ропроцессорных устройств//Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях: тез. док. IV Всесоюзн. совещ. (г. Новосибирск, 17-19 октября 1989г) - Новосибирск, 1989. - часть 2. - с. 49-51.

ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

А. И. Роик, В. И. Месюра, В. И. Луцюк

Соответствие состояния объекта диагностирования (ОД) заданной норме в системах диагностирования устанавливается по целому ряду его выходных параметров, и в случае, если хотя бы один из них выходит за пределы установленных норм (поля допуска), ОД забраковывается. В зависимости от технологии производства, а также от условий эксплуатации и диагностирования значение параметров ОД, а следовательно, и диагностируемые выходные величины изменяются от объекта к объекту. В связи с этим моделью ОД, в общем случае, может служить случайный n-мерный вектор X(n), случайные составляющие проекции которого являются диагностируемыми величинами ОД x_i, $i=1,2,\ldots,n$. Для данного вектора устанавливается допусковая область A(n), которая представляется в виде гиперпараллелепипеда с гранями, параллельными осям, соответствующим выходным параметрам ОД. Условие работоспособности ОД, в этом случае, заключается в том, чтобы вектор X(n) находился внутри допусковой области $X(n) \in A(n)$.

Для систем поэлементного диагностирования характерным является использование метода искусственного расчленения ОД на отдельные независимые элементы [1]. В этой связи диагностируемые параметры вектора X(n) можно считать в вероятностном смысле независимыми. При этом, n-мерная задача диагностирования может быть представлена последовательностью n одномерных задач, каждая из которых заключается в определении принадлежности диагностируемых величин X_i допусковому интервалу (a_i, b_i).

До осуществления процесса диагностирования вероятность того, что величина X_i находится в допусковом интервале, определяется вероятностью распределения случайной величины $f(x_i)$ и самим интервалом

$$P_{зд} = P(a_i < X_i < b_i) = \int_{a_i}^{b_i} f(x_i)dx \qquad (1)$$

Вероятность того, что величина X_i выйдет за пределы поля допуска, может быть определена как:

$$P_{нд} = P[(X_i<a_i) \vee (X_i>b_i)] = \int_{-\infty}^{a_i} f(x_i)dx + \int_{b_i}^{+\infty} f(x_i)dx = 1 - \int_{a_i}^{b_i} f(x_i)dx \quad (2)$$

Именно задачей диагностирования и является определение с максимально возможной точностью, принадлежит или нет диагностируемая величина X_i допусковому интервалу (a_i, b_i). Однако, оценка случайной величины X_i, т.е. измерительное преобразование параметра ОД, практически всегда сопровождается рассеянием фиксируемых значений, которое определяется погрешностью преобразования, и характер которого зависит от многих причин, в том числе и от соотношения погрешности преобразования и поля допуска (a_i, b_i). Сам факт существования допуска является следствием неопределенности процесса преобразования и количественной мерой этой неопределенности. В связи с этим, существует определенная вероятность забраковать по этому параметру годный ОД и, наоборот, принять негодный ОД как годный по этому параметру, что особенно часто проявляется, если истинное значение параметра близко к границе разбраковки.

Таким образом, если в процессе диагностирования, если считать, что анализируется величина $Z_i=X_i+Y_i$ (где Y_i - случайная погрешность измерительно-преобразовательного тракта), возможно одно из четырех несовместимых событий H_j с вероятностью $P(H_j)$:

H_1 - величины X_i и Z_i входят в допусковый интервал $a_i<Z_i<b_i$, $a_i<X_i<b_i$;

H_2 - величина X_i входит в допусковый интервал $a_i<X_i<b_i$, в то время как результат диагностирования $Z_i<a_i$ или $Z_i>b_i$;

H_3 - величина X_i находится за пределами допуска, т.е. $X_i<a_i$ или $X_i>b_i$, в то время как результат диагностирования входит в допуск $a_i<Z_i<b_i$;

H_4 - величины X_i и Z_i не входят в допусковый интервал, т.е. $X_i<a_i$ или $X_i>b_i$ и $Z_i<a_i$ или $Z_i>b_i$.

События H_1 и H_4 соответствуют правильным решениям, принятым по результатам диагностирования, даже если измерительно-преобразовательный тракт вносит погрешность преобразования и фиксируемое значение параметра отличается от истинного. Событие H_2 называют ложным отказом. Его вероятность $P(H_2)$ является полной вероятностью принятия решения, что преобразуемый параметр не входит в допусковый интервал, в то время как на самом деле значение параметра выходит за его пределы. Эта вероятность называется вероятностью ложного отказа $P_{ло}$. Соответственно, событие H_3 является необнаруженным отказом и его вероятность соответствует вероятности необнаруженного отказа $P_{но}$. Для вероятности этих событий справедливы следующие соотношения [2]:

$$P(H_1) = P_{вд} - P_{ло}, \tag{3}$$

$$P(H_2) = P_{нд} - P_{но}. \tag{4}$$

С точки зрения целесообразности диагностирования всегда должны выполняться неравенства $P_{вд} >> P_{ло}$ и $P_{нд} >> P_{ло}$.

Нас будут интересовать вместо полных вероятностей ложного и необнаруженного отказа их относительные значения $\alpha = P_{ло}/P_{вд}$ и $\beta = P_{но}/P_{нд}$, которые принято классифицировать как вероятности ошибок соответственно первого и второго рода [3]. Если диагностируемая величина X_i и погрешность измерительного преобразования Y_i в вероятностном смысле независимы, то результат диагностирования, как уже отмечалось, определяется суммарной величиной $Z_i = X_i + Y_i$, плотность распределения которой определяется как композиция плотностей распределения $f(x_i)$ и $f(y_i)$:

$$\varphi(Z_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_i) f(y_i)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_i) f(z_i - x_i)\,dx \tag{5}$$

В этом случае, если для события H_2 имеем $a_i < X_i < b_i$, $(Z_i < a_i) \vee (Z_i > b_i)$, то, подставляя значение Z_i, получим $Y_i < a_i - X_i$, $Y_i > b_i - X_i$, при этом, вероятность события $P(H_2)$ определится как:

$$P(H_2) = P_{ло} = \int_{a_i}^{b_i} f(x_i)\Big[\int_{-\infty}^{a_i - x_i} f(y_i)\,dy + \int_{b_i - x_i}^{+\infty} f(y_i)\,dy\Big]dx =$$

$$= \int_{a_i}^{b_i} f(x_i)\,dx\Big[1 - \int_{a_i}^{b_i} f(y_i)\,dy\Big] \tag{6}$$

Аналогично, для события H_3 будем иметь:

$$P(H_3) = P_{но} = \int_{-\infty}^{a_i} f(x_i)\Big[\int_{a_i - x_i}^{b_i - x_i} f(y_i)\,dy\Big]dx + \int_{b_i}^{+\infty} f(x_i)\Big[\int_{a_i - x_i}^{b_i - x_i} f(y_i)\,dy\Big]dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_i)\,dx \int_{a_i}^{b_i} f(y_i)\,dy - \int_{a_i}^{b_i} f(x_i)\,dx \int_{a_i}^{b_i} f(y_i)\,dy \tag{7}$$

Разделив (6) и (7) соответственно на значения $P_{вд}$ и $P_{нд}$, из (1) и (2) получим вероятности ошибок первого и второго рода:

$$\alpha = \frac{\int_{a_i}^{b_i} f(x_i)\Big[1 - \int_{a_i}^{b_i} f(y_i)\,dy\Big]dx}{\int_{a_i}^{b_i} f(x_i)\,dx}, \tag{8}$$

$$\beta = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_i)[\int_{a_i}^{b_i} f(y_i)dy]dx - \int_{a_i}^{b_i} f(x_i)[\int_{a_i}^{b_i} f(y_i)dy]dx}{1-\int_{a_i}^{b_i} f(x_i)dx} \quad (9)$$

Можно предположить, что плотность распределения параметра X_i ОД после проведения измерительного преобразования из-за наличия случайной погрешности $f(y_i)$ не будет строго усеченной по координатам a_i и b_i, а примет некоторый условно называемый квазиусеченный вид. Для определения аналитического вида этой функции пользуются функцией $\Theta(t)$, которая позволяет "сшивать" получаемые функции на границах интервала (a_i,b_i) [3]:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t<0; \\ 1/2 & \text{при } t=0; \\ 1 & \text{при } t>0, \end{cases}$$

$$\Theta(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{при } t<a; \\ 1/2 & \text{при } t=a; \\ 0 & \text{при } t>a. \end{cases}$$

Тогда плотность распределения ОД, отнесенных по i-му параметру в процессе диагностирования к категории годных, определится как:

$$\Psi_1(x_i,y_i)dx = [\Theta(x_i-a_i) - \Theta(x_i-b_i)]f(x_i)[\int_{a_i}^{b_i} f(y_i)dy]dx \quad (10)$$

Очевидно, что плотность распределения ОД являющихся негодными $(X_i<a_i)\vee(X_i>a_i)$, но которые, однако, в результате диагностирования признаются из-за погрешностей измерительного преобразования как годные, имеет вид:

$$\Psi_2(x_i,y_i)dx = [1-\Theta(x_i-a_i)+\Theta(x_i-b_i)]f(x_i)[\int_{a_i}^{b_i} f(y_i)dy]dx \quad (11)$$

Поскольку функции $\Psi_1(x_i)$ и $\Psi_2(x_i)$ тождественно не равны нулю в непересекающихся областях, то результирующую плотность распределения ОД, принятых в результате диагностирования по i-му параметру как годные, можно записать в виде

$$\Psi(x_i,y_i) = f(x_i)\int_{a_i}^{b_i} f(y_i)dy \quad (12)$$

Полученное выражение позволяет после проведения измерительного преобразования уточнить плотность распределения ОД по i-му параметру с учетом погрешности преобразования. Очевидно, что при многократном повторении измерительного преобразования i-х параметров ОД (12) будет иметь вид:

$$\psi^m(x_i, y_i) = f(x_i)\left[\int_{a_i}^{b_i} f(y_i)\,dy\right]^m \qquad (13)$$

На рис. 1 показана трансформация кривой плотности распределения i-го параметра ОД при m-разовых итерациях измерительного преобразования, погрешности которого распределены по гауссовскому закону.

С учетом (13) вероятности ошибок первого и второго рода могут быть переписаны в виде:

$$\alpha = \frac{\int_{a_i}^{b_i}[f(x_i) - \psi^m(x_i, y_i)]\,dx}{\int_{a_i}^{b_i} f(x_i)\,dx} = 1 - \frac{\int_{a_i}^{b_i}\psi^m(x_i, y_i)\,dx}{\int_{a_i}^{b_i} f(x_i)\,dx} \qquad (14)$$

$$\beta = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^m(x_i, y_i)\,dx - \int_{a_i}^{b_i}\psi^m(x_i, y_i)\,dx}{1 - \int_{a_i}^{b_i} f(x_i)\,dx} \qquad (15)$$

Вероятность ошибки первого рода может служить для оценки степени риска поставщика A [2,3], при этом степень риска B будет определяться как:

$$B = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x_i, y_i)\,dx - \int_{a_i}^{b_i}\psi(x_i, y_i)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x_i, y_i)\,dx} = 1 - \frac{\int_{a_i}^{b_i}\psi(x_i, y_i)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x_i, y_i)\,dx} \qquad (16)$$

Все выкладки рассматриваемого вероятностно-статистического метода учета погрешности измерительного преобразования проводились с учетом только случайных составляющих погрешности. Для учета систематической составляющей погрешности преобразования σ функцию плотности распределения погрешности $f(y_i)$ необходимо сместить на величину этой погрешности, т.е. оперировать при получении результирующей плотности распределения параметров ОД функцией распределения $f(y+\sigma)$:

$$\psi^m(x_i, y_i + \sigma) = f(x_i)\left[\int_{a_i}^{b_i} f(y_i + \sigma)\,dy\right] \qquad (17)$$

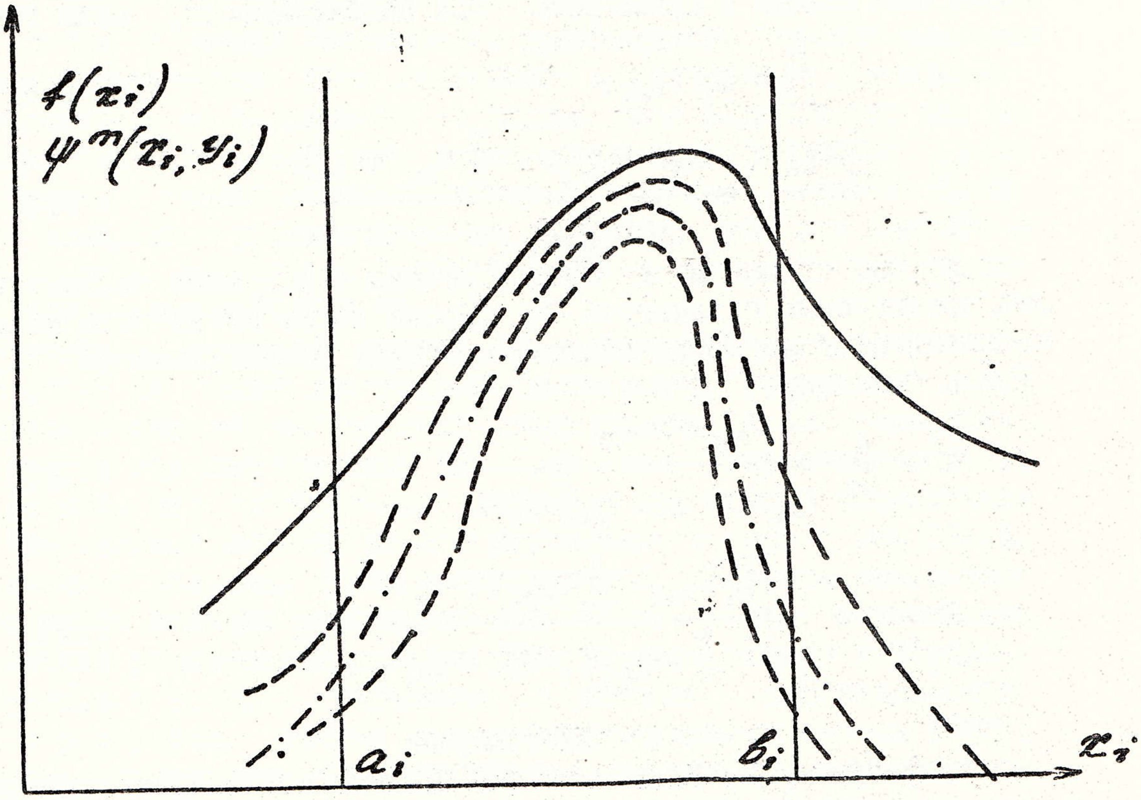

Рис. I. Трансформация кривой функции плотности распределения преобразуемого параметра при m - разовых итерациях преобразования:

—— $f(x_i)$; — — $\psi(x_i, y_i)$;

—·— $\psi'(x_i, y_i)$ - - - - $\psi^m(x_i, y_i)$.

Таким образом, полученное выражение плотности распределения диагностируемых параметров ОД позволяет учитывать погрешности измерительно-преобразовательного тракта и дает формулы для расчета вероятностей ошибок первого и второго рода, а также риска поставщика и заказчика. При необходимости, если учесть, что

$$\alpha = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i)P_{вд i}, \tag{18}$$

$$\beta = \frac{\prod_{i=1}^{n}[P_{вд i}(1-\alpha_i)+P_{нд i}\beta] - \prod_{i=1}^{n} P_{вд}(1-\alpha_i)}{1 - \prod_{i=1}^{n} P_{нд i}} \tag{19}$$

Эти же оценки могут быть получены и для всей совокупности диагностируемых параметров ОД. Кроме того, могут быть получены и оценки достоверности диагностирования по результатам "годен" (Дг) и "не годен" ($Д\bar{г}$).

$$Дг = \prod_{i=1}^{n} \frac{P_{вд i}(1-\alpha_i)}{P_{вд i}(1-\alpha_i)+P_{нд i}\beta_i}, \tag{20}$$

$$Д\bar{г} = 1 - \frac{\prod_{i=1}^{n} P_{вд i} - \prod_{i=1}^{n} P_{вд i}(1-\alpha_i)}{1 - \prod_{i=1}^{n}[P_{вд i}(1-\alpha_i)+P_{нд i}\beta_i]}. \tag{21}$$

Литература

1. Байда Н. П., Кузьмин И. В., Шпилевой В. Т. Микропроцессорные системы поэлементного диагностирования РЭА. - М.: Радио и связь, 1987 - 256 с.
2. Системы автоматизированного контроля радиоэлектронной аппаратуры/Е. Т. Володарский, В. И. Губарь, Л. Л. Никифоров, Ю. М. Туз. -К.: Техника, 1983. -151 с.
3. Беляков Ю. Н., Курмаев Ф. А., Баталов Б. В. Методы статистических расчетов микросхем на ЭВМ. -М.: Радио и связь, 1985. - 232 с.