

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ КРИВИХ В СЕРЕДОВИЩІ СИСТЕМИ MAPLE НА ПРИКЛАДІ ЕПІЦИКЛОЇД ТА ГІПОЦИКЛОЇД

Вінницький національний технічний університет;

Анотація

Розглянуто підходи для розробки процедур для побудови графіків складних функцій із застосуванням СКМ Maple, на прикладі епіциклоїди та гіпоциклоїди. Розроблені процедури надають можливість покращити вивчення та дослідження особливостей побудови та застосування циклоїдальних кривих в машинобудуванні.

Ключові слова: Maple, циклоїдальне зачеплення, візуалізація, епіциклоїда, гіпоциклоїда.

Abstract

The approaches to the development of procedures for constructing graphs of complex functions using SCM Maple are considered, with the example of epicycloid and hypocycloid. The developed procedures make it possible to improve the study and research of features of construction and application cycloid curves in engineering.

Keywords Maple, cycloid gearing, visualization, epicycloid, hypocycloid.

У навчальних програмах курсу вищої математики для студентів технічних спеціальностей кількість аудиторних годин традиційно зменшується впродовж останніх десятиліть. В той же час формування знань, умінь та навичок під час вивчення більшості тем з вищої математики базуються на візуалізації областей різної складності. Для зменшення рутинної роботи студентів та покращення сприйняття алгоритмів розв'язку та математичної сутті більшої частини навчальних задач необхідно сформувати вказані задачі із використанням систем комп'ютерної математики (СКМ) [1, 2, 3, 4]. Побудова графіків, областей, поверхонь різної складності, а також дослідження залежностей значень параметрів на форму побудованої фігури, чи області, значно покращується із застосуванням СКМ Maple [5]. Застосування СКМ Maple надає можливість проводити якісніше дослідження, розробку математичних моделей та їх теоретичних досліджень значної кількості інженерних задач, наприклад розробки математичних моделей напружено-деформованого та граничного станів бічної поверхні циліндричних заготовок під час торцевого стиснення та ін. [6 – 16].

Циклоїдальні криві широко застосовуються в техніці для побудови профілів зубів шестерень, контурів значної частини типів ексцентриків, кулачкових механізмів та ін. Для збільшення швидкості ковзання та зменшення величини питомого ковзання в планетарних механізмах, коробках швидкостей та інших механізмах використовують циклоїдальне зачеплення (рис. 1). В результаті їх робота стає більш плавною, безшумною, підвищується ККД, збільшується коефіцієнт перекриття, забезпечується відсутність підрізання ніжки зуба. Циклоїдальне зачеплення – це такий вид зачеплення, при якому профілі зубів окреслені по ділянках циклоїд: епіциклоїд та гіпоциклоїд [17]. Дослідження вказаних кривих має досить важливе значення для удосконалення конструкцій механічних передач та розвитку прикладної математики в галузях машинобудування та будівництва.

Метою роботи є розробка та дослідження Maple-програм для побудови графіків функцій епіциклоїд та гіпоциклоїд.

Циклоїда – це плоска трансцендентна крива, яка кінематично визначається як траєкторія фіксованої точки кола певного радіуса, що котиться без ковзання по деякій прямій.

Епіциклоїда – це плоска крива, що утворюється певною точкою кола, яке котиться по зовнішній стороні іншого кола без проковзування та описується рівняннями:

$$\begin{cases} x = R_H + R \cos \varphi - r \cos \left(\alpha + \frac{R_H + R}{R} \varphi \right); \\ y = R_H + R \sin \varphi - r \sin \left(\alpha + \frac{R_H + R}{R} \varphi \right); \end{cases} \quad (1)$$

де R_H , R – радіуси нерухомого та рухомого кіл; φ – кут нахилу відрізка, який з'єднує центри кіл, до вісі OX , α – кут повороту точки, яка описує епіциклоїду відносно центра нерухомого кола.

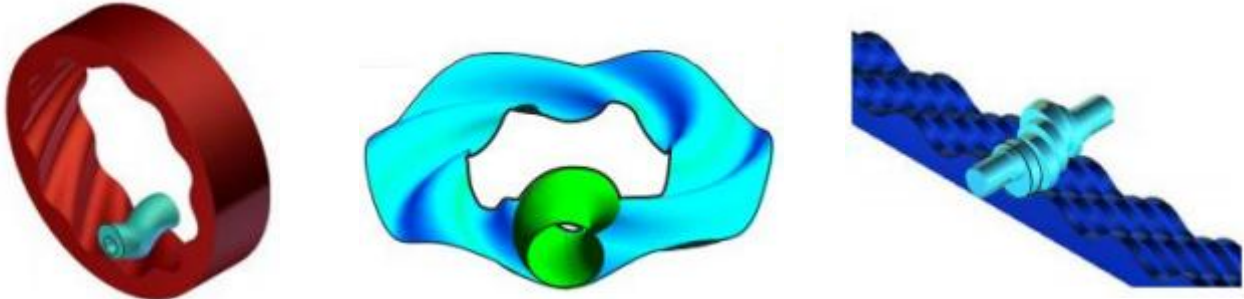


Рис. 1. Прості передаточні механізми, в яких використовується циклоїдалне зачеплення

Гіпоциклоїда – це плоска крива, що утворюється точкою кола, що котиться по внутрішній стороні іншого кола без проковзування та описується рівняннями:

$$\begin{cases} x = r k - 1 \left(\cos t + \frac{\cos k - 1 t}{k - 1} \right); \\ y = r k - 1 \left(\sin t + \frac{\sin k - 1 t}{k - 1} \right); \end{cases} \quad (2)$$

де $k = r_H/r$, r_H , r – радіуси нерухомого та рухомого кіл.

СКМ Maple має стандартні засоби для побудови графіків функцій, поверхонь в декартовій, полярній, сферичній системах координат та різних формах їх аналітичного задання. Майже всі вони зосереджені в спеціалізованому пакеті **plots** [18, 19]. Для побудов епіциклоїд, гіпоциклоїд ми також будемо використовувати спеціалізований пакет СКМ Maple **LinearAlgebra**, в якому зосереджені команди та програми для вивчення та використання в лінійній алгебрі [18, 19].

Для побудови епіциклоїди із зображенням нерухомого кола була розроблена процедура, яка надає можливість автоматизувати побудову вказаної кривої. На рис. 2 наведено зображення епіциклоїд із різними радіусами рухомого кола R та нерухомого кола R_H .

```
restart;
with(LinearAlgebra):
with(plots):
f:= proc(R,r) ;
plot([(R+r)*cos(t)-r*cos((R+r)/r)*t), (R+r)*sin(t)-r*sin((R+r)/r)*t),
t=0..8*Pi], color=green, style=line);
end proc;
h:= proc(R) ;
implicitplot(x^2+y^2=R^2, x=-R..R, y=-R..R, color=blue);
end proc;
f:= proc(R,r)
plot([(R+r)*cos(t)-r*cos(((R+r)*t)/r),
(R+r)*sin(t)-r*sin(((R+r)*t)/r), t=0..5*Pi], color=green, style=line)
end proc
h:= proc(R) implicitplot (x^2+y^2=R^2, x=-R..R, y=-R..R, color=blue) end proc
```

Під час розроблення процедури автоматизації побудови епіциклоїди було застосовано функції

СКМ Maple для побудови функції, яка задана параметрично `plot([(R+r)*cos(t)-r*cos((R+r)/r)*t), (R+r)*sin(t)-r*sin((R+r)/r)*t), t=0..8*Pi], color=green, style=line)` та неявно `implicitplot(x^2+y^2=R^2, x=-R..R, y=-R..R, color=blue)`.

Для покращення візуалізації побудови епіциклоїди, було удосконалено створену процедуру для побудови декількох проміжних позицій рухомого кола на нерухомому (рис. 3). Отримана процедура надає можливість під час вивчення теми про епіциклоїди значно покращити розуміння складних кінематичних траєкторій руху фіксованої точки на рухомому колі, яке котиться по нерухомому колі певних радіусів та визначити особливості отриманої кривої.

```
f := proc ( R, r );
plot([(R+r)*cos(t)-r*cos((R+r)/r)*t), (R+r)*sin(t)-
r*sin((R+r)/r)*t), t=0..8*Pi], color=green, style=line);
end proc;
h := proc (R);
implicitplot(x^2+y^2=R^2, x=-R..R, y=-R..R, color=blue);
end proc;
g := proc (R, r);
implicitplot(x^2+(y+(R+r))^2=r^2, x=-(R+2*r)..(R+2*r),
y=-(R+2*r)..(R+2*r), color=red);
end proc;
a := proc (R, r);
implicitplot((x-(R+r))^2+y^2=r^2, x=-(R+2*r)..(R+2*r),
y=-(R+2*r)..(R+2*r), color=red);
end proc;
b := proc (R, r);
implicitplot((x+(R+r))^2+y^2=r^2, x=-(R+2*r)..(R+2*r),
y=-(R+2*r)..(R+2*r), color=red);
end proc;
c := proc (R, r);
implicitplot(x^2+(y-(R+r))^2=r^2, x=-(R+2*r)..(R+2*r),
y=-(R+2*r)..(R+2*r), color=red);
end proc;
f := proc(R, r)
plot([(R+r)*cos(t)-r*cos((R+r)*t/r), (R+r)*sin(t)-r*sin((R+r)*t/r),
t = 0 .. 8*Pi], color = green, style = line)
end proc
h := proc(R) implicitplot (x^2 + y^2 = R^2, x = -R .. R, y = -R .. R, color = blue) end proc
g := proc(R, r)
implicitplot (x^2 + (y + R + r)^2 = r^2, x = -R - 2*r .. R + 2*r,
y = -R - 2*r .. R + 2*r, color = red)
end proc
a := proc(R, r)
implicitplot ((x - R - r)^2 + y^2 = r^2, x = -R - 2*r .. R + 2*r,
y = -R - 2*r .. R + 2*r, color = red)
end proc
```

```

b := proc(R, r)
  implicitplot ((x + R + r)^2 + y^2 = r^2, x = -R - 2*r .. R + 2*r,
  y = -R - 2*r .. R + 2*r, color = red)
end proc

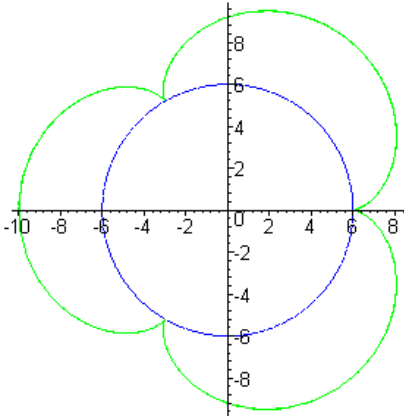
c := proc(R, r)
  implicitplot (x^2 + (y - R - r)^2 = r^2, x = -R - 2*r .. R + 2*r,
  y = -R - 2*r .. R + 2*r, color = red)
end proc

```

```

F:=f(6,2):
H:=h(6):
display({F,H});

```

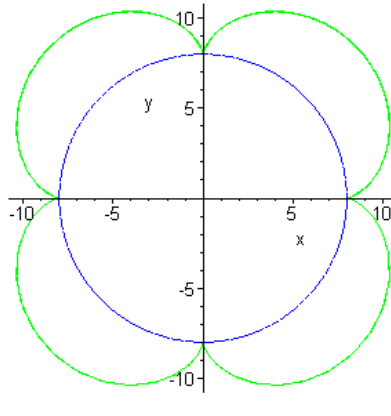


$R = 2 \text{ мм.}; R_H = 6 \text{ мм.}$

```

F:=f(8,2):
H:=h(8):
display({F,H});

```

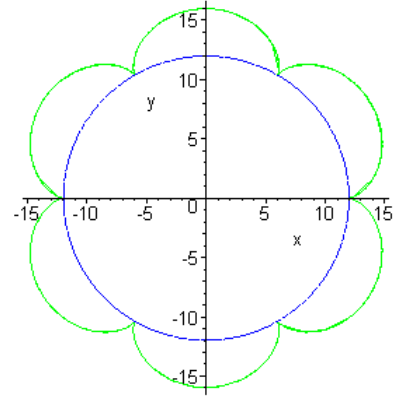


$R = 2 \text{ мм.}; R_H = 8 \text{ мм.}$

```

F:=f(12,2):
H:=h(12):
display({F,H});

```

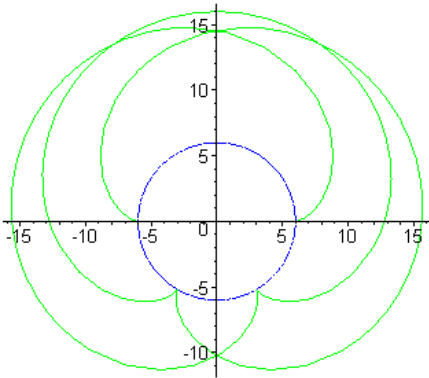


$R = 2 \text{ мм.}; R_H = 12 \text{ мм.}$

```

F:=f(6,5):
H:=h(5):
display({F,H});

```

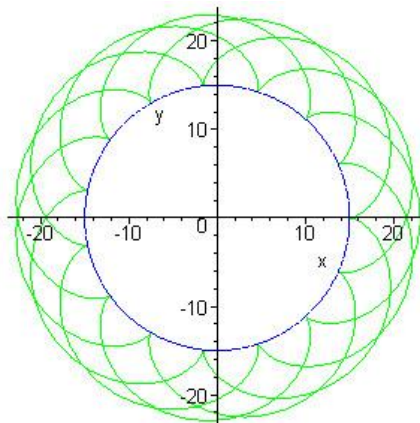


$R = 5 \text{ мм.}; R_H = 6 \text{ мм. } t = 0..5\pi$

```

F:=f(15,4):
H:=h(15):
display({F,H});

```

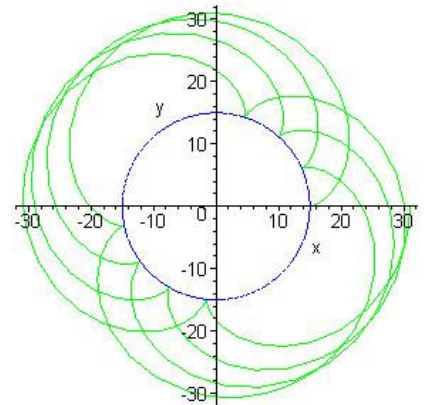


$R = 4 \text{ мм.}; R_H = 15 \text{ мм.}$

```

F:=f(15,8):
H:=h(15):
display({F,H});

```



$R = 8 \text{ мм.}; R_H = 15 \text{ мм.}$

Рис. 2. Графіки епіциклоїд із різними рухомим та нерухомим радіусами, побудовані за допомогою СКМ Maple

Використовуючи аналітичний опис гіпоциклоїди та застосувавши СКМ Maple було розроблено процедуру для автоматизації побудови траєкторії точки, яка розташована на рухомому колі радіуса r , що котиться без ковзання в середині нерухомого кола радіуса r_H . На рис. 4 наведено зображення епіциклоїд із різними радіусами рухомого кола r та нерухомого кола r_H і візуалізації впливу співвідношень між радіусами кіл на вигляд та особливості гіпоциклоїди.

```

f:= proc ( R, r ) ;

```

```

plot([(R-r)*cos(t)+r*cos((R-r)/r)*t), (R-r)*sin(t)-r*sin((R-
r)/r)*t), t=0..3*Pi], color=black);
end proc;
h:= proc (R);
implicitplot( x^2+y^2=R^2, x=-R..R, y=-R..R, color=blue);
end proc;
f:= proc(R, r)
plot([(R-r)*cos(t)+r*cos((R-r)/r)*t),
(R-r)*sin(t)-r*sin((R-r)/r)*t), t=0..3*Pi], color=black)
end proc
h:= proc(R) implicitplot (x^2+y^2=R^2, x=-R..R, y=-R..R, color=blue) end proc

```

```

F:=f(6,2):
H:=h(6):
G:=g(6,2):
A:=a(6,2):
B:=b(6,2):
C:=c(6,2):
display({F,H,G,A,B,C});

```

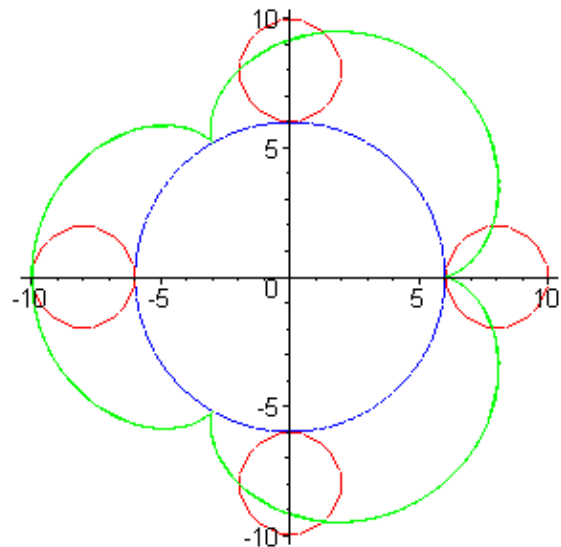


Рис. 3. Графік епіциклоїди із радіусами рухомого кола $R = 2$ мм. та нерухомого кола $R_n = 6$ мм. із зображенням нерухомого кола та декількох положень рухомого кола, побудовані за допомогою СКМ Maple

Також як і для епіциклоїд, для покращення візуалізації побудови гіпоциклоїди, було удосконалено створену процедуру для побудови декількох проміжних позицій рухомого кола на нерухомому (рис. 5), що покращує візуалізацію побудови гіпоциклоїд за допомогою СКМ Maple.

```

f:= proc(R, r);
plot([(R-r)*cos(t)+r*cos((R-r)/r)*t), (R-r)*sin(t)-r*sin((R-r)/r)*t),
t=0..3*Pi], color=black);
end proc;
h:= proc(R);
implicitplot( x^2+y^2=R^2, x=-R..R, y=-R..R, color=blue);
end proc;
g:= proc(R, r);
implicitplot( x^2+(y+(R-r))^2=r^2, x=-(R+2*r)..(R+2*r),
y=-(R+2*r)..(R+2*r), color=red);
end proc;
a:= proc(R, r);
implicitplot( (x-(R-r))^2+y^2=r^2, x=-(R+2*r)..(R+2*r),
y=-(R+2*r)..(R+2*r), color=red);
end proc;
b:= proc(R, r);
implicitplot( (x+(R-r))^2+y^2=r^2, x=-(R+2*r)..(R+2*r),
y=-(R+2*r)..(R+2*r), color=red);
end proc;

```

```

c:= proc (R,r);
  implicitplot( x^2+(y-(R-r))^2=r^2, x=- (R+2*r) .. (R+2*r) ,
y=- (R+2*r) .. (R+2*r) , color=red);
end proc;

```

```

f:= proc(R, r)
  plot([(R-r)×cos(t) + r×cos(((R-r)×t)/r),
(R-r)×sin(t) - r×sin(((R-r)×t)/r), t=0 .. 3×π], color = black)
end proc

```

```

h := proc(R) implicitplot (x^2 + y^2 = R^2, x = -R .. R, y = -R .. R, color = blue) end proc

```

```

g := proc(R, r)
  implicitplot (x^2 + (y + R - r)^2 = r^2, x = -R - 2×r .. R + 2×r,
y = -R - 2×r .. R + 2×r, color = red)
end proc

```

```

a := proc(R, r)
  implicitplot ((x - R + r)^2 + y^2 = r^2, x = -R - 2×r .. R + 2×r,
y = -R - 2×r .. R + 2×r, color = red)
end proc

```

```

b := proc(R, r)
  implicitplot ((x + R - r)^2 + y^2 = r^2, x = -R - 2×r .. R + 2×r,
y = -R - 2×r .. R + 2×r, color = red)
end proc

```

```

c := proc(R, r)
  implicitplot (x^2 + (y - R + r)^2 = r^2, x = -R - 2×r .. R + 2×r,
y = -R - 2×r .. R + 2×r, color = red)
end proc

```

```

F:=f(6,2):
H:=h(6):
G:=g(6,2):
A:=a(6,2):
B:=b(6,2):
C:=c(6,2):
display({F,H,G,A,B,C});

```

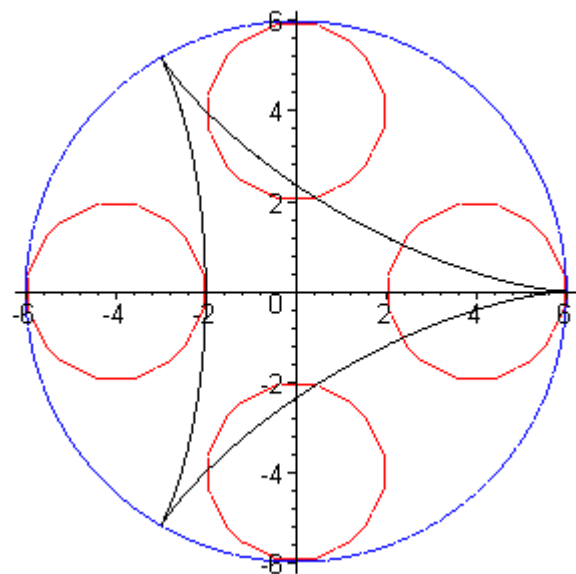
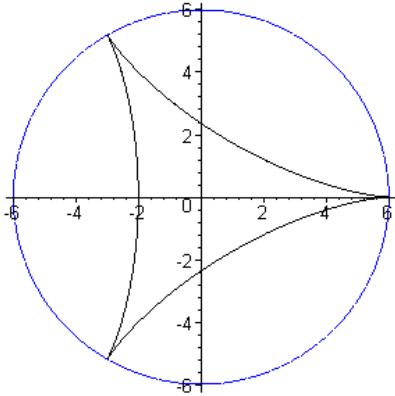


Рис. 5. Графік гіпоциклоїди із радіусами рухомого кола $r = 2$ мм. та нерухомого кола $r_n = 6$ мм. із зображенням нерухомого

кола та декількох положень рухомого кола, побудовані за допомогою СКМ Maple

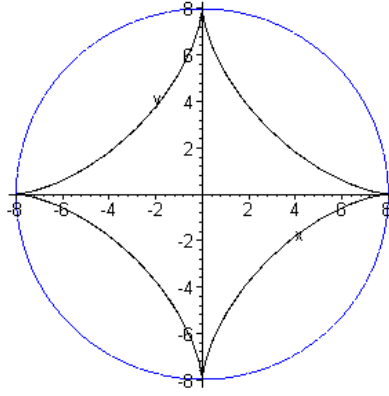
Використовуючи розроблені процедури побудови епіциклоїд та гіпоциклоїд, побудовано суміщений графік вказаних плоских кривих (рис. 6).

F:=f(6,2):
H:=h(6):
display({F,H});



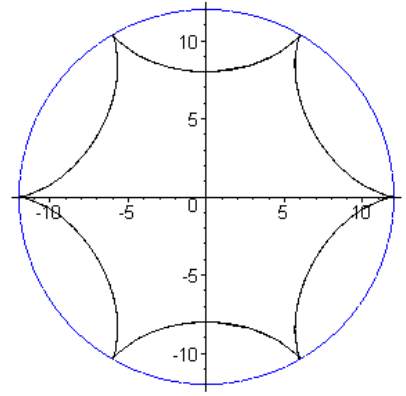
$r = 2 \text{ мм.}; r_H = 6 \text{ мм.}$

F:=f(8,2):
H:=h(8):
display({F,H});



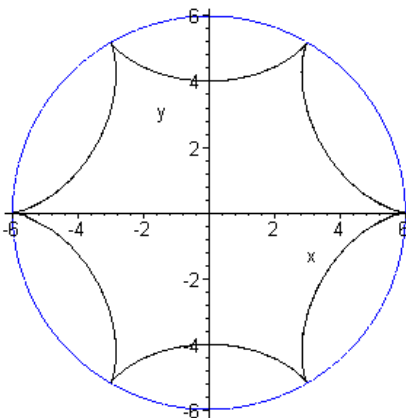
$r = 2 \text{ мм.}; r_H = 8 \text{ мм.}$

F:=f(12,2):
H:=h(12):
display({F,H});



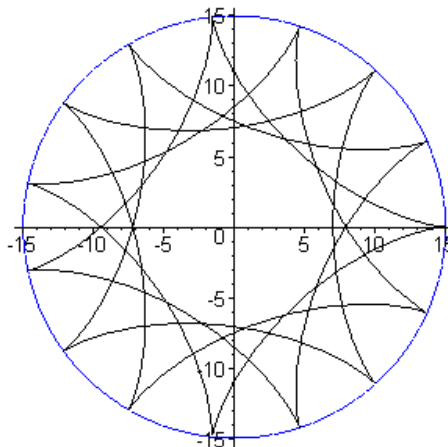
$r = 2 \text{ мм.}; r_H = 12 \text{ мм.}$

F:=f(6,5):
H:=h(5):
display({F,H});



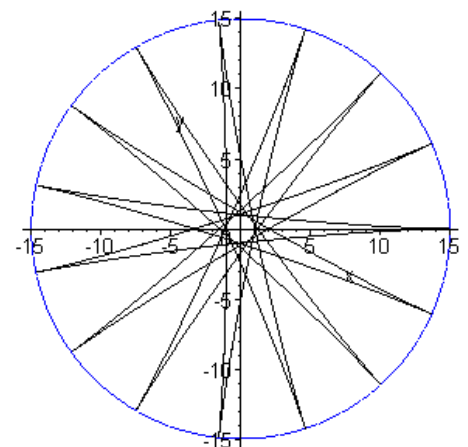
$r = 5 \text{ мм.}; r_H = 6 \text{ мм.}$

F:=f(15,4):
H:=h(15):
display({F,H});



$r = 4 \text{ мм.}; r_H = 15 \text{ мм.}$

F:=f(15,8):
H:=h(15):
display({F,H});



$r = 8 \text{ мм.}; r_H = 15 \text{ мм.}, t = 0..24\pi$

Рис. 4. Графіки гіпоциклоїд із різними рухним та не рухним радіусами, побудовані за допомогою СКМ Maple

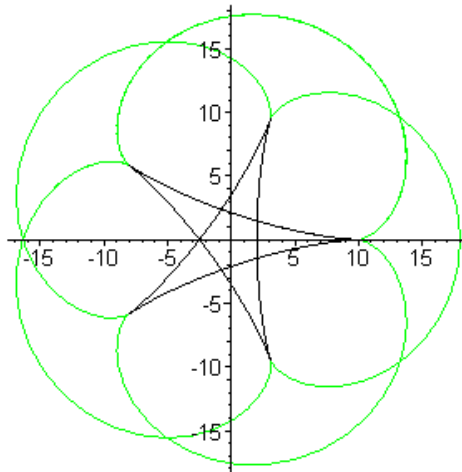


Рис. 6. Графік епіциклоїди та гіпоциклоїди із радіусами рухомого кола 4 мм. та нерухомого кола 10мм., побудовані за допомогою СКМ Maple

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Михалевич В. М. Використання системи комп'ютерної алгебри для висвітлення ключових ідей симплекс-алгоритму / В. М. Михалевич, О. І. Тютюнник // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : [зб. наук. праць]. — Випуск ІХ. — Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2011. — С.113–118.
2. Михалевич В. М. Проектування навчальних задач з лінійного програмування з використанням систем комп'ютерної математики [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, О. І. Тютюнник // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2013. — № 6(38). — Режим доступу до журн.: <http://journal.iitta.gov.ua>.
3. Михалевич В. М. Розвиток системи Maple у навчанні вищої математики майбутніх інженерів-механіків : монографія / В. М. Михалевич, Я. В. Крупський. — Вінниця: ВНТУ, 2013. — 236 с. ISBN. — 978-966-641-539-7.
4. Михалевич В. М. Використання систем комп'ютерної математики у процесі навчання лінійного програмування студентів ВНЗ: монографія / В. М. Михалевич, О. І. Тютюнник. — Вінниця: ВНТУ, 2016. — 279 с. ISBN 978-966-641-670-7.
5. Клочко Т. В. Решение задач комплексного анализа средствами Maple. : учебно-методическое пособие / Т. В. Клочко, Н. Д. Парфенова — Х. : ХНУ имени В.Н. Каразина, 2009. — 68 с.
6. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В. М. Михалевич / Вінниця: "УНІВЕРСУМ-Вінниця", 1998 - 195 с.
7. Матвийчук В. А. Совершенствование процессов локальной ротационной обработки давлением на основе анализа деформируемости металлов: монография / В. А. Матвийчук, И. С. Алиев. — Краматорск: ДГМА, 2009. — 268 с. ISBN 978-966-379-317-7.
8. Лебедев А. А. О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов / А. А. Лебедев, В. М. Михалевич // Пробл. прочности. — 2003. — № 3. — С. 5–14.
9. Mikhalevich V. M. Modeling of plastic deformation in a cylindrical specimen under edge compression / V. M. Mikhalevich, A. A. Lebedev, Yu Dobranjuk // Strength of Materials. - 2011, Vol. 43, No. 6, p. 591-603.
10. Михалевич В. М. Моделювання напружено-деформованого та граничного станів поверхні циліндричних зразків при торцевому стисненні: монографія / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк. — Вінниця: ВНТУ, 2013. — 180 с. ISBN 978-966-641-532-8.
11. Михалевич В. М. Вісесиметрична осадка циліндричних заготовок / Михалевич В. М., Красевський В. О., Добранюк Ю. В. // Наукові нотатки: міжвузівський збірник (за напрямом «Інженерна механіка»). — Луцьк: — 2009 — Випуск 25, ч. 1 — С. 241-249. — ISBN 5-7763-8653-5.
12. Михалевич В.М. Математичне моделювання механіки формоутворення при холодному торцевому розкочуванні / В. М. Михалевич., В. О. Красевський. Вінниця: "УНІВЕРСУМ-Вінниця", 2008. - 188 с. ISBN 978-966-641-238-9

13. Михалевич В. М. Визначення за початковою ділянкою траєкторії деформацій граничного стану бічної поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричного осадження / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, Є. А. Трач // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2012. – №2 – С. 163–167.

14. Михалевич В. М. Апроксимація залежностей між компонентами деформацій на бічній поверхні циліндричного зразка під час торцевого стиснення / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 38309 від 11 травня 2011 р.

15. Добранюк Ю. В. Розрахунок граничного стану та побудова кривих граничних деформацій бічної поверхні циліндричного зразка під час торцевого стиснення / Ю. В. Добранюк, В. М. Михалевич, О. В. Михалевич // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 38308 від 11 травня 2011 р.

16. Михалевич В. М. Экспериментально-аналитическая методика и математические модели деформированного состояния на свободной боковой поверхности цилиндрических образцов при осесимметричной осадке / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк // Обработка металлов давлением: сборник научных трудов. — Краматорск : ДГМА. – 2010. – №1(22). – С. 114–119.

17. Горovenko Л. А. Уравнение циклоиды и его приложения в инженерных науках / Л. А. Горovenko, Д. А. Голиус // Сборник докладов победителей и лауреатов XXII студенческой научной конференции АМТИ. Армавир: ООО «Редакция газеты «Армавирский собеседник», подразделение Армавирская типография», 2016, С. 73–77.

18. Михалевич В. М. Maple. Комп'ютерна підтримка курсу вищої математики в технічному вузі. Частина I. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Навчальний посібник. - Вінниця: ВНТУ, 2004. - 111 с.

19. Михалевич В. М. Вища математика. Математичне програмування в Maple. Частина II. Двоїсті та цілочислові задачі лінійного програмування: навчальний посібник / В.М. Михалевич, О. І. Тютюнник – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 78 с.

Михайло Володимирович Назаренко – студент групи БТ-15б, факультет будівництва, теплоенергетики та газопостачання, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: nazarenko.mishka@gmail.com.

Костянтин Сергійович Пригода — студент групи БТ-15б, факультет будівництва, теплоенергетики та газопостачання, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: kprighoda@mail.ru.

Олена Володимирівна Дедова — студент групи БТ-15б, факультет будівництва, теплоенергетики та газопостачання, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: o.diedova2104@gmail.com.

Науковий керівник: **Юрій Володимирович Добранюк** — доцент каф. вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: dobranuk@mail.ru.

Mikhail V. Nazarenko – student group CE - 15, Faculty for Civil Engineering, Thermal Power Engineering and Gas Supply, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: nazarenko.mishka@gmail.com.

Kostiantin S. Prigoda – student group CE - 15, Faculty for Civil Engineering, Thermal Power Engineering and Gas Supply, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: kprighoda@mail.ru.

Olena V. Diedova – student group CE - 15, Faculty for Civil Engineering, Thermal Power Engineering and Gas Supply, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: o.diedova2104@gmail.com.

Supervisor: **Dobranuk Yuriy V.** - Ph.D., Associate Professor, Department of Mathematics Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: dobranuk@mail.ru.