УДК 517

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Іванов Ю.Ю.
Науковий керівник - доц., к.пед.н. Кашканова Г.Г.

Проілюструємо застосування похідних і інтегралів при розв'язуванні задач елементарної математики, а саме при доведенні тригонометричних і алгебраїчних тотожностей.

I. При доведенні тотожностей з застосуванням похідної використовують ознаку сталості функції, а саме: для того, щоб функція $f(x)$ була сталою на деякому інтервалі $[a;b]$, необхідно і достатньо, щоб її похідна дорівнювала нулю на цьому інтервалі, тобто $f'(x)=0$, $x\in[a;b]$.

1. Довести тотожність:

$$(x+b+c)^2+(-x+b+c)^2+(x-b+c)^2+(x+b-c)^2=4(x^2+b^2+c^2).$$

Розглянемо дану функцію:

$$f(x)=(x+b+c)^2+(-x+b+c)^2+(x-b+c)^2+(x+b-c)^2-4(x^2+b^2+c^2),$$

яка визначена для $x\in R$. Знаходимо її похідну:

$$f'(x)=2(x+b+c)-2(-x+b+c)+2(x-b+c)+2(x+b-c)-8x\equiv 0.$$

Так як $f'(x)\equiv 0$, для $x\in R$, то $f(x)=C=const$. Знайдемо C, обчислюючи значення $f(x)$ при будь-якому x. Наприклад, при $x=0$.

$$f(0)=(b+c)^2+(b+c)^2+(c-b)^2+(b-c)^2-4(b^2+c^2)=4(b^2+c^2)-4(b^2+c^2)=0.$$

$f(x)=0.$ Отже, для $x\in R$ дана тотожність виконується.

II. Використання невизначеного інтеграла в тотожних перетвореннях грунтується на наступному: якщо $F(x)$ первісна для $f(x)$, тобто: $F'(x)=f(x)$, $x\in[a;b]$, тоді $\int f(x)dx=F(x)+C.$

2. Довести тотожність:

$$tgx+2tg2x+4tg4x+8tg8x=ctg-16ctg16x.$$

Позначимо ліву частину даної тотожності через $f(x)$. Маємо:

$$f(x)=tgx+2tg2x+4tg4x+8tg8x,$$

$$F(x)=\int\left(\frac{\sin x}{\cos\ x}+\frac{2\sin 2x}{\cos\ 2x}+\frac{4\sin 4x}{\cos\ 4x}+\frac{8\sin 8x}{\cos\ 8x}\right)dx=-\ln|\sin 16x|+\ln 16+\ln|\sin x|+C.$$

Звідки одержимо:

$$f(x)=F'(x)=(\ln|\sin x|-\ln|\sin 16x|+\ln 16+C)'=ctgx-16ctg16x,$$

$$f(x)=ctgx-16ctg16x.$$

Отже, дана тотожність виконується для $x\in R$.