ООО «Институт креативных технологий»

ГАРМОНИЧНОЕ РАЗВИТИЕ СИСТЕМ – ТРЕТИЙ ПУТЬ ЧЕЛОВЕЧЕСТВА

Коллективная монография
по материалам трудов
1-го Международного Конгресса
Одесса, 8 – 10 октября 2011 г.

под ред. Сороко Э.М., Егоровой-Гудковой Т.И.

ООО «Институт креативных технологий
Одесса – 2011

ББК 65. 012
УДК 330.131.7

Рекомендовано к публикации Ученым советом

Института математики, экономики, механики Одесского Национальног

университета им. И.И. Мечникова

протокол № 5 от 4 июля 2011 г.

Сороко Э.М., Егорова-Гудкова Т.И.
ГАРМОНИЧНОЕ РАЗВИТИЕ СИСТЕМ – ТРЕТИЙ ПУТЬ ЧЕЛОВЕЧЕСТВА
Коллективная монография
Одесса, ООО «Институт креативных технологий», 2011, 395 стр.

Коллективная монография сформирована на основе научных трудов и докладов участников Конгресса «ГАРМОНИЧНОЕ РАЗВИТИЕ СИСТЕМ – ТРЕТИЙ ПУТЬ ЧЕЛОВЕЧЕСТВА».

Книга предназначена для учёных, специалистов, аспирантов и всех, кого интересует вопрос, как выжить Миру?, в чём суть Третьего пути Человечества и каков он этот Новый путь.

ISBN 978-966- 8888- 03-9

Глава 3

ИНФОРМАЦИОННЫЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРОВ ФИБОНАЧЧИ

Об авторе: Лужецкий В.А., д.т.н.; профессор,
Винницкий национальный технический университет, г. Винница, Украина

Введение

В разных разделах математики исследуются и используются такие объекты, как целые, действительные, комплексные и гиперкомплексные числа (кватернионы и октавы), векторы n-мерного пространства, полиномы и матрицы. На практике целые и действительные числа представляются в некоторой системе счисления (десятичной, двоичной и т.п.), а комплексные и гиперкомплексные числа, векторы n-мерного пространства, полиномы и матрицы - как совокупность соответствующего количества действительных чисел.

Использование компьютерной техники для решения сложных задач моделирования, корреляционного и спектрального анализа, управления динамическими объектами порождает проблемы, которые заставляют иначе посмотреть на традиционное представление действительных чисел, а, соответственно, и на представление сложных математических объектов.

Дискретность представления информации и конечная разрядность данных, которые характерны для цифровых компьютеров, порождают конечное множество чисел. Поэтому невозможно говорить о представлении в компьютере непрерывного множества действительных чисел. В общем случае, действительные числа представляются с некоторой погрешностью. Следствием этого является наличие класса плохо обусловленных задач, результаты решения которых чувствительны к точности представления чисел в компьютере.

Уменьшение погрешности представления действительных чисел в компьютере может быть достигнуто путем выполнения следующей последовательности отображений моделей [1]:

$$\mathbf{R} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{F}_N \to \mathbf{П}^*_m,$$

где $\mathbf{R}$ - множество действительных чисел; $\mathbf{Q}$ - множество рациональных чисел; $\mathbf{F}_N$ - множество несократимых дробей Фарея; $\mathbf{P}^*_m = \{0,1,\mathrm{K}\ ,m-1\}$. множество целых чисел.

В компьютере выполняются арифметические операции в конечном коммутативном кольце $\langle \mathbf{П}^*_m, +, \cdot \rangle$, где "+" и "$\cdot$" означают сложение и умножение по модулю m, а потом отображаются целочисленные результаты в соответствующие рациональные числа.

Таким образом, для представления в компьютерах могут рассматриваться сложные математические объекты с целочисленными составляющими.

С другой стороны, представление сложных математических объектов в компьютере как совокупности кодов составляющих их элементов порождает разные алгоритмы вычислений над ними и усложняет работу с памятью (последовательные процессы записи и считывания).

В данной работе описывается единый подход к представлению как целых чисел, так и сложных математических объектов на их основе.

Компьютерное представление данных на основе обобщенных чисел Фибоначчи

Идея единого подхода к компьютерному представлению данных заключается в использовании базисов, элементы которых вычисляются на основе соотношений:

$$w_{l+p+1} = w_{l+p} + w_l \text{ для } l = 0,\ 1,\ 2,\dots \text{ и } w_l = w_{l+p+1} - w_{l+p} \text{ для } l = -1,\ -2,\dots$$

при определенных начальных значениях $w_0, w_1, \dots, w_p$ (p=1, 2,...), и алфавита $\mathbf{A} = \{-1;0;1\}$.

При этом математический объект M представляется в виде:

$$M = \sum_{l=-m}^{n} a_l w_{l,p}\,.$$

Набор $a_n a_{(n-1)} \dots a_1 a_0 \dots a_{(-m)}$ является компьютерным кодом математического объекта M.

Формулы для вычисления элементов базисов и начальные значения элементов имеют следующий вид:

- для комплексных чисел

$$w_{l+2} = w_{l+1} + w_l \quad (l = 0, 1, 2, \dots), \; w_l = w_{l+2} - w_{l+1} \quad (l = -1, -2, \dots), \tag{1}$$

$w_0 = 1, w_1 = i$;

- для трехмерных векторов

$$\mathbf{w}_{l+3} = \mathbf{w}_{l+2} + \mathbf{w}_l \, (l = 0, 1, 2, \dots), \; \mathbf{w}_l = \mathbf{w}_{l+3} - \mathbf{w}_{l+2} \, (l = -1, -2, \dots), \tag{2}$$

$\mathbf{w}_0 = \mathbf{i}, \mathbf{w}_1 = \mathbf{j}, \mathbf{w}_2 = \mathbf{k}$;

- для кватернионов

$$w_{l+4} = w_{l+3} + w_l \, (l = 0, 1, 2, \dots), \; w_l = w_{l+4} - w_{l+3} \, (l = -1, -2, \dots), \tag{3}$$

$w_0 = 1$, $w_1 = i$, $w_2 = j$, $w_3 = k$;

- для октав

$$w_{l+8} = w_{l+7} + w_l \, (l = 0, 1, 2, \dots), \; w_l = w_{l+8} - w_{l+7} \, (l = -1, -2, \dots), \tag{4}$$

$w_0 = 1$, $w_1 = i$, $w_2 = j$, $w_3 = k$, $w_4 = e$, $w_5 = ie$, $w_6 = je$, $w_7 = ke$;

- для матриц размерности 2×2

$$\mathbf{w}_{l+4} = \mathbf{w}_{l+3} + \mathbf{w}_l \, (l = 0, 1, 2, \dots), \; \mathbf{w}_l = \mathbf{w}_{l+4} - \mathbf{w}_{l+3} \, (l = -1, -2, \dots), \tag{5}$$

$$\mathbf{w}_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \mathbf{w}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix};$$

- для полиномов третьей степени

$$w_{l+4} = w_{l+3} + w_l \, (l = 0, 1, 2, \dots), \; w_l = w_{l+4} - w_{l+3} \, (l = -1, -2, \dots), \tag{6}$$

$w_0 = 1$, $w_1 = x$, $w_2 = x^2$, $w_3 = x^3$.

Выражения, описывающие непосредственно элементы базисов, представлены в табл. 1. Здесь используются следующие обозначения: φ_p^* - расширенная последовательность p-чисел Фибоначчи (p=1,2,3,7); σ - левый сдвиг последовательности.

Таблица 1. Математические объекты на основе обобщенных чисел Фибоначчи

Непосредственное описание элемента базиса	Название и обозначение математического объекта	Базис
$w_l = \varphi_1(l-1) + \varphi_1(l)i$	комплексные числа Фибоначчи $\psi_2(l)$	$\Psi_2 = \varphi_1^* i + \sigma(\varphi_1^*)$
$\mathbf{w}_l = \varphi_2(l-2)\mathbf{i} + \varphi_2(l-3)\mathbf{j} + \varphi_2(l-1)\mathbf{k}$	трехмерные векторы Фибоначчи $\text{ш}_3(l)$	$\Psi_3 = \sigma^2(\varphi_2^*)\mathbf{i} + \sigma^3(\varphi_2^*)\mathbf{j} + \sigma(\varphi_2^*)\mathbf{k}$.
$w_l = \varphi_3(l-3) + \varphi_3(l-4)i + {}$ $+ \varphi_3(l-5)j + \varphi_3(l-2)k$	кватернионы Фибоначчи $\psi_4^{\kappa}(l)$	$\Psi_4^{\kappa} = \sigma^3(\varphi_3^*) + \sigma^4(\varphi_3^*)i + {}$ $+ \sigma^5(\varphi_3^*)j + \sigma^2(\varphi_3^*)k$
$w_l = \varphi_7(l-7) + \varphi_7(l-8)i + {}$ $+ \varphi_7(l-9)j + \varphi_7(l-10)k + {}$ $+ \varphi_7(l-11)e + \varphi_7(l-12)ie + {}$ $+ \varphi_7(l-13)je + \varphi_7(l-6)ke$	октавы Фибоначчи $\psi_8(l)$	$\Psi_8 = \sigma^7(\varphi_7^*) + \sigma^8(\varphi_7^*)i + {}$ $+ \sigma^9(\varphi_7^*)j + \sigma^{10}(\varphi_7^*)k + {}$ $+ \sigma^{11}(\varphi_7^*)e + \sigma^{12}(\varphi_7^*)ie + {}$ $+ \sigma^{13}(\varphi_7^*)je + \sigma^6(\varphi_7^*)ke$
$\mathbf{w}_l = \begin{vmatrix} \varphi_3(l-3) & \varphi_3(l-4) \\ \varphi_3(l-5) & \varphi_3(l-2) \end{vmatrix}$	2×2-матрицы Фибоначчи $\Psi_4^{\text{M}}(l)$	$\Psi_4^{\text{M}} = \sigma^3(\varphi_3^*)\mathbf{I}_{11} + \sigma^4(\varphi_3^*)\mathbf{I}_{12} + {}$ $+ \sigma^5(\varphi_3^*)\mathbf{I}_{21} + \sigma^2(\varphi_3^*)\mathbf{I}_{22}$,

		где $I_{11}=\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}$; $I_{12}=\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}$; $I_{21}=\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}$; $I_{22}=\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}$
$w_l=\varphi_3(l-2)x^3+\varphi_3(l-5)x^2+$ $+\varphi_3(l-4)x\ \ +\varphi_3(l-3)$	полиномы Фибоначчи третьей степени $\psi_4^{\Pi}(l)$	$\Psi_4^{п}=\sigma^3(\varphi_3^*)+\sigma^4(\varphi_3^*)x+$ $+\sigma^5(\varphi_3^*)x^2+\sigma^2(\varphi_3^*)x^3$

Видно, что элементы базисов являются определенными математическими объектами с целочисленными составляющими в виде обобщенных чисел Фибоначчи. Такое представление математических объектов является естественным, вытекающим из задачи компьютерного представления данных, а не искусственным, как предлагалось в работах зарубежных авторов [2-6].

Из табл. 1 следует, что базисы для компьютерного представления математических объектов можно формировать сложением базисов, соответствующих составляющим математического объекта. Исходя из этого, для получения *p*-кода Фибоначчи математического объекта необходимо представить каждую составляющую объекта в соответствующем ей базисе, то есть получить *p*-коды Фибоначчи составляющих, а затем сложить эти коды.

Например, для получения 3-кода Фибоначчи полинома третьей степени $g(x)=k_3x^3+k_2x^2+k_1x\ \ +k_0$ необходимо представить k_0 в базисе $\sigma^3(\varphi_3^*)$, k_1 - в базисе $\sigma^4(\varphi_3^*)$, k_2 - в базисе $\sigma^5(\varphi_3^*)$, k_3 - в базисе $\sigma^2(\varphi_3^*)$ и сложить коды этих представлений.

Методы выполнения операций над «фибоначчиевыми» представлениями сложных математических объектов

Сложение и вычитание математических объектов, представленных соответствующими р-кодами Фибоначчи, сводится к сложению этих кодов по правилам, которые достаточно подробно описаны в работах, посвященных «фибоначчиевой» арифметике [7,8]. Поэтому рассмотрим правила выполнения операций, характерных для определенных математических объектов при их «фибоначчиевом» представлении.

Все характерные операции выполняются по одному правилу, которое предусматривает формирование обобщенной последовательности математических объектов с определенными начальными элементами и накапливающее сложение (вычитание) элементов, выделяемых из последовательности согласно символам *p*-кода одного из операндов. Если $a_l=1$, то l-й элемент последовательности прибавляется к накопленному значению (промежуточному результату), а в случае $a_l=-1$ - вычитается. Если $a_l=0$, то прибавляется код нуля.

Такой же набор действий выполняется при умножение двух *p*-кодов целых чисел с использованием известных алгоритмов [7]. Поэтому при оценке сложности выполнения операции над математическим объектом будем использовать условные единицы сложности «умножение» и «сложение».

Пусть комплексное число z представлено в виде:

$$z=x+yi=\sum_{l=-m}^{n}a_l\psi_2(l)\ ,$$

тогда произведение двух комплексных чисел z_1 и z_2 описывается выражением:

$$z_1z_2=(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=\sum_{l=-m}^{n}a_{1l}z_2\psi_2(l)=\sum_{l=-m}^{n}a_{1l}w_l\ \ ,$$

где w_l - l-й элемент последовательности комплексных чисел, вычисляемой по формуле (1), начиная с элементов $w_0 = z_2,\ w_1 = z_2 i$.

Для получения произведения двух комплексных чисел z_1 и z_2 достаточно выполнить только одно умножение, начиная с частичных произведений z_1 и $z_2 i$, тогда как в известном случае [9] нужны четыре умножения и два сложения.

Число $z^* = x - yi$, являющееся комплексно-сопряженным с числом $z = x + yi$, вычисляется по формуле:

$$z^* = \sum_{l=-m}^{n} a_l w_l^* ,$$

где a_l - цифры кода числа z.

Т.е. для получения кода z^* необходимо выполнить операцию умножения, начиная с элементов $w_0^* = 1$ и $w_1^* = -i$.

Пусть вектор $\bar{\mathbf{a}}$ и скаляр λ представляются в виде:

$$\bar{\mathbf{a}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \sum_{l=-m}^{n} a_l \text{ш}_3(l),\ \lambda = \sum_{l=-m}^{n} a_l \varphi_2(l),$$

тогда произведение вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на этот скаляр равно:

$$\lambda \bar{\mathbf{a}} = \sum_{l=-m}^{n} a_l \bar{\mathbf{a}} \varphi_2(l) = \sum_{l=-m}^{n} a_l \bar{\mathbf{a}}_l^* ,$$

где $\bar{\mathbf{a}}_l^*$ вычисляются по формуле (2), начиная с элементов $\bar{\mathbf{a}}_0^* = 0,\ \bar{\mathbf{a}}_1^* = \bar{\mathbf{a}}_2^* = \bar{\mathbf{a}}$.

Скалярное произведение двух векторов $\bar{\mathbf{a}}_1$ и $\bar{\mathbf{a}}_2$ описывается выражением:

$$\bar{\mathbf{a}}_1 \bar{\mathbf{a}}_2 = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})(x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = \sum_{l=-m}^{n} a_{1l} \bar{\mathbf{a}}_2 \text{ш}_3(l) = \sum_{l=-m}^{n} a_{1l} \lambda_l$$

где λ_l - скаляр, вычисляемый по формуле (2), начиная с элементов $\lambda_0 = x_2, \lambda_1 = y_2, \lambda_2 = z_2$.

Таким образом, для получения скалярного произведения двух векторов $\bar{\mathbf{a}}_1$ и $\bar{\mathbf{a}}_2$ необходимо выделить из кода вектора $\bar{\mathbf{a}}_2$ коды координат x_2, y_2, z_2 , а потом выполнить умножение, используя эти коды как начальные частичные произведения. Коду произведения необходимо присвоить признак "число" ("скаляр").

Преобразование кода $\bar{\mathbf{a}}_2$ в коды координат выполняется следующим образом:

	запись нулей	сдвиг кода
для x_2	$a_2 = a_1 = a_{-1} = 0,$	$a_l^* = a_{l+2};$
для y_2	$a_3 = a_2 = a_0 = 0,$	$a_l^* = a_{l+3};$
для z_2	$a_1 = a_0 = a_{-2} = 0,$	$a_l^* = a_{l+1}.$

Здесь: a_l - цифры кода $\bar{\mathbf{a}}_2$; a_l^* - цифры кодов координат.

Если используется известное представление вектора в виде совокупности трех кодов, то для получения скалярного произведения необходимо выполнить три умножения и два сложения. В данном случае выполняется всего одно умножение.

Векторное произведение двух векторов $\bar{\mathbf{a}}_1$ и $\bar{\mathbf{a}}_2$ описывается выражением:

$$\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2 = \sum_{l=-m}^{n} a_{1l} (\bar{\mathbf{a}}_2 \times \text{ш}_3(l)) = \sum_{l=-m}^{n} a_{1l} \mathbf{V}_l$$

где $\mathbf{V}_l$ вычисляются по формуле (2), начиная с элементов $\mathbf{V}_0 = \bar{\mathbf{a}}_2 \times \mathbf{i},\ \mathbf{V}_1 = \bar{\mathbf{a}}_2 \times \mathbf{j},\ \mathbf{V}_2 = \bar{\mathbf{a}}_2 \times \mathbf{k}$.
В свою очередь эти начальные элементы вычисляются по формулам:

$$\mathbf{V}_0 = \sum_{l=-m}^{n} a_{2l} \mathbf{v}_{0l} ,\quad \mathbf{V}_1 = \sum_{l=-m}^{n} a_{2l} \mathbf{v}_{1l} ,\ ,\quad \mathbf{V}_2 = \sum_{l=-m}^{n} a_{2l} \mathbf{v}_{2l} ,$$

начиная с элементов: $\mathbf{v}_{00}=0,\ \mathbf{v}_{01}=-\mathbf{k},\ \mathbf{v}_{02}=\mathbf{j};\ \mathbf{v}_{10}=\mathbf{k},\ \ \mathbf{v}_{11}=0,\ \ \mathbf{v}_{12}=-\mathbf{i};$

$$\mathbf{v}_{20}=-\mathbf{j},\ \ \mathbf{v}_{21}=\mathbf{i},\ \ \mathbf{v}_{02}=0.$$

Таким образом, для получения векторного произведения двух векторов $\overline{\mathbf{a}}_1$ и $\overline{\mathbf{a}}_2$ необходимо выполнить три предварительных умножения, которые дают $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$, и одно заключительное умножение, которое дает $\overline{\mathbf{a}}_1 \times \overline{\mathbf{a}}_2$, т.е. всего четыре умножения. В известном случае требуется шесть умножений и три вычитания.

Пусть кватернион h представляется в виде:

$$h=a+bi+cj+dk=\sum_{l=-m}^{n} a_l \psi_4^k(l)\ ,$$

тогда произведение двух кватернионов h_1 и h_2 равно:

$$h_1 h_2=\sum_{l=-m}^{n} a_{2l} h_1 \psi_4^k(l)=\sum_{l=-m}^{n} a_{2l} h_l^*\ ,$$

где h_l^* - l-й элемент последовательности кватернионов, вычисляемой по формуле (3), начиная с элементов: $h_0^*=h_1,\ h_1^*=h_1 i,\ h_2^*=h_1 j,\ h_3^*=h_1 k$.

В свою очередь начальные элементы $h_1^*,\ h_2^*,\ h_3^*$ вычисляются по формуле:

$$h_g^*=\sum_{l=-m}^{n} a_{1l} h_{gl}\ ,\ g=1,2,3\ ,$$

начиная с элементов h_{gl}, значения которых выбираются исходя из правил умножения элементов i, j, k.

Таким образом, для получения произведения двух кватернионов необходимо выполнить три умножения для вычисления h_g^* и одно умножение, которое дает окончательный результат $h_1 h_2$, т.е. всего четыре умножения, тогда как в известном случае [9] требуется 16 умножений и 12 сложений.

Кватернион $h^*=a-bi-cj-dk$, являющийся спряженным с кватернионом $h=a+bi+cj+dk$, определяется путем умножения согласно формуле:

$$h^*=\sum_{l=-m}^{n} a_l w_l^*\ ,$$

где a_l - цифры кода кватерниона h.

Значения w_l^* вычисляются по формуле (3), начиная с элементов: $w_0^*=1, w_1^*=-i, w_2^*=-j, w_3^*=-k$.

Квадрат нормы кватерниона m^2 определяется как произведение $h \cdot h^*$ и вычисляется путем выполнения пяти умножений. Такое же количество умножений необходимо для вычисления обратного кватерниона h^{-1}.

Пусть октава O представляется в виде:

$$O=\gamma_1+\gamma_2 i+\gamma_3 j+\gamma_4 k+\gamma_5 e+\gamma_6 ie+\gamma_7 je+\gamma_8 ke=\sum_{l=-m}^{n} a_l \psi_8(l)\ ,$$

тогда произведение двух октав O_1 и O_2 определяется по формуле:

$$O_1 O_2=\sum_{l=-m}^{n} a_{2l} O_1 w_l=\sum_{l=-m}^{n} a_{2l} O_l^*\ ,$$

где O_l^* - l-й элемент последовательности октав, вычисляемой по формуле (4), начиная с элементов: $O_0^*=O_1,\ O_1^*=O_1 i,\ O_2^*=O_1 j,\ O_3^*=O_1 k,\ O_4^*=O_1 e,\ O_5^*=O_1 ie,\ O_6^*=O_1 je,\ O_7^*=O_1 ke$.

В свою очередь начальные элементы $O_g^*,\ g=1,2,\mathrm{K},7$ вычисляются по формуле:

$$O_g^* = \sum_{l=-m}^{n} a_{1l} O_{gl},$$

начиная с элементов O_{gl}, значения которых выбираются исходя из правил умножения элементов i, j, k, e, ie, je, ke.

Таким образом, для получения произведения двух октав необходимо выполнить семь умножений для вычисления O_g^* и одно умножение, которое дает окончательный результат, т.е. всего восемь умножений, тогда как в известном случае необходимо выполнить 64 умножения и 56 сложений.

Пусть 2×2-матрица представляется в виде:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = \sum_{l=-m}^{n} a_l \text{ш}_4^{\text{М}}(l),$$

тогда произведение двух матриц $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ вычисляется по формуле:

$$\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 = \sum_{l=-m}^{n} a_{2l} \mathbf{D}_1 \text{ш}_4^{\text{М}}(l) = \sum_{l=-m}^{n} a_{2l} \mathbf{D}_l^*,$$

начиная с матриц: $\mathbf{D}_0^* = \mathbf{D}_1 \text{ш}_4^{\text{М}}(0)$, $\mathbf{D}_1^* = \mathbf{D}_1 \text{ш}_4^{\text{М}}(1)$, $\mathbf{D}_2^* = \mathbf{D}_1 \text{ш}_4^{\text{М}}(2)$, $\mathbf{D}_3^* = \mathbf{D}_1 \text{ш}_4^{\text{М}}(3)$.

Вычисления $\mathbf{D}_g^*(g = 0;1;2;3)$ выполняются по формуле:

$$\mathbf{D}_g^* = \sum_{l=-m}^{n} a_{1l} \mathbf{D}_{gl}.$$

Начальные элементы $\mathbf{D}_{gl}$ выбираются исходя из правил умножения матриц.

Таким образом, для получения произведения двух матриц необходимо выполнить четыре умножения для вычисления $\mathbf{D}_g^*(g = 0;1;2;3)$ и одно умножение, которое дает окончательный результат, т.е. всего пять умножений. Наилучший из известных алгоритмов перемножения двух матриц размером 2×2 требует выполнения 7 умножений и 18 сложений.

Для вычисления определителя det $\mathbf{D}$=$d_{11}d_{22}$ - $d_{12}d_{21}$ в известном случае, необходимо два умножения и одно вычитание. В нашем случае det $\mathbf{D}$ вычисляется как скалярное произведение $\mathbf{D}$ $\mathbf{D}$:

$$\det \mathbf{D} = \mathbf{D}\ \mathbf{D} = \sum_{l=-m}^{n} a_l \mathbf{D} \text{ш}_4^{\text{М}}(l) = \sum_{l=-m}^{n} a_l \lambda_l,$$

начиная с элементов: $\lambda_0 = d_{22}$, $\lambda_1 = -d_{21}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$.

Таким образом, для вычисления det $\mathbf{D}$ достаточно выполнить всего одно умножение. Результату следует присвоить признак "число".

Пусть полином третьей степени $g(x)$ представляется в виде:

$$g(x) = \sum_{l=-m}^{n} a_{il} \psi_4^{\text{п}}(l),$$

тогда произведение двух полиномов $g(x)$ и $h(x)$ описывается выражением:

$$g\ (x)h(x) = \sum_{l=-m}^{n} a_l h(x) \psi_4^{\text{п}}(l) = \sum_{l=-m}^{n} a_l h_l^*(x),$$

где a_l - цифры кода полинома $g(x)$.

Полиномы $h_l^*(x)$ вычисляются по формуле (6), начиная с полиномов: $h_0^*(x) = h(x)$, $h_1^*(x) = h(x)x$, $h_2^*(x) = h(x)x^2$, $h_3^*(x) = h(x)x^3$.

В свою очередь, начальные полиномы $h_f^*(x)$, f=1,2,3 вычисляются по формуле:

$$h_f^*(x)=\sum_{l=-m}^{n}a_l h_{fl}(x),$$

где a_l - цифры кода полинома $h(x)$,

начиная с элементов h_{fl}, которые выбираются исходя из правил умножения мономов.

Необходимо учесть, что произведение $g(x)h(x)$ имеет не один, а два кода.

Таким образом, для получения произведения двух полиномов необходимо выполнить по два умножения для вычисления каждого из $h_f^*(x)$ и два умножения, которые дают два кода окончательного результата $g(x)h(x)$, т.е. всего восемь умножений, тогда как в известном случае [9] выполняется 16 умножений и 6 сложений.

Производная полинома $g\ (x)$ вычисляется по формуле:

$$g'(x)=\sum_{l=-m}^{n}a_l w_l^*\ ,$$

начиная с элементов: $w_0^*=0,\ w_1^*=1,\ w_2^*=2x,\ w_3^*=3x^2$.

Таким образом, для вычисления производной необходимо выполнить одно умножение.

Вычисление неопределенного интеграла $\int g(x)dx$ согласно формуле:

$$\int g(x)dx=\int\left(\sum_{l=-m}^{n}a_{il}\psi_4^{п}(l)\right)dx=\sum_{l=-m}^{n}a_{il}\left(\int\psi_4^{п}(l)dx\right)=\sum_{l=-m}^{n}a_{il}w_l^*,$$

сводится к умножению, начиная с элементов: $w_0^*=x,\ w_1^*=\frac{1}{2}x^2,\ w_2^*=\frac{1}{3}x^3,\ w_3^*=0$

Учитывая то, что коэффициенты начальных полиномов являются рациональными числами, их необходимо представить в виде целых чисел.

Когда x - любое целое число N, то вычисление значения $g(N)$ происходит по формуле:

$$g(N)=\sum_{l=-m}^{n}a_l w_l^*\ ,$$

начиная с элементов: $w_0^*=1,\ w_1^*=N,\ w_2^*=N^2,\ w_3^*=N^3$.

Выводы

1. Математические объекты, являющиеся точками p+1-мерного пространства, могут быть представлены с использованием базисных последовательностей одноименных математических объектов, основанных на p-числах Фибоначчи. При этом математический объект представляется в виде одного p-кода Фибоначчи, тогда как в известных случаях для этого используется p+1 двоичных кодов. Кроме того, различные математические объекты могут быть представлены одной разновидностью p-кода Фибоначчи, что обеспечит упрощение организации памяти данных и повышение производительности вычислительных устройств.

2. Сложение (вычитание) трехмерных векторов, комплексных и гиперкомплексных чисел, матриц и полиномов третьей степени сводится только до одного сложения (вычитания) соответствующих им p-кодов Фибоначчи, тогда как в известных случаях это требует от двух до восьми сложений (вычитаний).

3. В основе всех операций (кроме сложения и вычитания), характерных для каждого из математических объектов, лежит процедура формирования обобщенной последовательности Фибоначчи, элементы которой являются математическими объектами, сформированными на основе p-чисел Фибоначчи. При этом для вычислений над кодированными математическими объектами требуется от 2 до 8 раз меньшее количество операций сложения (вычитания) и умножения, чем в известных случаях.

Литература

1. Грегори Р., Кришнамурти Е. Безошибочные вычисления. Методы и приложения: Пер. с англ. - М.: Мир, 1988. - 208 с.

2. Horadam A. F. Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions // Amer. Math. Monthly.- 1963.- Vol. 70.- P. 289-291.

3. Marjorie Bicknnell, Hoggatt V.E., jr. Fibonacci Matrices and Lambda Functions // The Fibonacci Qurterly.- 1963.- Vol. 1, № 2.- P. 47-52.

4. Hoggatt V.E., Majorie Bicknell. Root of Fibonacci Polinomials // The Fibonacci Quarterly.- 1973. - Vol. 11, № 3.- P. 271-274.

5. Piero Filipponi. A Family of 4-By-4 Fibonacci Matrices // The Fibonacci Quarterly. - 1997. - Vol. 35.4. - P. 300-308.

6. Lin Dazheng. Fibonacci Matrices // The Fibonacci Quarterly. - 1999. - Vol. 37.1. - P. 14-20.

7. Стахов А. П., Лужецкий В. А. Машинная арифметика ЦВМ в кодах Фибоначчи и золотой пропорции. - М.: Научный Совет АН СССР по комплексной проблеме "Кибернетика", 1981. - 64с.

8. Стахов А. П. Коды золотой пропорции. – М.: Радио и связь, 1984. – 150 с.

9. Сикорский В.П. Математический аппарат инженера. Изд. 2-е, стереотип. - К.: Техніка, 1977. - 758 с.