компонента оцінювання невизначеності іншого, в якому використовується перший результат.

Далі, у багатьох галузях промисловості і торгівлі, а також у сферах здоров'я і безпеки часто необхідно подавати результат вимірювання з інтервалом, у якому, можливо, знаходиться більша частина розподілу значень, які обґрунтовано можуть характеризувати кількісно вимірювану величину. Таким чином, ідеальна методика оцінювання і визначення невизначеності повинна забезпечувати такий інтервал, зокрема, інтервал з ймовірністю охоплення або рівнем довіри, які реально відповідають йому.

Цей підручник базується на методах, наведених у Рекомендації INC I (1980) «Вираження експериментальних невизначеностей» робочої групи з встановлення невизначеностей, яку скликало Міжнародне бюро мір і ваги (МБМВ) у відповідь на запит Міжнародного комітету мір і ваг (МКМВ), а також на нових доповненнях з документів Об'єднаного комітету по керівництвам в метрології (Joint Committee for Guides in Metrology).

Невизначеність результату вимірювання у загальному випадку складається з кількох компонентів, які можна згрупувати у дві категорії залежно від способу оцінювання їх числового значення: тип А – компоненти, оцінені статистичними методами; тип В – компоненти, оцінені іншими (нестатистичними) способами.

Між поділом на категорії А та В і поділом на «випадкові» і «систематичні» невизначеності, які раніше використовувалися, не завжди існує проста відповідність. Вираз «систематична невизначеність» може бути незрозумілим, його потрібно уникати.

Кожний детальний звіт про невизначеності повинен містити повний перелік компонентів і для кожного з них – метод, який використовувався при одержанні його числового значення.

Компоненти категорії А характеризуються оціненими дисперсіями S_i^2 (або оціненми «стандартними відхиленнями» S_i) і числом степенів вільності. У випадку необхідності слід зазначати коваріації.

Компоненти категорії В повинні характеризуватися величинами u_j^2, які можна розглядати як наближення до відповідних дисперсій, існування яких допускається. Величини u_j^2 можна розглядати як дисперсії, а u_j – як стандартні відхилення. За необхідності коваріації повинні розглядатися аналогічно.

Комбінована невизначеність повинна характеризуватися числовим значенням, одержаним при застосуванні звичайного методу для складання дисперсій. Комбінована невизначеність і її компоненти повинні виражатися у формі «стандартних відхилень».

Якщо в окремих випадках для одержання загальної невизначеності комбіновану невизначеність необхідно множити на коефіцієнт, то коефіцієнт множення повинен бути завжди зазначений.

З огляду на те, що Рекомендації INC I на сьогоднішній день є фактично стандартом вираження характеристик якості вимірювань у міжнародній практиці, необхідно впровадження їх положень в державні нормативні документи, а також вивчення їх у програмах вузів при підготовці бакалаврів та магістрів з технічних напрямів.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ У ВИМІРЮВАННЯХ

1.1 Поняття невизначеності вимірювання

Слово невизначеність означає сумнів, і, таким чином, у широкому сенсі «невизначеність вимірювання» означає сумнів щодо достовірності результату вимірювання. Формальне означення терміна «невизначеність вимірювання» таке: **невизначеність вимірювання – невід'ємний параметр, пов'язаний з результатом вимірювання, який характеризує дисперсію значень, що можуть бути достатньо обґрунтовано приписані вимірюваній величині** [1].

Невизначеність (непевність) результату вимірювання відображає відсутність точного знання значення вимірюваної величини. Результат вимірювання після внесення поправки на відомі систематичні ефекти залишається лише оцінкою значення вимірюваної величини через невизначеності внаслідок випадкових ефектів і неточної поправки результату на систематичні ефекти.

Результат вимірювання (після внесення поправки) може бути максимально близьким до значення вимірюваної величини (і тому мати дуже малу похибку), навіть якщо він має велику невизначеність. Таким чином, невизначеність результату вимірювання не можна плутати з невідомою похибкою, що залишилась.

Оскільки точні значення складової похибки результату вимірювання невідомі і непізнавані, то невизначеності, пов'язані з випадковими і систематичними ефектами, що призводять до похибки, можуть бути оцінені. Але, навіть якщо оцінені невизначеності незначні, немає ніякої гарантії, що похибка результату вимірювання буде незначною, тому що при визначенні поправки або в оцінюванні неповноти знання якийсь систематичний ефект може не враховуватися, оскільки він не був розпізнаний. Таким чином, невизначеність результату вимірювання необов'язково є вказанням на правдоподібність того, що результат вимірювання близький до значення вимірюваної величини; це просто оцінювання близькості результату вимірювання до найкращого значення, що відповідає наявним на цей час знанням.

Невизначеність (непевність) вимірювання виражає той факт, що для даної вимірюваної величини і для даного результату її вимірювання немає єдиного значення, а є нескінченне число значень, розсіяних навколо результату, який узгоджується з усіма спостереженнями та даними, а також зі знанням фізичного світу, який з різним ступенем упевненості може бути приписаний вимірюваній величині.

На рис. 1.1 наведено ілюстрацію значення невизначеності вимірювання. З цього рис. 1.1 видно, чому основна увага сконцентрована на невизначеності, а не на похибці [2, 3].

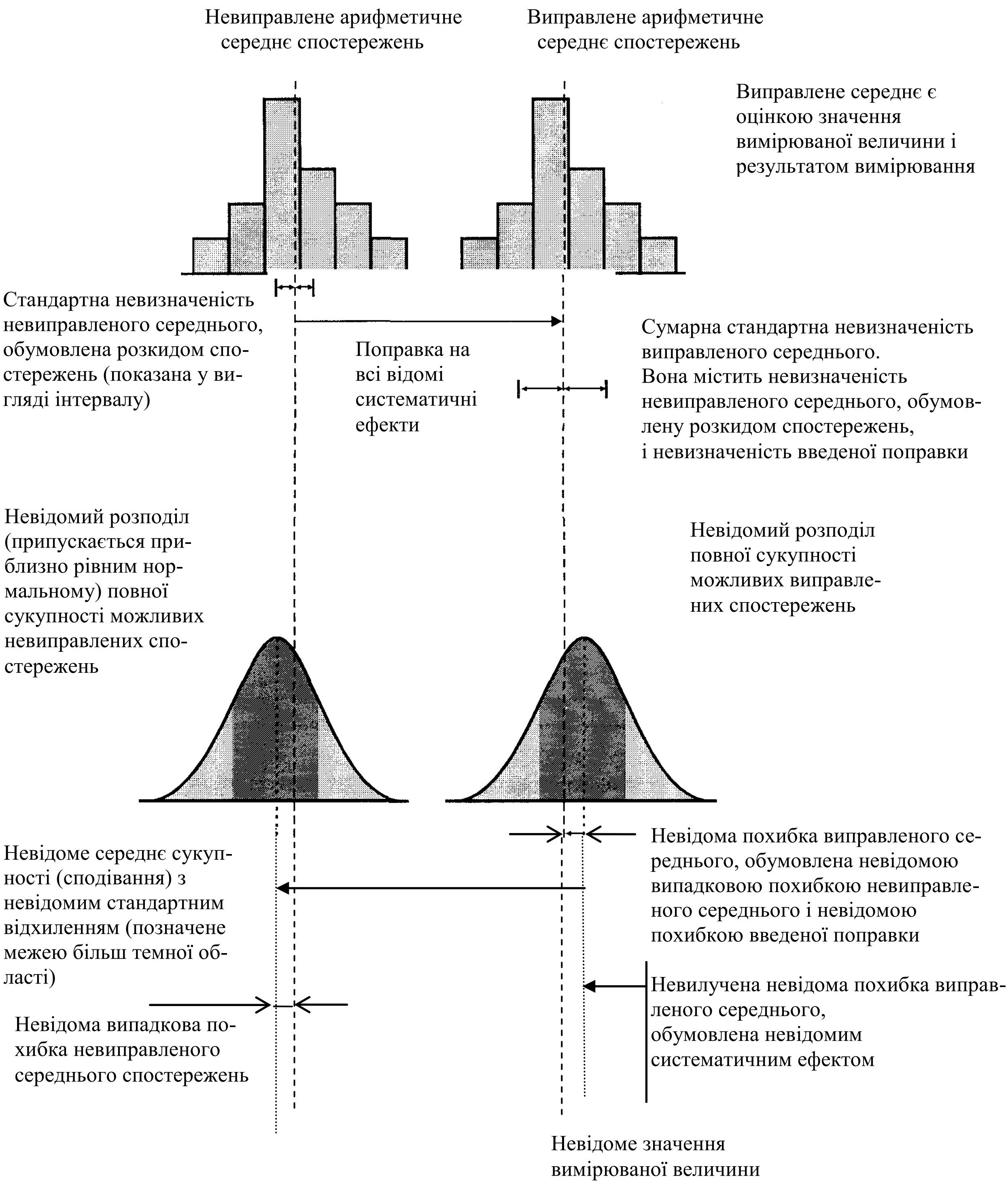


Рисунок 1.1 – Графічна ілюстрація значення невизначеності вимірювання

Точне значення похибки результату вимірювання, як правило, невідомо. Усе, що можна зробити – це оцінити значення вхідних величин, враховуючи поправки на відомі систематичні ефекти разом із їхніми стандартними невизначеностями (оціненими стандартними відхиленнями), обумовленими як невідомими розподілами ймовірностей, вибірки для яких одержують шляхом повторних спостережень, так і суб'єктивними або апріорними розподілами, заснованими на всій наявній інформації; а потім розрахувати результат вимірювання за допомогою оцінених значень вхідних величин і комбінованої невизначеності цього результату; за допомогою стандартних невизначеностей у випадку, якщо є тверда впевненість у тому, що всі ці операції були виконані правильно і всі значимі систематичні ефекти були враховані. Можна припустити, що результат вимірювання є надійною оцінкою вимірюваної величини і що його комбінована невизначеність є надійною мірою її можливої похибки.

На практиці існує багато можливих джерел невизначеностей (непевностей) при вимірюваннях, зокрема такі:

а) неповне визначення вимірюваної величини;

б) неточна реалізація визначення вимірюваної величини;

в) вибірка, що не відображається, – отримане значення може не відображати вимірювану величину;

г) неточні відомості про вплив навколишнього середовища на вимірювання або недосконале вимірювання умов навколишнього середовища;

д) суб’єктивна систематична похибка оператора при знятті показань з аналогових приладів;

е) кінцева роздільна здатність приладу або поріг чутливості;

ж) неточні значення, приписані еталонам, що використовуються при вимірюванні, стандартним зразкам речовин і матеріалів;

и) неточні значення констант і інших параметрів, які були отримані із зовнішніх джерел та використовуються в алгоритмі опрацювання даних;

к) апроксимації та припущення, що використовуються у методі вимірювання і вимірювальній процедурі;

л) зміни в повторних спостереженнях вимірюваної величини при явно однакових умовах.

Ці джерела необов’язково є незалежними, і деякі з джерел від (а) до (к) можуть вносити вклад у джерело (л). Звичайно, невідомий систематичний ефект не може бути внесений в оцінку невизначеності результату вимірювання, але він вносить вклад у його похибку.

Введення поняття «невизначеність вимірювання» є вимушеною мірою, необхідною для одноманітного і спрощеного оцінювання достовірності вимірювання, оскільки її визначення здійснюється на основі одержуваних результатів вимірювання, відомих умов вимірювань і характеристик використовуваної апаратури, а не на невідомому істинному значенні вимірюваної величини.

1.2 Систематизація невизначеностей вимірювання

Невизначеності (непевності) вимірювання можна систематизувати за такими ознаками: за ***способами оцінювання*** та за ***формами подання*** (рис. 1.2) [2 – 4].

Всі невизначеності (непевності) **за способами оцінювання** поділяються на тип А і тип В. Метою поділу на тип А та В є показ двох різних способів оцінювання компонентів невизначеності, і він використовується тільки для зручності обговорення; він не призначений для показу того факту, що існує розходження в природі цих компонентів, що є результатом даних двох типів оцінювання. Обидва типи оцінювання базуються на розподілах ймовірностей, і компоненти невизначеності кожного типу кількісно визначаються дисперсією або стандартним відхиленням.

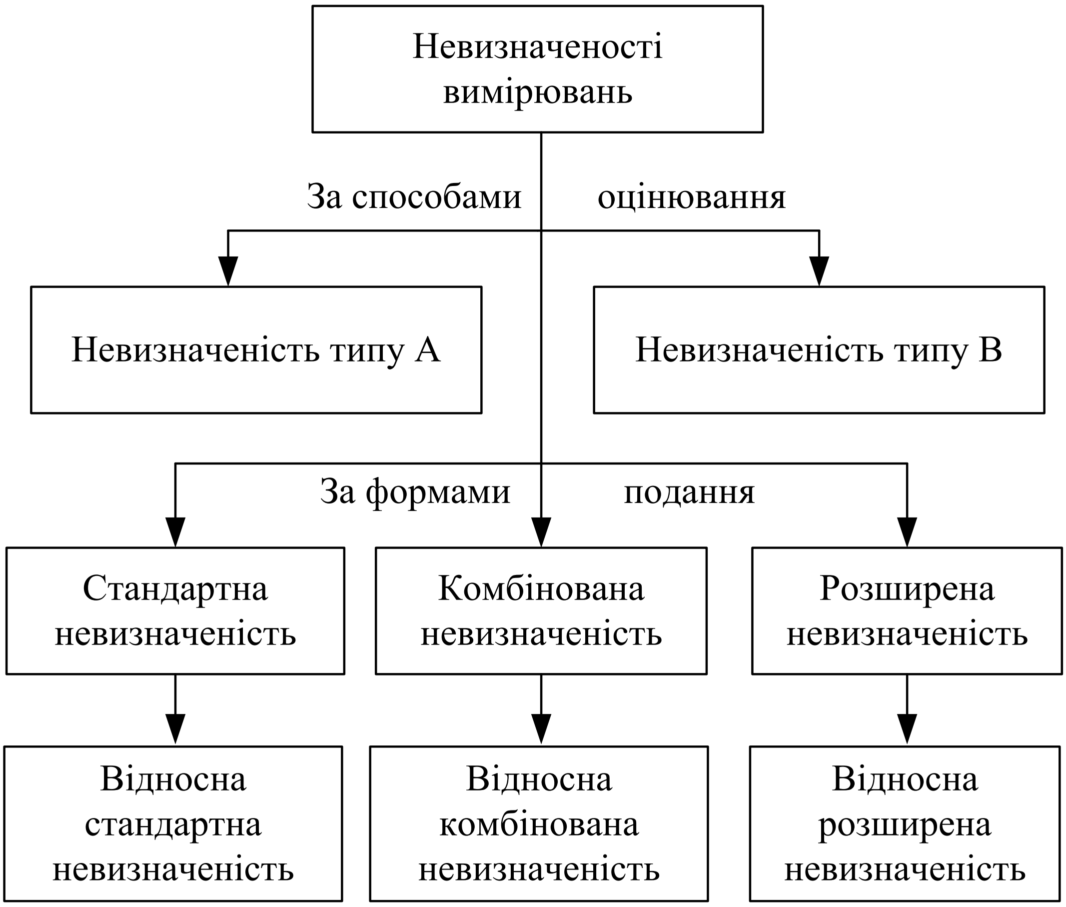


Рисунок 1.2 – Систематизація невизначеностей вимірювання

За типом А оцінюються невизначеності, що підлягають повторним вимірюванням, до яких можна застосувати статистичні методи.

За типом В оцінюються невизначеності, до яких статистичні методи застосувати неможливо. В таких випадках використовують інші відомі способи.

Що стосується систематизації невизначеностей **за формами подання**, то вони поділяються на стандартні, комбіновані, розширені, відносні стандартні, відносні комбіновані та відносні розширені.

Стандартна невизначеність – невизначеність (непевність), що виражається як стандартне (середньоквадратичне) відхилення.

Комбінована невизначеність – невизначеність (непевність), що отримується шляхом підсумовування всіх складових стандартних невизначеностей, пов’язаних з вимірюваною величиною.

Розширена невизначеність – інтервал навколо результату вимірювання, в межах якого ймовірно розташована більшість розподілу значень, які з достатнім обґрунтуванням можуть бути приписані вимірюваній величині.

Відносна стандартна невизначеність – відношення стандартної невизначеності до оцінки вимірюваної величини.

Відносна комбінована невизначеність – відношення комбінованої невизначеності до оцінки вихідної величини.

Відносна розширена невизначеність – відношення розширеної невизначеності до оцінки вихідної величини.

1.3 Способи оцінювання стандартних невизначеностей

Оцінка невизначеності, що характеризує точність методу вимірювання називається апріорною, її визначають:

а) під час розроблення методики вимірювання з метою регламентування приписаної невизначеності в усіх, передбачених методикою, умовах вимірювання;

б) за відсутності методики або приписаного значення невизначеності – перед вимірюванням, для оцінення можливої невизначеності.

На підставі усієї наявної інформації про причини і джерела невизначеностей обчислюють окремі складові невизначеностей за типом В, комбіновану невизначеність та розширену невизначеність. Підґрунтям апріорного оцінювання невизначеності є теорія ймовірності, яка дозволяє досліджувати і описувати закони розподілу випадкових величин.

Оцінка невизначеності для конкретних результатів вимірювання є апостеріорною, її визначають безпосередньо після вимірювання, за конкретних умов, за певною методикою із застосуванням конкретних типів засобів вимірювальної техніки (ЗВТ). Підґрунтям апостеріорного оцінювання невизначеності є методи математичної статистики, які можна використати для оцінення міри розсіювання результатів багатократних спостережень.

1.3.1 Оцінювання невизначеності за типом А. Експериментальну дисперсію, яка характеризує складову невизначеності, отриману в результаті оцінювання за типом А, знаходять із рядів повторних спостережень, і вона є статистичною оцінкою дисперсії. Експериментальне стандартне відхилення отримують як додатний квадратний корінь з дисперсії, позначають як u_A і для зручності називають стандартною невизначеністю типу А [3, 4].

Оцінення компонентів стандартної невизначеності за типом А заснована на розподілах частості. Тому для оцінювання стандартної невизначеності за типом А необхідно провести n незалежних спостережень вимірюваної величини q в умовах повторюваності.

У більшості випадків найкращою доступною оцінкою математичного сподівання чи очікуваного значення μ_q величини q, що змінюється випадковим чином, є середнє арифметичне або середнє значення $\overline{q}$ із n спостережень

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \,. \tag{1.1}$$

Експериментальне стандартне відхилення, що характеризує змінність значень q_k, або, точніше, їхню дисперсію σ^2 відносно середнього значення $\overline{q}$, розраховують за формулою [2]

$$u_A(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(q_k - \overline{q}\right)^2}{n-1}} \,. \tag{1.2}$$

Оскільки за результат багаторазових вимірювань беруть середнє значення $\overline{q}$, то важливо оцінити його дисперсію.

Найкраща оцінка $\sigma^2\left(\overline{q}\right) = \sigma^2/n$ дисперсії середнього значення $u_A^2\left(\overline{q}\right)$ виражається як

$$u_A^2\left(\overline{q}\right) = \frac{u_A^2\left(q_k\right)}{n}. \tag{1.3}$$

Експериментальна дисперсія середнього $u_A^2\left(\overline{q}\right)$ і експериментальне стандартне відхилення середнього значення $u_A\left(\overline{q}\right)$, що дорівнює додатному квадратному кореню з оцінки дисперсії $u_A^2\left(\overline{q}\right)$, кількісно визначають, наскільки добре $\overline{q}$ оцінює очікування μ_k величини q.

З урахуванням виразів (1.2) та (1.3) експериментальне стандартне відхилення середнього значення $u_A\left(\overline{q}\right)$ розраховується за формулою [2, 3]

$$u_A\left(\overline{q}\right) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(q_k - \overline{q}\right)^2}{n(n-1)}} \,. \tag{1.4}$$

Для зменшення стандартної невизначеності результату вимірювання доцільно виконувати вимірювання з багатократними спостереженнями. Кількість спостережень n доцільно збільшувати до тих пір, поки $\overline{q}$ буде давати надійну оцінку сподівання μ_q випадкової змінної q і щоб $u_A^2\left(\overline{q}\right)$ забезпечувала надійну оцінку дисперсії $\sigma^2\left(\overline{q}\right)$.

Стандартне відхилення оцінки стандартного відхилення середнього арифметичного $\sigma(u_A(\bar{q}))$ для нормального закону розподілу q визначається виразом [2, 4]

$$\sigma[u_A(\bar{q})] = \sigma(\bar{q})\sqrt{1 - \frac{2\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)}}, \tag{1.5}$$

де $\Gamma(z)$ – Гамма-функція, що описується виразом

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \text{, при } z > 0. \tag{1.6}$$

Одержана з виразу (1.5) залежність відношення стандартного відхилення експериментального стандартного відхилення середнього арифметичного $u_A(\bar{q})$ до стандартного відхилення $\sigma(\bar{q})$ від числа спостережень приблизно описується виразом [1]

$$\frac{\sigma[u_A(\bar{q})]}{\sigma(\bar{q})} \approx \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{1.7}$$

Якщо визнається можливість існування такого відхилення і його величина передбачається і може бути значною, то його можна описати за допомогою розподілу ймовірностей простого виду, основаного на знанні, яке привело до висновку, що воно може існувати і бути значним. Таким чином, якщо імовірність розглядається як ступінь впевненості, що подія відбудеться, внесок такого систематичного ефекту може бути врахований у комбінованій стандартній невизначеності результату вимірювання шляхом оцінювання його як стандартної невизначеності апріорного розподілу ймовірностей і розгляду її таким же чином, як і будь-якої іншої стандартної невизначеності вхідної величини.

Наприклад: специфікація конкретної вимірювальної процедури потребує, щоб визначена вхідна величина була розрахована з конкретного розкладання в степеневий ряд, члени вищого порядку якого відомі неточно. Систематичний ефект, обумовлений неможливістю точно оцінити члени, веде до невідомого постійного відхилення, яке не можна експериментально визначити шляхом повторення процедури. Таким чином, невизначеність, пов'язану з цим ефектом, не можна оцінити і врахувати у невизначеності кінцевого результату вимірювання, якщо дотримуватися частотної інтерпретації імовірності. Однак тлумачення імовірності на основі ступеня впевненості дозволяє оцінити невизначеність, що характеризує ефект, із апріорного розподілу ймовірностей (отриманого з наявного знання про неточно відомі члени) і внести її в розрахунок комбінованої стандартної невизначеності результату вимірювання подібно будь-якій іншій невизначеності.

На більш низьких рівнях перевірної схеми, коли часто передбачається, що дані еталонів порівняння точно відомі, тому що вони були повірені національними лабораторіями первинних еталонів, невизначеність результату калібрування може містити лише одну стандартну невизначеність типу А, оцінену із згрупованого експериментального стандартного відхилення, що характеризує вимірювання.

1.3.2 Оцінювання невизначеності за типом В. Для оцінювання x_i вхідної величини X_i, яка не була отримана в результаті повторних спостережень, пов'язані з ними оцінена дисперсія $u^2(x_i)$ або стандартна невизначеність $u(x_i)$ визначаються на базі наукового судження, що базується на всій доступній інформації про можливу змінність X_i. Тобто, стандартну невизначеність типу В одержують з передбачуваної функції щільності вірогідності, основаної на ступені впевненості в тому, що подія обов'язково відбудеться (ця вірогідність часто називається суб'єктивною вірогідністю).

Фонд інформації може містити [3, 4]:

- дані про вигляд розподілу ймовірностей;
- невизначеності констант і довідкових даних;
- специфікацію виробника; дані, що наводяться у свідченнях про повірку, калібрування чи в інших сертифікатах;
- дані, отримані в результаті досвіду, або загальні знання про поведінку і властивості відповідних матеріалів та засобів вимірювальної техніки (ЗВТ);
- дані попередніх вимірювань.

Правильне використання фонду доступної інформації для оцінювання стандартної невизначеності за типом В потребує інтуїції, основаної на досвіді та загальних знаннях, і є майстерністю, яка приходить з практикою. Слід визнати, що оцінка стандартної невизначеності за типом В може бути такою ж надійною, як і оцінка за типом А, особливо у вимірювальній ситуації, коли оцінювання за типом А ґрунтується на невеликій кількості статистично незалежних спостережень.

Якщо оцінка x_i береться зі специфікації виробника, свідоцтва про повірку, довідника або іншого джерела та її невизначеність дається як деяке кратне стандартного відхилення, то стандартну невизначеність $u(x_i)$ можна взяти рівною зазначеному значенню, поділеному на множник, і оцінена дисперсія $u^2(x_i)$ буде дорівнювати квадрату цієї частки.

Наприклад: свідоцтво про калібрування підтверджує, що напруга U_s зразкового засобу вимірювання з номінальним значенням 0,1 В становить 100007 мкВ і що невизначеність цього значення дорівнює 0,1 мкВ на рівні трьох стандартних відхилень. Тоді стандартна невизначеність зразкового засобу вимірювання напруги дорівнює $u(U_s)$ = (0,1 мкВ)/3 = 33,33 нВ. Оцінена дисперсія є $u^2(U_s)$ = (33,33 нВ)^2 = 1110,89 нВ^2.

Наведена невизначеність величини x_i необов'язково дається у вигляді кратного стандартного відхилення. Замість цього можна зустріти, що згадана невизначеність визначає інтервал, довірчий рівень якого становить 90, 95, 99 або 99,73%. Якщо не зазначено інше, то можна припустити, що використовувався нормальний розподіл для обчислення згаданої невизначеності, і стандартну невизначеність для x_i одержують діленням наведеної невизначеності на відповідний коефіцієнт для нормального розподілу. Коефіцієнти, що відповідають вищевказаним чотирьом рівням довіри, дорівнюють: 1,64; 1,96; 2,58 і 3.

Наприклад: свідоцтво про калібрування підтверджує, що опір еталонного резистора R_s із номінальним значенням 100 Ом становить 100,000125 Ом ± 235 мкОм при 25 °С і що згадана невизначеність 235 мкОм визначає інтервал, що становить 99,73% довірчого рівня. Стандартну невизначеність резистора можна прийняти як $u(R_s)$ = (235 мкОм)/3 = 78,33 мкОм. Оцінена дисперсія буде дорівнювати $u^2(R_s)$ =(78,33 мкОм)^2 = $6{,}14\cdot10^{-9}$ Ом^2.

Розглянемо випадок, коли, опираючись на доступну інформацію, можна підтверджувати, що існує можливість, п'ятдесят-на-п'ятдесят, того, що значення вхідної величини X_i знаходиться в інтервалі від α_- до α_+ (іншими словами, можливість того, що X_i знаходиться в цьому інтервалі, становить 0,5 або 50 відсотків). Якщо можна припустити, що розподіл можливих значень X_i приблизно нормальний, то найкращу оцінку x_i величини X_i можна прийняти як середню точку цього інтервалу. Далі, якщо половина ширини цього інтервалу позначається як $\alpha=(\alpha_+ - \alpha_-)/2$, то можна взяти $u(x_i) = 1{,}48\alpha$, тому що для нормального розподілу зі сподіванням μ і стандартним відхиленням σ інтервал $\mu \pm \sigma/1{,}48$ охоплює приблизно 50% розподілу.

Якщо, базуючись на наявній інформації, можна стверджувати, що є приблизно 2 із 3 шансів, що значення X_i знаходиться в інтервалі від α_- до α_+, то, іншими словами, імовірність того, що X_i знаходиться в цьому інтервалі, становить біля 0,67. Тоді з достатньою підставою можна взяти $u(x_i) = \alpha$, тому що для нормального розподілу зі сподіванням μ і стандартним відхиленням σ інтервал $\mu \pm \sigma$ охоплює приблизно 68,3 відсотка розподілу.

В інших випадках можна оцінити лише межі (верхню і нижню) для X_i, зокрема, стверджувати, що імовірність того, що значення X_i знаходиться в інтервалі від α_- до α_+ для всіх практичних цілей, дорівнює одиниці і імовірність того, що X_i перебуває за межами цього інтервалу, дорівнює нулю. Якщо немає конкретних відомостей про можливі значення X_i всередині інтервалу, то можна тільки припустити, що з однаковою імовірністю X_i може знаходитися в будь-якому місці в його межах (рівномірний або прямокутний розподіл можливих значень). Тоді x_i, сподівання або очікуване значення X_i є середньою точкою інтервалу, $x_i = (\alpha_+ + \alpha_-)/2$, із відповідною дисперсією

$$u^2(x_i) = (\alpha_+ - \alpha_-)^2/12. \qquad (1.8)$$

Якщо різницю між границями $\alpha_+ - \alpha_-$ позначити як 2α, тоді з рівняння (1.9) отримуємо

$$u^2(x_i) = \alpha^2/3. \qquad (1.9)$$

Коли компонент невизначеності, отриманий таким чином, дає значний внесок у невизначеність результату вимірювання, має сенс одержати додаткові дані для її подальшого визначення.

Наприклад: у специфікаціях виробника для цифрового вольтметра вказується, що в інтервалі від року до двох років після калібрування приладу його похибка в діапазоні 1 В дорівнює показу, помноженому на $14 \cdot 10^{-6}$, плюс діапазон, помножений на $2 \cdot 10^{-6}$. Припустимо, що прилад використовується через 20 місяців після калібрування для вимірювання різниці потенціалів V в діапазоні 1 В та встановлено, що середнє арифметичне ряду незалежних повторних спостережень V дорівнює $\overline{V}$ = 0,928571 В при стандартній невизначеності $u(\overline{V})$ = 12 мкВ, обчисленій за типом А. Оцінку за типом В стандартної невизначеності, пов'язаної зі специфікаціями виробника, можна одержати в припущенні, що зазначена похибка дає симетричні границі адитивної поправки до $\overline{V}$, $\Delta\overline{V}$ сподівання, рівного нулю, і при рівній імовірності перебування в будь-якому місці в інтервалі. Півширина α симетричного прямокутного розподілу можливих значень $\overline{V}$ тоді дорівнює $\alpha = (14 \cdot 10^{-6}) \times (0,928571$ В$) + (2 \cdot 10^{-6}) \cdot (1$ В$)$ = 15 мкВ, і з рівняння (1.9) $u^2(\Delta\overline{V})$ = 75 мкВ^2, а $u(\Delta\overline{V})$ = 8,7 мкВ. Оцінка значення вимірюваної величини V, для простоти позначена тим же самим символом V, виражається як $V = \overline{V} + \Delta\overline{V}$ = 0,928571 В. Комбіновану стандартну невизначеність цієї оцінки одержують як суму стандартної невизначеності $\overline{V}$, що дорівнює 12 мкВ, обчисленої за типом А, зі стандартною невизначеністю $\Delta\overline{V}$, що дорівнює 8,7 мкВ, обчисленою за типом В. Сумарна дисперсія, пов'язана з V, визначається як $u^2_c(V) = u^2(\overline{V}) + u^2(\Delta\overline{V}) = 2,19 \cdot 10^{-12}$ В^2, а комбінована стандартна невизначеність $u_c(V)$ = 15 мкВ [2, 4].

При оцінюванні складових невизначеностей важливо не вести повторного підрахунку складової невизначеності. Якщо компонент невизначеності, що виникає від конкретного ефекту, оцінюється за типом В, то він повинен бути внесений як незалежний компонент невизначеності при обчисленні комбінованої невизначеності результату вимірювання тільки до того ступеня, щоб ефект не вносив вклад у виявлену змінність спостережень. Це пояснюється тим, що невизначеність, обумовлена тією частиною ефекту, що вносить вклад у спостережувану змінність, вже врахована у компоненті невизначеності, отриманому зі статистичного аналізу спостережень.

1.4 Форми подання невизначеності

Вимірювана величина Y функціонально залежить від цілого ряду вхідних величин X_1, X_2, ..., X_n, це можуть бути як безпосередньо вимірювані величини, так і величини, що впливають на результат вимірювання (фізичні параметри навколишнього середовища, напруга живлення, параметри зовнішніх полів). Цей зв'язок виражається за допомогою рівняння вимірювання, яке, в загальному випадку, має такий вигляд

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N). \tag{1.10}$$

Самі вхідні величини X_1, X_2, ..., X_N, від яких залежить вихідна величина Y, можна розглядати як вимірювані величини, і вони самі можуть залежати від інших величин, враховуючи поправки і поправкові коефіцієнти на систематичні ефекти, що веде до складної функціональної залежності f, яка ніколи не може бути записана точно. Крім того, f можна визначити експериментально, або вона може існувати тільки як алгоритм, що повинен бути реалізований чисельно. Функцію f варто інтерпретувати як функцію, що містить кожну величину, враховуючи всі поправки і поправкові коефіцієнти, що можуть внести значну складову в результат вимірювання.

Таким чином, якщо дані показують, що f не моделює вимірювання до ступеня, обумовленого необхідною точністю результату вимірювання, то додаткові вхідні величини повинні бути внесені в f для усунення неадекватності. Це може потребувати введення вхідної величини для відображення неповного знання явища, що впливає на вимірювану величину. Проте рівняння (1.10) може бути настільки елементарним як $Y=X_1-X_2$. Воно відображає моделі, наприклад, порівняння двох визначень однієї і тієї ж величини X.

Набір вхідних величин X_1, X_2, ..., X_N можна розділити на такі категорії [2, 4]:

- величини, чиї значення і невизначеності визначаються безпосередньо у вимірюванні. Ці значення і невизначеності можна одержати, наприклад, у результаті одного спостереження, повторних спостережень або висновку, заснованого на досвіді. Вони можуть потребувати визначення поправок до показань приладу і поправок на такі впливні величини, як навколишня температура, атмосферний тиск і вологість;
- величини, чиї значення і невизначеності вносяться у вимірювання із зовнішніх джерел, такі, як величини, пов'язані з атестованими еталонами, стандартними зразками речовин і матеріалів або стандартними довідковими даними.

Оцінку вимірюваної величини Y, позначену y, одержують із рівняння (1.10), використовуючи вхідні оцінки x_1, x_2, ..., x_N для N значень величин X_1, X_2, ..., X_N. Таким чином, вихідна оцінка y, яка є результатом вимірювання, виражається таким чином

$$y = f(x_1, x_2, ...,x_N). \tag{1.11}$$

У деяких випадках оцінку y можна одержати з

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{k} f(X_{1,k}, X_{2,k}, ..., X_{N,k}). \tag{1.12}$$

Таким чином, y береться як середнє арифметичне або як середнє значення n незалежних визначень Y_k величини Y; при цьому кожне визначення має одну невизначеність і кожне основано на повному наборі спостережуваних значень N вхідних величин X_i, отриманих у той же самий час. Цьому способу усереднення замість $y=f(X_1, X_2, ..., X_N)$, де $\overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}$ є середнім арифметичним окремих спостережень $X_{i,k}$, можна віддати перевагу, коли f є нелінійною функцією вхідних величин X_1, X_2, ..., X_N, але два підходи є ідентичними, якщо f є лінійною функцією.

1.4.1 Стандартна невизначеність. Вихідними даними для визначення стандартної невизначеності типу А є результати багаторазових вимірювань. Стандартну невизначеність типу А одноразового вимірювання визначають за формулою (1.2). А стандартну невизначеність типу А середнього значення визначають за формулою (1.4).

Складові стандартної невизначеності типу В, як правило, визначають на основі інформації про верхні і нижні границі $[\alpha_-;\alpha_+]$ передбачуваного (апріорно визначеного) закону розподілу чи через інтервал U, що має заданий довірчий рівень p.

Для визначення стандартної невизначеності типу В потрібно взяти додатний квадратний корінь з добутку довірчого рівня кожного значення та квадрата відхилення цього значення і всі добутки такого типу додати. Таким чином, загальний вигляд формули для обчислення стандартної невизначеності типу В при дискретних даних має вигляд

$$u_B(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2 p_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 p_i}. \tag{1.13}$$

Для неперервної вхідної величини X стандартна невизначеність (непевність) типу В обчислюється за формулою [5]

$$u_B(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx\right)^2 p(x) dx} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}(x - \overline{x})^2 p(x) dx}. \tag{1.14}$$

Якщо для значення величини X_i можна оцінити верхню та нижню границю $[\alpha_-;\alpha_+]$, то стандартні невизначеності типу В, в припущенні про можливий вигляд закону розподілу, можна визначити за формулами [2 – 4]:

а) для трикутного закону розподілу

$$u_B(X_i)=\frac{\alpha_+-\alpha_-}{\sqrt{24}}; \qquad (1.15)$$

б) для трапецеїдального закону розподілу

$$u_B(X_i)=\frac{[\alpha_+-\alpha_-]\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{24}}, \qquad (1.16)$$

де β – параметр, який визначається таким відношенням

$$\beta=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \qquad (1.17)$$

де $\lambda_1=\frac{|(\alpha_{1+}-\alpha_{1-})-(\alpha_{2+}-\alpha_{2-})|}{2}$; $\lambda_2=\frac{\alpha_+-\alpha_-}{2}$; $\alpha_+=\alpha_{1+}+\alpha_{2+}$; $\alpha_-=\alpha_{1-}+\alpha_{2-}$ (рис. 1.3).

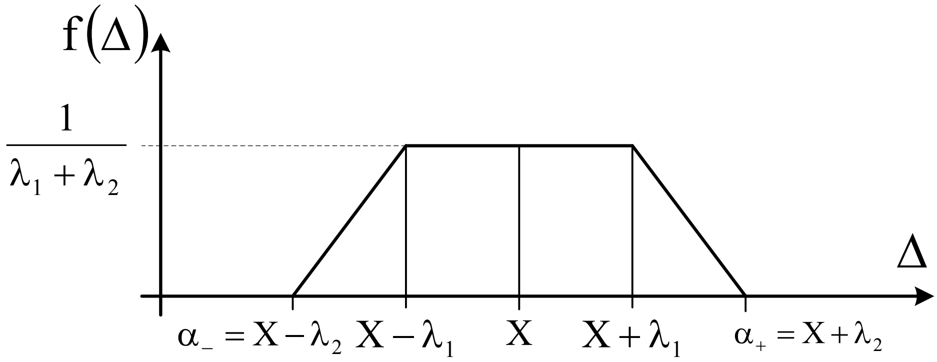


Рисунок 1.3 – Трапецеїдальна функція розподілу ймовірності

При зміні β від 0 до 1 трапецеїдальне розподілення змінюється від трикутного до рівномірного;

в) для експоненціального закону розподілу

$$u_B(X_i)=\sqrt{\frac{(\alpha_+-x)(x-\alpha_-)-(\alpha_+-2x+\alpha_-)}{\lambda}}, \qquad (1.18)$$

де x – сподіване значення;

λ – параметр розподілу;

г) для арксинусного закону розподілу

$$u_B(X_i) = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\sqrt{8}}; \qquad (1.19)$$

д) для рівномірного закону розподілу

$$u_B(X_i) = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\sqrt{12}}. \qquad (1.20)$$

Для заданих інтервалів U_p з відомим рівнем довіри p, в припущенні нормального закону розподілу, невизначеність типу В визначається за формулою

$$u_B(X_i) = \frac{U_p}{k_p}, \qquad (1.21)$$

де k_p – коефіцієнт охоплення, який для нормального закону розподілу дорівнює 1,64; 1,96; 2,58 і 3 для довірчих рівнів 0,9; 0,95; 0,99 і 0,9973 [2, 4].

При багатовимірному розподілі Гаусса з N-вимірною величиною $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)^T$, яка має найкращу оцінку $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)^T$, додатно визначена матриця невизначеностей U_x є такою [5]

$$U_x = \begin{bmatrix} u^2(x_1) & u(x_1, x_2) & \ldots & u(x_1, x_N) \\ u(x_2, x_1) & u^2(x_2) & \ldots & u(x_2, x_N) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ u(x_N, x_1) & u(x_N, x_2) & \ldots & u^2(x_N) \end{bmatrix}. \qquad (1.22)$$

Величині **X** може бути приписаний багатовимірний розподіл Гаусса N($\mathbf{x}$, U_x).

Коваріаційна (дисперсійно-коваріаційна) матриця для векторної випадкової величини **X** описується виразом [5, 6]

$$V(\mathbf{X}) = U_x. \qquad (1.23)$$

Якщо елементи вектора **X** некорельовані, то $u(x_i, x_j) = 0$.

Коваріаційна матриця V(**X**) при відомих інтервалах $\mathbf{U_p}$ з відомими рівнями довіри **p** знаходиться з виразу

$$\mathbf{U_p} = \mathbf{R}^T\mathbf{k_p} = U_x\mathbf{R}^{-1}\mathbf{k_p}, \qquad (1.24)$$

де $\mathbf{k_p} = (k_{p1}, k_{p2}, \ldots, k_{pN})^T$ – вектор коефіцієнтів охоплення для заданих рівнів довіри p1, p2, …, pN;

R – верхня трикутна матриця, яка подається декомпозицією Холецького $U_x = \mathbf{R}^T\mathbf{R}$.

Замість декомпозиції Холецького $U_x = \mathbf{R}^T\mathbf{R}$ можна використати будь-який матричний розклад цієї форми на множники [6].

Отже, для відомих (заданих) інтервалів $\mathbf{U_p}$, в припущенні про N-вимірний розподіл Гаусса, матриця невизначеностей типу B, пов'язана із векторною оцінкою вхідної величини **x**, визначається за формулою

$$U_x = \mathbf{U_p R k_p^{-1}}. \qquad (1.25)$$

Якщо коваріаційна матриця V(**X**), що описується формулою (1.23), додатно визначена, тобто усі її власні значення строго додатні, то множник Холецького **R** – єдиний [5, 6].

Якщо коваріаційна матриця V(**X**) не додатно визначена, наприклад, через помилки округлення в чисельних методах або через інші джерела, то **R** може не існувати. В таких випадках рекомендується «підправляти» значення V(**X**), тобто вносити якомога менші зміни (наскільки це можливо) у V(**X**) так, щоб множник Холецького **R** для модифікованої матриці був додатно визначений.

Якщо коваріаційна матриця V(**X**) позитивно визначена, то також можна сформувати декомпозицію типу

$$V(\mathbf{X}) = U_x = \mathbf{QDQ}^T, \qquad (1.26)$$

де **Q** – ортогональна матриця;

D – діагональна матриця [5].

У цьому випадку добуток $\mathbf{D}^S\mathbf{Q}^T$ можна використати для отримання випадкових значень із N(0, V(**X**)) при моделюванні стандартних нормально розподілених випадкових величин, використанні чисельних методів та програмного забезпечення для розрахунку невизначеностей [5, 6], навіть якщо рангу V(**X**) недостатньо.

Для симетричних границь $\pm\alpha_i$ стандартну невизначеність типу B за відсутності інформації про закон розподілу вхідної величини X_i визначають за формулою

$$u_B(X_i) = \frac{2\alpha_i}{\sqrt{12}} = \frac{\alpha_i}{\sqrt{3}}. \qquad (1.27)$$

Рівняння для визначення стандартної невизначеності зчитування показів з аналогової шкали засобу вимірювання, в припущенні про рівномірний закон розподілу, має вигляд

$$u_B(X_i) = \frac{\left(x + \frac{C}{4}\right) - \left(x - \frac{C}{4}\right)}{\sqrt{12}} = \frac{C}{4\sqrt{3}}, \qquad (1.28)$$

де x – виміряне значення величини;

C – ціна поділки шкали засобу вимірювання.

Якщо шкала нерівномірна, то стандартну невизначеність визначають окремо для кожного діапазону, для якого визначена ціна поділки.

1.4.2 Комбінована невизначеність при некорельованих вхідних величинах. Стандартна невизначеність оцінки у вимірюваної величини Y і, отже, результату вимірювання, утворюється шляхом відповідного підсумовування стандартних невизначеностей вхідних оцінок x_1, x_2, …, x_N. Така стандартна невизначеність оцінки y позначається як $u_c(y)$ і називається комбінованою.

Кожну вхідну оцінку x_i і пов'язану з нею стандартну невизначеність $u_c(x_i)$ одержують з розподілу можливих значень вхідної величини X_i. Цей розподіл вірогідності, як уже було сказано, може бути оснований на рядах спостережень $X_{i,к}$ величин X_i або він може бути апріорним розподілом.

Результати вимірювань вважаються некорельованими, коли всі вхідні величини є незалежними.

Комбінована невизначеність $u_c(y)$ є додатним квадратним коренем із комбінованої дисперсії $u^2_c(y)$, яка розраховується за формулою [2 – 4]

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i), \qquad (1.29)$$

де f – функція, що подана в рівнянні (1.11);

$u(x_i)$ – стандартна невизначеність, оцінена за типом А або за типом В, як було описано раніше.

Комбінована невизначеність $u_c(y)$ є оціненим стандартним відхиленням і характеризує розкид значень, які можуть бути з достатньою підставою приписані вимірюваній величині Y.

Рівняння (1.29) одержують в результаті апроксимації рівняння вимірювання (1.10) рядом Тейлора першого порядку і воно є законом розподілу невизначеності.

При значній нелінійності модельного рівняння f у вираз (1.29) для визначення комбінованої дисперсії (непевності у квадраті) $u^2_c(y)$ повинні бути добавлені члени вищого порядку, розкладені в ряд Тейлора. Коли розподіл кожного X_i розташовується симетрично відносно його середнього значення, то важливими стають і члени більш високого порядку, які потрібно додати до членів рівняння (1.29) [3, 4]

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j^2}\right]u^2(x_i)u^2(x_j).\quad(1.30)$$

Наведена формула (1.30) дозволяє оцінити комбіновану невизначеність (непевність) тільки при відсутності кореляції між аргументами.

Середнє значення $\overline{Y}$ в цьому випадку визначається формулою

$$\overline{Y}\approx f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_N)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)+\sum_{i<j}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}u(x_i,x_j).\quad(1.31)$$

При опосередкованих вимірюваннях, коли випадкові аргументи незалежні, комбінована дисперсія (комбінована непевність у квадраті) визначається за формулою

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)^2\left[\mu_4(x_i)-u^4(x_i)\right]+\sum_{i<j}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}u^2(x_i)u^2(x_j)+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)\mu_3(x_i),\quad(1.32)$$

де $\mu_3(x_i)$ і $\mu_4(x_i)$ – третій і четвертий центральні моменти розподілу аргументів, відповідно [4].

З (1.32) видно, що при розрахунку комбінованої невизначеності в умовах значної нелінійності функції перетворення (модельного рівняння) потрібно враховувати форму і асиметрію розподілів аргументів. Для нормального закону розподілу результати розрахунків за формулами (1.30) і (1.32) збігаються. Але необхідно відмітити, що формула (1.30) розрахована лише на нормальний розподіл аргументів рівняння вимірювання Y.

Частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ у виразі (1.29) рівні $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ при $X_i=x_i$. Ці похідні називаються коефіцієнтами чутливості, показують, як вихідна оцінка у змінюється зі зміною значень вхідних оцінок $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$. Зокрема, зміна в у, викликана невеличкою зміною Δx_i у вхідній оцінці x_i, визначається формулою $(\Delta y)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot(\Delta x_i)$. Якщо ця зміна утворена стандартною невизначеністю оцінки x_i, то відповідна зміна в у буде $\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot u(x_i)$. Тому сумарну дисперсію $u_c^2(y)$ можна розглядати як суму членів, кожний із яких є оціненою дисперсією, пов'язаною з вихідною оцінкою у, викликаною оціненою дисперсією, пов'язаною з кожною вхідною оцінкою x_i. Це припускає запис рівняння (1.29) у вигляді

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left[c_i \cdot u(x_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2(y), \qquad (1.33)$$

де $c_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$;

$u_c(y) = |c_i| u(x_i)$.

Частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial X_i}$ оцінені на сподіваннях X_i. Але на практиці частинні похідні оцінюються як $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial X_i} \Big| x_1, x_2,..., x_N$.

Коефіцієнти чутливості $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ замість того, щоб розраховуватися з функції f іноді визначаються експериментальним шляхом за допомогою вимірювань зміни в Y, викликаної зміною в обраному X_i, підтримуючи при цьому інші вхідні величини незмінними. У цьому випадку знання функції f зводиться до емпіричного розкладання в ряд Тейлора першого порядку, основаного на виміряних коефіцієнтах чутливості.

Якщо Y має вигляд $Y = cX_1^{p1} \cdot X_2^{p2} \cdot ... \cdot X_N^{pN}$ і відомо, що степені p_i являють собою додатні або від'ємні числа, що мають малі невизначеності, то сумарну дисперсію, рівняння (1.29), можна виразити як

$$\left[\frac{u_c(y)}{y}\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{p_i u(x_i)}{x_i}\right]^2. \qquad (1.34)$$

Це рівняння має такий же вигляд, як і рівняння (1.33), але з комбінованою дисперсією $u_c^2(y)$, вираженою як відносна комбінована дисперсія $\left[\dfrac{u_c(y)}{y}\right]^2$, і оціненою дисперсією $u_c^2(x_i)$, пов'язаною з кожною вхідною оцінкою, вираженою як оцінена відносна дисперсія $\left[\dfrac{u(x_i)}{x_i}\right]^2$.

Комбіновані невизначеності для різних видів рівнянь вимірювань зведені в табл. 1.1.

1.4.3 Комбінована невизначеність при корельованих вхідних величинах. Рівняння (1.29) і ті рівняння, що виведені з нього, такі як (1.30) та (1.31 – 1.33), справедливі лише в тому випадку, якщо вхідні величини X_i незалежні або некорельовані. Якщо які-небудь із X_i значною мірою корельовані, то кореляцію необхідно брати до уваги.

Таблиця 1.1 – Комбіновані невизначеності для рівнянь вимірювань різного виду

Рівняння вимірювання	Комбіновані невизначеності
$Y = X_1 \pm X_2 \pm \ldots \pm X_N$	$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)}$
$Y = C_1X_1 \pm C_2X_2 \pm \ldots \pm C_NX_N$	$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} C_i^2 u^2(x_i)}$
$Y = \prod_{i=1}^{N} X_i = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_N$	$u_{св}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{u^2(x_i)}{x_i^2}}$, де $u_{св}(y) = \frac{u_c(y)}{y}$; $u_в(x_i) = \frac{u(x_i)}{x_i}$
$Y = \frac{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4}{X_5 \cdot X_6 \cdot X_7 \cdot X_8}$	
$Y = X_1 / X_2 / X_3 / \ldots / X_N$	
$Y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 + X_4 \cdot X_5 \cdot X_6 + \ldots + X_{N-2} \cdot X_{N-1} \cdot X_N$	$u_c^2(y) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^2 \left(u_в{}^2(x_1) + u_в{}^2(x_2) + u_в{}^2(x_3)\right) + (x_4 \cdot x_5 \cdot x_6)^2 \left(u_в{}^2(x_4) + u_в{}^2(x_5) + u_в{}^2(x_6)\right) + \ldots + (x_{N-2} \cdot x_{N-1} \cdot x_N)^2 \left(u_в{}^2(x_{N-2}) + u_в{}^2(x_{N-1}) + u_в{}^2(x_N)\right)$, де $u_в(x_N) = u(x_N)/x_N$
$Y = X^m$	$u_c(y) = m \cdot x^{m-1} u(x)$, $u_{св}(y) = u_c(y)/y = mu(x)/x$
$Y = \ln(X_1/X_2) = \ln X_1 - \ln X_2$	$u_{св}(y) = \sqrt{u^2(x_1)/(x_1^2) + u^2(x_2)/(x_2^2)}$
$Y = \ln(X_1X_2) = \ln X_1 + \ln X_2$	
$Y = (X_1 \pm X_2)(X_3 \pm X_4)$	$u_{св}(y) = \sqrt{\frac{u^2(x_1) + u^2(x_2)}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{u^2(x_3) + u^2(x_4)}{(x_3 + x_4)^2}}$
$Y = (X_1 \pm X_2)/(X_3 \pm X_4)$	
$Y = X_1{}^m \pm X_2^z$	$u_c(y) = \sqrt{\left[m \cdot x_1^{m-1} u(x_1)\right]^2 + \left[z \cdot x_2{}^{z-1} u(x_2)\right]^2}$
$Y = X_1{}^m \cdot X_2^z$	$u_{св}(y) = \sqrt{\left(m\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(z\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$
$Y = X_1{}^m / X_2^z$	
$Y = \left(X_1{}^m \pm X_2{}^z\right)/\left(X_3{}^k \pm X_4{}^p\right)$	$u_{св}^2(y) = \frac{\left(mx_1^{m-1}u(x_1)\right)^2 + \left(zx_2^{z-1}u(x_2)\right)^2}{\left(x_1^m + x_2{}^z\right)^2} + \frac{\left(kx_3^{k-1}u(x_3)\right)^2 + \left(px_4^{p-1}u(x_4)\right)^2}{\left(x_3^k + x_4{}^p\right)^2}$
$Y = \left(X_1{}^m \pm X_2{}^z\right) \cdot \left(X_3{}^k \pm X_4{}^p\right)$	

Коли вхідні величини корельовані, то вираз для комбінованої дисперсії $u_c^2(y)$, пов’язаної з результатом вимірювання, буде мати вигляд [3, 4]

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j), \qquad (1.35)$$

де x_i і x_j – оцінками X_i і X_j;

$u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ – оцінена коваріація x_i і x_j.

Коваріація – властивість пари випадкових змінних величин, яка для двох неперервних випадкових величин X_1 і X_2, що характеризуються спільною функцією щільності ймовірності p(x), виражається формулою [6]

$$u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \overline{x}_1)(x_2 - \overline{x}_2) p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 . \qquad (1.36)$$

За дискретних рівноточних вхідних вимірюваних величин коваріація розраховується за формулою

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N_{ij}} \left(x_{i_l} - \overline{x}_i\right)\left(x_{j_l} - \overline{x}_j\right). \qquad (1.37)$$

Ступінь кореляції між x_i і x_j характеризується оціненим коефіцієнтом кореляції [2, 4]

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) u(x_j)} = \frac{\sum_{l=1}^{N_{ij}} \left(x_{i_l} - \overline{x}_i\right)\left(x_{j_l} - \overline{x}_j\right)}{\sqrt{\sum_{l=1}^{N_{ij}} \left(x_{i_l} - \overline{x}_i\right)^2 \sum_{l=1}^{N_{ij}} \left(x_{j_l} - \overline{x}_j\right)^2}}, \qquad (1.38)$$

де $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ – коефіцієнт кореляції, який може знаходитися в таких межах $-1 < r(x_i, x_j) < +1$.

Якщо оцінки x_i і x_j незалежні, то $r(x_i, x_j) = 0$, і зміна однієї з них не означає очікуваної зміни іншої.

У термінах коефіцієнтів кореляції, які легше зрозуміти, ніж коваріації, вираз для комбінованої дисперсії (1.35) можна записати у вигляді

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j). \qquad (1.39)$$

У випадку, коли всі вхідні оцінки корельовані з коефіцієнтами кореляції $r(x_i, x_j) = 1$, рівняння (1.35) зводиться до вигляду

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[c_i u(x_i)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i)\right]^2. \qquad (1.40)$$

Таким чином, комбінована невизначеність $u_c(y)$ є додатним квадратним коренем із лінійної суми членів, що являють собою дисперсію вихідної оцінки y, викликану стандартною невизначеністю кожної вхідної оцінки x_i. Цю лінійну суму не варто плутати з загальним законом поширення похибок, хоча вони і мають схожу форму; стандартні невизначеності не є похибками.

Якщо функція перетворення Y має вигляд полінома $Y = cX_1^{p1} \cdot X_2^{p2} \cdot ... \cdot X_N^{pN}$ і вхідні величини X_i корельовані, то праву частину рівняння (1.34) потрібно доповнити виразом

$$2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \left[\frac{p_i u(x_i)}{x_i}\right] \cdot \left[\frac{p_j u(x_j)}{x_j}\right] r(x_i, x_j). \qquad (1.41)$$

Кореляції між вхідними величинами не можна ігнорувати, якщо вони є і значні. Пов'язані з ними коваріації слід оцінювати експериментально, змінюючи корельовані вхідні величини за типом А або використовуючи всю наявну інформацію про корельовану змінність даних величин за типом В. Правильне розуміння, що базується на минулому експерименті і загальних знаннях, особливо необхідне при оцінюванні ступеня кореляції між вхідними величинами, що виникає через такі загальновпливні ефекти як температура навколишнього середовища, атмосферний тиск і вологість. На щастя, у багатьох випадках ефекти таких впливів мають малий взаємозв'язок, тож можна припустити, що вхідні величини, зазнаючи таких впливів, некорельовані. Проте якщо не можна припустити, що вони некорельовані, самі кореляції можуть бути вилучені, якщо загальні впливи введені в рівняння вимірювання як додаткові незалежні вхідні величини [2, 3].

Кореляція між двома вхідними величинами може існувати, якщо при їх визначенні використовують один і той самий ЗВТ, фізичний еталон вимірювання або довідкові дані, що мають значну невизначеність. Наприклад, якщо поправка на температуру, що необхідна для оцінювання вхідної величини X_i, отримується за допомогою деякого термометра і така ж поправка на температуру, необхідна для оцінювання вхідної величини X_i, теж отримується за допомогою цього ж термометра, то дві вхідні величини можуть бути корельовані. Проте, якщо X_i і X_j визначаються як величини без поправок або якщо величини, які визначають калібрувальну криву термометра, внесені в рівняння вимірювання як додаткові вхідні величини з незалежними стандартними невизначеностями, кореляція між X_i і X_j усувається.

1.4.4 Розширена невизначеність. Рекомендація INC-1 (1980) робочої групи з упорядкування звіту щодо невизначеності, що на сьогоднішній день є фактично стандартом вираження якості вимірювань у міжнародній практиці та Рекомендація 1 (МК-1981) «Оцінка експериментальних невизначеностей» і Рекомендація 1 (МК-1986) «Оцінка невизначеностей у роботах, проведених МКМВ», підтримують використання комбінованої невизначеності $u_c(y)$ як параметр для кількісного вираження невизначеності результату вимірювання.

Хоча комбінована невизначеність $u_c(y)$ може повсюдно використовуватися для вираження невизначеності результату вимірювання, проте у окремих випадках: у торгівлі, промисловості і регулювальних актах, а також коли справа стосується здоров'я і безпеки, доцільно додатково вказувати інтервальну міру невизначеності, що визначає інтервал для результату вимірювання. Існування такої вимоги було визнано робочою групою і призвело до появи додаткового п'ятого розділу Рекомендації INC-1 (1980) «Вираження експериментальних невизначеностей».

Додаткова міра невизначеності, що відповідає інтервальній оцінці невизначеності, називається **розширеною невизначеністю** і позначається символом U. Розширену невизначеність одержують шляхом множення комбінованої невизначеності $u_c(y)$ на коефіцієнт охоплення k [1-4]

$$U = k \cdot u_c(y). \tag{1.42}$$

Результат вимірювання записується у вигляді $Y = y \pm U$, це означає, що найкращою оцінкою значення, яка приписується величині Y, є y, і що інтервал від y-U до y+U містить велику частину розподілу значень, які можна з достатньою підставою приписати вимірюваній величині Y. Такий інтервал також можна записати у вигляді: $y-U \le Y \le y+U$ [4].

Терміни «довірчий інтервал» і «довірчий рівень» мають в статистиці спеціальні означення і застосовуються до інтервалу, що визначається U, лише у тому випадку, коли виконані певні умови, враховуючи умову, що всі складові невизначеності, які входять в $u_c(y)$, були отримані з оцінювання за типом А. У теорії невизначеності, при розгляді розширеної невизначеності U як інтервалу в околі результату вимірювання, який містить велику частину розподілу вірогідності p, що характеризується результатом вимірювання і його комбінованою невизначеністю, ця вірогідність p є вірогідністю охоплення або довірчим рівнем цього інтервалу [3, 4].

Значення коефіцієнта охоплення k вибирається на основі рівня довіри, що потрібен інтервалу від y-U до y+U. Як правило коефіцієнт охоплення k знаходиться в діапазоні від 2 до 3. Проте в особливих випадках k може виходити за межі цього діапазону. Багатий досвід і повне знання способів застосування результату вимірювання може прискорити вибір потрібного значення коефіцієнта охоплення k.

В ідеальному випадку хотілося б мати можливість вибрати конкретне значення коефіцієнта охоплення k, що забезпечувало б інтервал $Y = y \pm U = y \pm k \cdot u_c(y)$, відповідало обраному рівню довіри, такому як 95 або 99%. Так само, для заданого значення k хотілося б мати можливість чітко зазначити рівень довіри, пов'язаний із цим інтервалом. Проте це нелегко здійснити на практиці, оскільки це потребує повного знання розподілу ймовірностей, що характеризуються результатом вимірювання y і його комбінованою невизначеністю $u_c(y)$. Хоча ці параметри мають велику значимість, самі по собі вони недостатні для того, щоб встановити інтервали, що мають точно відомі рівні довіри.

Якщо вимірювана величина Y є єдино нормально розподіленою величиною X, Y=X; і якщо як оцінка X береться середнє арифметичне $\overline{X}$ від n незалежних спостережень X_k величини з експериментальним стандартним відхиленням середнього $s(\overline{X})$, то найкращою оцінкою Y є $y = \overline{X}$ і експериментальним стандартним відхиленням цієї оцінки є $u_c(y) = s(\overline{X})$, то розширена невизначеність U, яка визначає інтервал від y-U до y+U, що зручно записувати як Y=y±U, дорівнюватиме

$$U = k \cdot u_c(y) = t_p(\nu) \cdot u_c(y), \tag{1.43}$$

де $t_p(\nu)$ – коефіцієнт з розподілу Стьюдента для ймовірності охоплення p і числа ступенів вільності $\nu = n-1$ [3, 4].

Число ступенів вільності ν дорівнює n-1 для єдиної величини, оціненої середнім арифметичним із n незалежних спостережень.

У міру того, як $\nu \to \infty$, t-розподіл наближається до нормального і наближені значення коефіцієнта Стьюдента можна розрахувати за формулою

$$t_p(\nu) \approx k\,(1+2/\nu)^{1/2}, \tag{1.44}$$

де k – коефіцієнт охоплення, необхідний для одержання інтервалу з рівнем довіри p для нормально розподілу.

Для того, щоб одержати точніше наближення для оцінки розширеної невизначеності, необхідно скористатися t-розподілом. Але в загальному випадку t-розподіл не буде описувати $(y-Y)/u_c(y)$, якщо $u_c^2(y)$ є сумою двох або більше оцінених компонентів дисперсії $u_i(y)=c_i^2 \cdot u^2(x_i)$, навіть якщо кожне x_i – оцінка нормально розподіленої вхідної величини X_i. Проте розподіл цієї змінної може бути апроксимований t-розподілом при числі ефективних ступенів вільності ν_{eff}, отриманим з формули Велча-Саттерсвейта

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}. \tag{1.45}$$

При окремому обробленні стандартних невизначеностей за типом А і за типом В необхідно додатково до ν_{eff} розраховувати також значення ν_{effA} і ν_{effB}, обчислені з рівняння (1.45) [3, 4].

При підсумовуванні невизначеностей середніх значень вхідних величин, визначуваних за типом А, число ступенів вільності ν необхідно вибирати рівним n-1.

При підсумовуванні невизначеностей вхідних величин, що визначались за типом В, число ступенів вільності ν вважається рівним нескінченності $\nu_i \approx \infty$.

Якщо комбінована невизначеність $u_c(y)$ оцінюється окремо за типом А – $u_{c_A}(y)$ і за типом В – $u_{c_B}(y)$, то згадані величини пов’язані співвідношеннями $u_c^2(y) = u_{c_A}^2(y) + u_{c_B}^2(y)$. З урахуванням цього вираз (1.45) можна записати в такому вигляді

$$\nu_{eff} = (n-1)\frac{\left[u_{c_A}^2(y) + u_{c_B}^2(y)\right]^2}{u_A^4(y)}. \tag{1.46}$$

1.4.5 Відносна невизначеність. Враховуючи те, що відносна величина – це відношення двох однорідних фізичних величин, то відносною невизначеністю називають відношення стандартної, комбінованої або розширеної невизначеності до оцінки вимірюваної величини. Вирази для визначення відносної стандартної, відносної комбінованої та відносної розширеної невизначеностей мають вигляд:

$$\tilde{u}_{A(B)} = \frac{u_{A(B)}(x)}{|x|}, \text{ при } |x| \neq 0; \tag{1.47}$$

$$\tilde{u}_c = \frac{u_c(y)}{|y|}, \text{ при } |y| \neq 0; \tag{1.48}$$

$$\tilde{U} = \frac{U}{|y|}, \text{ при } |y| \neq 0. \tag{1.49}$$

Зазначені вище відносні невизначеності можуть виражатися не тільки у відносних величинах, але й у відсотках. Для цього рівняння (1.47) – (1.49) необхідно домножити на 100 %.

1.4.6 Критерій перевірки наявності кореляції між результатами вимірювань. При оцінюванні та вираженні невизначеностей результатів вимірювань перш за все потрібно визначити, чи має місце кореляційний зв’язок між будь-якими парами результатів непрямих вимірювань. Для цього пропонується використовувати такий критерій перевірки наявності кореляційного зв’язку між результатами вимірювань

$$\frac{r(x_i, x_j)\sqrt{n}}{1-r^2(x_i, x_j)} > t_p(v_{eff}), \tag{1.50}$$

де $t_p(v_{eff})$ – квантиль розподілу Стьюдента з ефективною кількістю ступенів вільності v_{eff} і рівнем довіри p;

n – кількість узгоджених пар результатів вимірювань;

$r(x_i, x_j)$ – коефіцієнт кореляції між парами вимірювань x_i та x_j, який розраховується за формулою (1.38).

Якщо нерівність (1.50) виконується, то це означає, що кореляційний зв’язок між даною парою результатів вимірювань x_i та x_j присутній, і комбінована невизначеність повинна визначатись за формулою (1.35) або (1.39).

Якщо ж нерівність (1.50) не виконується, то це означає, що кореляція відсутня або є незначною і комбіновану невизначеність потрібно розраховувати за формулою (1.29), а при значній нелінійності функції перетворення (модельного рівняння) – за формулами (1.30) або (1.32).

Контрольні запитання

1. Дайте означення поняття «невизначеність вимірювання».
2. На які дві категорії розділяють невизначеності за способами їх оцінювання?
3. За допомогою яких методів оцінюється невизначеність типу А?
4. В чому відмінність між невизначеністю типу А та невизначеністю типу В?
5. На основі яких даних можна визначити невизначеність типу В?
6. Яке значення є найкращою оцінкою вимірюваної величини?
7. Дайте означення поняття «стандартна невизначеність».
8. Що називається комбінованою невизначеністю?
9. Дайте означення поняття «розширена невизначеність».
10. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу А при багаторазових спостереженнях.
11. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь трикутного закону розподілу.
12. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь трапецеїдального закону розподілу.
13. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу

В для заданих границь експоненціального закону розподілу.

14. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь арксинусного закону розподілу.

15. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь рівномірного закону розподілу.

15. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В при заданому інтервалі нормального закону розподілу.

16. Запишіть вираз, яким описується коваріаційна матриця для векторної випадкової величини **X**.

17. Запишіть вираз для визначення комбінованої невизначеності при некорельованих вхідних величинах.

18. Запишіть вираз для визначення комбінованої невизначеності при корельованих вхідних величинах.

19. Наведіть критерій перевірки наявності кореляції між парами результатів вимірювань при вираженні невизначеностей.

20. Запишіть вираз для визначення коефіцієнта кореляції.

21. Запишіть вираз для визначення коваріації двох неперервних величин.

22. Дайте означення та запишіть вираз для визначення відносної стандартної невизначеності.

23. Дайте означення та запишіть вираз для визначення відносної комбінованої невизначеності.

24. Дайте означення та запишіть вираз для визначення відносної розширеної невизначеності.

25. Запишіть вираз для визначення розширеної невизначеності.

26. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності зчитування показів з аналогової шкали засобу вимірювання.

27. Запишіть вираз для визначення ефективних ступенів вільності, який отримується з формули Велча-Саттерсвейта.

28. Запишіть вираз, що описує декомпозицію Холецького.

29. Запишіть вираз для розрахунку наближених значень коефіцієнта Стьюдента.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Основна література

1. Evaluation of measurement data – An introduction to the «Guide to the expression of uncertainty in measurement» and related documents : JCGM 104:2009. – Sevres : JCGM, 2009. – 20 p.

2. Руководство по выражению неопределенностей измерения Guide to the Expression of Uncertainly in Measurement : [научн. редактор Слаев В. А.]. – Санкт-Петербург : НПО ВНИИМ им. Д. М. Менделеева, 1999. – 134 с.

3. Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement : JCGM 100:2008. – Sevres : JCGM, 2008. – 120 p.

4. Васілевський О. М. Основи теорії невизначеності вимірювань : навчальний посібник / О. М. Васілевський, В. Ю. Кучерук. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 172 с.

5. Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the «Guide to the expression of uncertainty in measurement» – Extension to any number of output quantities : JCGM 102:2011. – Sevres : JCGM, 2011. – 72 p.

6. Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the «Guide to the expression of uncertainty in measurement» – Propagation of distributions using a Monte Carlo method : JCGM 101:2008. – Sevres : JCGM, 2008. – 82 p.

7. Захаров И. П. Теория неопределенности в измерениях : учеб. пособие / И. П. Захаров, В. Д. Кукуш. – Харьков : Консум, 2002. – 256 с.

8. Метрологічне забезпечення вимірювань і контролю : [навч. посібник] / Є. Т. Володарський, В. В. Кухарчук, В. О. Поджаренко, Г. Б. Сердюк. – Вінниця : ВДТУ, 2001. – 219 с.

9. Ціделко В. Д. Невизначеність вимірювання. Обробка даних і надання результату вимірювання : [монографія] / В. Д. Ціделко, Н. А. Яремчук. – К. : Політехніка, 2002. – 176 с.

10. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений» : МИ 2552-99. – Офиц. изд. – Санкт-Петербург : ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, 1999. – 27 с.

11. Васілевський О. М. Алгоритм оцінювання невизначеності у вимірюваннях при виконанні метрологічних робіт / О. М. Васілевський // Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія. – № 3 (7). – 2006. – С. 147–151.

12. Методика обґрунтування рівнянь вимірювань та оцінки методичної складової похибки (невизначеності) результатів вимірювань : МІ 13.002-2003. – Офіц. вид. – Харків : ХДНДІМ, 2003. – 11 с.

13. Рекомендации по межгосударственной стандартизации. ГСИ. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений» : РМГ 43-2001. – Офиц. изд. – Минск : Издательство стандартов, 2002. – 20 с.

14. Захаров І. П. Взаємне перерахування похибок та невизначеності вимірювань / І. П. Захаров // Стандартизація, сертифікація, якість. – 2005. № 5. – С. 49–56.

15. Васілевський О. М. Елементи теорії підвищення точності вимірювання та синхронізації кутових швидкостей роторів взаємозв'язаних електромоторів : [монографія] / О. М. Васілевський, П. І. Кулаков. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 176 с.

16. Васілевський О. М. Елементи теорії побудови потенціометричних засобів вимірювального контролю активності іонів з підвищеною вірогідністю : [монографія] / О. М. Васілевський, В. М. Дідич. – Вінниця : ВНТУ. – 2013. – 176 с.

17. Васілевський О. М. Комп'ютерно-вимірювальна система контролю якості електроенергії загального призначення та аналіз її невизначеностей / О. М. Васілевський // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – № 1 (11). – 2008. – С. 21–26.

18. Васілевський О. М. Оцінювання невизначеності вимірювання моменту інерції ротора за амплітудою крутильних коливань / О. М. Васілевський, А. В. Поджаренко // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2009. – № 4. – С. 5–9.

19. Васілевський О. М. Дослідження якості результатів вимірювань зусилля на основі концепції невизначеності / О. М. Васілевський // Вісник інженерної академії України. – Київ. – 2013. – № 3–4. – С. 229–232.

20. Васілевський О. М. Методологічні засади метрологічного забезпечення вимірювань параметрів руху електромоторів у статичному режимі роботи / О. М. Васілевський // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2014. – № 5 (116). – С. 42–52.

21. Василевский А. Н. Способ выражения динамической неопределенности средств измерений / А. Н. Василевский // Приборы и методы измерений. – Минск, 2013. – № 2 (7). – С. 109–113.

22. Васілевський О. М. Аналіз динамічних метрологічних характеристик вимірювального перетворювача вібрації : наук. пр. IV Міжнародної науково-техн. конф. [«Метрологія та вимірювальна техніка»], (Харків, 12 – 14 жовтня 2004 р.) / Держ. комітет України з питань техн. регулювання та споживчої політики; головн. ред. Г. С. Сидоренко. – Харьків : Національний наук. центр «Інститут метрології», 2004. – Т. 2. – С. 130–132.

23. Васілевський О. М. Оцінка невизначеності вихідних сигналів засобів вимірювальної техніки в динамічних режимах роботи / О. М. Васілевський // Системи обробки інформації. – Харків, 2010. – № 4 (85). – С. 81–84.

24. Васілевський О. М. Дослідження динамічної невизначеності вимірювання динамічного моменту роторних систем / О. М. Васілевський // Вісник інженерної академії України. – Київ, 2013. – № 2. – С. 57–60.

25. Васілевський О. М. Оцінювання невизначеності динамічних вимірювань / О. М. Васілевський // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2011. – № 3. – С. 9–13.
26. Кошева Л. О. Забезпечення єдності випробувань. Концептуальні засади : [монографія] / Кошева Л. О. – К. : Вид-во Національного авіаційного ун-ту «НАУ-друк». – 2009. – 178 с. (Рос. мовою).
27. Точність (правильність і прецизійність) методів та результатів вимірювання. Частина 1. Основні положення та визначення : ДСТУ ГОСТ ИСО 5725-1:2005 (ISO/IEC 5725-1:1994), IDT. – [Чинний від 2006-07-01].– К. : Держспоживстандарт України. – 2006. – 31 с. – (Національний стандарт України).
28. International Vocabulary of Metrology – Basic and General Concepts and Associated Terms (VIM) : JCGM 200:2008 (ISO/IEC Guide 99:2007). – Sevres: JCGM, 2008. – 90 p.
29. Статистические методы. Термины и определения : ГОСТ Р 50779.10-2000 (ISO 3534.1:93). – [Введ. с 2000-01-01].– М. : ИПК Изд-во стандартов. – 2001. – 41 с.
30. Кошева Л. О. Оцінювання правильності результатів вимірювань та випробувань / Л. О. Кошева // Український метрологічний журнал. – 2010. – № 1. – С. 3–6.
31. Смирнов Н. Д. Курс теории вероятности и математической статистики для технических приложений / Н. Д. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский. – Л. : Наука. Главная ред. физматлитературы, 1969. – 511 с.
32. Володарский Е. Т. Определение показателей промежуточной прецизионности при проведении межлабораторных испытаний / Е. Т. Володарский, Л. А. Кошевая // Системи обробки інформації. – 2009. – № 6 (80). – С.18–22.
33. Кошевая Л. А. Об унификации показателей точности результатов измерений и испытаний / Л. А. Кошевая // Правове, нормативне, метрологічне забезпечення захисту інформації в Україні. – 2009. – № 1 (18). – С. 12–17.
34. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First edition. – ISO, Switzerland. – 1993. – 101 p.
35. Accuracy (trueness and precision) of measurement methods and results. Practical guidance for the use of ISO 5725-2:1994 in designing, implementing and statistically analysing interlaboratory repeatability and reproducibility results: ISO/TR 22971:2005, IDT. – (Міжнародний стандарт).
36. Володарский Е. Т. Обоснование целесообразности применения экспериментального подхода к оценке неопределенности количественных результатов лабораторных испытаний / Е. Т. Володарский, Л. А. Кошевая // Український метрологічний журнал. – 2009. – № 3. – С. 8–12.
37. Guidance for the use of repeatability, reproducibility and trueness estimates in measurement uncertainty estimation: ISO/TS 21748:2004. – (Міжнародний стандарт).

38. Кошевая Л. А. Особенности оценивания неопределенности химико-аналитических измерений в медицине / Л. А. Кошевая // Системи обробки інформації. – 2008. – № 4 (71). – С. 102–104.
39. Бензины автомобильные и авиационные. Определение бензола методом инфракрасной спектроскопии : ГОСТ Р 51930-2002. – М. : ИПК Издательство стандартов, 2002.
40. Точність (правильність і прецизійність) методів та результатів вимірювання». Частина 5. Альтернативні методи визначення прецизійного стандартного методу вимірювань : ДСТУ ГОСТ ISO 5725-5:2005 (ISO/IEC 5725-5:1994), IDT. – [Чинний від 2006-07-01]. – К. : Держспоживстандарт України, 2006. – 80 с. – (Національний стандарт України).
41. Хьюбер Дж. П. Робастность в статистике : [учебник] / Хьюбер Дж. П. – М. : Мир, 1984. – 304 с.

Додаткова література

42. Guidelines for the Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibrations : Doc. 19 / Western European Calibration Cooperation, 1990. – 17 p.
43. Васілевський О. М. Основи теорії невизначеності вимірювань : навчальний посібник / О. М. Васілевський, В. Ю. Кучерук. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 224 с.
44. Кунце Х. И. Методы физических измерений / Х. И. Кунце. – М. : Мир, 1989. – 216 с.
45. Giacomo P. The expression of Experimental Uncertainties (Recommendation INC-1) / P. Giacomo // Metrologia. – 1981. – № 11. – P. 73.
46. Загальні вимоги до компетентності випробувальних та калібрувальних лабораторій : ДСТУ ISO/IEC 17025-2001. – [Чинний від 2001 – 01 - 01]. – К. : Держстандарт України, 2001. – 31 с. – (Національний стандарт України).
47. Коцюба А. Процедура оцінювання невизначеності вимірювання випробувальної лабораторії / А. Коцюба, В. Новіков // Стандартизація, сертифікація, якість. – 2003. – № 1. – С. 39–41.
48. Сопрунюк П. М. Неопределенность результатов измерений при контроле асинхронности вращения электромеханических преобразователей / П. М. Сопрунюк, А. Н. Василевский, Ю. А. Чабанюк // Системи обробки інформації. – 2006. – Випуск 7 (56). – С. 72–75.
49. Василевский А. Н. Неопределенность измерительного канала активности ионов при контроле гумусового состояния почв с помощью ион-селективных электродов / А. Н. Василевский, В. А. Поджаренко, В. Н. Дидыч // Системи обробки інформації. – 2008. – Випуск 4 (71). – С. 85–87.
50. Васілевський О. М. Метрологічне забезпечення засобу вимірювання параметрів якості електроенергії загального призначення / О. М. Васі-

левський, В. Ю. Кучерук // Системи обробки інформації. – Харків. – 2012. – № 1 (99). – С. 125–129.

51. Поджаренко В. О. Опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності : [навч. посібник] / В. О. Поджаренко, О. М. Васілевський, В. Ю. Кучерук. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 128 с.

52. Васілевський О. М. Практикум з метрологічного нагляду за засобами вимірювання : [практикум] / Васілевський О. М., Поджаренко В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 87 с.

53. Uncertainty of measurement – Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995) : ISO/IEC GUIDE 98-3:2008. – ISO, Switzerland. – 2008. – 120 p. – (Міжнародний стандарт).

54. Володарський Є. Т. Статистична обробка даних : [навчальний посібник] / Є. Т. Володарський, Л. О. Кошева. – К. : НАУ, 2008. – 307 с.

55. Орнатский П. П. Теоретические основы информационно-измерительной техники : [учебник] / П. П. Орнатский. – Киев : Вища школа, 1983. – 455 с.

Навчальне видання

Васілевський Олександр Миколайович
Кучерук Володимир Юрійович
Володарський Євген Тимофійович

Основи теорії невизначеності вимірювань

Підручник

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет підготовлено О. Васілевським

Підписано до друку 04.09.2015 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 14,7.
Наклад 500 (1-й запуск 1-100) пр. Зам. № 2015-086.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК №3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.