УДК 621.77

В. О. Краєвський

Визначення оптимальних параметрів експоненціального режиму зміни швидкості багатоступеневого гарячого деформування

Вінницький національний технічний університет

Анотація: *При розв'язанні задачі оптимізації швидкісного режиму багатоступеневого гарячого деформування з метою зменшення впливу кількості ступенів на структуру задачі нелінійного програмування розв'язок пропонується шукати у вигляді багатоступеневої зміни швидкості із однаковою тривалістю ступенів і із зміною швидкості за траєкторією, яка задається експоненціальною функцією.*

Ключові слова: гаряче деформування, пластичність, варіаційна задача, математичне програмування, руйнування.

Abstract: *When solving the optimization problem of speeding multistage hot deformation in order to reduce the influence of the number of stages in the structure of non-linear programming problem solution it is offered to seek a multi-speed change with the same duration of steps and speed of change in the trajectory, defined by the exponential function.*

Keywords: hot deformation, plasticity, variational problem, mathematical programming, destruction.

З метою оптимізації режиму гарячого пластичного деформування запропоновано варіаційну задачу [1, 2]: визначити закон зміни швидкості деформації $\dot{\varepsilon}_u = \dot{\varepsilon}_u(t)$ при якому за заданий час t_* матеріал набуває найбільшої деформації $\varepsilon_{\max}$

$$\varepsilon_{\max} = \int_0^{t_*} \dot{\varepsilon}_u(\tau) \cdot d\tau \to \max,$$

$$\begin{cases} \int_0^{t_*} \varphi\left(t_* - \tau; I(\tau)\right) \cdot f\left(\dot{\varepsilon}_u(\tau)\right) \cdot d\tau = 1, \\ \int_0^{t} \varphi\left(t - \tau; I(\tau)\right) \cdot f\left(\dot{\varepsilon}_u(\tau)\right) \cdot d\tau \le 1, \ \forall t \in (0, t_*). \end{cases} \qquad (1)$$

де $0 \le \psi \le 1$, $\psi(0) = 0$, $\psi(t_*) = 1$; t_* – граничний час, що відповідає руйнуванню зразка; t, τ – час; $\varphi\left(t - \tau, I(\tau)\right)$ – ядро спадковості; f – деяка функція.

У попередніх роботах [3, 4] була поставлена задача знаходження розв'язку задачі (1) для класу кусково-сталих функцій. Технологічно такий клас функцій відповідає гарячому деформуванню із незмінними показником «жорсткості» напруженого стану η і напрямним тензором приростів швидкостей деформацій β_{ij}, тобто, згідно з класифікацією, що запропонована в роботі [5], простому багатоступеневому гарячому деформуванню

$$\dot{\varepsilon}_u = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1}, \ 0 \le t \le t_1; \\ \dot{\varepsilon}_{u2}, \ t_1 \le t \le t_2; \\ \dots \\ \dot{\varepsilon}_{uk}, \ t_{k-1} \le t \le t_*. \end{cases} \qquad (2)$$

У цій роботі шукатимемо розв'язок задачі багатоступеневого деформування з такими додатковими умовами:

а) тривалість кожного ступеня є незмінною: $\Delta t_i = \Delta t = const$;

б) зміна швидкості деформації з переходом до наступної ступені відбувається за траєкторією, що задається функцією $f(c_0, c_1, \dots, c_n, t)$, де $c_0, c_1, \dots, c_n$ – параметри функції.

Тоді зміна швидкості деформації відбуватиметься за законом

$$
\dot{\varepsilon}_u(t) = \begin{cases} f(c_0, c_1, ..., c_n, 0), \ 0 \le t < \Delta t; \\ f(c_0, c_1, ..., c_n, \Delta t), \ \Delta t \le t < 2\Delta t; \\ ... \\ f(c_0, c_1, ..., c_n, (k-1)\Delta t), \ (k-1)\Delta t \le t \le k \cdot \Delta t. \end{cases} \tag{3}
$$

Із врахуванням (3) та низки інших гіпотез [5, 6] задача (1) набуде вигляду

$$
\varepsilon_u(c_0, c_1, ..., c_n) = \Delta t \cdot \sum_{i=1}^{k} f(c_0, c_1, ..., c_n, (i-1)\Delta t) \to \max,
$$

$$
\begin{cases} \dfrac{\Delta t^n}{\gamma^n} \sum\limits_{i=1}^{k} \left((k-i+1)^n - (k-i)^n \right) f(c_0, c_1, ..., c_n, (i-1)\Delta t) = 1, \\ \dfrac{\Delta t^n}{\gamma^n} \sum\limits_{i=1}^{q} \left((q-i+1)^n - (q-i)^n \right) f(c_0, c_1, ..., c_n, (i-1)\Delta t) \le 1, \\ q = \overline{1, k-1}. \end{cases} \tag{4}
$$

Аналіз співвідношення (4) показує, що цільова функція залежить від параметрів $c_0, c_1, ..., c_n$, тобто від параметрів функції. Проте повністю позбутись впливу кількості ступенів на складність структури задачі нелінійного програмування не можливо, тому що кожній ступені у системі обмежень відповідає нерівність, яка пов'язана із досягненням граничного стану матеріалу. Аналіз результатів моделювання шестиступеневого деформування [4] дозволяє зробити припущення, що оптимальний закон зміни швидкості деформації, що відповідає значенню ε_*, є монотонно спадною функцією на проміжку $[0; t_*]$. Саме з цих міркувань оберемо траєкторію зміни швидкості деформації. Розглянемо траєкторію, що задається експоненціальною функцією

$$
f(c_0, c_1, t) = c_0 e^{c_1 t} \tag{5}
$$

Тоді згідно (3) швидкість деформації визначається за формулою

$$
\dot{\varepsilon}_u(t) = \begin{cases} c_0, \ 0 \le t < \Delta t; \\ c_0 \lambda, \ \Delta t \le t < 2\Delta t; \\ c_0 \lambda^2, 2\Delta t \le t < 3\Delta t; \\ ... \\ \alpha \lambda^{(k-1)}, \ (k-1)\Delta t \le t \le k \cdot \Delta t. \end{cases} \tag{6}
$$

де $\lambda = e^{c_1 \cdot \Delta t}$. У результаті задача (4) із врахуванням (6) набуває вигляду

$$
\varepsilon_u(c_0, \lambda) = c_0 \cdot \Delta t \sum_{i=1}^{k} \lambda^{(i-1)} \to \max,
$$

$$
\begin{cases} \dfrac{c_0 \cdot \Delta t^n}{\gamma^n} \sum\limits_{i=1}^{k} \left((k-i+1)^n - (k-i)^n \right) \lambda^{i-1} = 1, \\ \dfrac{c_0 \cdot \Delta t^n}{\gamma^n} \sum\limits_{i=1}^{q} \left((q-i+1)^n - (q-i)^n \right) \lambda^{i-1} \le 1, \\ q = \overline{1, k-1}. \end{cases} \tag{7}
$$

Отже, цільова функція залежить від двох параметрів c_0 та λ.

Теорема 1. Якщо умова

$$
\frac{c_0 \cdot \Delta t^n}{\gamma^n} \sum_{i=1}^{q} \left((q-i+1)^n - (q-i)^n \right) \lambda^{i-1} \le 1 \tag{8}
$$

виконується при $q = j$, то вона також виконується при $q = j - 1 \ \forall n \in (0;1)$.

Доведення.

Враховуючи, що $\frac{c_0 \cdot \Delta t^n}{\gamma^n} > 0$ умову (8) можна переписати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{q} \left((q-i+1)^n - (q-i)^n \right) \lambda^{i-1} \le M , \tag{9}$$

де $M = \frac{\gamma^n}{c_0 \cdot \Delta t^n} > 0$.

При $q = j$ ліва частина нерівності (9) матиме вигляд:

$$\left(j^n - (j-1)^n \right) + \left((j-1)^n - (j-2)^n \right) \lambda + \ldots + \left(2^n - 1^n \right) \lambda^{j-2} + \lambda^{j-1} \tag{10}$$

При $q = j - 1$

$$\left((j-1)^n - (j-2)^n \right) + \left((j-2)^n - (j-3)^n \right) \lambda + \ldots + \left(1^n - 0^n \right) \lambda^{j-2} \tag{11}$$

Кожний доданок виразу (10) більший за відповідний доданок виразу (11), крім того вираз (10) має на один додатній доданок більше $\left(\lambda^{j-1} \right)$, тому очевидно

$$\begin{gathered} \left((j-1)^n - (j-2)^n \right) + \left((j-2)^n - (j-3)^n \right) \lambda + \ldots + \left(1^n - 0^n \right) \lambda^{j-2} < \\ < \left(j^n - (j-1)^n \right) + \left((j-1)^n - (j-2)^n \right) \lambda + \ldots + \left(2^n - 1^n \right) \lambda^{j-2} + \lambda^{j-1} \end{gathered} \tag{12}$$

Розглянувши разом (9) та (12), отримаємо

$$\sum_{i=1}^{j-1} \left((j-i)^n - (j-i-1)^n \right) \lambda^{i-1} \le M \tag{13}$$

тобто умова (8) виконується при $q = j - 1$. Теорему доведено.

Застосування теореми 1 надає можливість спростити задачу (7)

$$\begin{gathered} \varepsilon_u \left(c_0, \lambda \right) = c_0 \cdot \Delta t \sum_{i=1}^{k} \lambda^{(i-1)} \to \max, \\ \begin{cases} \dfrac{c_0 \cdot \Delta t^n}{\gamma^n} \sum\limits_{i=1}^{k} \left((k-i+1)^n - (k-i)^n \right) \lambda^{i-1} = 1, \\ \dfrac{c_0 \cdot \Delta t^n}{\gamma^n} \sum\limits_{i=1}^{k-1} \left((k-i)^n - (k-i-1)^n \right) \lambda^{i-1} \le 1. \end{cases} \end{gathered} \tag{14}$$

Тобто $k - 1$ нерівностей в системі обмежень замінено лише одною нерівністю (!). Знайдемо c_0 з рівняння системи обмежень

$$c_0 = \frac{\gamma^n}{\Delta t^n \sum\limits_{i=1}^{k} \left((k-i+1)^n - (k-i)^n \right) \lambda^{i-1}} \tag{15}$$

та отримаємо задачу оптимізації функції однієї змінної λ

$$\varepsilon_u \left(\lambda \right) = \frac{\gamma^n \Delta t^{1-n} \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda^{(i-1)}}{\sum\limits_{i=1}^{k} \left((k-i+1)^n - (k-i)^n \right) \lambda^{i-1}} \to \max \tag{16}$$

лише з одною додатковою умовою у вигляді нерівності

$$\frac{\sum_{i=1}^{k-1}\left(\left(k-i\right)^{n}-\left(k-i-1\right)^{n}\right)\lambda^{i-1}}{\sum_{i=1}^{k}\left(\left(k-i+1\right)^{n}-\left(k-i\right)^{n}\right)\lambda^{i-1}}\leq 1 \tag{17}$$

Теорема 2. При $\gamma>0$ та $0<n<1$ функція $\varepsilon\left(\lambda\right)$ є монотонно спадною на проміжку $\lambda\in[0,+\infty]$.

Доведення.

Враховуючи, що $\gamma^{n}>0$, знак похідної функції (16)

$$\frac{d\varepsilon_{u}}{d\lambda}=\frac{\gamma^{n}}{\Delta t^{n-1}}\left[\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(i-1\right)\lambda^{i-2}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\left(k-i+1\right)^{n}-\left(k-i\right)^{n}\right)\lambda^{i-1}}{\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\left(k-i+1\right)^{n}-\left(k-i\right)^{n}\right)\lambda^{i-1}\right]^{2}}-\right.$$
$$\left.-\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(i-1\right)\left(\left(k-i+1\right)^{n}-\left(k-i\right)^{n}\right)\lambda^{i-2}\cdot\sum_{i=1}^{k}\lambda^{i-1}}{\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\left(k-i+1\right)^{n}-\left(k-i\right)^{n}\right)\lambda^{i-1}\right]^{2}}\right], \tag{18}$$

однозначно визначається знаком чисельника

$$\sum_{i=1}^{k}\left(i-1\right)\lambda^{i-2}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\left(k-i+1\right)^{n}-\left(k-i\right)^{n}\right)\lambda^{i-1}-$$
$$-\sum_{i=1}^{k}\left(i-1\right)\left(\left(k-i+1\right)^{n}-\left(k-i\right)^{n}\right)\lambda^{i-2}\cdot\sum_{i=1}^{k}\lambda^{i-1}=\sum_{j=0}^{2k-3}r_{j}\lambda_{j}. \tag{19}$$

Коефіцієнти r_j визначаються:

при $j=\overline{0,k-2}$ як

$$r_{j}=\sum_{t=0}^{j}\left(j-t+1\right)\left(\left(k-t\right)^{n}-\left(k-t-1\right)^{n}\right)-\left(t+1\right)\left(\left(k-t-1\right)^{n}-\left(k-t-2\right)^{n}\right); \tag{20}$$

при $j=\overline{k-1,2k-3}$ як

$$r_{j}=\sum_{t=0}^{2k-3-j}\left(2k-2t-j-3\right)\left(\left(2k-j-t-2\right)^{n}-\left(2k-j-t-3\right)^{n}\right). \tag{21}$$

Доведемо, що $\forall j\in\left[0;k-2\right]:r_{j}\leq 0$.

Вираз (20) запишемо у вигляді

$$r_{j}=\left(j+1\right)k^{n}-2\left(k-1\right)^{n}-2\left(k-2\right)^{n}-...-2\left(k-j-1\right)^{n}+\left(j+1\right)\left(k-j-2\right)^{n} \tag{22}$$

або перегрупувавши доданки отримаємо

$$r_{j}=\sum_{t=0}^{s}\left(j-2t+1\right)\left(\left(\left(k-t\right)^{n}-\left(k-t-1\right)^{n}\right)-\left(\left(k-j+t-1\right)^{n}-\left(k-j+t-2\right)^{n}\right)\right) \tag{23}$$

де $s=\dfrac{j+1}{2}$ для непарних j; $s=\dfrac{j}{2}+1$ для парних j.

Враховуючи, що при заданих s, j, t, k виконуються нерівності $j-2t+1\geq 0$ і $(k-t-1)>(k-j+t-1)$ і з огляду на графік функції $y=x^{n}$ при $0<n<1$ (швидкість зміни функції $y'=\dfrac{n}{x^{1-n}}$ – монотонно спадна функція) отримаємо

$$\left(\left(k-t\right)^{n}-\left(k-t-1\right)^{n}\right)-\left(\left(k-j+t-1\right)^{n}-\left(k-j+t-2\right)^{n}\right)<0, \tag{24}$$

тоді з (23) r_j це сума від'ємних та рівних нулю доданків, тому отримаємо $r_j < 0$.

Аналогічно доводимо, що $\forall j \in [k-1, 2k-3] : r_j < 0$.

Тоді $\sum_{j=0}^{2k-3} r_j \lambda^j < 0$ на інтервалі $\lambda \in [0; +\infty)$, тобто $\frac{d\varepsilon_u}{d\lambda} < 0$ і, отже, $\varepsilon_u(\lambda)$ є монотонно спадною. *Теорему доведено.*

Згідно теореми 2 найбільше значення функції $\varepsilon_u(\lambda)$ отримаємо при найменшому значенні λ, що задовольняє нерівність (17).

Функція

$$f(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \left((k-i)^n - (k-i-1)^n \right) \lambda^{i-1}}{\sum_{i=1}^{k} \left((k-i+1)^n - (k-i)^n \right) \lambda^{i-1}}$$

є монотонно спадною при $\lambda \in [0; +\infty]$, тому мінімальне невід'ємне значення λ, при якому виконується умова (17) знайдемо з нелінійного відносно λ рівняння

$$\frac{\sum_{i=1}^{k-1} \left((k-i)^n - (k-i-1)^n \right) \lambda^{i-1}}{\sum_{i=1}^{k} \left((k-i+1)^n - (k-i)^n \right) \lambda^{i-1}} = 1 \qquad (25)$$

Отже, розв'язок задачі (7) (тобто значення параметрів c_0 та λ) для довільної кількості етапів (!) знайдемо із одного співвідношення і одного рівняння:

$$\begin{cases} c_0 = \dfrac{\gamma^n}{\Delta t^n \sum_{i=1}^{k} \left((k-i+1)^n - (k-i)^n \right) \lambda^{i-1}}, \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{k-1} \left((k-i)^n - (k-i-1)^n \right) \lambda^{i-1}}{\sum_{i=1}^{k} \left((k-i+1)^n - (k-i)^n \right) \lambda^{i-1}} = 1. \end{cases} \qquad (26)$$

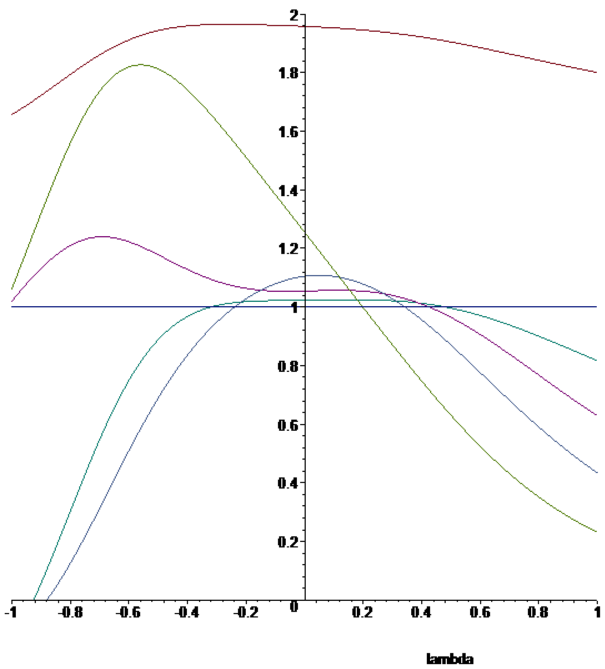

Рис. 1. Розрахунок граничних кривих, що визначаються нерівностями (7)

Задачу розв'язали для неперервного кручення зразків із сталі 14Х17Н2 при температурі 1150^0С при $k = 1000$ за допомогою додатку Maple. У результаті отримали значення параметрів експоненціальної функції (5)

$$\begin{cases} c_0 = 0.2190141371; \\ c_1 = -0.1112120832 \end{cases}$$

і накопичену деформацію $\varepsilon_u = 1.91$, що на 6.2% більше ніж при деформуванні із сталою швидкістю.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Mikhalevich V. M., Kraevsky V. O. Variational problems for damage accumulation models heritable type // The nonlinear analysis and application 2009: Materials of the international scientific conference (April 02-04th 2009, Kyiv). – Kyiv: NTUU "KPI", 2009. – p. 109-110.
2. Михалевич В. М., Краєвський В. О. Формулювання варіаційної задачі для моделі накопичення пошкоджень при гарячому деформуванні // В зб.: «Обробка матеріалів тиском» . Збірник наукових праць. – Краматорськ, 2009. – №2(21). – С. 12-16.
3. Краєвський В. О., Михалевич В. М. Вариационные задачи в теории деформируемости // Конструкційна міцність матеріалів і ресурс обладнання АЕС: Тези доп. Міжнародної науково-технічної конференції. – с. 95-97
4. Михалевич В. М., Краєвський В. О. Определение оптимальных параметров многоступенчатой схемы изменения скорости деформаций // Обработка материалов давлением, 2011. – №2(27) – с. 10-13.
5. Михалевич В.М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / Вінниця: "УНІВЕРСУМ- Вінниця", 1998 – 195 с.
6. Михалевич В. М., Краєвський В. О. Математичне моделювання механіки формоутворення при холодному торцевому розкочуванні та ротаційній витяжці: Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 188 с.

Краєвський Володимир Олександрович – к.т.н., доцент кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету

Kraievskyi Volodymyr - Ph.D., Associate Professor, Department of Mathematics Vinnytsia National Technical University