

Парадокси тертя, гальмівна колодка і колесо

Вінницький Національний Технічний Університет

Анотація. Розглянуто парадокси тертя між гальмівною колодкою і колесом. Вказано на проблему відриву гальмівної колодки від колеса, при великому моменті.

Ключові слова: парадокс, тертя, гальмівна колодка, колесо.

Abstract. Considered paradoxes of friction between the brake pads and wheel. Specified on the issue of separation of brake pads on wheels, with a large moment.

Keywords: paradox, friction, brake pads, wheel.

Загальна характеристика тертя

В оточуючому нас світі дуже часто доводиться спостерігати зіткнення різних тіл. Ці зіткнення, як правило, супроводжуються значною зміною їх швидкостей. При цьому, як правило, зміна швидкості проходить за короткі відрізки часу. При зіткненні тіл проходить їх деформація, і тому результати зіткнення сильно залежить від здібності тіл відновлювати свою початкову форму. Виявилося, що застосовувана для опису модель руху абсолютно твердого тіла не придатна для опису самого моменту зіткнення. Для виходу із цієї ситуації почали припускати що в момент зіткнення відбуваються стрибкоподібні зміни їх швидкостей, а величинами змін можна нехтувати.

Нехай по горизонтальній площині ковзять тіло (Рис. 1).

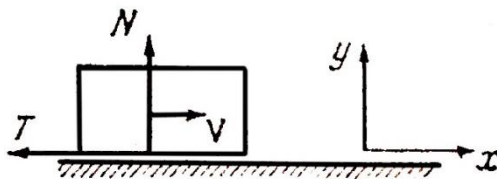


Рис. 1 Ковзання тіла по горизонтальній площині

Рівняння руху тіла можна записати:

$$m\ddot{x} = -T \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = N - P \quad (2)$$

Якщо рух відбувається по похилій площині (Рис. 2), то рівняння руху можна записати:

$$m\ddot{x} = P \sin \alpha - T \quad (3)$$

$$m\ddot{y} = N - P \cos \alpha = 0 \quad (4)$$

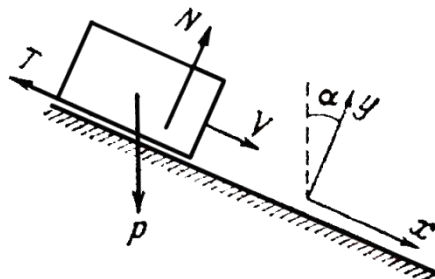


Рис. 2 Ковзання тіла по похилій площині

Сила тертя T пропорційна величині реакції N , напрямлена в ту сторону, що протилежна ковзанню і коефіцієнт пропорційності f не залежить від швидкості ковзання.

$$|T| = f |N| \quad (5)$$

Як бачимо, T знаходиться в залежності від величини N , і це проявлюється при русі тіл.

Парадокс «Удар тертям»

Розглянемо гальмівний пристрій. (Рис. 3).

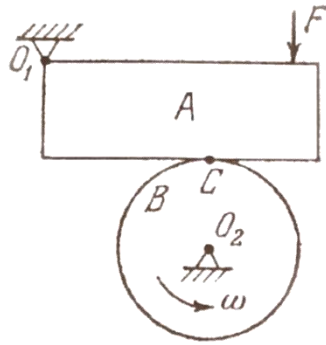


Рис. 3 Гальмівний пристрій

Гальмівна колодка А прямокутної форми може обертатися навколо нерухомої осі O_1 . Колесо В рухається навколо осі O_2 . В точці С ці тіла мають точку дотику. Коефіцієнт тертя між тілами дорівнює f . Припустимо, що осі вертикальні, тоді сила нормальної реакції і сила тертя між колодкою і колесом рівні 0, і колесо може обертатися навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю ω_0 . Нехай тепер до колодки прикладена сила F , що прижимає колодку до колеса.

Перш, ніж розглянути гальмування, розглянемо рівняння руху колеса. Від тіла А на колесо діють дві сили – сила ваги N та сила тертя T (Рис. 4), яка направлена, як показано на рисунку, тобто проти руху колеса.

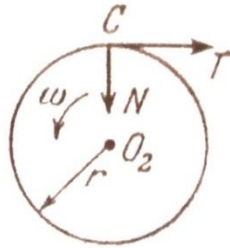


Рис. 4 Сили, що діють на колесо В

Рівняння руху колеса:

$$I\dot{\omega} = -rT \quad (6)$$

де I – момент інерції, а ω – кутова швидкість обертання. Якби була б відома величина сили T , то із рівняння (6) можна було б знайти закон гальмування колеса.

Тепер розглянемо тіло А (Рис. 5).

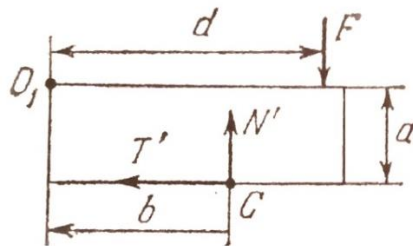


Рис. 5 Сили що діють на гальмівну колодку А

Гальмівна колодка знаходилась в спокої, обертання її за часовою стрілкою навколо осі O_1 перешкоджає колесу В, а в протилежному напрямку – сила F , тому колодка і залишається в спокої. Рівняння рівноваги тіла А – це рівність нулю суми моментів відносно точки O_1 сил F , N' , T' , що прикладені до тіла А.

$$Fd + T'a = N'b \quad (7)$$

необхідно також рівняння (6), (7) доповнити рівняннями (8)

$$T = T', \quad N = N', \quad |T| = f|N| \quad (8)$$

Для того, щоб розв'язати систему рівнянь (7) – (8), підставимо (8) в (7), отримаємо рівняння (9):

$$Fd = bN - f|N|a \quad (9)$$

Рішення цього рівняння:

якщо $N > 0$, то

$$N = \frac{Fd}{b - fa} \quad (10)$$

якщо $N < 0$, то

$$N = \frac{Fd}{b + fa} \quad (11)$$

Вирази (10) не суперечать один одному лише при $b > fa$, а вирази (11) суперечать один одному завжди, до того ж, $N < 0$ не має механічного змісту в цій задачі.

Тобто, при виконанні умови

$$b > fa \quad (12)$$

ми можемо визначити N , потім знайти T і розв'язати рівняння (6). Якщо ж умова (12) порушується, а це завжди можна досягти, збільшивши a , тобто один із розмірів тіла А, чи підбравши пару поверхонь з більшим коефіцієнтом тертя, то система рівнянь (7) – (8) не має рішення, і відповідно, неможливо визначити праву частину рівняння (6).

Парадокс задачі в тому, що тіло А начебто має знаходитися в спокої, але сили, що діють на нього не знаходяться в рівновазі, оскільки сума сил N' , T' мають відносно осі O_1 момент того ж знаку, що і момент сили F (Рис. 6), тобто тіло А повинно обертатися за часовою стрілкою під дією прикладених до нього сил. Але обертанню тіла А в цьому напрямку заважає колесо В, тому такий рух не в змозі розпочатися.

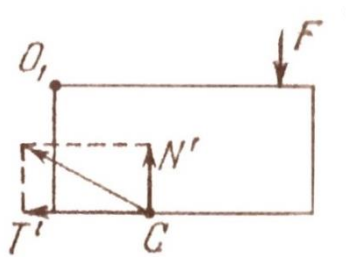


Рис.6 Нерівновага сил тіла А

Зовсім по-іншому справа, коли колесо В обертається в іншому напрямі, задача має повне рішення. Для того, щоб зрозуміти, як розвивається рух колеса при $b < fa$, потрібно спочатку розглянути рух тіла при $b > fa$, де задача має повне рішення.

Із умов (8) та (10) знайдемо величину сили тертя:

$$T = \frac{fFd}{b - fa} = c \quad (13)$$

і підставимо її в рівняння руху колеса (6):

$$I\dot{\omega} = \frac{fFdr}{b - fa} = -cr \quad (14)$$

Розв'язок рівняння (14) має вигляд:

$$\omega - \omega_0 = -\frac{cr}{I}(t - t_0) \quad (15)$$

Тут ω_0 – початкова кутова швидкість, з якою тіло оберталося до того, як була притиснута гальмівна колодка до колеса в момент часу t_0 .

Вираз (15) визначає закон зміни кутової швидкості колеса по часу. Із нього можна зробити висновок, що кутова швидкість змінюється, і при

$$t = t_0 + \frac{\omega_0(b - fa)I}{Ffdr} = -cr \quad (16)$$

проходить зупинка колеса. Цей висновок повністю відповідає загальновідомим гальмуючим властивостям тертя. Час до зупинки пропорційний величині $b - fa$, тобто зупинка колеса відбувається тим швидше, чим менше $b - fa$.

Тепер маємо розглянути властивості руху при $b < fa$. Збільшення тертя в принципі має призводити до більш інтенсивного гальмування, що і підтверджується виразом (16). Оскільки при $b = fa$ час гальмування теоретично рівний нулю, а ще більше зменшитися час не може, то при $b < fa$ також повинна проходити моментальна зупинка колеса. Для цього необхідно, щоб сила тертя могла б приймати нескінченно великі значення. І тільки в цьому випадку можливі стрибкоподібні зміни швидкості.

Для визначення максимального значення сили тертя маємо прийняти, що наприклад колесо знаходиться в стані спокою ($\omega=0$). Якщо спробувати розкрутити колесо проти часової стрілки парою сил з моментом M . Якщо ж сила тертя T , необхідна для запобігання руху колеса, і нормальний тиск N задовільняють умову (17),

$$|T| \leq f|N| \quad (17)$$

то обертання колеса не зможе і розпочатися.

Із рівняння рівноваги колеса і колодки

$$\begin{aligned} rT &= M, \\ Fd + Ta &= bN \end{aligned} \quad (18)$$

можна отримати:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{r}, \\ N &= \frac{Fd}{b} + \frac{Ma}{rb} \end{aligned} \quad (19)$$

$$|T| - f|N| = \frac{M}{r} \left(1 - \frac{fa}{b}\right) - \frac{fdF}{b} < 0 \quad (20)$$

при $b < fa$, тобто вивести колесо із стану спокою і заставити обертатися його проти руху часової стрілки неможливо. Ми можемо прикладати до колеса сили з як завгодно великим моментом, але це призведе лише до одночасного збільшення тиску і сили тертя. При тому ж сила тертя завжди може врівноважити дію прикладених нами сил до колеса.

Співставивши ці два факти, маємо, що з однієї сторони сила тертя при $b - fa < 0$ може приймати такі стільки завгодно великі значення, що колесо неможливо вивести зі стану спокою, а з іншого боку, при $b - fa < 0$ рівняння руху, складене у відповідності до законів механіки не мають рішення.

Отже ми бачимо, неможливість подальшого руху колеса. Це значить що як тільки гальмівна колодка торкнеться до колеса, то колесо не буде продовжувати обертатися в заданому напрямі, торкаючись до гальмівної колодки. Кутова швидкість колеса в результаті взаємодії з колодкою зміниться стрибкоподібно, неначе колесо стикнулось з іншим тілом. Це явище називається «удар тертям». Далі можуть відбуватися такі результати взаємодії колодки і колеса. Перший варіант – колесо моментально зупиняється. Другий – колодка відскакує від колеса. Третій – колесо може розпочати обертатися в протилежному напрямі з деякою кутовою швидкістю.

Тільки експеримент може показати, який із трьох варіантів відбудеться при «ударі тертям», і яка швидкість частин системи після цього «удару».

Парадокс моменту

Але це ще не все. Мабуть найбільш неочікуване проходить тоді, якщо ми будемо намагатися повернути гальмівну колодку проти часової стрілки силою F і одночасно розкрутити колесо в тому ж напрямку парою сил з моментом M (рис. 7).

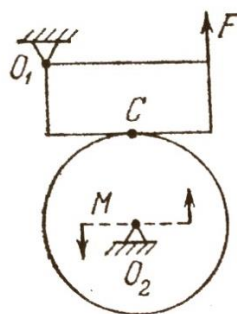


Рис. 7 Одночасне повернення гальмівної колодки силою F з розкруткою колеса в тому ж напрямку парою сил з моментом M

Рівняння руху колодки і колеса мають вигляд:

$$I\dot{\omega} = M \quad (21)$$

$$I_1\dot{\omega}_1 = Fd$$

якщо колодка відірвалася від колеса, або

$$I_1\dot{\omega}_1 = M - Tr \quad (22)$$

$$Fd + bN' - aT' = 0$$

якщо відрив не відбувся. Тут I_1 – момент інерції відносно осі O_1 , а ω_1 – її кутова швидкість.

Перевіряємо можливість збереження контакту між колесом та колодкою, бо доти, доки не відбувся відрив, ми не можемо використовувати вказані рівняння.

Враховуючи, що

$$T = T', \quad N = N', \quad |T| = f|N| \quad (23)$$

отримаємо

$$-Fd = bN - fa|N| \quad (24)$$

тобто при $N > 0$

$$N = -\frac{Fd}{b - fa} \quad (25)$$

при $N < 0$

$$N = -\frac{Fd}{b + fa} \quad (26)$$

при $b - fa < 0$ обидві пари співвідношень не містять в собі протиріччя, тобто можуть бути математично розв'язані, для визначення, яке з рівнянь використовувати, варто побачити, що рівняння (26) не має механічного змісту, так як сила N може бути направлена тільки вгору. Колесо розпочне обертатися проти часової стрілки, тільки якщо момент достатньо великий

$$M > \frac{fdrF}{fa - b} \quad (25)$$

Остаточний висновок: пара сил з достатньо великим моментом може перешкоджати відриву колодки від колеса, завдяки тертю ковзання.

«Парадокси» тертя були виявлені відомим французьким механіком П. Пенвеле в кінці XIX століття при аналізі рівнянь руху механічних систем, в яких тіла ковзять по поверхні один одного, а сили тертя що утворюються підпорядковуються рівнянню (5). До цього часу так і немає остаточної відповіді на поставлені П. Пенлеве питання. [1, 2]

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. Самсонов В. А. Очерки о механике: некоторые задачи, явления и парадоксы / В. А. Самсонов - М. : Наука, 1960. – 64с.
2. Савин Г. Н. Очерки развития некоторых фундаментальных проблем механики / Г. Н. Савин, Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин ; ; АН УССР. Институт механики. Киевский политехнический институт. - К.: : [б. и.], 1964. - 375 с.

Назаренко Михайло Володимирович, Вінницький Національний Технічний Університет; Факультет будівництва, теплоенергетики та газопостачання; студент групи БТ - 15, e-mail: nazarenko.mishka@gmail.com

Науковий керівник: Молодецька Тетяна Ігорівна, кандидат технічних наук, старший викладач кафедри Опору матеріалів та прикладної механіки ВНТУ, Вінницький національний технічний університет, e-mail: molodetska_tanya@ukr.net

Mikhail V. Nazarenko, Vinnytsia National Technical University, Faculty for Civil Engineering, Thermal Power Engineering and Gas Supply; a student group CE – 15.

Supervisor: Tatyana I. Molodetska, Candidate of Science (Engineering), Senior Lecture of Department of Materials resistance and applied mechanics of VNTU, the Vinnytsya National Technical University.