В. В. Хом'юк, І. В. Хом'юк

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Частина 2

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ
Практикум

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. В. Хом'юк, І. В. Хом'юк

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 2

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Практикум

Вінниця
ВНТУ
2015

УДК 51(075)
ББК 22.я73
Х76

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 3 від 30.10.2014 р.)

Рецензенти:

Ю. І. Волков, доктор фізико-математичних наук, професор

Є. А. Іванченко, доктор педагогічних наук, професор

Л. А. Вотякова, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Хом'юк, В. В.

Х76 Вища математика. Ч. 2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: практикум / В. В. Хом'юк, І. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 150 с.

У навчальному посібнику на системній основі наводиться теоретичний мінімум з базових тем курсу «Вища математика», а саме з диференціального та інтегрального числення функції однієї змінної наведено основні алгоритми розв'язування відповідних практичних задач, запитання для самоперевірки, вправи для практичних занять та самостійного розв'язування. Наведені приклади проведення інтерактивних практичних занять із розглядуваних тем.

Розрахований на студентів технічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 51(075)
ББК 22.я73

ЗМІСТ

Уся глибина думки, закладена у формулювання математичних понять, згодом розкривається тим умінням, із яким ці поняття використовуються.
Е. Вігнер

Математика – це не так знання, як уміння.
В. Серве

ВСТУП

Курс математичного аналізу є одним із основних, визначальних як для всього процесу навчання, так і подальшої практичної діяльності спеціаліста. Він є необхідним для успішного засвоєння таких фундаментальних дисциплін, як фізика, інформатика, теоретична механіка, теорія пружності, опір матеріалів, а також спеціальних дисциплін, у зв'язку з інтенсивним використанням та дослідженням математичних моделей. Викладання математичного аналізу має за мету: формування особистості студентів, розвиток їх інтелекту й здібностей до логічного та алгоритмічного мислення; оволодіння студентами основами математичного апарату; вироблення навичок самостійного вивчення наукової літератури з математики та її застосувань; навчання основним математичним методам, які необхідні для аналізу та моделювання процесів, явищ, пристроїв при пошуку оптимальних розв'язків, методом обробки та аналізу результатів числових та натуральних експериментів. Саме одним із засобів розв'язання поставленої мети, виступає розроблений авторами навчальний посібник.

Друга частина практикуму складається з таких розділів, як вступ до математичного аналізу, диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Запропонований у задачнику матеріал містить розділи, що відповідають програмі курсу «Вищої математики». Кожний розділ посібника містить короткий теоретичний довідник (означення, формули, теореми) та велику кількість детально розібраних прикладів, які дають можливість студентам самостійно виконати запропоновані завдання та перевірити засвоєння матеріалу. Всі запропоновані завдання для самостійної роботи наведені із відповідями, що досить зручно для перевірки контролю засвоєння знань студентами з відповідної теми.

Для розвитку самостійного мислення, формування математичної компетентності майбутніх фахівців і поглибленої роботи студентів, пояснення розв'язання деяких прикладів свідомо скорочено.

Кожний розділ посібника закінчується індивідуальними домашніми завданнями по 30 варіантів з кожної теми. Кількість розрахована на одну академічну групу. Практикум, призначений для використання студентами різних спеціальностей денної та заочної форм навчання в процесі вивчення окремих розділів курсу.

1 ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Практичне заняття № 1

Поняття функції. Границя. Неперервність

Мета: закріпити отримані теоретичні знання з тем: «Функції», «Границі», «Неперервність», набути навичок і вмінь обчислення границь, дослідження функцій на неперервність.

Питання для самопідготовки:

–поняття функції;
– властивості функцій;
– границя функції в точці;
– границя функції на нескінченності. Нескінченна границя;
– нескінченно малі та їх властивості;
– основні теореми про границі;
– чудові границі;
– неперервність функції в точці;
– розривні функції. Класифікація точок розриву;
– порівняння нескінченно малих.

План практичного заняття

1. Поняття функції, її властивості.
2. Границя функції.
3. Неперервність функції. Точки розриву.

Теоретичний довідник

Нехай маємо дві множини X і Y. Якщо кожному елементу $x \in X$ за деяким законом поставлено у відповідність єдиний елемент $y \in Y$, то кажуть, що на множині X задано ***функцію*** $f(x)$. Записують так: $y = f(x), \quad x \in X$. У такому разі x називають ***аргументом функції*** f, а $y -$ функцією змінної x. Множину X називають ***областю визначення*** функції f, а множину всіх y, для яких $y = f(x) -$ областю значень. Область визначення функції f позначають $D(f)$, а область значень – $E(f)$. Функцію $y = f(x), x \in D$ називають ***обмеженою***, якщо існує таке число M, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|f(x)| \le M$.

Функцію $y = f(x),\ x \in D$ називають ***обмеженою знизу (зверху)***, якщо існує таке число M, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $f(x) \ge M \quad (f(x) \le M)$.

Функцію $y = f(x),\ x \in D$ називають ***обмеженою***, якщо вона є обмеженою знизу і зверху, тобто існують такі числа M_1 і M_2, що для всіх $x \in D$ виконуються нерівності $M_1 \le f(x) \le M_2$.

Функцію $y = f(x)$ називають ***зростаючою (спадною)*** на проміжку $(a;b)$, якщо для будь-яких $x_1 \in (a;b),\quad x_2 \in (a;b)$, таких що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \le f(x_2)\ (f(x_1) \ge f(x_2))$.

Якщо $f(x_1) < f(x_2)\quad ((f(x_1) > f(x_2))$ для всіх $x_1 < x_2$, то функцію $y = f(x)$ називають ***строго зростаючою*** (строго спадною).

Функцію $y = f(x),\ x \in D$ називають ***парною (непарною)***, якщо область її визначення симетрична відносно початку координат і для всіх x з області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат (Oy), а графік непарної функції – відносно початку координат.

Існують теореми, пов'язані з парністю (непарністю) функцій.

Теорема 1. Алгебраїчна сума скінченої кількості парних (непарних) функцій є функція парна (непарна).

Теорема 2. Добуток парних функцій є функція парна.

Теорема 3. Добуток парної кількості непарних функцій є функція парна.

Добуток непарної кількості непарних функцій є функція непарна.

Теорема 4. Якщо $f(x), g(x) -$функції однакової (різної) парності і $g(x) \ne 0$ для всіх $x \in D(g)$, то функція $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ є парною (непарною) функцією.

Функцію $y = f(x), x \in D$ називають ***періодичною,*** якщо існує таке число $T > 0$, що для всіх $x \in D$ виконується рівність $f(x+T) = f(x)$. Найменше з таких чисел T називають основним періодом функції $f(x)$.

Число А називають ***границею функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x_0, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $\{x_n\}, n \in N$, з $O^*(x_0)$, що збігається до числа x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа А (означення за Гейне).

Символічно записують так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, або $f(x) \to A, x \to x_0$.

Число А називають ***границею функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує додатне число δ таке, що з нерівності

$|x-x_0|<\delta, x\neq x_0$ для всіх $x\in D(f)$ випливає нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon.$ (означення за Коші).

Число А називають ***границею*** $y=f(x)$ ***при*** $x\to+\infty,$ якщо для будь-яких послідовностей $\{x_n\}$ таких, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty,$ виконується $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A.$ Записують так: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A.$

Теорема 1. Якщо функція $y=f(x)$ у точці x_0 має границю, то така границя єдина.

Якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $\{x_n\}$ такої, що $x_n\neq x_0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0,$ має місце $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty,$ то кажуть, що в точці x_0 границя функції дорівнює нескінченності. Записують так: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

Крім означення «границі функції у точці», існують ще означення односторонніх границь, а саме «границі справа» і «границі зліва», якщо в означенні «границі в точці», за Гейне, поставити вимоги, щоб усі значення x_n вибиралися зліва від точки x_0, то одержимо «границю зліва», а якщо тільки справа від точки x_0, то одержимо «границю справа». Односторонні границі позначають так:

$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ або $f(x_0+0)-$ границя справа (правостороння границя);

$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ або $f(x_0-0)-$ границя зліва (лівостороння границя).

Мовою «$\varepsilon-\delta$» означення односторонньої границі є таким.

Число А називають ***границею справа (зліва) функції*** $y=f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує додатне число δ таке, що для всіх x з інтервалу $(x_0;x_0+\delta)$ $((x_0-\delta;x_0))$ виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon.$

Теорема 2. Якщо функція $y=f(x)$ у точці x_0 має границю, то в цій точці: 1) існує границя зліва; 2) існує границя справа; 3) односторонні границі рівні.

Якщо границя функції $y=f(x)$ у точці x_0 дорівнює нулю, то цю ***функцію називають нескінченно малою*** в точці x_0.

Функція $y=f(x)$ ***називається нескінченно великою при*** $x\to x_0$***,*** якщо для будь-якого Е>0, яке може бути як завгодно великим, існує такий окіл точки x_0, що для всіх точок його, хіба що крім x_0, виконується нерівність $|f(x)|>E.$ Позначають цей факт так: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty.$

Властивості нескінченно малих

Теорема 1 ***(зв'язок нескінченно малих і великих функцій).*** Якщо $f(x)-$ нескінченно велика при $x\to x_0,$ то $\dfrac{1}{f(x)}-$ нескінченно мала при $x\to x_0.$

Література

1. Валєєв К. Г. Вища математика: навч. посібник : у 2-х ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.
2. Валєєв К. Г. Математичний практикум: навч. посібник / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2004. – 682 с.
3. Васильченко І. П. Вища математика для економістів: підручник / І. П. Васильченко. – К. : Знання, 2007. – 454 с.
4. Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1980. – 320 с.
6. Долгіх В. М. Вища математика для економістів. Ч. 3. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди: навч. посібник : у 4 ч. / В. М. Долгіх, К. А. Дахер, Т. І. Малютіна ; Державний вищий навчальний заклад «Українська академія банківської справи Національного банку України». – Суми : ДВНЗ «УАБС НБУ», 2009. – 135 с.
7. Дюженкова Л. І. Вища математика. Приклади і задачі: посібник / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін. – К. : Академія, 2002. – 624 с.
8. Красс М. С. Математика для экономистов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005. – 464 с.
9. Кривуца В. Г. Вища математика: практикум / В. Г. Кривуца, В. В. Барковський, Н. В. Барковська. К. : ЦУЛ, 2003. – 536 с.
10. Лиман, Ф. М. Вища математика: навч. посібник / Ф. М. Лиман, С. В. Петренко, О. О. Одинцова – Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2002. – Ч. 1. – 224 с.
11. Овчинников П. Ф. Высшая математика / П. Ф. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К. : Вища школа, 1987. – 552 с.
12. Пастушенко С. М. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв’язування задач: навч. посібник / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко – К. : Діал, 2000. – 160 с.
13. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пособие : в 3 ч. / под общей редакцией А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 1. – 270 с.
14. Шипачев В. С. Высшая математика: учеб. / В. С. Шипачев. – М. : Высшая школа, 1996. – 479 с.

Навчальне видання

Віктор Вікторович Хом'юк
Ірина Володимирівна Хом'юк

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Частина 2

Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної
Практикум

Навчальний посібник

Редактор І. Городенська

Оригінал-макет підготовлено І. Хом'юк

Підписано до друку
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк.
Наклад пр. Зам. №

.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.