УДК 519.85

О. В. Підгорна
А. Л. Просяник
А. В. Стойко

Знаходження рівняння таутохрони

Вінницький національний технічний університет

Анотація: *У статті поставлена та розв'язана задача знаходження рівняння таутохрони – кривої, для якої важке тіло, що поміщене в будь-яку її точку, рухаючись вздовж цієї кривої без тертя під дією сили тяжіння досягає горизонталі за один і той самий час.*
Ключові слова: таутохрона, брахістохрона, інтегральне рівняння, накопичення пошкоджень.

Abstract: *In this paper the problem of finding tautohrony equation - curve, for which heavy body, placed at any point and moving along the curve without friction under gravity reaches horizontally at the same time is solved.*
Keywords: tautochrone, brachistochrone curve, integral equations, damage accumulation.

«Таутохрона» означає «рівночасна». Відомості про історію виникнення задачі про таутохрону та знаходження її розв'язку наведено в численних джерелах, зокрема в [1, 2]. Тут наведемо лише висловлювання, що указує на зв'язок задачі про таутохрону із більш відомою задачею про брахістохрону. Йоганн Бернуллі писав про своє захоплення, що він відчував з приводу встановлення несподіваної тотожності таутохрони Гюйгенса і його брахістохрони. На його думку природа завжди прагне діяти найпростішим способом, і тому тут дозволяє одній кривій виконувати дві різні функції.

Стисло задача про таутохрону може бути сформульована так: знайти криву, для якої важке тіло, що поміщене в будь-яку її точку і рухаючись вздовж цієї кривої без тертя під дією сили тяжіння досягає горизонталі за один і той самий час. Х. Гюйгенс, який вперше розв'язав задачу про таутохрону, формулював властивість шуканої кривої, як незалежність періоду коливань важкого тіла, що ковзає по цій кривій під дією сили тяжіння, від початкового положення тіла, тобто від амплітуди.

Розглянемо постановку та розв'язання задачі про таутохрону більш детально, притримуючись методики [3].

Матеріальна точка під дією сили тяжіння рухається у вертикальній площині (x, y) (рис. 1) вздовж деякої кривої $y = y(x)$. Потрібно визначити цю криву так, щоб матеріальна точка, що починає свій рух без початкової швидкості в точці А кривої з ординатою Y досягла осі x (точка В) за час

$$t = f_1(Y), \qquad (1)$$

де $f_1(Y)$ - задана функція.

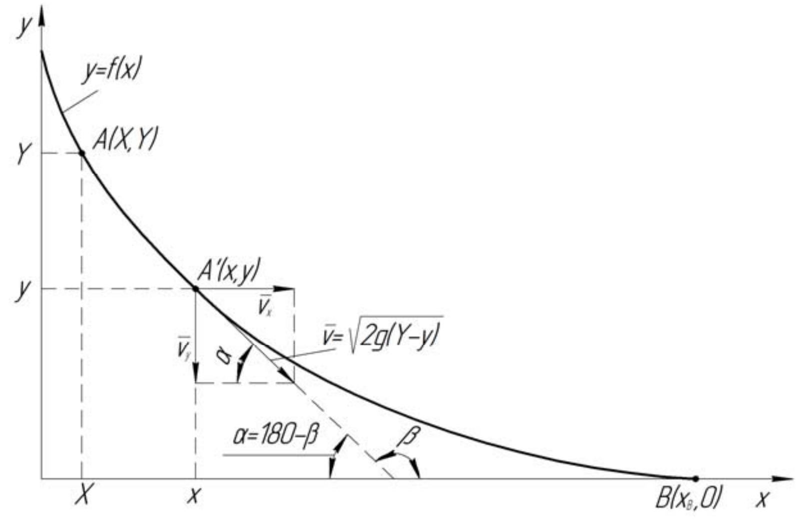

Рис. 1. Ілюстрація щодо постановки та розв'язання задачі про таутохрону.

Нехай т. $A'(x,y)$ є поточним положенням вказаної матеріальної точки. Тоді абсолютна величина швидкості точки, що рухається, направлена по дотичній до кривої $y = y(x)$ і дорівнює

$$\mathrm{v} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (Y - y)}\,, \tag{2}$$

а її вертикальна складова v_y визначається із відповідного прямокутного трикутника

$$\mathrm{v}_y = -\sqrt{2 \cdot g \cdot (Y - y)} \cdot \sin(\beta)\,, \tag{3}$$

де β - кут нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $y = y(x)$.

Знак «-» в останній формулі указує на збільшення t із зменшенням y.

Інтегруванням обох частин останньої рівності, з урахуванням (1), дістанемо співвідношення, що відоме як рівняння Абеля

$$\int_0^Y \frac{u(y) \cdot dy}{\sqrt{Y - y}} = f(Y)\,, \tag{6}$$

де

$$\frac{1}{\sin(\beta(y))} = u(y)\,, \tag{7}$$

$$f(Y) = \sqrt{2 \cdot g} \cdot f_1(Y)\,. \tag{8}$$

Звернемо увагу, що в рівнянні (8) невідома функція $u(y)$ входить під знак інтеграла. Такі рівняння називаються інтегральними. Вказане рівняння відоме як рівняння Абеля, який займався узагальненнями задачі про таутохрону.

Визначальне співвідношення спадкової теорії підсумовування пошкоджень при гарячому деформуванні [4, 5]

$$\psi(t) = B \cdot \int_0^t \frac{\dot{\varepsilon}_i(\tau)}{(t - \tau)^{n-1}} \cdot d\tau\,, \tag{9}$$

де ψ - величина, що характеризує рівень накопичення пошкоджень у матеріальній частинці; t, τ – час; B, n – параметри моделі; $\dot{\varepsilon}_i$ - інтенсивність швидкостей деформацій, при

$$n = \frac{1}{2}\,, \tag{10}$$

набуває вигляду

$$\psi(t) = B \cdot \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \cdot d\tau\,. \tag{11}$$

Звернемо увагу на тотожність структури рівнянь (6) та (11).

Після визначення функції

$$u(y) = \frac{1}{\sin(\beta)} \tag{12}$$

визначається функція

$$y = \Phi(\beta)\,. \tag{13}$$

Далі, у відомому співвідношенні, що виражає геометричний зміст похідної

$$\frac{dy}{dx} = tg(\beta)\,, \tag{14}$$

замість диференціала функції підставимо його вираз відповідно до співвідношення (13) та отримаємо

$$dx = \frac{\Phi'(\beta) \cdot d\beta}{tg(\beta)}\,. \tag{15}$$

Інтегруванням останнього співвідношення отримаємо

$$x=\int\frac{\Phi'(\beta)\cdot d\beta}{tg(\beta)}=\Phi_1(\beta). \tag{16}$$

В результаті, шукана крива визначається параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x=\Phi_1(\beta) \\ y=\Phi(\beta) \end{cases}. \tag{17}$$

Отже, головним є визначення функції $u(y)$, тобто знаходження розв'язку інтегрального рівняння (6). У відповідності до [3], для знаходження вказаного розв'язку обидві частини рівняння множимо на $\frac{1}{\sqrt{z-Y}}$ та інтегруємо по Y в межах від 0 до z

$$\int_0^z\frac{dY}{\sqrt{z-Y}}\int_0^Y\frac{u(y)\cdot dy}{\sqrt{Y-y}}=\int_0^z\frac{f(Y)}{\sqrt{z-Y}}\cdot dY, \tag{18}$$

Повторний інтеграл у лівій частині рівності перетворимо змінивши порядок інтегрування (формула Діріхле) та обчислимо внутрішній інтеграл

$$\int_0^z\frac{dY}{\sqrt{z-Y}}\int_0^Y\frac{u(y)\cdot dy}{\sqrt{Y-y}}=\int_0^z u(y)\cdot dy\int_y^z\frac{dY}{\sqrt{(z-Y)\cdot Y-y}}=\pi\cdot\int_0^z u(y)\cdot dy. \tag{19}$$

В результаті отримаємо співвідношення

$$\int_0^z u(y)\cdot dy=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^z\frac{f(Y)}{\sqrt{z-Y}}\cdot dY, \tag{20}$$

дифференціювання якого дає шуканий розв'язок.

Визначимо цю функцію для таутохрони. У цьому випадку час $t=f_1(Y)$, за який матеріальна точка подолає шлях від т. А до т. В не залежить від положення т. А, тобто (див. (1))

$$t=f_1(Y)=c=const. \tag{21}$$

Тоді, на основі (20), з урахуванням (8), отримаємо

$$\int_0^z u(y)\cdot dy=\frac{\sqrt{2\cdot g}\cdot c}{\pi}\cdot\int_0^z\frac{dY}{\sqrt{z-Y}}=\frac{2\cdot\sqrt{2\cdot g}\cdot c}{\pi}\cdot\sqrt{z}. \tag{22}$$

Рівняння шуканої функції визначаємо диференціюванням останньої рівності

$$u(z)=\frac{\sqrt{2\cdot g}\cdot c}{\pi\cdot\sqrt{z}}. \tag{23}$$

На основі останнього співвідношення з урахуванням (12) отримаємо

$$y=\frac{2\cdot g\cdot c^2}{\pi^2}\cdot\sin^2(\beta), \tag{24}$$

а з урахуванням (13), (16) –

$$x=\frac{2\cdot g\cdot c^2}{\pi^2}\cdot\int\frac{2\cdot\sin(\beta)\cdot\cos(\beta)}{tg(\beta)}\cdot d\beta=\frac{2\cdot g\cdot c^2}{\pi^2}\cdot\left(\beta+\frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot\beta)\right)+c_1. \tag{25}$$

де c_1 - стала інтегрування.

Остаточно ми отримали параметричне рівняння циклоїди, що можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x=2\cdot r\cdot\left(\beta+\frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot\beta)-\frac{\pi}{2}\right) \\ y=r\cdot(1-\cos(2\cdot\beta)) \end{cases}. \tag{26}$$

де r - радіус твірного кола

$$r = \frac{g \cdot c^2}{\pi^2}, \quad c_1 = -\pi \cdot r\ . \qquad (27)$$

Параметр β параметричного рівнянні циклоїди (26) має чіткий геометричний зміст - кут нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $y = y(x)$, що ілюструється на рис. 1.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Циклоида / Г. Н. Берман / М.: Наука, 1980. – 112 с.
2. Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках / С. Г. Гиндикин / М.: МЦНМО, 2006. – 464 с.
3. Михалевич В. М., Краєвський В. О. Взаємозв'язок теорії підсумовування пошкоджень із задачею про таутохрону // Вісник ВПІ, 2016. – №5. – С. 85–92.
4. Михалевич В. М., Краєвський В. О. Определение оптимальных параметров многоступенчатой схемы изменения скорости деформаций // Обработка материалов давлением, 2011. – №2(27). – С. 10-13.
5. Михалевич В. М., Краєвський В. О. Математичне моделювання механіки формоутворення при холодному торцевому розкочуванні та ротаційній витяжці: Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 188 с.

Підгорна Олена – студент Вінницького національного технічного університету, факультет будівництва, теплоенергетики та газопостачання, група 2Б-16

Просяник Анна – студент Вінницького національного технічного університету, факультет будівництва, теплоенергетики та газопостачання, група 1Б-16

Стойко Аліна – студент Вінницького національного технічного університету, факультет будівництва, теплоенергетики та газопостачання, група ТЕ-14

Науковий керівник: Краєвський Володимир Олександрович – к.т.н., доцент кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету

Pidhorna Olena - student of Vinnytsia National Technical University, Faculty of Civil Engineering, Thermal Power Engineering and Gas Supply

Prosianyk Anna - student of Vinnytsia National Technical University, Faculty of Civil Engineering, Thermal Power Engineering and Gas Supply

Stoiko Alina - student of Vinnytsia National Technical University, Faculty of Civil Engineering, Thermal Power Engineering and Gas Supply

Supervisor: Kraevskii Vladimir - Ph.D., Associate Professor, Department of Mathematics Vinnytsia National Technical University