УДК 519.85

Н. М. Ящук
Л. А. Забаштанська

Ізопериметричні задачі варіаційного числення

Вінницький національний технічний університет

Анотація: *У роботі розглянуто варіаційні задачі ізопериметричного типу. Сформульовано необхідну умову існування екстремалей для відповідних задач та визначено суть принципу взаємності. Із застосування розглянутого математичного апарату розв'язано задачі визначення рівняння лінії заданої довжини, що обмежує найбільшу площу та визначення форми підвішеного абсолютно гнучкого, нерозтяжного однорідного каната.*

Ключові слова: варіаційна задача, екстремаль, функціонал.

Abstract: *Variational problems of the isoperimetric type are considered. The necessary condition for the existence of extremals for the corresponding problems is formulated and the essence of the reciprocity principle is determined. With the help of the considered mathematical apparatus, the problems of determining the equation of a line of a given length limited the largest area are solved and the shape of a suspended absolutely flexible, inextensible homogeneous rope is determined.*

Keywords: variational problem, extremal, functional.

Функціоналами називаються змінні величини, значення яких визначаються вибором однієї або декількох функцій. Задачі, у яких потрібно досліджувати функціонал на максимум або мінімум [1, 2], називаються варіаційними задачами.

Ізопериметричними задачами варіаційного числення в вузькому розумінні цього слова називаються задачі про пошук геометричної фігури максимальної площі при заданому периметрі. У сучасному розумінні ізопериметричними задачами називається значно більш загальний клас задач, а саме: усі варіаційні задачі, у яких потрібно визначити екстремум функціонала

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n'\right) dx \tag{1}$$

при наявності так званих ізопериметричних умов

$$\begin{gathered}\int_{x_0}^{x_1} F_i\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n'\right) dx = l_i, \\ \left(i=\overline{1,m}\right),\end{gathered} \tag{2}$$

де l_i – сталі, m може бути більше, менше чи дорівнювати n.

Для одержання основної необхідної умови в ізопериметричній задачі про знаходження екстремуму функціонала (1) при наявності зв'язків (2) потрібно скласти допоміжний функціонал [3]

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i F_i\right)dx, \tag{3}$$

де λ_i – сталі, і написати для нього рівняння Ейлера

$$\begin{gathered}\Phi_{y_k} - \frac{d}{dx}\Phi_{y_k'} = 0, \\ k=\overline{1,n}, \\ \Phi = F + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i.\end{gathered} \tag{4}$$

Довільні сталі $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ в загальному розв'язку системи рівнянь Ейлера, а також $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ визначаються із граничних умов

$$y_k(x_0) = y_{k0},\ y_k(x_1) = y_{k1},\ \left(k = \overline{1,n}\right) \tag{5}$$

і з ізопериметичних умов

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i,\ \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{6}$$

Система рівнянь Ейлера (4) для функціонала v^* не змінюється, якщо (3) помножити на деякий сталий множник μ_0 і, отже, представити його у вигляді

$$\mu_0 v^* = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=0}^{m} \mu_i F_i dx. \tag{7}$$

де введено позначення $F_0 = F$, $\mu_j = \lambda_j \mu_0$, $j = \overline{1,m}$. Тепер усі функції F_i входять симетрично, тому екстремалі у вихідній варіаційній задачі (1) й у задачі $\int_{x_0}^{x_1} F_s dx$ на знаходження екстремуму функціонала при наявності ізопериметричних умов

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i,\ \left(i = 0,1,2,...,s-1,s+1,...,m\right) \tag{8}$$

співпадають при будь-якому виборі s $\left(s = 0,1,...,n\right)$.

Ця властивість називається принципом взаємності. Наприклад, задача про максимум площі, що обмежена замкненою кривою заданої довжини, і задача про мінімум довжини замкненої кривої, що обмежує задану площу, взаємні й мають спільні екстремалі.

Приклад 1. Знайти криву $y = y(x)$ заданої довжини l, для якої площа зображеної на рис. 1 криволінійної трапеції досягає максимуму.

Математична формалізація задачі

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y dx \to \max,$$

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l; \\ y(x_0) = y_0;\ y(x_1) = y_1. \end{cases} \tag{9}$$

Розв'язання. Складаємо спочатку допоміжний функціонал

$$S^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}\right) dx.$$

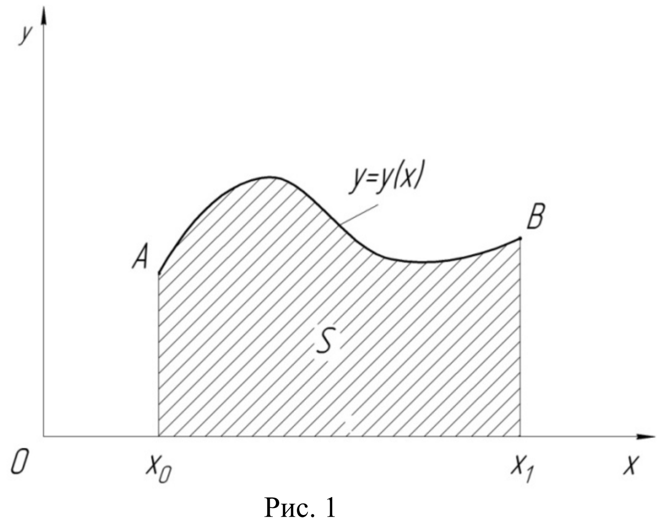

Рис. 1

Так як підінтегральна функція не містить x, то загальний розв'язок рівняння Ейлера шукаємо, як $F - y'F'_{y'} = C_1$ [4]. Тоді отримаємо

$$y + \lambda\sqrt{1+y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1,$$

звідки

$$y - C_1 = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Введемо параметр t, вважаючи $y' = \operatorname{tg} t$; тоді отримаємо

$$y - C_1 = -\lambda \cos t;$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t,$$

звідки

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} t} = \frac{\lambda \sin t\, dt}{\operatorname{tg} t} = \lambda \cos t\, dt;$$

$$x = \lambda \sin t + C_2 .$$

Отже, рівняння екстремалей у параметричній формі має вигляд:

$$\begin{cases} y - C_1 = -\lambda \cos t; \\ x - C_2 = \lambda \sin t, \end{cases}$$

чи, виключивши t, одержимо $\left(x - C_2\right)^2 + \left(y - C_1\right)^2 = \lambda^2$ – сімейство кіл. Сталі визначаються з умов (9).

Приклад 2. Знайти форму абсолютно гнучкого, нерозтяжного однорідного канату довжиною l, що підвішений у точках A і B (рис. 2).

Так як в положенні рівноваги центр ваги повинен займати найбільш низьке положення, то задача зводиться до знаходження мінімуму статичного моменту P щодо горизонтальної осі Ox. Досліджуємо на екстремум функціонал

$$P = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

за умови

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l .$$

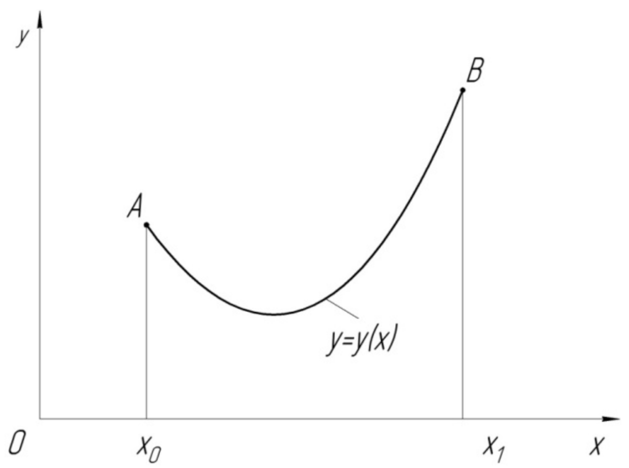

Рис. 2

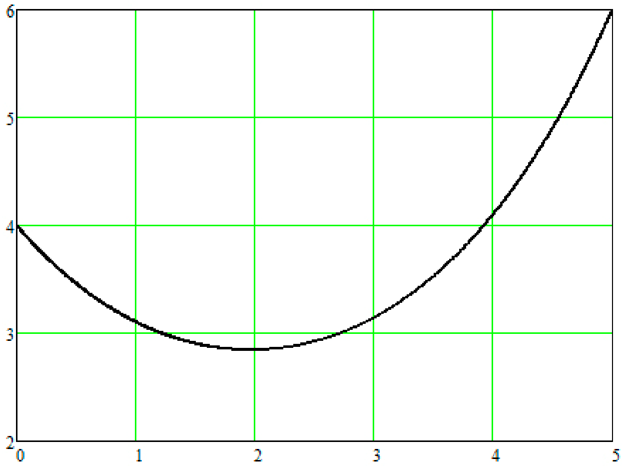

Рис. 3

Розв’язання. Складаємо допоміжний функціонал

$$P^* = \int_{x_0}^{x_1} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

для якого рівняння Ейлера має вигляд

$$F - y'F'_{y'} = C_1$$

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - \frac{(y+\lambda)\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1,$$

звідки

$$y+\lambda = C_1\sqrt{1+y'^2}.$$

Вводимо параметр, вважаючи

$$y' = \operatorname{sh} t\,,$$

звідки

$$y+\lambda = C_1 \operatorname{ch} t\,;$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} t\,;$$

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{sh} t} = C_1 dt\,;$$

$$x = C_1 t + C_2\,,$$

чи виключивши параметр t отримаємо

$$y+\lambda = C_1 \operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$$

тобто форма абсолютно гнучкого, нерозтяжного однорідного канату є ланцюговою лінією (рис. 3).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Михалевич В. М., Краєвський В. О. Формулювання варіаційної задачі для моделі накопичення пошкоджень при гарячому деформуванні // В зб.: «Обробка матеріалів тиском» . Збірник наукових праць. – Краматорськ, 2009. – №2(21). – С. 12-16.
2. Михалевич В. М., Краєвський В. О. Определение оптимальных параметров многоступенчатой схемы изменения скорости деформаций // Обработка материалов давлением, 2011. – №2(27). – С. 10-13.
3. Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление. – М.:Физматгиз, 1961. – 228 с.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Гостехиздат, 1957. – 424 с.

Ящук Наталія – студент Вінницького національного технічного університету, факультет будівництва, теплоенергетики та газопостачання, група 1Б-16

Забаштанська Лілія – студент Вінницького національного технічного університету, факультет будівництва, теплоенергетики та газопостачання, група 1Б-16

Науковий керівник: Краєвський Володимир Олександрович – к.т.н., доцент кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету

Yashchuk Nataliia - student of Vinnytsia National Technical University, Faculty of Civil Engineering, Thermal Power Engineering and Gas Supply

Zabashtanska Liliia - student of Vinnytsia National Technical University, Faculty of Civil Engineering, Thermal Power Engineering and Gas Supply

Supervisor: Kraievskyi Volodymyr - Ph.D., Associate Professor, Department of Mathematics Vinnytsia National Technical University