539

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНА ТЕХНІКА

УДК 681.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ БАГАТООПЕРАНДНОЇ ОБРОБКИ ЧИСЛОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Канд. техн. наук, доц. Мартинюк Т. Б., Хомюк В. В., студ. Мельничук О. В.

Вступ

В роботах [1 – 3] представлено доведення математичних виразів, які використовуються під час реалізації алгоритму багатооперандного додавання. Крім того, в роботі [4], присвяченій оцінюванню структурно-інформаційної складності відомих паралельних алгоритмів додавання і, зокрема, алгоритму багатооперандного додавання, показані його переваги та особливості. Серед вказаних переваг перспективною для подальшого застосування є його алгоритмічна багатофункціональність, тобто можливість виконання декількох алгоритмів водночас або послідовно з використанням результатів попередніх алгоритмів і без змін структури пристрою, що їх реалізує. Серед алгоритмів, які можуть бути реалізовані за результатами, отриманими після виконання алгоритму багатооперандного додавання, можна відзначити алгоритми відновлення початкової і проміжної множин числових величин [5].

Тому метою даної роботи є дослідження особливостей цих алгоритмів. В процесі доведення математичних теорем автори використовують такі поняття, як маска і, зокрема, бінарна маска. Тому вони вважають за потрібне навести визначення цих понять.

Маска — це комбінація знаків, які використовуються для аналізу чисел такого ж, як і маска, формату шляхом зіставлення відповідних знаків маски та розрядів чисел. В широкому розумінні в області розпізнавання зображень маскою називається набір величин, які утворюють вектор, що множиться скалярно на інший вектор, який є результатом дискретизації зображення, для обчислення величини, що характеризує їх схожість [6, 7].

Бінарна маска — це маска, елементами якої є числа в двійковому представленні (0 та 1) [8].

Постановка задачі

В основі багатооперандної обробки застосовується операція паралельного додавання множини чисел або тривалостей групи часових інтервалів [9, 10]. Слушність математичної моделі паралельного додавання множини чисел доведена відповідними теоремами, тому виникає необхідність на такому ж рівні розглянути математичні моделі для відновлення початкової множини та проміжних множин числових величин.

Алгоритм багатооперандного додавання множини чисел можна представити, ввівши ряд позначень.

Нехай $\mathbf{A}_0$ — множина чисел $a_{i,j}$, $a_{i,j} \neq 0$, $a_{i,j} > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Крок 1. Прийняти $j = 0$.

Крок 2. Для множини $\mathbf{A}_j$ визначити величину q_{j+1} із співвідношення

$$q_{j+1} = \min \mathbf{A}_j = \min\{a_{i,j}\}_{i=1}^{n} .$$

Крок 3. Визначити множину $\mathbf{A}_{j+1}$ із співвідношення

$$\mathbf{A}_{j+1} = \{a_{i,j+1}\}_{i=1}^{n} = \{a_{i,j} - q_{j+1}\}_{i=1}^{n} .$$

Крок 4. Визначити бінарну маску $\mathbf{F}_{j+1}^{n} = \{f_{i,j+1}\}_{i=1}$ з елементами

$$f_{i,j+1} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_{i,j+1} \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } a_{i,j+1} < 0. \end{cases}$$

Крок 5. Обчислити величину $p_{j+1} = \sum_{i=1}^{n} f_{i,j+1}$.

Крок 6. Перевірити умову $p_{j+1} = 0$. Якщо так, то перейти до кроку 10. Якщо ні, то перейти до кроку 7.

Крок 7. Обчислити поточну суму S_{j+1} із співвідношення $S_{j+1} = p_{j+1}\, q_{j+1}$.

Крок 8. Обчислити суму $S = \sum_{k=1}^{j+1} S_k$.

Крок 9. Присвоїти $j = j + 1$ та перейти до кроку 2.

Крок 10. Сформувати матрицю бінарних масок $\mathbf{F}$ вигляду $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n)$.

Крок 11. Сформувати вектор $\mathbf{Q}$ вигляду $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^{\mathrm{T}}$.

Необхідно відмітити, що якщо в початковій множині $\mathbf{A}_0$ немає чисел, що повторюються, то процедура включає в себе n ітерацій (циклів), де n — число елементів в множині $\mathbf{A}_0$. При цьому кожна ітерація (цикл) складається з кроків 2 … 9 представленого алгоритму. Особливість алгоритму багатооперандного додавання числових величин полягає в тому, що формування матриці бінарних масок $\mathbf{F}$ та вектора $\mathbf{Q}$ дозволяє значно розширити алгоритмічні можливості багатооперандної обробки за рахунок відновлення початкової множини $\mathbf{A}_0$ та проміжних множин $\mathbf{A}_j$ ($j = \overline{1, n}$).

1. Теорема відновлення початкової множини числових величин

Алгоритм відновлення початкової множини $\mathbf{A}_0$ з n числових величин, базується на виконанні операції множення матриці бінарних масок $\mathbf{F}$ на вектор-стовпець $\mathbf{Q}$, тобто n-елементний вектор-стовпець $\mathbf{A}_0$ визначається таким чином

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{FQ}, \tag{1}$$

а i-й елемент $a_{i,0}$ вектор-стовпця $\mathbf{A}_0$ дорівнює

$$a_{i,0} = \sum_{j=1}^{n} f_{i,j} q_j \,, \tag{2}$$

де $f_{i,j}$ – i-й елемент j-го стовпця матриці $\mathbf{F}$; q_j – j-й елемент вектор-стовпця $\mathbf{Q}$; $i, j = \overline{1, n}$.

Нижче наводиться доведення теореми відновлення початкової множини чисел $\mathbf{A}_0$.

Теорема 1. *Число $a_{i,0}$ ($i = \overline{1, n}$), яке є одним з n елементів початкової множини $\mathbf{A}_0$, дорівнює сумі n добутків елемента $f_{i,j}$ матриці бінарних масок $\mathbf{F}$ на найменше число q_j відповідної множини A_{j-1}, тобто виконується рівність (2).*

Доведення. Нехай виконується умова

$$a_{1,0} < a_{2,0} < a_{3,0} < a_{4,0} < \ldots < a_{i,0} < a_{i+1,0} < a_{i+2,0} < \ldots < a_{n,0}. \tag{3}$$

Тоді матриця бінарних масок $\mathbf{F}$ вигляду

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n), \tag{4}$$

елементи $f_{i,j}$ ($j = \overline{1, n}$) якої формуються у відповідності до виразу

$$f_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_{i,j} \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } a_{i,j} < 0, \end{cases} \tag{5}$$

буде мати такий вигляд

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} . \qquad (6)$$

Для величини q_j вектора $\mathbf{Q}$ вигляду

$$\mathbf{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^{\mathrm{T}}$$

слушне співвідношення [2]

$$q_j = \min_i \mathbf{A}_{j-1} = \min_i \{a_{i,j-1}\}_1^n = a_{j,0} - a_{j-1,0} . \qquad (7)$$

Введемо величину p_i, яка визначає кількість одиниць в i-му рядку матриці бінарних масок $\mathbf{F}$.

Для матриці бінарних масок вигляду (6) можна записати, що

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} f_{i,j} = i , \qquad (8)$$

де i — номер елемента $a_{i,j}$ в множині $\mathbf{A}_j$; $i = \overline{1, n}$; $f_{i,j}^1, f_{i,j}^0$ — позначення відповідно одиничного та нульового елемента $f_{i,j}$ матриці бінарних масок $\mathbf{F}$, тобто

$$f_{i,j}^1 = 1, \qquad f_{i,j}^0 = 0 .$$

Тоді рівність (2) можна записати таким чином:

$$a_{i,0} = \sum_{j=1}^{p_i} f_{i,j}^1 q_j + \sum_{j=p_i+1}^{n} f_{i,j}^0 q_j ,$$

а оскільки $\sum_{j=p_i+1}^{n} f_{i,j}^0 q_j = 0$, то $a_{i,0} = \sum_{j=1}^{p_i} f_{i,j}^1 q_j = \sum_{j=1}^{p_i} q_j = \sum_{j=1}^{i} q_j$.

Таким чином, доведення рівності (2) зводиться до доведення рівності

$$a_{i,0} = \sum_{j=1}^{p_i} q_j = \sum_{j=1}^{i} q_j . \qquad (9)$$

Так як для величини q_j характерне співвідношення (7), то праву частину рівності (9) можна представити таким чином:

$$\sum_{j=1}^{p_i} q_j = \sum_{j=1}^{i} q_j = \sum_{j=1}^{i} (a_{j,0} - a_{j-1,0}) = (a_{1,0} - a_{0,0}) + (a_{2,0} - a_{1,0}) + \dots +$$
$$+ (a_{i-1,0} - a_{i-2,0}) + (a_{i,0} - a_{i-1,0}) = a_{i,0} - a_{0,0} = a_{i,0} ,$$

оскільки $a_{0,\,0} = 0$.

Таким чином для $i = \overline{1, n}$ виконується рівність (9), а значить і рівність (2), що і потрібно було довести.

2. Теорема відновлення проміжної множини числових величин

Розглядаючи відновлення початкової множини $\mathbf{A}_0$ числових величин як окремий випадок ($j = 0$) відновлення проміжних множин $\mathbf{A}_j$, доведемо теорему відновлення проміжних множин $\mathbf{A}_j$ числових величин, де

$$\mathbf{A}_j = \{a_{i,j}\}_{i=1}^n = \{a_{i,j-1} - q_j\}_{i=1}^n . \qquad (10)$$

Теорема 2. *Число* $a_{i,l}$ $(i, l = \overline{1, n})$, *яке є одним з* n *елементів проміжної множини* $\mathbf{A}_l$, *дорівнює сумі* $(n - l)$ *добутків елемента* $f_{i,j}$ *матриці бінарних масок* $\mathbf{F}$ *на найменше число* q_j *відповідної множини* $\mathbf{A}_{j-1}$, *при цьому значення змінної* j *змінюються від* $(l + 1)$ *до* n, *тобто виконується рівність вигляду*

$$a_{i,l} = \sum_{j=l+1}^{n} f_{i,j} q_j . \tag{11}$$

Доведення. Виконаємо такі перетворення рівності (11)

$$a_{i,l} = \sum_{j=l+1}^{n} f_{i,j} q_j = \sum_{j=l+1}^{p_i(l)} f_{i,j}^1 q_j = \sum_{j=l+1}^{p_i(l)} q_j , \tag{12}$$

де $p_i(l)$ – кількість одиниць в i-му рядку матриці бінарних масок $\mathbf{F}$, починаючи з $(l + 1)$-го стовпця і до n-го.

Перетворення (12) слушне, оскільки

$$\sum_{j=l+1}^{n} f_{i,j} q_j = \sum_{j=l+1}^{p_i(l)} f_{i,j}^1 q_j + \sum_{p_i(l)+1}^{n} f_{i,j}^0 q_j ; \quad \sum_{p_i(l)+1}^{n} f_{i,j}^0 q_j = 0 , \text{ оскільки } f_{i,j}^0 = 0 ; \quad p_i(l) = \sum_{j=l+1}^{n} f_{i,j}^1 .$$

Таким чином, доведення рівності (11) зводиться до доведення такої рівності

$$a_{i,l} = \sum_{j=l+1}^{p_i(l)} q_j . \tag{13}$$

У відповідності до рівності (7) та (10) для елемента $a_{i,l}$ проміжної множини $\mathbf{A}_l$ можна записати таке співвідношення:

$$a_{i,l} = a_{i,l-1} - q_l = (a_{i,l-2} - q_{l-1}) - q_l = (\ldots(a_{i,0} - q_1) - q_2) - \ldots - q_{l-1}) - q_l) =$$
$$= a_{i,0} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{l-1} - q_l = a_{i,0} - (q_1 + q_2 + \ldots + q_{l-1} + q_l) = a_{i,0} - \sum_{j=1}^{l} q_j ,$$

тобто
$$a_{i,l} = a_{i,0} - \sum_{j=1}^{l} q_j . \tag{14}$$

Подальше перетворення виразу (14) дає такий результат

$$a_{i,l} = a_{i,0} - \sum_{j=1}^{l} q_j = a_{i,0} - [(a_{1,0} - a_{0,0}) + (a_{2,0} - a_{1,0}) + \ldots + (a_{l-1,0} - a_{l-2,0}) + (a_{l,0} - a_{l-1,0})] =$$
$$= a_{i,0} - (- a_{0,0} + a_{l,0}) = a_{i,0} - a_{l,0}, \quad \text{так як } a_{0,0} = 0, \quad \text{тобто}$$

$$a_{i,l} = a_{i,0} - a_{l,0} . \tag{15}$$

Розглянемо три можливих випадки співвідношення між змінними l і $p_i(l)$ та відповідні до них рівності (9) та (14).

1) $l < p_i(l)$: $\quad a_{i,0} = \sum_{j=1}^{p_i(l)} q_j = \sum_{j=1}^{l} q_j + \sum_{j=l+1}^{p_i(l)} q_j$, тоді $a_{i,l} = \left(\sum_{j=1}^{l} q_j + \sum_{j=l+1}^{p_i(l)} q_j \right) - \sum_{j=l+1}^{l} q_j = \sum_{j=l+1}^{p_i(l)} q_j$;

2) $l = p_i(l)$: $\quad a_{i,0} = \sum_{j=1}^{p_i(l)} q_j = \sum_{j=1}^{l} q_j$, тоді $a_{i,l} = \sum_{j=1}^{l} q_j - \sum_{j=1}^{l} q_j = 0$;

3) $l > p_i(l)$: $\quad a_{i,0} = \sum_{j=1}^{p_i(l)} q_j$, тоді $a_{i,l} = \sum_{j=1}^{p_i(l)} q_j - \sum_{j=1}^{l} q_j < 0$.

Таким чином співвідношення (13) виконується у випадку $l < p_i(l)$, а значить в цьому ж випадку виконується і співвідношення (11). Потрібно відмітити, що два інших випадки значення величин $a_{i,l}$ відповідають даним табл., тобто вони дорівнюють нулю або є від'ємними, що звичайно і виконується при відновленні відповідних проміжних множин $\mathbf{A}_l$ числових величин. В результаті відновлення проміжної множини $\mathbf{A}_l$ можна записати матрично-векторне множення

$$\mathbf{A}_l = \mathbf{F}_{(l+1)}\mathbf{Q}_{(l+1)},$$

де $\mathbf{F}_{(l+1)}$ — бінарна матриця виду $(\mathbf{F}_{l+1}, \mathbf{F}_{l+2}, \ldots, \mathbf{F}_n)$, яка містить в собі $[n - l]$ стовпців бінарної матриці $\mathbf{F}(4)$; $\mathbf{Q}_{(l+1)}$ — вектор вигляду $\mathbf{Q}_{(l+1)} = (q_{l+1}, \ldots, q_n)^{\mathrm{T}}$, який містить в собі $(n - l)$ елементів вектора $\mathbf{Q}$.

Елементи груп $a_{i,j}$	Групи $\mathbf{A}_j$					
	Первісна група $\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
$a_{1,j}$	11	8	6	3	0	—
$a_{2,j}$	3	0	—	—	—	—
$a_{3,j}$	5	2	0	—	—	—
$a_{4,j}$	8	5	3	0	—	—
$a_{5,j}$	15	12	10	7	4	0
Цикли обробки t_j		1	2	3	4	5
Найменше число q_j		3	2	3	3	4
Поточна сума S_j		15	8	9	6	4
Накопичення поточних сум S_j		15	23	32	38	42
Елементи масок $f_{i,j}$		Бінарні маски $\mathbf{F}_j$				
		$\mathbf{F}_1$	$\mathbf{F}_2$	$\mathbf{F}_3$	$\mathbf{F}_4$	$\mathbf{F}_5$
$f_{1,j}$		1	1	1	1	0
$f_{2,j}$		1	0	0	0	0
$f_{3,j}$		1	1	0	0	0
$f_{4,j}$		1	1	1	0	0
$F_{5,j}$		1	1	1	1	1

Висновки

Результатом використання принципу формування зрізів різниць в процесі багатооперандної обробки є формування матриці бінарних масок та вектора найменших значень в кожному зрізі різниць, що забезпечує можливість виконання не тільки багатооперандного додавання, а й реалізації відновлення початкової та проміжних множин числових величин.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кожемяко В. П. и др. Параллельная обработка изображений. — Ужгород : Изд-во Ужгород. гос. ун-та, 1993. — 89 с.
2. Мартинюк Т. Б., Хомюк В. В., Савалюк І. М., Охрущак Д. В. Використання зрізів різниць для багатооперандного додавання числових величин // Вісник ВПІ. — 1998. — № 2. — С. 63—68.
3. Тимченко Л. І., Мартинюк Т. Б., Загоруйко Л. В., Герций О. А., Кожем'яко А. В. Математична модель алгоритму паралельної обробки інформації // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 1998. — № 2. — С. 20—23.
4. Мартинюк Т. Б., Заболотна Н. І., Шолота В. В. Оцінювання структурно-інформаційної складності паралельних алгоритмів додавання // Вісник ВПІ. — 1996. — № 4. — С. 21—26.
5. Мартынюк Т. Б. Отображение алгоритмов многоместной обработки информации на матричные структуры. — Винница, ВПИ, 1993. — 35 с. — Деп. в ГНТБ Украины 16.11.93, № 2267. — Ук 93.
6. Словарь по кибернетике / Под. ред. В. М. Глушкова. — К.: Гл. ред. УСЭ, 1979. — 624 с.
7. Першиков В. И., Савинков В. М. Толковый словарь по информатике. — М.: Финансы и статистика, 1991. — 543 с.
8. Борковский А. Б. и др. Словарь по программированию. — М.: Рус. яз., 1991. — 286 с.
9. Квазиимпульсно-потенциальные оптоэлектронные элементы и устройства логико-временного типа / Свечников С. В. и др. — К.: Наукова думка, 1987. — 256 с.
10. А. с. 1119035 СССР. Способ параллельного сложения длительностей группы временных интервалов / В. П. Кожемяко и др. / Бюл. изобр. — 1984. — № 38.

Кафедра вищої математики