УДК 681.325.5

О. Д. Азаров, О. І. Черняк, О. Г. Муращенко

ІНФОРМАЦІЙНІ АСПЕКТИ ЛІЧБИ У МОДИФІКОВАНІЙ ФІБОНАЧЧІЄВІЙ СИСТЕМІ ЧИСЛЕННЯ

Вінницький національний технічний університет

Анотація. У статті подано інформаційні аспекти, покладені в основу організації швидкої лічби у модифікованій фібоначчієвій системі числення. Наведено аналітичні вирази для опису базису і алфавіту даної системи числення. Описано відмінність її від класичної фібоначчієвої системи числення та показано, як представляються у ній числа. У модифікованій фібоначчієвій системі числення можна виконувати над кодами фібоначчієве перетворення з перенесенням у старші розряди, яке є умовною арифметичною операцією і реалізує перенесення раніше, ніж виникне переповнення. Наведено аналітичні вирази, що описують такі перетворення. Сформульовано і доведено твердження про те, що при виконанні всіх можливих фібоначчієвих перетворень на кожному такті прямої лічби отриманий код буде мати не більше двох сусідніх одиниць. Це дозволяє організувати швидку пряму лічбу без довгих ланцюгів розповсюдження перенесення.
Ключові слова: лічба, модифікована фібоначчієва система числення, фібоначчієве перетворення, перенесення.
Аннотация. В статье представлены аспекты информации, положенные основу организации счета в модифицированной фибоначчиевой системе счисления. Приведены аналитические выражения для описания базиса и алфавита этой системы счисления. Описано ее отличие от классической фибоначчиевой системы счисления и показано, как представляются в ней числа. В модифицированной фибоначчиевой системе счисления можно выполнять над кодами фибоначчиевые преобразования с переносом в старшие разряды, которое является условной арифметической операцией и реализует перенос раньше, чем произойдет переполнение. Приведены аналитические выражения, которые описывают такие преобразования. Сформулировано и доказано утверждение о том, что при выполнении всех возможных фибоначчиевых преобразований на каждом такте прямого счета получившийся код будет иметь не более двух соседних единиц. Это позволяет организовать быстрый прямой счет без длинных цепочек распространения переноса.
Ключевые слова: счет, модифицированная фибоначчиевая система счисления, фибоначчиевое преобразование, перенос.
Abstract. The article presents information aspects, laid the basis for the organization of a quick count in the modified Fibonacci numerical system. Analytical expressions are used to describe the basis and the alphabet of this number system. Describes the difference from the classical Fibonacci numerical system and shows how numbers are represented in it. In the modified Fibonacci numerical system can perform over codes Fibonacci conversion with carrying over to the senior categories, which is a conditional arithmetic operation and realizes carrying before the overflow occurs. Expressions are suggested that describe such conversion. Formulated and proved the assertion that if to execute all possible Fibonacci transformation on each clock cycle of direct counting then the resulting code will have no more than two neighboring units. This allows you to organize a quick direct counting without long chains of carrying.
Keywords: counting, Fibonacci numerical system, Fibonacci transform, carrying.

Вступ

Розширення галузі використання лічильників потребує підвищення швидкості їх роботи. Останнім часом набувають популярності системи прямого цифрового синтезу аналогових сигналів за допомогою цифро-аналогових перетворювачів. При цьому до ЦАП висуваються вимоги високої швидкодії та зменшення завад, що виникають при перемиканні розрядів у процесі зміни коду. Відомо публікації, в яких вказується, що використання фібоначчієвих ЦАП дозволяє зменшити вплив таких завад [1]. Одним з важливих елементів системи прямого цифрового синтезу аналогових сигналів з фібоначчієвим ЦАП є швидкодіючий фібоначчієвий лічильник, розробка якого є актуальною задачею.

Головним завданням на шляху вирішення даної задачі є зменшення часу на розповсюдження перенесення, що виникає на кожному такті лічби і обмежує її швидкість. Традиційними способами підвищення швидкодії лічби є організація послідовного, наскрізного чи паралельного перенесення та їх комбінацій [2]. Всі вони мають недоліки. Тому перспективним є підвищення швидкодії лічби за рахунок введення інформаційної надлишковості і використання надлишкових таких систем числення, що мають адитивне співвідношення між вагами розрядів [3]. До них належать також фібоначчієва система числення та система числення золотої пропорції. Такі системи числення дозволяють при додаванні виконувати перенесення раніше, ніж виникне переповнення [3-...]. Проте, даний підхід потребує аналітичного дослідження для обгрунтування його коректності.

Метою статті є розробка інформаційних аспектів швидкої прямої лічби у модифікованій фібоначчієвій системі числення (МФ-системі числення) та дослідження на їх основі довжини перенесення, що виникає на кожному такті такої лічби.

Теоретичні положення МФ-системи числення

Модифікована фібоначчієва система числення належить до класу надлишкових позиційних систем числення. Тому її можна описати за допомогою набору з двох множин: базису або множини ваг розрядів Ф і алфавіту або множини цифр D:

$$\left\{\begin{matrix} \Phi:\{\varphi_0=1,\varphi_1=2,\underset{i>1}{\forall}(\varphi_i=\varphi_{i-1}+\varphi_{i-2})\} \\ D:\{0,1\} \end{matrix}\right\}. \qquad (1)$$

Базис являє собою множину ваг розрядів φ_i, причому, φ_0 = 1, φ_1 = 2, а для кожного i > 1 виконується співвідношення $\varphi_i = \varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}$. Алфавіт являє собою множину з двох цифр 0 і 1. Дана система числення подібна до відомої фібоначчієвої системи числення (Ф-системи числення) за виключенням ваги φ_1. У відомій фібоначчієвій системі числення φ_1 = 1, а в модифікованій φ_1 = 2. Оскільки у відомій системі числення φ_2 = 2, то коди, якими представляються числа в МФ-системі числення, фактично мають на один розряд менше ніж у Ф-системі числення, що приводить до зменшення інформаційної надлишковості. Наприклад, в Ф-системі числення число 53 можна представити кодом 100110110, а в МФ-системі числення це ж число можна представити кодом 10011011.

МФ-система числення призначена для представлення цілих чисел за допомогою двійкових кодів. Будь-яке ціле число X у ній може бути представлене n-розрядним кодом $x_{n-1}x_{n-2}...x_{i}..x_1x_0$, де $x_i \in D$ відповідно до виразу (3.1), а n визначається за співвідношенням $\varphi_{n-1} \le X \le \varphi_{n-2}$. Будемо позначати n-розрядний двійковий код $x_{n-1}x_{n-2}...x_{i}..x_1x_0$ як X_0^n, а його частину довжиною в k розрядів, починаючи з i-го як X_i^k. В МФ-системі числення значення X коду X_0^n визначається виразом:

$$X=\sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot w_i\ . \qquad (2)$$

Важливою характеристикою МФ-системи числення є наявність фібоначчієвого співвідношення (F-співвідношення) між вагами розрядів:

$$F:\underset{i>1}{\forall}(\varphi_i=\varphi_{i-1}+\varphi_{i-2})\ . \qquad (3)$$

Для i-го розряду існує i-те адитивне співвідношення:

$$F_i:\varphi_i=\varphi_{i-1}+\varphi_{i-2}\,. \qquad (4)$$

Фібоначчієве співвідношення між розрядами в МФ-системі числення дозволяє виконувати фібоначчієві перетворення кодів (F-перетворення). Фібоначчієві перетворення бувають двох типів: F-перетворення з перенесенням у старші розряди (FL-перетворення) і F-перетворення з перенесенням у молодші розряди розряди (FR-перетворення).

FL-перетворення коду X_0^n є умовною арифметичною операцією, що виконується над всіма його розрядами, крім нульового і першого. Дане перетворення полягає у тому, що для будь-якого i>1 у випадку, якщо x_i=0, x_{i-1}=1, x_{i-2}=1, виконується додавання одиниці в розряд x_i і віднімання одиниць у розрядах x_{i-1} та x_{i-2}. FL-перетворення коду X_0^n записується виразом

$$FL(X_0^n)=\underset{x_i=0\wedge x_{i-1}=1\wedge x_{i-2}=1}{\forall}(X_0^n+\varphi_i-\varphi_{i-1}-\varphi_{i-2})\,.$$

Відповідно до (3.4) i-те FL-перетворення коду виконується над i-м, (i-1)-м та (i-2)-м розрядами цього коду і записується виразом

$$FL_i(X_0^n)=\left\{\begin{matrix} X_0^n+\varphi_i-\varphi_{i-1}-\varphi_{i-2} \text{ при } x_i=0\wedge x_{i-1}=1\wedge x_{i-2}=1; \\ X_0^n \text{ при } x_i\ne 0\vee x_{i-1}\ne 1\vee x_{i-2}\ne 1; \end{matrix}\right\}.$$

FR-перетворення коду X_0^n є умовною арифметичною операцією, що виконується над всіма його розрядами, крім нульового і першого. Дане перетворення полягає у тому, що для будь-якого i>1 у випадку, якщо x_i=1, x_{i-1}=0, x_{i-2}=0, виконується віднімання одиниці в розряді x_i і додавання одиниць у розряди x_{i-1} та x_{i-2}. FR-перетворення коду X_0^n записується виразом

$$FR(X_0^n) = \underset{x_i=0 \wedge x_{i-1}=1 \wedge x_{i-2}=1}{\forall} (X_0^n - \varphi_i + \varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}).$$

Відповідно, і-те FR-перетворення коду виконується над і-м, (і-1)-м та (і-2)-м розрядами цього коду і записується виразом

$$FR_i(X_0^n) = \left\{ \begin{array}{l} X_0^n - \varphi_i + \varphi_{i-1} + \varphi_{i-2} \text{ при } x_i = 1 \wedge x_{i-1} = 0 \wedge x_{i-2} = 0; \\ X_0^n \text{ при } x_i \neq 1 \vee x_{i-1} \neq 0 \vee x_{i-2} \neq 0; \end{array} \right\}.$$

FL- і FR-перетворення подібні до відомих операцій згортки і розгортки, що полягають у заміні одного коду на інший. Але, на відміну від логічних операцій згортки і розгортки, FL- і FR-перетворення визначені як умовні операції додавання і віднімання, що виконуються над частинами коду, не змінюючи значення всього коду. Таке визначення дозволяє позиціонувати дані перетворення як перенесення і запозичення. Отже, в МФ-системі числення перенесення і запозичення можуть виконуватись раніше, ніж виникне переповнення у розрядах. Це дозволяє відокремити перенесення і запозичення від додавання чи віднімання одиниці при лічбі. Завдяки такому виконанню перенесень і запозичень вони мають обмежену довжину розповсюдження у розрядах коду, що покладено в основу побудови швидкодіючих лічильників в МФ-системі числення.

Інформаційні аспекти лічби у МФ-системі числення

Під час прямої лічби у даній системі числення на кожному такті над кодом лічильника, отриманим на попередньому такті, виконується FL-перетворення і до нього додається одиниця:

$$X_0^n(i) = FL(X_0^n(i-1)) + 1. \tag{5}$$

У випадку, якщо $(FL(X_0^n(i-1)))_0^3 = 011$, таке додавання призведе до перенесення з нульового у перший розряд, наприклад, 1001+1=1010. Якщо ж на попередньому такті $(X_0^n(i-1))_0^3 = 011$, то відповідно до (3)

$$(FL(X_0^n(i-1)))_0^3 = (FL_2(X_0^n(i-1)))_0^3 = 100.$$

Тому в цьому випадку після FL-перетворення попереднього коду додавання одиниці у його молодший розряд не призведе до перенесення у другий розряд, наприклад:

$$X_0^4(i-1) = 1011,$$
$$FL(1011)=FL_2(1011)=1100,$$
$$1100+1=1101.$$

Як видно з даного прикладу, після виконання і-го FL-перетворення розряди x_{i-1} та x_{i-2} мають нульові значення. Це дозволяє виконувати перенесення у дані розряди без його подальшого розповсюдження у старші розряди, тобто:

$$FL_i(X_0^n(i-1)) + 1 = (X_0^n(i-1))_{i+1}^{n-i-1} + X_0^{i+1}(i).$$

Збільшення будь-якого розряду коду лічильника, починаючи з другого, відбувається лише за рахунок FL-перетворення, тобто, перенесення з молодших розрядів. Очевидно, що при цьому вага таких перенесень завжди більша ваги молодшого розряду, на яку збільшується значення у лічильнику на кожному такті. Тому даний метод лічби не призведе до переповнення у розрядах коду лічильника. Більш того, кількість сусідніх одиниць коду, через які можливе перенесення на кожному такті, становить не більше двох. Це обґрунтовується наведеним далі твердженням.

Твердження 1. Якщо на кожному такті роботи фібоначчієвого лічильника додається одиниця до молодшого розряду та виконуються всі можливі FL-перетворення, то в його коді не може бути більше двох сусідніх одиниць, через які відбувається перенесення.

Доведення твердження 1. Перенесення через (n-1)-й розряд можливе лише при переповненні лічильника. Тому даний випадок не потребує доведення. Справедливість твердження 1 для нульового і першого розрядів очевидна. Виходячи з цих міркувань, доведення твердження буде проведено методом неповної математичної індукції для n-розрядного лічильника відносно номерів розрядів, починаючи з номера (n-2) до номера 2. Позначимо n-розрядний код лічильника через X_0^n, а його i-й розряд позначимо через x_i. Доведення справедливості твердження 1 для розрядів x_{n-2}, x_{n-3}, x_{n-4} виконаємо методом від зворотного. Припустимо, що на деякому i-у такті в результаті перетворення $FL_{n-4}(X_0^n)$ у розряд x_{n-4} у розрядах x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, x_{n-4} утворився код, що має підряд три одиниці: $X_{n-4}^4(i) = 0111$. Для цього необхідно, щоб на (i-1)-у такті код у цих розрядах був $X_{n-4}^4(i-1) = 0110$ (розряд x_{n-1} повинен знаходитись у нульовому стані, інакше буде переповнення лічильника). Але у такому випадку на i-у такті над розрядами x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3} виконується FL_{n-1}-перетворення

$$FL_{n-1}(0110x_{n-5}..x_0) = 1000x_{n-5}..x_0$$

і тому у цих розрядах утвориться код 100. Це означає неможливість появи трьох сусідніх одиниць у розрядах x_{n-2}, x_{n-3}, x_{n-4}. Отже, для цих номерів розрядів справедливість твердження 1 доведена. Далі, вважаючи дане твердження справедливим для розрядів x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, доведемо його справедливість для розрядів x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}. Справедливість твердження1 для розрядів x_i, x_{i-1}, x_{i-2} означає, що у цих розрядах не може бути більше двох сусідніх одиниць.

Доведення справедливості твердження 1 для розрядів x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3} так само виконаємо методом від зворотного. Припустимо, що на деякому i-у такті в результаті перенесення у розряд x_{i-3} у розрядах x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3} утвориться код, що має підряд три одиниці. Оскільки у розрядах x_i, x_{i-1}, x_{i-2} не може бути більше двох сусідніх одиниць, то це може бути лише код 0111, тобто:

$$X_0^n(i) = x_{n-1}..x_{i+1}0111x_{i-3}..x_0\,.$$

Для появи такого коду необхідно, щоб на (i-1)-у такті код у цих розрядах був 0110, тобто:

$$X_0^n(i-1) = x_{n-1}..x_{i+1}0110x_{i-3}..x_0\,.$$

Але у такому випадку на i-у такті над розрядами x_i, x_{i-1}, x_{i-2} виконується FL_i-перетворення

$$FL_i(x_{n-1}..x_{i+1}0110x_{n-3}..x_0) = x_{n-1}..x_{i+1}1000x_{i-3}..x_0\,.$$

В результаті даного перетворення на i-у такті у розрядах x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3} утвориться код 1000. У випадку виникнення на i-у такті перенесення в (i-3)-й розряд в цих розрядах утвориться код 1001. Це означає неможливість появи трьох сусідніх одиниць у розрядах x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}. Таким чином, справедливість твердження 1 доведена.

З твердження 1 слідує, що виконання всіх можливих FL-перетворень на кожному такті прямої лічби приводить до того, що перенесення у старші розряди не буде розповсюджуватись далі ніж через два розряди. Тому врахування його як паралельне перенесення потребує незначних апаратних витрат. Це дозволяє будувати в МФ-системі числення швидкодіючі лічильники з помірними апаратними витратами.

Висновки

У статті подано теоретичні аспекти модифікованої фібоначчієвої системи числення (МФ-системи числення) та інформаційні аспекти, покладені в основу організації швидкої лічби у цій системі числення. Наведено аналітичні вирази для опису базису і алфавіту даної системи числення, яка, на відміну від класичної фібоначчієвої системи числення, дозволяє представляти числа кодами, що мають довжину на один розряд меншу. У МФ-системі числення можна виконувати над кодами фібоначчієве перетворення з перенесенням у старші розряди (FL-перетворення), яке є умовною арифметичною операцією і реалізує перенесення раніше, ніж виникне переповнення. Наведено аналітичні вирази, що описують такі перетворення. Сформульовано і доведено твердження про те, що при виконанні всіх можливих FL-перетворень на кожному такті прямої лічби отриманий код буде мати не більше двох сусідніх одиниць. Це дозволяє організувати швидку пряму лічбу без довгих ланцюгів розповсюдження перенесення і з помірними апаратними витратами.

Література

1. Olexiy D. Azarov ; Olexander G. Murashchenko ; Olexander I. Chernyak ; Andrzej Smolarz and Gulzhan Kashaganova " Method of glitch reduction in DAC with weight redundancy ", *Proc. SPIE* 9816, Optical Fibers and Their Applications 2015, 98161T (December 18, 2015); doi:10.1117/12.2229045; http://dx.doi.org/10.1117/12.2229045.

2. Азаров О. Д. Метод побудови швидкодіючих фібоначчієвих лічильників / О. Д. Азаров, О. І. Черняк // Проблеми інформатизації та управління – 2014. – №2(46). – С 5-8.

3. Азаров О. Д. Визначення довжини перенесення при додаванні в системах числення з адитивними та мультиплікативними співвідношеннями між вагами розрядів / О. Д. Азаров, О. І. Черняк // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація. – 2004. – Випуск 74. – С. 401–407. – ISSN 1996-1588.

4. Азаров О. Д. Структурна організація побітового множення і ділення кодів золотої пропорції / О. Д. Азаров, О. І. Черняк // Проблеми інформатизації та управління. – 2007. – Вип. 3(21). – С. 5–13. – ISSN 2073-4751.

5. Азаров О. Д. Розрядність пристроїв порозрядного додавання в ам-системах числення [Електронний ресурс] / О. Д. Азаров, О. І. Черняк // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. - 2010. - № 4. - Режим доступу : http://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/233.

6. Азаров О. Д. Структурна організація побітового додавання і віднімання кодів золотої 1-пропорції з урахуванням знаків / О. Д. Азаров, О. І. Черняк // Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія. – 2011. – № 3(22). – С. 13–16. – ISSN 1999-9941.

7. Азаров О. Д. Аналіз витрат обладнання пристроїв побітової арифметики у системі числення золотої 1-пропорції [Текст] / О. Д. Азаров, О. І. Черняк // Проблеми інформатизації та управління. – Київ : НАУ, 2012. – № 2(38). - С. 5-9. – ISSN 2073-4751.

8. Азаров О. Д. Повнофункціональна побітова потокова арифметика зі зменшеними витратами обладнання. : монографія / О. Д. Азаров, О. І. Черняк. – Вінниця : ВНТУ, 2013. 200с.

9. Азаров О. Д. Обмеження адитивних співвідношень при порозрядній потоковій обробці в АМ-системах числення / О. Д. Азаров, О. І. Черняк //Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. - 2014. - Вип. 3(31). - С. 67-71. - ISSN 1999-9941.

10. Азаров О. Д. Порозрядне додавання в АМ-системах числення на основі адитивних перетворень / О. Д. Азаров, О. І. Черняк, О. Г. Муращенко // Проблеми інформатизації та управління. - 2014. - Вип. 1(45). - С. 14-21. - ISSN 2073-4751.

Стаття надійшла: 11.03.2017.

Відомості про авторів

Азаров Олексій Дмитрович, д.т.н., професор, декан факультету інформаційних технологій та комп’ютерної інженерії Вінницького національного технічного університету, заслужений працівник освіти України; адреса: 21021, м. Вінниця.

Черняк Олександр Іванович, к.т.н., доцент кафедри обчислювальної техніки Вінницького національного технічного університету.

Муращенко Олександр Геннадійович, інженер ТОВ "Він-Інтерактив".