УДК: 51-74

Б.І. Мокін
О.Б. Мокін
Я.В. Хом'юк

Метод синтезу математичних моделей нелінійних динамічних систем високого порядку на основі занурення інтегрального рівняння Вольтерра в частотну область

Вінницький національний технічний університет

Анотація
Запропоновано метод синтезу математичних моделей нелінійних динамічних систем, структуру яких можна представити послідовним з'єднанням лінійної динамічної частини та нелінійної статичної характеристики, з використанням інтегрального рівняння Вольтерра, що зв'язує вхідний та вихідний сигнали цієї нелінійної динамічної системи, та його розв'язку у частотній області.
Ключові слова: нелінійна динамічна система, лінійна динамічна частина, нелінійна статична характеристика, математична модель, метод синтезу, інтегральне рівняння Вольтерра, частотна область.

Abstract
The method of synthesis of mathematical models of nonlinear dynamic systems, whose structure can be represented by series connection of linear dynamic and nonlinear static characteristics, using the Volterra integral equation that relates the input and output signals of nonlinear dynamical system, and its interpretation in the frequency domain.
Keywords: nonlinear dynamic system of linear dynamic, nonlinear static characteristic mathematical model synthesis method, integral equations Volterra frequency domain.

Постановка задачі

В роботі [1] запропоновано нелінійну динамічну систему зі степеневою нелінійністю *n*-го порядку, на вхід якої поступає сигнал $x(t)$, а на виході має місце сигнал $y(t)$, представляти у вигляді послідовного з'єднання її лінійної динамічної частини з імпульсною перехідною характеристикою $g(t)$, на виході якої має місце квазісигнал $y^*(t)$, та безинерційної степеневої нелінійності *n*-го порядку

$$f(y^*) = \sum_{i=1}^{n} c_i (y^*)^i , \tag{1}$$

на вхід якої поступає квазісигнал $y^*(t)$, а на виході має місце сигнал $y(t)$, що дає право вихідний сигнал $y(t)$ нелінійної динамічної системи зв'язати з її вхідним сигналом $x(t)$ та імпульсною перехідною характеристикою $g(t)$ лінійної динамічної частини вольтерівською інтегральною моделлю, що має вигляд

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{-\infty}^{\infty} \bullet \bullet^i \bullet \bullet \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau_1)...x(t-\tau_i) g(\tau_1,...,\tau_i) d\tau_1...d\tau_i \ . \tag{2}$$

А в роботі [2] при розробленні спрощеного Фур'є-інтегрального методу ідентифікації нелінійної динамічної системи зі степеневою нелінійністю замість виразу (2) використано вираз

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\int_{0}^{\infty} x(t-\tau) g(\tau) d\tau \right)^i , \tag{3}$$

який можна отримати із виразу (2) за умови, що

$$g(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_i) = g(\tau_1) g(\tau_2) ... g(\tau_i) , \tag{4}$$

і який при представленні вхідного сигналу $x(t)$ у вигляді відрізку ряду Фур'є

$$x(t) \approx \sum_{q=-m}^{m} b_q e^{q\omega_0 t}\ , \tag{5}$$

приводить до математичної моделі нелінійної динамічної системи у вигляді

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\sum_{q=-m}^{m} b_q W(jq\omega_0) e^{q\omega_0 t} \right)^i , \tag{6}$$

де T – період інтегрування сигналу *x(t)* при його розкладенні у відрізок ряду (5) з базовою частотою $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, а $W(j\omega)$- амлітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ) її лінійної частини, яка знаходиться як

$$W(j\omega) = W(p)\Big|_{p=j\omega}\ , \tag{7}$$

за умови, що передаточна функція $W(p)$ системи – це перетворена по Лапласу її імпульсна перехідна характеристика $g(t)$, тобто, що

$$W(p) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt\ . \tag{8}$$

Оскільки умова (4) виконується для експоненціальних функцій, адже

$$e^{\alpha_1 \tau\ + \alpha_2 \tau_2 + ... + \alpha_i \tau_i} = e^{\alpha_1 \tau}\ e^{\alpha_2 \tau_2} ... e^{\alpha_i \tau_i}\ , \tag{9}$$

котрі є базовими для усіх імпульсних перехідних характеристик лінійних динамічних систем і однозначно пов’язують експоненціальні складові цих характеристик зі значеннями полюсів передаточних функцій породжуючих їх систем, то кожному полюсу передаточної функції у імпульсній перехідній характеристиці відповідає одна експоненціальна складова, число яких в імпульсній перехідній характеристиці дорівнює порядку диференціального рівняння, з якого отримано передаточну функцію [3].

А тому, якщо лінійна частина нелінійної динамічної системи описується диференціальним рівнянням 1-го порядку, імпульсна перехідна характеристика якої містить лише одну експоненціальну складову, то вирази (2), (3) є тотожними, що було встановлено і використано для побудови методу синтезу математичної моделі такої системи в роботі [2].

Але якщо вирази (2),(3) є тотожними лише для імпульсної перехідної характеристики, яка містить в собі тільки одну експоненціальну складову, характерну для нелінійної динамічної системи з лінійною частиною 1-го порядку, то само собою виникає запитання: «А чи не можна їх трансформувати так, щоб вони були тотожними і за умови, що імпульсна перехідна характеристика лінійної частини нелінійної динамічної системи містить в собі суму кількох експоненціальних складових, кількість яких дорівнює порядку диференціального рівняння, яким описується процес у лінійній частині цієї нелінійної динамічної системи?» Саме цю задачу ми і будемо розв’язувати далі.

Розв’язання задачі

Нехай імпульсна перехідна характеристика лінійної динамічної системи є такою, що може бути представлена у вигляді

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t)\ . \tag{10}$$

Підставляючи вираз (10) у вираз (2), отримаємо

$$\begin{aligned} y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{-\infty}^{\infty} \bullet\bullet^i \bullet\bullet \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau_1)...x(t-\tau_i)[g_1(\tau_1,...,\tau_i) + g_2(\tau_1,...,\tau_i)] d\tau_1...d\tau_i = \\ = \sum_{i=1}^{n} c_i [\int_{-\infty}^{\infty} \bullet\bullet^i \bullet\bullet \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau_1)...x(t-\tau_i) g_1(\tau_1,...,\tau_i) d\tau_1...d\tau_i + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \bullet\bullet^i \bullet\bullet \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau_1)...x(t-\tau_i) g_2(\tau_1,...,\tau_i) d\tau_1...d\tau_i]. \end{aligned} \tag{11}$$

За умови, що для кожної складової у виразі (11) виконується тотожність (4), яка для експонент має вигляд (9), вираз (11) можна представити у вигляді

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i[\left(\int_0^{\infty}x(t-\tau)g_1(\tau)d\tau\right)^i+\left(\int_0^{\infty}x(t-\tau)g_2(\tau)d\tau\right)^i]. \quad (12)$$

У свою чергу вираз (12) з використанням співвідношень (5) - (8) легко приводиться до вигляду

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i[\left(\sum_{q=-m}^{m}b_qW_1(jq\omega_0)e^{q\omega_0 t}\right)^i+\left(\sum_{q=-m}^{m}b_qW_2(jq\omega_0)e^{q\omega_0 t}\right)^i], \quad (13)$$

де

$$W_1(jq\omega_0)=W_1(p)\Big|_{p=jq\omega_0}, \qquad W_2(jq\omega_0)=W_2(p)\Big|_{p=jq\omega_0}, \quad (14)$$

$$W_1(p)=\int_0^{\infty}g_1(t)e^{-pt}dt\ , \qquad W_2(p)=\int_0^{\infty}g_2(t)e^{-pt}dt. \quad (15)$$

Узагальнюючи вираз (13) до N складових, тобто, представляючи імпульсну перехідну характеристику лінійної частини нелінійної динамічної системи N-го порядку у вигляді

$$g(t)=\sum_{k=1}^{N}g_k(t), \quad (16)$$

ми прийдемо до узагальненого виразу

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i[\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{q=-m}^{m}b_qW_k(jq\omega_0)e^{q\omega_0 t}\right)^i], \quad (17)$$

де

$$W_k(jq\omega_0)=W_k(p)\Big|_{p=jq\omega_0},\ k=1,2,...,N,,\ \ W_k(p)=\int_0^{\infty}g_k(t)e^{-pt}dt. \quad (18)$$

який являє собою математичну модель нелінійної динамічної системи зі структурою у вигляді послідовного з’єднання її лінійної динамічної частини та нелінійної статичної характеристики, отриману в результаті застосування запропонованого методу синтезу, в основу якого покладено занурення інтегрального рівняння Вольтерра в частотну область.

Висновок

Запропоновано метод синтезу, за допомогою якого для нелінійних динамічних систем довільного порядку зі степеневими нелінійностями можна визначати їх еквівалентні математичні моделі, шляхом розв’язування інтегралів Вольтерра в частотній області.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ван-Трис Г. Синтез оптимальних нелинейных систем управления./Г.Ван-Трис. – М.: Мир. – 1964. – 167 с.
2. Мокін О.Б., Мокін Б.І. Моделювання та оптимізація руху багатомасових електричних транспортних засобів поверхнями зі складним рельєфом./ О.Б. Мокін, Б.І. Мокін.- Вінниця: ВНТУ. – 2013. – 192 с.
3. Скляревич А.Н. Приведение линейных операторов в задачах автоматического управления./ Рига: Зинатне. – 1965. – 155 с.

Мокін Борис Іванович **–** доктор технічних наук, професор, академік НАПН України, професор кафедри системного аналізу, комп’ютерного моніторингу та інженерної графіки Вінницького національного технічного університету.

Мокін Олександр Борисович **–** доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів Вінницького національного технічного університету.

Хом’юк Яна Вікторівна – аспірантка факультету комп’ютерних систем і автоматики, кафедри системного аналізу, комп’ютерного моніторингу та інженерної графіки Вінницького національного технічного університету, e-mail: khomiukyana@gmail.com

Науковий керівник: ***Мокін Борис Іванович*** **–** доктор технічних наук, професор, академік НАПН України, професор кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки Вінницького національного технічного університету, м. Вінниця.

Mokin Borys I. – Academician of NAPS of Ukraine, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Department of Systems Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics.

Mokin Oleksandr B. – Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Department of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes.

Khomiuk Yana V. – Post-Graduate Student of the Faculty of Computer Systems and Automation, Department of Systems Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics, e-mail: khomiukyana@gmail.com

Supervisor: ***Mokin Borys I.*** – Academician of NAPS of Ukraine, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Department of Systems Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics, Vinnytsia.