УДК 512.534.5

А.А. Барковська
В.Д. Дереч

КЛАСИФІКАЦІЯ СКІНЧЕННИХ ГРУП, ДЛЯ ЯКИХ ІНВЕРСНИЙ МОНОЇД ЛОКАЛЬНИХ АВТОМОРФІЗМІВ Є ПЕРЕСТАВНИМ

Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики

Анотація

Напівгрупа S називається переставною, якщо для довільної пари конгруенцій ρ і σ має місце рівність $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$. Локальним автоморфізмом напівгрупи S називають ізоморфізм між двома її піднапівгрупами. Множина усіх локальних автоморфізмів напівгрупи S відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд локальних автоморфізмів. В даній доповіді ми анонсуємо класифікацію скінченних груп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним.

Ключові слова: група, переставна напівгрупа, інверсний моноїд локальних автоморфізмів.

Abstract

A semigroup S is called permutable if, for any pair of congruences ρ, σ on S, $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$. A local automorphism of a semigroup S is defined as an isomorphism between two of its subsemigroups. The set of all local automorphisms of a semigroups S with respect to an ordinary operation of composition of binary relations forms an inverse monoid of local automorphisms. In the present report we announce of a classification of finite groups for which the inverse monoid of local automorphisms is permutable.

Keywords: group, permutable semigroup, inverse monoid of local automorphisms.

Напівгрупа S називається інверсною, якщо для довільного елемента $x \in S$ існує єдиний елемент x^{-1} такий, що $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. Відомо (див. [1]), що напівгрупа є інверсною тоді і лише тоді, коли вона регулярна і будь-які два її ідемпотенти комутують. Напівгрупа, що містить одиницю називається моноїдом. Розглянемо довільну математичну структуру C. Локальним автоморфізмом структури C називають ізоморфізм між її підструктурами. Множина усіх локальних автоморфізмів відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд локальних автоморфізмів математичної структури C. Цей моноїд ми будемо позначати через $LAut(C)$. Зазначимо, що найбільш природним чином інверсний моноїд з'являється саме у вигляді $LAut(C)$. Наприклад, якщо S – напівгрупа правих нулів, то $LAut(C)$ є симетричною інверсною напівгрупою, яка в теорії напівгруп відіграє особливу роль, оскільки згідно з теоремою Вагнера-Престона (див. [1]) її можна вважати вмістилищем усіх інверсних напівгруп. Відомо (див. [2]), що інверсний моноїд $LAut(C)$ несе більшу інформацію про структуру C ніж група автоморфізмів (або іншими словами – група симетрій) структури C. Далі, напівгрупа називається переставною, якщо будь-які дві її конгруенції комутують відносно операції композиції бінарних відношень. Класичним прикладом переставної напівгрупи є група. До переставних напівгруп також належить скінченна симетрична інверсна напівгрупа, інверсний моноїд локальних автоморфізмів скінченновимірного векторного простору, інверсний моноїд локальних автоморфізмів скінченної лінійно впорядкованої напіврешітки і інші напівгрупи. Тобто основні класичні об'єкти теорії інверсних напівгруп належать до класу переставних напівгруп. В наших дослідженнях ми розглядаємо лише скінченні напівгрупи. В статті [3] класифіковано усі в'язки, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. Їх повний список такий: лінійно впорядковані напіврешітки, примітивні напіврешітки, напівгрупи лівих і правих нулів. У статті [4] класифіковано усі комутативні напівгрупи, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. До таких напівгруп зокрема належать елементарні абелеві p-групи. Щоб завершити класифікацію скінченних груп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є конгруенц-переставним нам залишається з'ясувати структуру некомутативної групи з зазначеною властивістю. Виявилося, що будь яка група з класу PLA (це клас скінченних напівгруп S, для яких інверсний моноїд $LAut(S)$ є переставним) є p-групою, тобто її порядок дорівнює p^n , де p – просте число. Абелева група, кожний елемент якої (відмінний від одиниці) має простий порядок p, називається елементарною абелевою p-групою. Далі, позначимо через Z_p скінченне поле порядку p (де p – непарне просте число). Через Heis(Z_p) позначимо групу Гейзенберга над полем Z_p, тобто групу верхніх трикутних матриць розмірності 3, компонентами якої є елементи поля Z_p і по головній діагоналі якої стоять одиниці.

Теорема. Нехай *G* – скінченна група. Інверсний моноїд *LAut(G)* є конгруенц-переставним тоді і лише тоді, коли *G*:

(1) або елементарна абелева p-група, де p – довільне просте число;

(2) або група Гейзенберга над скінченним полем Z_p , де p – довільне непарне просте число.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Howie J.M. Fundamentals of semigroup theory / J.M. Howie. − The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.
2. Higgins P.M. Techniques of semigroup theory / P.M. Higgins. – Oxford University Press, Oxford, New York, Tokyo, 1992.
3. Derech V.D. Structure of a finite commutative inverse semigroup and a finite band for which the inverse monoid of local automorphisms is permutable / / V.D. Derech. − Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 63, No. 9, 2011.
4. Derech V.D. Classification of finite commutative semigroups for which the inverse monoid of local automorphisms is permutable // V.D. Derech. − Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 64, No. 2, 2012.

Алла Андріївна Барковська – старший викладач кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця.

Володимир Дмитрович Дереч – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: derech@vntu.edu.ua

Barkovska Alla A. − lecturer of department of mathematics, Vinnytsia National Technical University.

Derech Volodymyr D. – PhD in mathematics, associate professor, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: derech@vntu.edu.ua