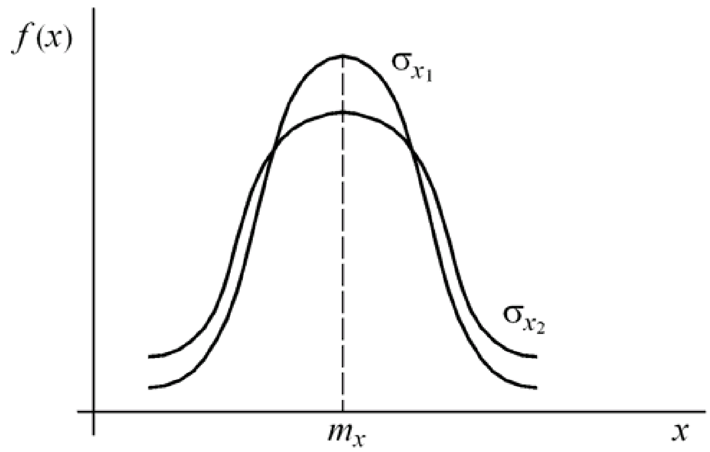
Тичинська Л. М., Черепащук А. А.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Ч. 1

Історичні екскурси

та основні теоретичні відомості



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
Ч. 1
Історичні екскурси
та основні теоретичні відомості

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2010

УДК 519.2 (075)
ББК 22.171я73
Т46

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 2 від 1.10.2009)

Рецензенти:
В. В. Кухарчук, доктор технічних наук, професор
В. М. Михалевич, доктор технічних наук, професор
О. І. Матяш, кандидат педагогічних наук

Тичинська Л. М.
Т46 Теорія ймовірностей. ч. 1. Історичні екскурси та основні теоретичні відомості : навчальний посібник / Л. М. Тичинська, А. А. Черепащук. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 112 с.

Навчальний посібник з теорії ймовірностей з елементами історії її розвитку. У посібнику розглянуто основні поняття і теореми теорії ймовірностей та статистики. З метою підвищення рівня мотивації студентів до навчально-пізнавальної діяльності до змісту посібника включено матеріал розвитку окремих понять, розділів науки, деякі біографічні дані вчених, які займалися розвитком теорії ймовірностей.

Посібник рекомендований студентам та викладачам вищих навчальних закладів технічних спеціальностей.

УДК519.2 (075)
ББК22.171я73

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія ймовірностей одна з найцікавіших та найзагадковіших наук, прикладний характер якої дає можливість застосовувати її до розв’язання задач фізики, економіки, природознавства та різноманітних технічних дисциплін. В інженерній справі велике значення має теорія надійності, що широко використовує методи теорії ймовірностей. Великого значення набула теорія ймовірності для молекулярної фізики, оскільки відомі закони фізики не можуть бути дієвими для масових явищ, у яких бере участь велика кількість елементів, а також при відсутності достатньої кількості фактів та знань про характер взаємодії даних елементів. У свою чергу методи теорії ймовірності цілком задовольняють дані вимоги. Також апарат теорії ймовірності виявився придатним для вивчення явищ природи, а всебічне дослідження явищ природи наштовхує теорію ймовірності на пошук нових закономірностей, що породжуються випадком. Отже, об’єктом дослідження та вивчення даної науки є система масових явищ, дослідів, результатами яких є певні випадкові події, а також вивчення самих цих результатів даних явищ.

Разом із вивченням теорії ймовірностей як науки, із стрункою змістовною лінією та багатим математичним апаратом, варто не випустити з уваги також історичний розвиток науки, оскільки для того, щоб зрозуміти зміст певного конкретного поняття, потрібно дослідити динаміку його розвитку, звернути увагу на основні ключові фактори, що вплинули на його утворення.

Іноді потрібен тривалий термін, щоб початкові ідеї та окремі завдання сформувалися й дали початок новій теорії зі своїми формулюваннями завдань і методами дослідження, що дозволяють просунутися по шляху пізнання явищ навколишнього світу. Теорія ймовірностей має багату і повчальну історію. Вона наочно показує, як виникали її основні поняття і розвивалися методи із завдань, з якими стикався суспільний прогрес.

Для кращого усвідомлення та сприйняття всього базового математичного апарату, що його використовує дана наука, варто розглянути періоди розвитку самої науки, звернути увагу на науковців, котрі займалися цими питаннями.

Саме з цією метою розглядається історія розвитку теорії ймовірностей.

Стимули виникнення теорії ймовірностей.

Як бачимо, основними чинниками, що стимулювали розвиток теорії ймовірностей, були задачі практичного характеру, відповідь на які не могла дати жодна з існуючих на той час наук.

Перші задачі імовірнісного характеру, що виникали в найрізноманітніших сферах діяльності людини, з часом почали викристалізовуватись в поняття і методи теорії ймовірностей. Задачі і проблеми, що вплинули на зародження і початковий розвиток теорії ймовірностей, виникали при обробці статистичних даних. В Давньому Єгипті, Греції, Римі робили окремі спроби підрахунку населення, кількості щорічно зібраного хліба. В російських літописах, що їх відносять до X ст., і більш пізніх є вказання на збір деяких статистичних даних. Статистика стала одним із суттєвих стимулів розвитку теорії ймовірності.

Практика азартних ігор не була вирішальним стимулом для розвитку теорії ймовірності, але вона висувала задачі, що стимулювали теорію ймовірності до розвитку.

Однією з перших задач, яку слід віднести до теорії ймовірностей, є обчислення числа різних можливих варіантів при киданні гральних кубиків. Перші відомі підрахунки при киданні 3-х гральних кубиків відносять до X-XI століть. Найперша відома спроба підрахувати число можливих варіантів при киданні 3-х гральних кубиків, включаючи і перестановки, зустрічається в працях 1200-1250 років.

Історично теорія ймовірностей має такі етапи свого розвитку.

- Передісторія теорії ймовірностей (давні віки - XVI ст.).
- Поява теорії ймовірностей як науки (XVII - XVIII ст.).
- Поява роботи Якоба Бернуллі “Мистецтво припущень” (XIX ст.).
- Створення російської (Петербурзької школи) (XIX – XX ст.).
- Сучасний період розвитку теорії ймовірностей (XX - …).

Кожен з етапів характеризується певною особливістю у розвитку науки, що видно з назв кожного з них.

Передісторія теорії ймовірностей

В цей період, початок якого знаходиться в давніх віках, ставились і примітивно вирішувались елементарні задачі, які пізніше були віднесені до теорії ймовірностей (збір статистичних даних, що носив імовірнісний характер). Ніяких спеціальних методів у цей період не виникає. Йде накопичення матеріалу. Цей період закінчується в XVI ст. роботами Кардано, Пачіоллі, Тарталья та інших (в яких автори розглядають задачі, розв’язання яких містять елементи комбінаторики).

Поява теорії ймовірностей як науки

З’являються перші специфічні поняття, такі як математичне сподівання.

Встановлено перші теореми науки - теореми додавання і множення ймовірностей. Початок цього періоду пов’язано з іменами Паскаля, Ферма, Гюйгенса. Цей період подовжується з середини XVII ст. до початку XVIII ст. Теорія ймовірностей знаходить своє застосування в демографії, страховій справі, при оцінюванні похибок спостереження.

Робота Якоба Бернуллі “Мистецтво припущення”

До цього етапу розвитку відносять роботи Муавра, Лапласа, Гаусса, Пуассона та інших. Теорія імовірності починає застосовуватися в різних областях природознавства. Центральне місце займають граничні теореми.

Період розвитку теорії ймовірностей, пов'язаний з російською (Петербурзькою) школою

Тут можна назвати такі прізвища, як П. Л. Чебишов, А. А. Марков, А. М. Ляпунов. В цей період поширення закону великих чисел і центральної граничної теореми на різноманітні класи випадкових величин досягає своїх природних меж. Закони теорії ймовірності стали застосовуватись до залежних випадкових величин. Все це дало можливість застосувати теорію ймовірності до багатьох розділів природознавства, в першу чергу – до фізики.

Сучасний період

Сучасний період розвитку теорії ймовірностей розпочався зі встановлення аксіоматики.

Цього, в першу чергу, вимагала практика, оскільки для успішного застосування теорії ймовірностей у фізиці, біології та інших областях науки, а також у техніці та військовій справі необхідно було уточнити та привести в струнку систему її основні поняття. Це зумовило небувалу широту досліджень з теорії ймовірностей, починаючи від господарчо-прикладних питань і закінчуючи найвужчими питаннями кібернетики.

Цей період історії теорії ймовірностей характеризується надзвичайним розширенням кола її застосувань, створенням декількох систем бездоганно строгого математичного обґрунтування теорії ймовірностей (аксіоматики), нових потужних методів, що вимагають іноді застосування (крім класичного аналізу) ресурсів теорії множин, теорії функцій дійсної змінної і функціонального аналізу. У цей період при дуже великій напруженій роботі в царині теорії ймовірностей за кордоном (у Франції - Е. Борель, П. Леві, М. Фреш, у Німеччині - Р. Мізес, у США - Н. Вінер, В. Феллер, Дж. Дуб, у Швеції - Г. Крамер) радянська наука продовжує займати виключно значне, а в ряді напрямків і провідне значення.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІЕЙ. АЛГЕБРА ПОДІЙ ТА ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. Випадкові події та дії над ними. Простір подій

Первісним поняттям в теорії ймовірностей є поняття ***події (the vent)***. Результат спостереження чи досліду будемо називати ***подією*** і позначати великими буквами латинського алфавіту A, B, C.

Для того, щоб подія відбулась, необхідне виконання певного комплексу умов, які позначатимемо через S.

Якщо, наприклад, дослід полягає в киданні монети, то поява герба (або цифри) є подією: якщо виготовлення підшипника даного типу – дослід, то відповідність підшипника стандарту – подія; якщо дослід – кидання гральної кістки (кубика), на гранях якої поставлені цифри (очки) від 1 до 6, то випадання будь-якої цифри - подія.

Всі події можна розділити на ***вірогідні (reliable), неможливі (imposssible)*** та ***випадкові (random)***. Вірогідними називають події, які при заданих умовах обов'язково відбудуться в проведеному досліді. Якщо ж при здійсненні комплексу умов подія не відбудеться ніколи, то така подія називається неможливою.

Наприклад: випадання від одного до шести очок при киданні грального кубика – подія достовірна, випадання семи очок – неможлива. Достовірні події позначають буквою U, неможливі - V.

Імовірність (the probability) - характеризує шанс появи події. Іноді шанс появи події задають або визначають відсотками. Наприклад, станок штампує деталі, причому якісних серед них 90%. Випадковими називаються події, які при виконанні комплексу умов S можуть відбутися, а можуть і не відбутися. Наприклад, випадання герба чи цифри при одному киданні монети; при стрільбі, маючи сім патронів, влучити в ціль чотири рази; виліт літака в погану погоду і т. д. При цьому вважається, що події можуть повторюватись багаторазово, тобто є масовими. Випадковість події полягає в неможливості передбачити результат досліду чи спостереження в масових явищах.

Якщо для кожної події можна передбачити результат досліду або спостереження, то такі події називають детермінованими, або передбачуваними. В теорії ймовірності вивчають недетерміновані події.

Дві події A і B називаються ***несумісними (incompatible)***, якщо поява однієї із них виключає появу іншої в даному досліді, в іншому разі події ***сумісні (compatible).***

Дві події A і B називаються ***рівноможливими***, якщо при виконанні комплексу умов S однаково можливі появи подій A і B.

Наприклад, при киданні грального кубика однаково можливі появи будь-якої сторони кубика. Події A_1, A_2, ..., A_n називаються єдино можливими, якщо поява однієї з них є достовірною подією. Множину єдино можливих подій називають повною групою подій. Події A_1, A_2, A_3, ..., A_n утворюють повну групу подій, якщо хоча б одна з них обов'язково відбудеться.

Подія $\overline{A}$ називається протилежною події A, якщо ці події єдино можливі і утворюють ***повну групу подій (complete group of events).*** Наприклад, якщо A - влучення в мішень, то $\overline{A}$ - промах.

Сукупність несумісних рівноможливих подій, які утворюють повну групу, називають ***простором (space)*** **або** ***множиною елементарних подій (set of elementary events),*** події при цьому називають *елементарними*. Елементарну подію часто називають випадком, а сукупність елементарних подій - схемою випадків.

Будь-яку складену подію можна подати як сукупність елементарних подій. Для цього потрібно ввести операції додавання, віднімання та множення подій. Ці дії легко означити, використовуючи теоретико-множинний підхід.

Сумою (об'єднанням) (amount) двох подій A і B називають подію C, яка полягає в тому, що в одному досліді відбудеться або подія A, або B, або обидві разом. Суму записують так:

$$C=A+B \quad \text{або} \quad C=A\bigcup B.$$

Добутком (перетином) (product) двох подій A і B називають подію C, яка полягає в тому, що відбувається і подія A, і подія B одночасно, це записують:

$$C=AB \text{ або } C = A \bigcap B.$$

Узагальнюючи ці операції для кількох подій, матимемо

$$C_1 = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = A_1 \bigcup A_2 \ldots \bigcup A_n,$$

$$C_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n.$$

Різницею двох подій A і B називають подію C, яка настає тоді коли A вже настала, а B - ще не настала, і це записують: A-B=C, або A=B+C. Вірогідні події позначають буквою U, а неможливі V. Тому $A+\overline{A}=U$, $A\cdot\overline{A}=V$; для несумісних A і B: AB=V.

1.2. Імовірність події. Класична і статистична ймовірності та їх обчислення

Поняття ймовірності події виникло як інтуїтивне поняття, яке дає кількісну оцінку можливості появи події A і позначається $P(A)$.

Класичне й статистичне означення ймовірності.

Розглянемо простір (множину) елементарних подій A_1, A_2, ... A_n при виконанні комплексу умов S.

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{1}$$

де m - кількість елементарних подій, сприятливих A,

n - кількість всіх можливих елементарних подій.

За класичним означенням ймовірність появи події шукають не проводячи ніяких дослідів, виходячи з теоретичних міркувань. На практиці часто доводиться мати справу із статистичною ймовірністю. Її часто називають відносною частотою появи події і позначають

$$\mathrm{P} = \frac{m}{n},$$

де m - кількість випробувань, в яких подія A з'явилась,

n - загальна кількість випробувань.

В дослідах статистична ймовірність коливається в околі деякого постійного числа, змінюючись мало, причому тим менше, чим більше проведено дослідів. Ця стала отримала назву класичної ймовірності. Для існування статистичної імовірності необхідно:

1) мати можливість провести необхідну кількість випробувань, в кожному з яких подія A настане або ні;

2) наявність стійкості відносних частот появи події A в різних серіях достатньо великого числа випробувань.

Статистична ймовірність (the statistical probability) має властивості:

1) $P(A) \geq 0$ це очевидно, оскільки $m \geq 0$;

2) для вірогідної події $P(U) = 1$;

3) якщо події A і B несумісні, то статистична імовірність події $C=A+B$ дорівнює сумі статистичних ймовірностей $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Легко бачити, що формулою (1) можна користуватись лише у випадку скінченних m і n. Якщо m і n нескінченні, то класична імовірність вводиться аксіоматично. Класичною імовірністю $P(A)$ події A, яка визначається простором елементарних подій $\{A_i\}$, називається числова функція, яка задовольняє такі умови:

1) $P(A) \geq 0$;

2) $P(U) = 1$;

3) для несумісних подій A і B: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Умови 1) - 3) отримали назву *аксіом* теорії ймовірностей. Аксіоматичне означення класичної ймовірності зручне в теорії, проте воно не дає способу її обчислення. Такий спосіб дає визначення класичної ймовірності як границі статистичної. Якщо проводяться серії однотипних дослідів, в кожній з яких обчислені статистичні ймовірності, то отримаємо послідовність $\{P_1{*}(A),\ P_2{*}(A),\ \ldots\ Pn{*}(A)\}$, границя якої і визначає класичну ймовірність при $n \to \infty$.

Введення класичного означення ймовірності відбулося не в результаті однократної дії, а зайняло певний проміжок часу, як і формування самої теорії ймовірностей. Тобто відбувалося безперервне вдосконалення формування, перехід від конкретних задач до загального випадку.

Найперші роботи, котрі були присвячені теорії ймовірності як науці, були написані Х. Гюйгенсом (1657) «Про розрахунки в азартних іграх». Однак у своїй праці автор не дає чіткого формулювання для класичного означення ймовірності. Це поняття було введено, хоча і в недосконалій формі, Я. Бернуллі (1713) у трактаті «Мистецтво припущень»: «Імовірність – ступінь вірогідності і відрізняється від неї, як частина від цілого». Як бачимо, таке формулювання є досить узагальненим. Однак у п'ятій главі четвертої частини своєї роботи Я. Бернуллі описує класичну ймовірність як відношення числа «щасливих» випадків до кількості усіх можливих. Якобом Бернуллі було запропоновано й інше означення ймовірності як відношення кількості «щасливих» випадків до кількості «нещасливих». Однак в науці це означення не було прийняте з двох причин: 1) неадитивності відношень (першого та другого означень); 2) зміна відношення в останньому означенні від 0 до ∞.

Якоб Бернуллі (27.12.1654 - 16.08.1705)

Швейцарський математик. Брат Йоганна Бернуллі. Науковий керівник - Лейбніц. Якоб зробив значний вклад в теорію рядів, диференціальне числення, теорію ймовірностей і теорію чисел, його іменем названі числа з деякими визначеними коефіцієнтами. В алгебрі він завершив теорію комбінацій і перестановок, в елементарній геометрії розв'язав так звану задачу Мальфатті для випадку рівнобедреного трикутника, в диференціальній геометрії розв'язав питання про геодезичні криві на поверхні обертання і багато інших питань.

Я. Бернуллі свої роботи обґрунтовував роботами Граунта і Петті. У трактаті Я. Бернуллі присутні обидві концепції теорії ймовірності – статистична і класична. Обидві вони викладені не досить чітко, однак принципово новий крок у науці було зроблено – введено в розгляд поняття ймовірності випадкової величини як числа, що знаходиться в межах від 0 до 1. Вірогідній події при цьому приписувалася 1 (максимальне значення ймовірності), а неможливій – 0 (мінімальне значення). Крім того, було ясно сказано, що це число може бути визначено двома різними способами: шляхом підрахунку кількості усіх рівноможливих випадків, які сприяють події, та всіх можливих випадків і обчислення їх відношення, а також шляхом проведення великої кількості (класичний спосіб) незалежних випробувань і обчислення частоти події (статистичний спосіб).

Я. Бернуллі обмірковував своє «Мистецтво припущень» довгі роки, за його словами близько 20. Однак у світ воно вийшло лише через 8 років після смерті автора у 1713 році. Зміст цих публікацій вже був відомий широкому колу науковців у вигляді рукописів. Таким чином, цей трактат впливав на подальший розвиток теорії ймовірності ще до його публікації, що видно з праць П. Монмора, А. Муавра.

Муавр Абрагам де (1667 - 1754) - англійський математик.

Наукова спадщина Муавра дуже велика, адже вчений був надзвичайно працьовитою людиною. Він працював у галузі теорії рядів, теорії ймовірностей, комплексних чисел. У теорії ймовірностей довів одну важливу теорему, яка названа його іменем і яку можна знайти в усіх підручниках із цієї теорії. У теорії комплексних чисел вивів правила піднесення до степеня й добування кореня n-го степеня з комплексних чисел. Ці формули широко застосовуються в тригонометрії й алгебрі при розв'язуванні двочленних рівнянь і відомі тепер як «формули Муавра».

Саме означення, що його дав Я. Бернуллі, стало першою сходинкою у розвитку теорії ймовірності як науки. А. Муавр сприйняв це класичне означення ймовірності, яке дав Я. Бернуллі, і ймовірність події визначив точно так само, як це робимо ми. Він писав: «Ми будуємо дріб, чисельником якого буде кількість випадків появи події, а знаменником – кількість усіх випадків, при яких вона може з'явитися чи не з'явитися, такий дріб буде визначати дійсну ймовірність її появи».

З визначення імовірності випливає, що вона задовольняє співвідношення $0 \le p \le 1$.

Приклад

З колоди 36 карт вибирається одна карта. Яка імовірність появи карти пікової масті?

Розв'язання. Нехай А - поява карти пікової масті. Всього випадків 36. Число випадків, що сприяють події А, m=9. Значить P(A)=9/36=0,25.

(Історична задача А. Муавра.) Для класичного означення А. Муавр навів приклад.

Якщо якась подія має 3 сприятливих випадки (шанси), 2 – несприятливих шанси, дробовий вираз 3/5 буде точно говорити про ймовірність її появи і може розглядатися як її міра.

Великий внесок у розвиток теорії ймовірностей зробив Л. Ейлер. Леонард Ейлер - швейцарський вчений (4(15).04.1707-7(18).09.1783).

20 жовтня 1720 р. тринадцятирічний Леонард Ейлер став студентом факультету мистецтв Базельського університету. Батько бажав, щоб він став священиком. Але любов до математики, блискуча пам'ять і відмінна працездатність сина змінили ці наміри і направили Леонарда по іншому шляху. У *творчій спадщині вченого близько 800 робіт. Певна увага була приділена Ейлером і теорії ймовірностей, зокрема декілька робіт Ейлера присвячені страхуванню. Вони є вагомим внеском в розвиток теорії ймовірностей.*

Темі демографії Ейлер приділяв особливу увагу. Серед робіт цієї тематики можна виділити "Дослідження про смертність та примноження роду людського", "Про примноження роду людського". В цих роботах Ейлер вирішує багато задач, що лягли в основу математичної демографії. Ейлер створив вікову теорію смертності. Він отримав цікаві висновки при розв'язанні задач про подвоєння чисельності населення. Прикладом такої задачі є викладена нижче.

Приклад Л. Ейлера

Кількість жителів деякої області збільшується щорічно на 1/30 кількості людей, а спочатку область населяло 100000 людей. Питається, якою буде кількість людей через 100 років?

Через 100 років кількість людей буде:

$(1+1/30)\cdot 100000 = (31/30)\cdot 100000.$

Логарифмуємо:

$100\cdot(\lg 31 - \lg 30) + \lg 100000 = 100\cdot 0{,}014240439 + 5 = 6{,}4240439$.

Цьому логарифму відповідає число 2654874. Отже, через 100 років кількість населення збільшиться більш ніж в 26,5 раза.

Одна з важливих задач Ейлера

Нехай N позначає кількість людей, що народилися одночасно, k(N) – кількість людей, що залишилися живими через k років. Відповідно k – ймовірність виживання. Після введення цих позначень Ейлер дає таку відповідь на сформульоване питання:

$$P_n = \frac{m+n}{n},$$

а ймовірність того, що людина помре у вказаний проміжок часу буде:

$$P_1 = 1 - \frac{m+n}{n}.$$

Ймовірності Ейлер брав з роботи голландського демографа М. Керсебума (1691-1771).

Оскільки Ейлер частину свого життя працював в Росії, він добре знав російську мову, і частину своїх творів (особливо підручники) публікував російською мовою. Перші російські академік математик (С. К. Котельников) і астроном (С. Я. Румовський) були учнями Ейлера. Деякі його нащадки і донині проживають в Росії.

Однією з перших задач, яку слід віднести до теорії ймовірностей є обчислення числа різних можливих варіантів при киданні гральних кубиків. Перші відомі підрахунки при киданні 3-х гральних кубиків відносять до X-XI століть.

1.3. Перестановки, сполучення, розміщення

Комбінаторика (the combinatorics) - це розділ елементарної алгебри, в якому вивчаються деякі операції над скінченними множинами і розв'язуються задачі, пов'язані з цими операціями.

Слово «комбінаторика» вперше зустрічається в «Міркуваннях про комбінаторне мистецтво» - роботі двадцятирічного Лейбніца (1666 р.), яка стала початком цього розділу математики як самостійної науки.

«Міркування» Лейбніца містило ряд теорем про сполучення та перестановки, але, крім того, автор проголошував дуже широку застосовуваність нової науки до таких різноманітних предметів, як змішування кольорів, логіка, геометрія, військове мистецтво, граматика, юриспруденція, медицина і богослов'я. Лейбніц обмірковував грандіозний задум комбінаторики, вважаючи, що так само як звичайна математика займається великим і малим, цілим і частиною, так комбінаторика повинна займатися однаковим і різним, схожим і несхожим, абсолютним і відносним місцем розташування.

Поняття множини - одне з понять, яке не визначається в математиці. Наприклад, множина натуральних чисел; множина простих чисел. Об'єкти, з яких складається множина, називаються елементами цієї множини. Множина, що складається зі скінченного числа елементів, називається скінченною. Такими множинами є: множина всіх двозначних чисел, множина вершин даного многокутника і множина його діагоналей. Множина, яка містить необмежену кількість елементів, називається *нескінченною*. Нескінченною множиною є множина всіх натуральних чисел; всіх простих чисел. Множина, яка не містить елементів, називається пустою множиною.

І. Перестановки

Нехай є множина M, яка складається із n елементів: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Якщо переставляти ці елементи можливими способами, залишаючи незмінним їх загальне число, одержуємо декілька послідовностей: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$ і т. д. Кожна з таких послідовностей є перестановкою із даних n елементів.

Перестановкою (the permutation) із n елементів називається будь-яка скінченна послідовність (***progression***), яка одержується в результаті упорядкування деякої скінченної множини, складеної з n елементів. Число всіх перестановок із n елементів позначається P_n. Це число дорівнює добутку всіх цілих чисел від 1 до n. Позначають:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n .$$

Добуток n перших натуральних чисел прийнято позначати символом $n!$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Символ $n!$ читають "ен факторіал". Це слово походить від латинського *factor*, що означає "*множник*". При n=1 у виразі

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n$ залишається одне число 1. Тому приймається (як визначення), що 1!=1. При n=0 вираз $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n$ немає змісту, з числа 0 існує одне переміщення, тому приймається, що 0!=1. Значить, $P_n=n!$ правильна формула $P_n = n\cdot P_{n-1}$.

Приклад. Якою кількістю способів можна розсадити 8 студентів в ряд з 8 місць:

$$P_8 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40320.$$

II Сполучення (комбінації)

Нехай є множина *M,* яка складається з *n* різних елементів. Будь-яка підмножина множини *M*, яка містить *k* елементів (k=0, 1, 2, ..., n), називається ***сполученням*** **(*combination)*** *або* ***комбінацією*** з даних *n* елементів по *k* елементів, якщо ці підмножини відрізняються хоча б одним елементом. Число різних сполучень із *n* елементів по *k* позначається C_n^k (combination від combinare *лат.* - сполучати). Іноді замість C_n^k пишуть $\binom{k}{n}$.

Приклад. Із множини цифр 1, 2, 3, 4 можна утворити такі сполучення по два елементи: 1,2; 1,3; 1,4; 2,3; 2,4; 3,4.

Число всіх сполучень із *n* елементів по *k*, де $1\le k\le n$, дорівнює добутку *k* послідовних натуральних чисел, з яких найбільше є *n*, діленому на добуток всіх натуральних чисел від 1 до *k*.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}.$$

Формулу для C_n^k можна записати в іншому вигляді. Помноживши чисельник і знаменник дробу в правій частині на добуток $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-k)$, одержуємо:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Зауваження. Із *n* елементів можна скласти тільки одне сполучення, що містить всі *n* елементів, тому прийнято:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1;\ \ 0! = 1;\ C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1;\quad C_0^0 = \frac{0!}{0!\cdot 0!} = 1.$$

Властивості сполучень:

а) $C_n^k = C_n^{n-k}; (n \ge k)$;

б) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

III Розміщення

Кожна впорядкована підмножина, яка містить *k* елементів даної множини з *n* елементів, називається *розміщенням (accommodation)* із *n* по *k* елементів.

Таким чином, два різних розміщення із даних n елементів по k відрізняються один від одного або складом елементів, або порядком їх розміщення.

Приклад. Із трьох цифр 1, 2, 3 можна утворити такі розміщення по два: 1,2; 2,1; 1,3; 3,1; 2,3; 3,2. Число розміщень із n елементів по k позначається символом A_n^k (arrangement (франц.) - розміщення). Число всіх можливих розміщень із n елементів по k дорівнює добутку k послідовних чисел, з яких найбільшим є n, тобто:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)\text{, або } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{P_n}{P_{n-k}}.$$

Приклад. В класі 10 навчальних предметів і 5 різних уроків в день. Скількома способами можна розподілити уроки в день.

Розв'язання.

Всі можливі розподіли уроків в день являють собою, очевидно, всі можливі розміщення з 10 елементів по 5; тому всіх способів розподілу повинно бути: $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240.$

Приклад. Скількома можливими способами можна вибрати з 15 людей делегацію в складі 3 осіб.

Розв'язання. Шукане число (кількість можливих вибірок) є числом сполучень із 15 по 3: $C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1365$.

Приклад. Скільки є можливих способів для утворення дозору з трьох солдатів та одного офіцера, якщо є 80 солдат і 3 офіцери?

Розв'язання.

При одному офіцері і 80 солдатах можна утворити дозор C_{80}^3 способами. При трьох офіцерах число способів буде в три рази більше, а саме $3 \cdot C_{80}^3 = 246480$.

Приклад. Знайти число діагоналей опуклого десятикутника.

Розв'язання.

Вершини десятикутника утворюють сукупність 10 точок площини, з яких довільні три не лежать на одній прямій. З'єднуючи будь-яку пару цих точок відрізками одержимо: $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$ відрізків, 10 з яких є сторонами многокутника. Отже, діагоналей 35.

Розвиток теорії ймовірності, починаючи з XVII ст., був неможливий без достатньо розвинутого математичного апарату комбінаторики. З його допомогою розв'язувалися майже всі задачі того часу до періоду, коли почали застосовувати аналіз нескінченно малих.

Ця наука (комбінаторика) своїм корінням сягає ще школи піфагорійців (IV-III ст. до н. е.). В школі піфагорійців досліджувалися трикутні числа: 1, 3=1+2, 6=1+2+3, 10= 1+2+3+ 4 і взагалі:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + ...$$

Можливо, комбінаторика виникла і розвинулась в Індії у зв'язку з підрахунком в n-складній стопі. Таблиця біноміальних коефіцієнтів до восьмого степеня була відома ще китайському математику Чжу Ши-цзе (1303 р.). Можливо, у той час була відома й узагальнена формула C_n^k .

Систематичні дослідження з питань комбінаторики містяться у роботах Леві ен Герсона (XVIII ст.), він отримав рекурентну формулу для обчислення числа розміщень з n об'єктів по р. Вагомий внесок у розвиток теорії ймовірності зробив Г. В. Лейбніц, у 1666 р. було опубліковано його книгу "Міркування про комбінаторне мистецтво". В цій роботі Лейбніц суттєво розробив комбінаторику, в першу чергу з метою глибшого вивчення логіки. В одній із задач він знаходить за даним числом елементів кількість перестановок з 24 елементів. Зокрема, у нього записано, що кількість перестановок з 24 елементів дорівнює 24!

Згідно з періодизацією, запропонованою К. А. Рибніковим, розвиток комбінаторного аналізу ділиться на три періоди:

1) до XVI століття включно - накопичення комбінаторних фактів;

2) з XVII століття до середини XIX століття - від оформлення комбінаторики до створення комбінаторної школи;

3) з середини XIX століття - розвиток сучасного комбінаторного аналізу.

Дослідження становлення фундаментального розділу комбінаторного аналізу - теорії сполук - повністю підтверджує обгрунтованість цих тимчасових кордонів трьох періодів.

Другий період розвитку комбінаторного аналізу умовно можна розділити на такі етапи:

а) формування теорії сполучень при вирішенні загальних проблем теорії чисел, музики та інших;

б) становлення комбінаторного числення після формулювання Г. В. Лейбніцем глобальної ідеї створення загальної характеристики - комбінаторики;

в) різні шляхи розвитку комбінаторного аналізу в період XVIII - початок XIX століття.

Наведемо історичну задачу комбінаторики.

А тримає парі з В, що він витягне з 24 гральних карт, з яких 10 карт різної масті, 4 карти різної масті. Як співвідносяться їх шанси?

1.4. Додавання ймовірностей. Протилежні події

Нижче буде розглядатися ймовірність суми двох несумісних подій A_1 і A_2. Сума цих двох подій позначається A_1+A_2 або $A_1 \cup A_2$. Справедлива теорема про додавання ймовірностей.

Теорема. Нехай в досліді можуть мати місце: випадкова подія A_1 з імовірністю $P(A_1)$ і подія A_2 з імовірністю $P(A_2)$. Події A_1 і A_2 несумісні. Тоді імовірність суми подій, тобто того, що відбудеться або подія A_1, або A_2, дорівнює сумі ймовірностей цих подій і обчислюється за формулою:

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2).$$

Доведення.

Доведення проведемо за допомогою формул класичної імовірності. Нехай $P(A_1)=\frac{m_1}{n}, P(A_2)=\frac{m_2}{n}$. Події A_1 і A_2 несумісні. При загальному числі випадків n число випадків, що сприяють одночасній появі подій A_1 і A_2, рівне 0, а число випадків, що сприяють появі або події A_1, або A_2 дорівнює m_1+m_2. Отже,

$$P(A_1+A_2)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A_1)+P(A_2).$$

Аналогічно можна для довільного числа доданків записати:

$$P(A_1+A_2+A_3+...+A_k)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_k).$$

Останню рівність записують ще так:

$$P(\sum_{i=1}^{k}A_i)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i).$$

Дві події називаються ***протилежними (opposite)***, якщо вони несумісні і складають повну групу.

У своїх роботах Я. Бернуллі свідомо використовує правило додавання ймовірностей, однак самого правила автор не сформулював. Також Якоб Бернуллі чітко розрізняв додавання сумісних подій та несумісних подій, що видно з наведеного нижче прикладу (у досить цікавій формі показано приклад невиконання наведеної теореми додавання для суми сумісних подій): «Нехай дві людини, які заслуговують покарання смертю, вимушені кинути гральні кубики з умовою, що той, хто викине меншу кількість очок, буде покараний смертю, а інший, який викине більшу кількість очок, збереже життя. Обидва збережуть життя, якщо викинуть однакову кількість очок. Ми знайдемо сподівання першого 7/12 або 7/12 життя, але з цього не випливає, що для другого шанси будуть 5/12 життя, оскільки очевидно, що частки їх будуть рівноймовірними. Тому інший також буде сподіватися на 7/12 життя, що в сумі дасть 7/6 життя, тобто більше одиниці. Внаслідок цього можуть бути випадки, коли обидві людини залишуться живими».

Тобто Я. Бернуллі знайшов твердження, яке зараз ми записуємо:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Формулювання теореми про суму несумісних подій ми знаходимо у праці Томаса Байєса «Досвід розв'язання задач з теорії ймовірностей покійного шановного містера Байєса, члена Королівського товариства» (в 1763 р., через 2 роки після смерті, роботу було прочитано на засіданні Лондонського королівського товариства). Теорема формулювалася так:

«Якщо кілька подій є "неплотними" (несумісними), то ймовірність того, що настане якась із них, дорівнює сумі ймовірностей кожної з них».

"Неплотними" автор називає події, якщо поява однієї виключає появу іншої, зараз ми називаємо їх несумісними.

Незалежність подій визначив лише Муавр: «Ми скажемо, що дві події незалежні, коли кожна з них ніяк не стосується іншої, а поява однієї з них не чинить ніякого впливу на появу іншої».

Більш чітко Муавром також було дано означення залежних подій: «Дві події залежні, коли вони пов'язані одна з одною і коли ймовірність появи однієї з них змінюється при появі іншої».

Історичний приклад Муавра *(для залежних і незалежних подій).*

Нехай маємо дві колоди карт однієї масті, в кожній колоді від двійки до туза. Тоді ймовірність того, що з кожної колоди навгад вдається витягнути по тузу буде 1/13·1/13=1/169. Ми маємо справу з двома незалежними подіями. Якщо ми виймаємо 2 карти з однієї колоди і запитуємо про ймовірність того, що при першому вийманні виймемо туз, а при другому – двійку. То тут ймовірність першої події 1/13, а другої – 1/12. Таким чином ймовірність події, що нас цікавить 1/13·1/12=1/156.

Якщо подію позначимо через A, то протилежну подію позначимо через $\overline{A}$. *Нехай імовірність появи події A - p, то імовірність появи* $\overline{A}$ *позначимо через* $P(\overline{A})=q$.

Наслідок 1. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$p+q=1.$$

Це випливає з того, що в іспиті обов'язково відбудеться або подія A або подія $\overline{A}$, і на основі теореми про суму подій та їх ймовірностей одержимо:

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=p+q=1.$$

Наслідок 2. Якщо випадкові події $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ утворюють повну групу несумісних подій і $P(A_1), P(A_2), ..., (A_n)$ - їх ймовірності, то сума ймовірностей дорівнюватиме одиниці:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_k)=1.$$

Доведення. A_1, A_2, A_3, A_n утворюють повну групу подій, то поява обов'язково однієї з цих подій є подія достовірна.

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Наслідок 3. Для довільної події A імовірність протилежної події $\overline{A}$ обчислюється за формулою $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Доведення. Подія $A+\overline{A}$ полягає в тому, що відбуваються або подія A, або подія $\overline{A}$, і це є достовірною подією. Тому $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$, звідки $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Приклад. (Із "схеми урн") В урні 10 червоних, 5 синіх і 15 білих кульок. Всього 30 кульок. Витягується 1 кулька. Знайти ймовірність появи кольорової кульки.

Розв'язання.

Поява кольорової кульки означає появу або червоної, або синьої кульки. Подія A - поява червоної кульки, B - поява синьої кульки, C - поява кольорової кульки $C=A+B$, $P(C)=P(A)+P(B)$ події A і B несумісні. $P(A)=10/30=1/3$, $P(B)=5/30=1/6$; $P(C)=1/3+1/6=3/6=0,5$ або $P(C)=(10+5)/30=0,5$.

Так само, як і теорема додавання, теорема множення ймовірностей формувалася на розгляді окремих прикладів і на підрахунку кількості шансів, що сприяють появі кількох подій. Такого типу підрахунки зустрічаються практично в усіх попередників Я. Бернуллі, який широко використовував ці правила при виведенні своїх відомих формул. Широко використовував правила додавання і множення ймовірностей Монмор.

1.5. Незалежні і залежні події, умовні ймовірності. Теореми про добуток подій

Означення 1. Подія A називається ***незалежною (independent)*** від події B, якщо ймовірність появи події A не залежить від того, відбулась подія B чи не відбулась.

Теорема 1. Якщо випадкові події A і B незалежні, то імовірність суміщення подій A і B дорівнює добутку ймовірностей появи цих подій.

Означення 2. Подія A називається ***залежною*** (***dependent)*** від події B, якщо ймовірність події A змінюється в залежності від того, відбулась подія B чи не відбулась.

Розглянемо два приклади:

I. Дослідом є кидання двох монет.

Розглядаються події:

A – поява герба на одній монеті;

B – поява герба на другій монеті.

В цьому випадку ймовірність події A не залежить від того, відбулась подія B чи не відбулась; подія A не залежить від події B.

II. Задача з так званої "схеми урн".

В урні дві білих кульки і одна червона. Дві особи виймають із урни по одній кульці.

Розглянемо події:

A – поява білої кульки у першої особи;

B - поява білої кульки у другої особи.

Імовірність події A до того, як відомо що-небудь про подію B, рівна $\frac{2}{3}$. Якщо стало відомо, що подія B відбулась, то імовірність події A стає рівною $\frac{1}{2}$, з чого робимо висновок, що подія A залежить від події B.

Означення 3. Ймовірність події A, обчислена при умові, що мала місце інша подія B, називається ***умовною ймовірністю*** (***conditional probability***) події A і позначається $P_B(A)$.

Для другого прикладу маємо:

$$P(A)=\frac{2}{3},\;\; P_B(A)=\frac{1}{2}.$$

Умову незалежності події *A* від події *B* можна записати у вигляді:

$$P_B(A)=P(A).$$

Теорема 2. Імовірність добутку двох подій дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність другої, яка обчислена при умові, що перша мала місце:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B).$$

Доведення. Нехай можливі виходи досліду зводяться до *n* випадків.

Нехай появі події *A* сприяють *m* випадків. Існують випадки, які сприяють і події *A,* і події *B* одночасно. Нехай число таких випадків *l*. Тоді

$$P(AB)=\frac{l}{n}\;;\;\; P(A)=\frac{m}{n}.$$

Якщо відомо, що *A* відбулась, то *m* можливих випадків, при яких відбувається *A* і з них *l* сприяють події *B*, а значить $P_A(B)=\frac{l}{m}$.

Тоді одержимо :

$$\frac{l}{n}=P(AB)=\frac{m}{n}\cdot\frac{l}{m}=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{l}{n},$$

що й потрібно було довести.

Теорему можна записати так: $P(AB)=P(B)\cdot P_B(A)$.

Якщо ж *A* не залежить від *B*, то $P(A)=P_B(A)$ і $P(B)=P_A(B)$ і одержимо результат теореми 1: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Приклад. На конвеєрі проходить 10 валиків, з них 5 конусних (*conical*), 7 еліптичних (*elliptic*). Робітник бере один валик, потім другий. Знайти ймовірність того, що перший з узятих валиків – конусний, а другий – еліптичний.

Розв'язання.

Імовірність того, що перший валик конусний $P(A)=\frac{3}{10}$. Імовірність того, що другий валик еліптичний (подія В), при умові, що перший конусний, є умовною імовірністю.

$$P_A(B)=\frac{7}{9};\; P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}.$$

Або навпаки

$$P(B)=\frac{7}{10};\;\; P_A(B)=\frac{3}{9};\;\; P(AB)=P(B)\cdot P_B(A)=\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{7}{30}.$$

Ймовірність добутку декількох подій:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1\cdot A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}}(A_n).$$

Ймовірність кожної наступної за порядком події обчислюється при умові, що всі попередні мали місце.

1.6. Геометричні ймовірності

При застосуванні понять суми і добутку подій часто подається наочна геометрична інтерпретація цих понять. На рисунках наочно проілюстровано поняття суми і добутку двох подій.

Якщо подія *A* є попаданням точки в область *A*, відповідно подія *B* є попаданням точки в область *B*, то подія *A*+*B* є попадання в область *A* або *B*, або в їх спільну частину (рис. 1. 1). Подія *AB* є попаданням точки в спільну частину областей *A* і *B*.

Означення. Нехай задана область *D* з площею, яку позначимо “*плD*”. Тоді ймовірність попадання точки в область $d \in D$, вважаючи достовірним попадання точки в *D*, обчислюється:

$$P = \frac{пл\, d}{пл\, D}.$$

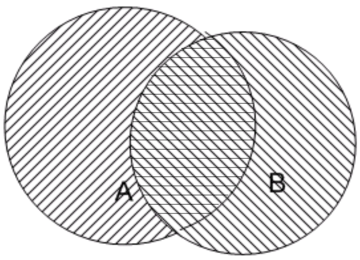


Рис. 1.1

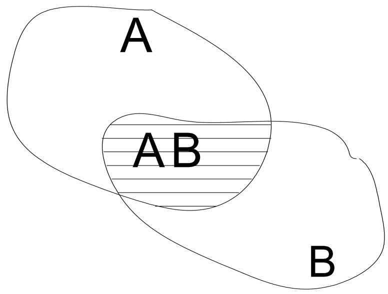


Рис. 1.2

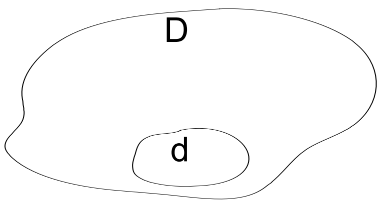


Рис. 1.3

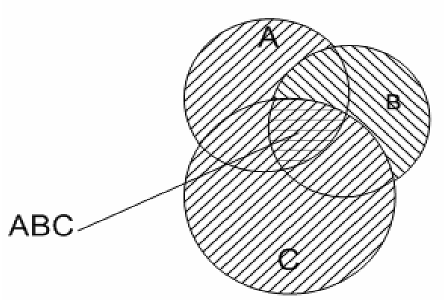
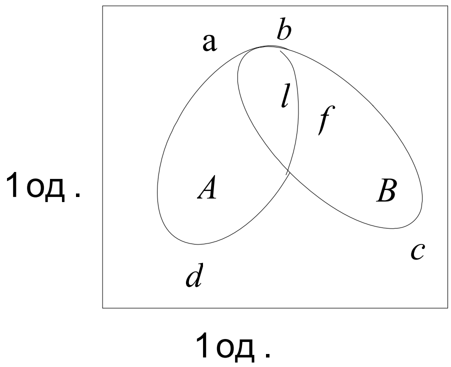


Рис. 1.4

Теорема. Імовірність суми сумісних подій обчислюється за формулою:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Доведення. Ілюструється геометрично.



Вважаючи достовірним попадання точки в квадрат із стороною, рівною 1, маємо:

$$P(A+B)=S_{abcda}; \qquad P(A)=S_{\grave{a}bfda};$$

$$P(B)=S_{bclb}; \quad P(AB)=S_{bflb}.$$

$$P(A+B)=S_{abfda}+S_{bclb}-S_{bflb}=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Зауваження 1. З цієї формули випливає рівність:

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B).$$

Зауваження 2. Імовірність суми трьох сумісних подій обчислюється за формулою:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Приклад. Ймовірність попадання в деяку мішень при пострілі з першої гармати дорівнює $\frac{8}{10}$, при пострілі з другої гармати $\frac{7}{10}$. Знайти ймовірність поразки мішені при одночасному пострілі обох гармат. Мішень вражено, якщо буде хоча б одне попадання з будь-якої гармати. (Покажемо два різних розв'язання).

I. $P(A)=\frac{8}{10}; \quad P(B)=\frac{7}{10}.$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{8}{10}+\frac{7}{10}-\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{80}{100}+\frac{70}{100}-\frac{56}{100}=\frac{94}{100}.$$

$P(A+B)$ – імовірність хоча б одного попадання.

II. Знайдемо імовірність $D-$ жодного попадання:

$$P(D)=P(\overline{B})\cdot P(\overline{A})=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{6}{100}.$$

Ймовірність хоча б одного попадання:

$$P(\overline{D})=P(A+B)=1-P(D)=1-\frac{6}{100}=\frac{94}{100}.$$

$$P(A) = 1-p = q.$$

Приклад на геометричну імовірність. “Задача про зустріч”

Два студенти A і B домовились зустрітись у визначеному місці між 12-ю і 13-ю годинами.

Кожний, хто прийде першим, чекає другого протягом 20 хвилин, після чого йде з місця зустрічі. Чому дорівнює імовірність зустрічі студентів A і B, якщо прихід кожного з них протягом даного часу може відбутись навгад і моменти приходу незалежні.

Розв’язання.

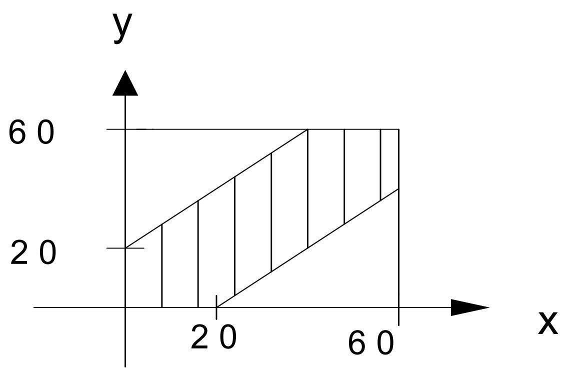


Рис. 1.5

Позначимо моменти приходу студента A через x, а студента B - через y (рис. 1.5). Для того, щоб зустріч відбулась, необхідно і достатньо, щоб:

$$|x-y| \le 20;$$

$$-20 \le y-x \le 20; \quad x-20 \le y \le x+20.$$

Моменти x і y показуємо як декартові координати на площині; за одиницю масштабу виберемо хвилину. Всі можливі виходи показуються точками квадрата із сторонами 60; ті, які сприяють зустрічі, розташуються в заштрихованій області.

Шукана ймовірність дорівнює відношенню площі заштрихованої фігури до площі всього квадрата:

$$P = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

Задача Бюффона *вперше зустрічається в роботі Уайтворта “Вибір і шанс”(Choice and chance – London, 1886, chap III, p. 242 – 243). Задача була розв’язана Уайтвортом звичайним способом, який ми використовуємо і зараз. Було підраховано і ймовірність зустрічі. Ця задача знаходила застосування в задачах організації виробництва.*

Уже в першій половині XVII століття стало зрозумілим, що класичне означення поняття ймовірності має обмежену область застосування і виникають ситуації, коли воно не діє. Першим, хто зробив крок у напрямку розвитку геометричної ймовірності, був Х. Гюйгенс в 1692 році. Однак в перекладі, здійсненому Д. А. Арбутнотом, задачі на геометричну ймовірність були винесені в додаток як такі, що мають “важкий характер”.

Принцип задач полягав у тому, що вводиться міра множини сприятливих події випадків і береться її відношення до міри множини всіх можливих випадків.

Згодом цією темою займався Ж. Бюффон, який двічі опубліковував роботи, що присвячені геометричній ймовірності (1733 і 1777), в яких головною ідеєю вченого було “показати, що геометрія може бути використана як аналітичний інструмент в області теорії ймовірностей", у той час, як геометрія здавалась малопотрібною для таких цілей. Ж. Бюффон сформулював відому задачу “кидання голки”. Яка ймовірність того, що голка перетне одну з паралельних прямих?

Наведемо її формулювання, опустивши доведення.

Площина розграфлена рівновіддаленими прямими. На площину навгад кидається голка. Один гравець стверджує, що голка перетне одну з паралельних прямих, а інший - що не перетне.

Бюффон вважав, що шукана ймовірність дорівнює $2r\frac{a-r}{Пa^2}$*, тоді як в дійсності вона дорівнює* $4r\frac{2a-r}{Пa^2}$*. Після Бюффона задачі на геометричну ймовірність стали систематично включати в трактати і підручники з теорії ймовірності.*

1.7. Формула повної імовірності. Формула Байєса

Нехай подія A може відбутись тільки разом з однією із попарно несумісних подій $H_1,\ H_2,\ H_3,\ \ldots, H_n$, які називаються *гіпотезами (hypothesis)* і утворюють повну групу $\sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1$. Тоді, якщо відбулась подія A, то це означає, що відбулась одна із попарно несумісних подій $H_1A, H_2A, ..., H_nA$. Це означає: $A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + ... + H_n \cdot A$. Використавши теорему додавання, одержимо:

$$P(A) = P(H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + ... + H_n \cdot A) = P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A) + ... + P(H_n \cdot A).$$

З теореми множення ймовірностей $P(H_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$, i =1, 2, 3, …, n.

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + ... + P(H_n)P_{H_n}(A). \qquad (1.1)$$

Одержана формула (1.1) називається *формулою повної імовірності.*

Після цього нас цікавить питання про те, як зміняться ймовірності гіпотез H_i, i= 1, 2…, n, якщо подія A відбулась. Тобто, як обчислити $P_A(H_i)$. Справедливі рівності: $P(H_iA) = P(A) \cdot P_A(H_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$, звідки

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)} \qquad (1.2)$$

Ця формула називається формулою Байєса.

Приклад. В магазин надійшли електричні лампи одного типу, виготовлені на чотирьох лампових заводах: із першого заводу – 250 штук, із другого – 525 штук, із третього – 275 штук, із четвертого – 950 штук. Імовірність того, що лампочка буде горіти більше 1500 годин, для першого заводу становить 0,15, для другого – 0,30; для третього – 0,20; для четвертого – 0,10. При розкладанні по полицях магазину лампи були перемішані. Яка ймовірність того, що куплена лампа прогорить більше 1500 годин? Якому заводу найбільш ймовірно вона належить?

Розв'язання.

Нехай A – подія, яка полягає в тому, що вибрана лампа буде горіти більше 1500 годин, а H_1, H_2, H_3, H_4 - гіпотези, що лампа виготовлена відповідно 1, 2, 3, 4 заводом. Ламп 2000 і відповідні ймовірності рівні:

$$P(H_1) = \frac{250}{2000} = 0{,}125\,;\; P(H_2) = \frac{525}{2000} = 0{,}2625\,;$$

$$P(H_3) = \frac{275}{2000} = 0{,}1375\,;\; P(H_4) = \frac{950}{2000} = 0{,}475\,;$$

$$\sum_{i=1}^{4} P(H_i) = 1\,.$$

Далі з умови задачі випливає, що $P_{H_1}(A) = 0{,}15$; $P_{H_2}(A) = 0{,}30$; $P_{H_3}(A) = 20$; $P_{H_4}(A) = 0{,}45$. Тоді за формулою повної імовірності маємо:

$$P(A) = 0{,}125 \cdot 0{,}15 + 0{,}2625 \cdot 0{,}30 + 0{,}1375 \cdot 0{,}20 + 0{,}475 \cdot 0{,}1 = 0{,}1725\,.$$

За формулою Байєса:

$$P_A(H_1) = \frac{0{,}125 \cdot 0{,}15}{0{,}1725} = \frac{0{,}01875}{0{,}1725} = 0{,}1087\,;$$

$$P_A(H_2) = \frac{0{,}2625 \cdot 0{,}30}{0{,}1725} = 0{,}4565\,;$$

$$P_A(H_3) = \frac{0{,}1375 \cdot 0{,}20}{0{,}1725} = 0{,}1594\,;$$

$$P_A(H_4) = \frac{0{,}475 \cdot 0{,}1}{0{,}1725} = \frac{0{,}0475}{0{,}1725} = 0{,}27553\,;$$

$$P(A) = 1 - p = q.$$

Отже, найбільш імовірно, що вибрана лампа, яка прогорить більше 1500 годин, належить другому заводу.

Історично склалося, що робота Байєса стала відома серед наукового суспільства лише після його смерті (1758 р.).

Перед роботою Байєса розміщено лист Прайса до Кетона від 10.XI.1763 р. В цьому листі Прайс пише: «Я надсилаю Вам дослід, який я знайшов серед паперів нашого померлого друга, містера Байєса, і який, на мою думку, має великі переваги і заслуговує на те, щоб бути збереженим» (Майстров Л. Е. Теория вероятности. Исторический очерк / Майстров Л. Е. – М. : Наука, 1967. - С. 104).

Робота Байєса розпочинається з формулювання загальної задачі. «Дано число разів, коли невідома подія здійснилася чи не здійснилася. Шукається шанс, що ймовірність її появи при одному єдиному досліді знаходиться між якими-небудь ступенями ймовірності, які можуть бути названі». Далі, після загального формулювання задачі, Байєс переходить до основних визначень та положень теорії імовірностей. В цій роботі Байєса міститься формулювання теореми множення ймовірностей. Ймовірність того, що настануть обидві взаємопов'язані події, є співвідношення, що отримано з множення ймовірності першої події на ймовірність появи другої події за умови, що перша настане. Це формулювання вже було сформовано Муавром. Байєс пішов далі Муавра при обчисленні ймовірності $P_B(A)$ *чи* $P_A(B)$ *за ймовірностями P(AB) і P(A). Саме це припущення дало основу приписувати Байєсу формули, що носять його ім'я.*

Результат, що його приписують Байеєсу, вперше отримав сучасне формулювання в роботах Лапласа. В його роботі "Досвід філософії теорії ймовірності": "Нехай деяка подія A може відбутися з однією з n несумісних подій $B_1, B_2, ..., B_n$ *і лише з ними. Ці події Лаплас називає причинами. Запитується, якщо відомо, що подія настала, чому дорівнює ймовірність того, що здійснилася причина* B_i*?". Ось формулювання відповіді, яку дав Лаплас: "ймовірність існування якої-небудь з цих причин дорівнює дробу, чисельник якого є ймовірність події, що слідує з цієї причини, а знаменник є сума подібних ймовірностей, що стосуються всіх причин: якщо ці різні причини, що розглядаються a priori, неоднаково ймовірні, то замість ймовірності події, що випливає з кожної причини, слід взяти добуток цієї ймовірності на ймовірність самої причини". Легко зрозуміти, що Лаплас словесно сформулював відоме "правило Байєса"*

$$P_A(B_i) \equiv \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}.$$

Більш того, цей принцип Лапласа містить формулу повної ймовірності, якою з початку XVIII ст. широко користувалися в своїх роботах відомі математики, які працювали в області теорії ймовірностей.

Однак Лаплас цим не задовольнився і дав формулювання власної формули повної ймовірності, але також лише словесну. Взагалі слід сказати, що Лаплас в книзі суворо дотримувався правила: у філософській книзі не виписувати математичні формули, у разі ж необхідності обмежуватися їх словесними формулюваннями. Наведемо дане Лапласом формулювання повністю.

***VII принцип**. Імовірність майбутньої події є сума добутків ймовірності кожної причини, виведеної зі спостережуваної події, на ймовірність того, що при існуванні цієї причини майбутня подія буде мати місце.*

Після формулювання принципу Лаплас навів приклад для його ілюстрації, який був використаний одночасно і для ілюстрації принципу VI (формули Байєса). Ось цей приклад: в урні дві кулі, кожна з яких може бути тільки чорною або білою. Виймають одну з цих куль, а потім повертають в урну, щоб приступити до наступного виймання. У перших двох тиражах з'явилися білі кулі. Яка за цієї умови ймовірність того, що біла куля з'явиться і при третьому вийманні? Далі Лаплас розглянув такий приклад. Якщо віднести найдавнішу історичну епоху за п'ять тисяч років, або за 1 826213 днів назад і взяти до уваги, що сонце постійно сходило за цей проміжок часу при кожній зміні діб, то буде 1 826214 шансів проти одного за те, що воно зійде і завтра ...

Як бачимо, правила в теорії ймовірності широко застосовувалися практично, однак потребу в їх формулюванні не відчували. Паралельно при цьому вводилися і допоміжні поняття, які дозволяли глибше розуміти природу речей. В даному випадку цими поняттями є поняття несумісних і незалежних подій.

Томас Байєс (1702-1761 рр.) Англійський вчений, математик. Основні праці стосуються теорії ймовірностей. Байєс сформулював і розв'язав одну з основних задач цього розділу математики - теорему Байєса. Робота, що присвячена цій задачі, була опублікована вже після його смерті, в 1763 р.

Теорема Байєса навчить роботів приймати рішення, так в Європі було розпочато дослідницький проект BACS (Bayesian Approach to Cognitive Systems, «Байєсів підхід до створення систем, що навчаються»), повідомляє ScienceDaily. Проект фінансувався ЄС до 2010 року. В межах проекта вчені дослідили, наскільки застосовувана теорема Байєса і її наслідки для створення штучних систем, що будуть спроможні вирішувати складні задачі в реальних умовах. Теорема Байєса являє собою модель раціонального вибору в умовах неточної і/або неповної інформації. В даний час вона активно використовується, наприклад, в спам-фільтрах.

1.8. Формули Бернуллі і Пуассона. Повторення дослідів

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в результаті кожного з яких може відбутись або не відбутись деяка подія A. Нехай в кожному випробуванні ймовірність появи A рівна $P(A)=p$ і ймовірність протилежної події рівна $P(\overline{A})=1-p=q$. Визначимо ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A відбудеться m раз в n випробуваннях. При цьому побачимо, що появи або непояви події A можуть чергуватись довільним способом. Умовимося записувати можливі результати випробувань у вигляді комбінації букв A і $\overline{A}$. Наприклад, запис $A\overline{A}\overline{A}A$ означає, що в чотирьох випробуваннях подія A відбулась в 1-му і 4-му випадках і не відбулась в 2-му і 3-му випадках.

Кожну комбінацію, в яку A входить m раз і $\overline{A}$ входить n-m раз, назвемо сприятливою. Кількість сприятливих комбінацій дорівнює кількості k способів, якими можна вибирати m елементів із даних n; таким чином вона рівна числу сполучень із n елементів по m; тобто $k = C_n^m$.

Обчислимо ймовірності сприятливих комбінацій. Розглянемо спочатку випадок коли подія A відбувається в перших m іспитах і значить не відбувається в інших n-m іспитах. Така сприятлива комбінація має вигляд: $\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{m}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{n-m}$. Ймовірність цієї комбінації на основі теореми множення ймовірностей для незалежних подій дорівнює:

$$P(B_1) = \underbrace{P(A)P(A)\ldots P(A)}_{m}\,\underbrace{P(\overline{A})P(\overline{A})\ldots P(\overline{A})}_{n-m} = p^m q^{n-m}.$$

В іншій сприятливій комбінації B_i подія A зустрічається m раз, а подія $\overline{A}$ відбувається n-m раз, тільки в іншому порядку, ймовірність кожної з таких комбінацій також рівна $p^m q^{n-m}$.

$$P(B_1) = P(B_2) = \ldots = P(B_k) = p^m q^{n-m}.$$

Всі сприятливі комбінації є несумісними. На основі теореми додавання несумісних подій:

$$P_n(m) = P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_k) = kp^m q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m};$$

або

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Одержана формула є **формулою Бернуллі.**

Формула Бернуллі при різних m утворює суму:

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = C_n^0 p^0 (1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} + \ldots + C_n^m (1-p)^{n-m} + \ldots + C_n^n p^n (1-p)^0 = 1.$$

Члени суми збігаються з членами розкладу бінома Ньютона.

$$(p+q)^n = q^n + C^{\frac{1}{n}} p \cdot q^{n-1} + \ldots + C_n^m p^m q^{n-m} + \ldots + p^n = 1.$$

Сума всіх можливих ймовірностей дорівнює 1, тому що $p + q = 1$, а $(p+q)^n = 1^n = 1$. Сукупність імовірностей називається ще біноміальним розкладом ймовірностей.

Зауваження. При дослідженні багатьох питань потрібно обчислити ймовірність того, що подія А відбудеться “хоча б один раз”. Ця ймовірність визначиться з рівності: $P_n(m \ge 1) = 1 - P_n(m = 0) = 1 - q^n$.

Імовірність того, що подія відбудеться не менше, ніж k раз, визначиться за формулою: $P(m \ge k) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$ або

$$P(m \geq k) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m} .$$

Відмічене співвідношення (*ratio*) дає можливість ввести для обчислення ймовірності можливого числа події A в серії із n незалежних випробувань так звану ***твірну функцію*** **(*produced function*)**:

$$\psi_n(x) = (q + px)^n = q^n x^0 + C_n^1 pq^{n-1x} x + ... + C_n^m p^m q^{n-m} x^m + ... + p^n x^n .$$

Ця функція має таку властивість: коефіцієнт при x^m в записаному розкладі дорівнює ймовірності події A з'явитись рівно m раз в серії з n незалежних випробувань, які проводяться в змінних умовах. Так, наприклад, якщо ймовірність появи події в i-му випробуванні $P(A_i) = p_i$, а ймовірність непояви $P(\overline{A_i}) = 1 - p_i = q_i$, то ймовірність появи A в n випробуваннях рівно m раз дорівнює коефіцієнту при x^m в розкладі за степенями x твірної функції:

$$\Psi_n(x) = (q_1 + p_1 x)(q_2 + p_2 x) \cdot ... \cdot (q_n + p_n x).$$

Приклад. Чотири лучники незалежно один від одного роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірність попадання в мішень для першого стрілка рівна 0,8; для другого – 0,7; для третього – 0,6; для четвертого – 0,5. Знайти ймовірність того, що в мішені буде рівно дві пробоїни.

Розв'язання.

Ймовірності попадання для стрілків різні, тобто для розв'язування задачі використаємо твірну функцію. Згідно з умовою, твірна функція для даного прикладу має вигляд:

$$\Psi(x) = (0,2 + 0,8x)(0,3 + 0,7x)(0,4 + 0,6x)(0,5 + 0,5x) =$$
$$= 0,012 + 0,106x + 0,32x^2 + 0,394x^3 + 0,168x^4 .$$

Коефіцієнт при x^2 є шуканою ймовірністю, тобто $P_4(2) = 0,32$.

Іменем Пуассона часто називають випадкові процеси (random processes), що відбуваються в різних сферах технічних наук та досліджуються вченими.

Теорія броунівського руху (Brownian motion), що виходить з теоретико-імовірнісних передумов, була розроблена в 1905 р. двома відомими фізиками М. Смолуховським (1872-1917) та А. Ейнтейном (1879-1955). Пізніше висловлені ними ідеї використовувалися неодноразово як при вивченні фізичних явищ, так і в різних інженерних задачах. Зокрема, саме з цих робіт, як, втім, і з робіт Ерланга, проявився широкий інтерес до процесу Пуассона. Втім, сам Пуассон ввів у розгляд тільки розподіл Пуассона, але він заслужив, щоб його ім'я згадувалося і при розгляді випадкових процесів, пов'язаних з його розподілом. Це не єдиний випадок, коли на честь того чи іншого дослідника новим поняттям присвоюються їх імена, хоча до цих понять вони і не причетні. Тепер широко поширені гауссівські випадкові процеси, хоча сам Гаусс про них не мав жодного уявлення, та й сам розподіл задовго до його народження було отримано Муавром, Лапласом та ін.

1.9. Найімовірніше число появи події при повторенні дослідів

Означення. ***Найімовірнішим числом (the most likely number)*** m_0 появи події A в n незалежних випробуваннях називається число, для якого імовірність $P_n(m_0)$ перевищує або не менше імовірності кожного із інших можливих результатів випробувань.

Нехай числу m_0 відповідає імовірність:

$$P_n(m_0)=C_n^{m_0}p^{m_0}q^{n-m_0}=\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!}p^{m_0}\cdot q^{n-m_0}.$$

Тоді за визначенням m_0 як найімовірнішого числа:

$$P_n(m_0)\ge P_n(m_0+1)\ \mathrm{P_n(m_0)\ge P_n(m_0+1)};\ P_n(m_0)\ge P_n(m_0-1).$$

На основі цих нерівностей за формулою Бернуллі одержимо:

$\dfrac{n!}{m_0!(n-m_0)!}\cdot p^{m_0}\cdot q^{n-m_0}\ge\dfrac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)!}\cdot p^{m_0+1}\cdot q^{n-m_0-1}$, звідки при скороченні отримаємо: $\dfrac{q}{n-m_0}\ge\dfrac{p}{m_0+1}$;

$$(m_0+1)q\ge p(n-m_0)\quad m_0(p+q)\ge np-q;\ m_0\ge np-q.$$

Аналогічно одержимо:

$$\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!}p^{m_0}q^{n-m_0}\ge\frac{n!}{(m_0-1)!(n-m_0+1)!}p^{m_0-1}q^{n-m_0+1}.$$

При скороченні одержимо:

$$\frac{p}{m_0}\ge\frac{q}{n-m_0+1},\ np-q\le m_0\le np+p\ \ m_0\le np+p.$$

Об'єднуючи одержані нерівності, матимемо

$$np-q\le m_0\le np+p \tag{1.3}$$

Ця подвійна нерівність визначає найімовірніше число.

Зауваження. Довжина інтервалу, яка визначається нерівністю найімовірнішого числа, дорівнює одиниці: $(np+p)-(np-q)=p+q=1$. Тому, якщо границі цього інтервалу є дробові числа (*fractions of*), – одержимо одне значення найбільш імовірного числа m_0. Якщо границі є цілі числа – одержимо два значення найбільш імовірного числа.

Приклад. При даному технологічному процесі 85% всієї виготовленої продукції є продукцією вищого сорту. Знайти найімовірніше число виробів вищого сорту в партії зі 150 деталей.

Розв'язання.

За умовою n=150; p=0,85; q=1-0,85=0,15. Згідно з нерівністю (1.3) маємо:

$$150\cdot 0{,}85-0{,}15\le m_0\le 150\cdot 0{,}85+0{,}85.$$

$$127{,}35\le m_0\le 128{,}35.$$

Найімовірніше число виробів вищого сорту в партії зі 150 виробів становить 128.

Приклад. Визначити найбільш імовірне число збитих літаків в групі з 13 бомбардувальників, якщо літаки збивають незалежно один від одного. Імовірність поразки одного літака рівна 4/7.

Розв'язання.

За умовою n=13; p=4/7; q=3/7; $13\cdot\frac{4}{7}-\frac{3}{7}\le m_0\le 13\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{7}$, звідки $7\le m_0\le 8$, два - найбільш імовірне число збитих літаків.

Приклад. Імовірність попадання в ціль при одному пострілі дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число попадань в ціль з 8 пострілів і знайти відповідну імовірність. Порівняти із сусідніми значеннями.

Розв'язання.

n=8, p=0,6; q=0,4; np-q=8·0,6-0,4=4,4; np+p=8·0,6+0,6=5,4. Найімовірніше число попадань $m_0\in[4,4;5,4]$ і значить $m_0=5$.

$$P_8(5)=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{5!}\cdot 0{,}6^5\cdot 0{,}4^3\approx 0{,}28;$$

$$P_8(6)=\frac{8\cdot 7}{2}(0{,}6)^6\cdot(0{,}4)^2=28\cdot 0{,}046656\cdot 0{,}16\approx 0{,}21;$$

$$P_8(4)=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!}(0{,}6)^4(0{,}4)^4=70\cdot 0{,}296\cdot 0{,}0256\approx 0{,}23.$$

1.10. Одержання формули Пуассона

Формула Пуассона дає приблизне значення імовірності $P_n(m)$ в тому випадку, коли число випробувань n велике, а імовірність $p=P(A)$ в кожному з окремих випробувань маленька, оскільки добуток цих чисел $pn=\lambda$ є заданим числом, незалежним від n, а значить $p=\frac{\lambda}{n}$, досить мале. Тоді $P_n(m)=\lim\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, m=0, 1, 2,…, n. Сума всіх ймовірностей дорівнює:

$$\sum_{m=0}^{\infty}P_k=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=e^0=1.$$

Доведемо, що закон Пуассона є граничним для біноміального розподілу (*Binomial distribution*) $P_n(m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$, якщо одночасно число дослідів прямує до нескінченності, а імовірність p - до нуля, причому їх добуток зберігає стале значення $np=\lambda$, $p=\frac{\lambda}{n}$. Будемо перетворювати вираз:

$$P_m=\lim_{n\to\infty}C_n^m(\frac{\lambda}{n})^m(1-\frac{\lambda}{n})^{n-m}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!}\cdot\frac{\lambda^m}{n^m}\cdot\frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^m}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{n^m}\cdot\frac{\lambda^m}{m!}\cdot\frac{\left[(1+(-\frac{\lambda}{n}))^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda}}{(1-\frac{\lambda}{n})^m}=$$

$$=\lim_{\mathrm{n}\to\infty}1(1-\frac{1}{\mathrm{n}})(1-\frac{2}{\mathrm{n}})...(1-\frac{\mathrm{m}-1}{\mathrm{n}})\cdot\frac{\lambda^{\mathrm{m}}}{\mathrm{m}!}\cdot\frac{\left[1+(-\frac{\lambda}{\mathrm{n}})^{-\frac{\mathrm{n}}{\lambda}}\right]^{-\lambda}}{(1-\frac{\lambda}{\mathrm{n}})^{\mathrm{m}}}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{\mathrm{m}}}{\mathrm{m}!}.$$

Значить $P_m=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, $P_{1000}(0)\approx\frac{1^0\cdot e^{-1}}{0!}\approx P_{1000}(1)\approx\frac{1^1\cdot e^{-1}}{1!}\approx 0,3679$, де $\lambda=np$. Одержано формулу Пуассона або закон Пуассона. Цей закон дає можливість наближати біноміальний розподіл при великій кількості випробувань і малій імовірності події A в кожному випробуванні. Ця властивість закону дає йому назву “Закон рідкісних явищ”.

Приклад. На завод прибула партія деталей кількістю 1000 штук. Імовірність того, що деталь буде бракованою, рівна 0,001. Обчислити імовірності того, що:

1) бракованих буде не більше однієї;
2) бракованих буде 5.

Розв'язання.

$$\lambda=np=1000\cdot 0,001=1,\ \lambda=\frac{N}{60},\text{ тоді}$$

$$P_{1000}(0)\approx\frac{1^0\cdot e^{-1}}{0!}\approx P_{1000}(1)\approx\frac{1^1\cdot e^{-1}}{1!}\approx 0,3679;$$

$$\mathrm{P}_{1000}(0)\approx\frac{1^0\cdot \mathrm{e}^{-1}}{0!}\approx \mathrm{P}_{1000}(1)\approx\frac{1^1\cdot \mathrm{e}^{-1}}{1!}\approx 0,3679;$$

$$P_{1000}(5)\approx\frac{1^5\cdot e^{-1}}{5!}\approx 0,003;\ P_{1000}(0)+P_{1000}(1)\approx 0,7358.$$

Приклад. Нехай телефоністка в середньому за годину одержує N викликів, то ймовірність того, що протягом однієї хвилини вона одержує k викликів, виражається формулою Пуассона:

$$\lambda=\frac{N}{60};\quad P_k=\frac{1}{k!}(\frac{N}{60})^k e^{-\frac{N}{60}}.$$

Праці Пуассона відносять до теоретичної і небесної механіки, математики і математичної фізики. Пуассонові належать праці з інтегрального числення (інтеграл Пуассона), числення скінченних різниць (формула підсумовування Пуассона), теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних, теорії ймовірностей, де він довів окремий випадок закону великих чисел і одну з граничних теорем (теорема Пуассона, розподіл Пуассона).

Питання для самоперевірки

1. Що називається простором або множиною елементарних подій?
2. Дайте означення об'єднання (суми), перетину (добутку), різниці двох, трьох і більше подій. Як позначаються вказані операції для *n* подій?
3. Яким властивостям задовольняє статистична ймовірність, яке її означення? Чим воно відрізняється від означення класичної ймовірності?
4. Наведіть означення частоти ймовірності випадкової події.
5. Сформулюйте аксіоми теорії ймовірностей.
6. Запишіть формули для обчислення перестановок, сполучень, розміщень.
7. Наведіть основні етапи розвитку комбінаторики.
8. Як формулюються і доводяться теореми до давання сумісних і несумісних подій?
9. Залежні і незалежні події. Теореми множення подій.
10. Що таке геометричні ймовірності?
11. Хто вперше займався проблемою геометричної ймовірності?
12. Схема, що приводить до формули повної ймовірності і формули Байєса.
13. Хто справжній автор теореми Байєса?
14. Схеми Бернуллі і Пуассона. Біноміальний розподіл Бернуллі. Одержання формул Бернуллі.

2. ДИСКРЕТНІ І НЕПЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Поняття випадкової величини (в.в.) є одним з основних в теорії імовірностей та її застосуваннях. *Випадковими величинами (the random variables)*, наприклад, є число випавших очок при одноразовому киданні грального кубика; число атомів радія, що розпалися за даний проміжок часу; відхилення від номіналу деякого розміру деталі при правильно налагодженому технологічному процесі і т.д.

Таким чином випадковою величиною називається змінна величина, яка в результаті досліду може приймати те чи інше числове значення.

Надалі будемо розглядати два типи випадкових величин – ***дискретні*** **(*discrete)*** і ***неперервні (continuous).***

2.1. Дискретні випадкові величини

Розглянемо випадкову величину ξ (випадкові величини будемо позначати малими буквами грецького алфавіту), можливі значення якої утворюють скінченну або нескінченну послідовність чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Означення. Нехай задана функція $P(x)$, значення якої в кожній точці $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ рівне імовірності того, що величина ξ прийме значення x_i

$P(x_i) = P(\xi = x_i)$. Така випадкова величина ξ називається ***дискретною (перервною).***

Функція $P(x)$ називається *законом* ***розподілу ймовірностей випадкової величини*** або ***законом розподілу***. Дана функція визначена в точках послідовності $x_1, x_2, .., x_n, \ldots$.

В кожному з дослідів випадкова величина ξ приймає завжди яке-небудь значення з області її зміни, тому: $P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_n)+\ldots=1$.

Приклад. Випадкова величина ξ - число очок, які випадають при разовому киданні грального кубика. Можливі значення ξ - числа 1, 2, 3, 4, 5 і 6. При цьому імовірність того, що ξ прийме одне з цих значень, одна й та ж сама і рівна 1/6. Таким чином тут закон розподілу ймовірностей є функція $P(x)=1/6$ для довільного значення x із множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Проводиться n незалежних дослідів, в результаті кожного з яких може з'явитися чи не з'явитися подія A. Нехай імовірність появи події A в кожному з дослідів дорівнює p.

Розглянемо випадкову величину ξ - число появ події A при n незалежних дослідах. Область зміни ξ складається з усіх цілих чисел від 0 до n включно.

Закон розподілу ймовірностей $P_n(m)$ визначається формулою Бернуллі (підрозділ 1.8.).

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = P(\xi = m).$$

Нехай випадкова величина ξ може приймати довільне ціле невід'ємне значення. Причому

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\ ;\ (k=0,1,2,\ldots n,\ldots).$$

де λ - деяка додатна константа.

Кажуть, що випадкова величина ξ розподілена за законом Пуассона, якщо можливі значення випадкової величини ξ утворюють скінченну послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Закон розподілу ймовірностей випадкової величини дають у вигляді таблиці, в якій

$$p_i = P(\xi = x_i)\ ;\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\ .$$

Таблиця 2.1

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$p(x_1)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Цю таблицю називають ***рядом розподілу (the number distribution)*** випадкової величини ξ. Функцію $P(x)$ можна показати у вигляді графіка (рис. 2.1). Для цього візьмемо прямокутну систему координат на площині. По горизонтальній осі будемо відкладати можливі значення випадкової величини ξ, а по вертикальній осі – значення функції $P(x_s) = P(\xi = x_s)$; якщо з`єднати точки цього графіка, то отримаємо фігуру, що називається ***многокутником розподілу* (*polygons sharing*).**

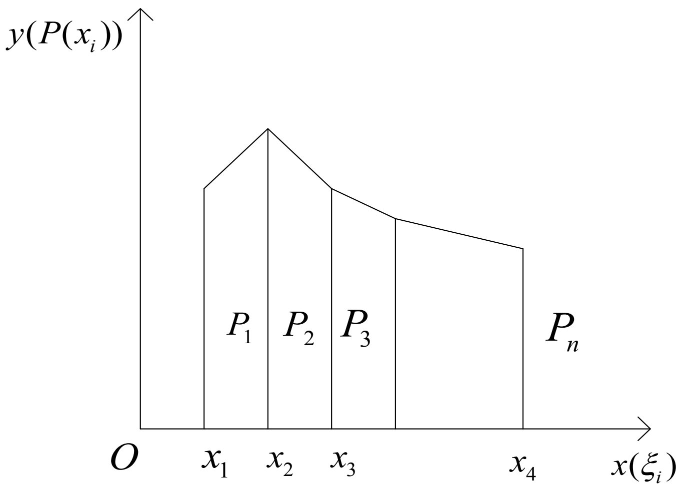


Рис. 2.1

2.2. Функція розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини та її властивості

Розглянемо функцію $F(x)$, визначену на всій числовій осі Ox. Для кожного x значення $F(x)$ дорівнює ймовірності того, що дискретна випадкова величина ξ приймає значення менші x.

Тобто $F(x) = P(\xi < x)$.

Ця функція називається ***функцією розподілу ймовірностей*** (***the probability distribution function)***, або ***функцією розподілу.***

Приклад.

Випадкова величина ξ - число очок, що випали при однократному киданні грального кубика.

Ряд розподілу має вигляд:

$\xi_з$	1	2	3	4	5	6
$P(\xi_з)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Знайти функцію розподілу $F(x)$. При $x \le 1$ $F(x) = 0$, тому що ξ не приймає значень менше 1.

$$\text{якщо: } 1 < x \le 2, \text{ то } F(x) = p(\xi < 2) = p(\xi = 1) = \frac{1}{6};$$

$$2 < x \le 3, \text{ то } F(x) = p(\xi < 3) = p(\xi = 1) + p(\xi = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3};$$

$$3 < x \le 4, \text{то } F(x) = p(\xi < 4) = p(\xi = 1) + p(\xi = 2) + p(\xi = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2};$$

Далі аналогічно : $$4 < x \le 5; F(x) = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$5 < x \le 6; F(x) = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6};$$

$$6 < x; F(x) = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1.$$

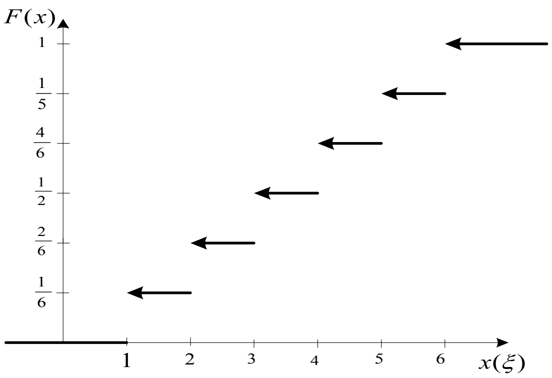
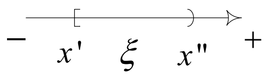


Рис. 2.2

Знаючи функцію розподілу $F(x)$ (рис. 2.2), легко знайти імовірність того, що випадкова величина ξ задовольняє нерівності $x' \le \xi < x''$.

З теореми про суму подій і ймовірностей одержимо:



$$P(\xi < x'') = P(\xi < x') + P(x' \le \xi < x'');$$
$$P(x' \le \xi < x'') = P(\xi < x'') - P(\xi < x').$$

За визначенням функції розподілу
$$P(x' \le \xi < x'') = F(x'') - F(x').$$

Імовірність попадання дискретної випадкової величини в інтервал $x' \le \xi < x''$ дорівнює приросту (the growth) функції розподілу на цьому інтервалі.

Розглянемо **основні властивості функції розподілу.**

1. Функція розподілу є неспадною.

Нехай $x' < x''$, $P(x' \le x < x'') \ge 0$. Із знайденої формули отримаємо:
$$F(x'') - F(x') \ge 0 \Rightarrow F(x'') \ge F(x').$$

2. Значення функції задовольняють нерівність:
$$0 \le F(x) \le 1, F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0;$$

$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, це випливає з означення функції $F(x)$.

3. Імовірність того, що дискретна випадкова величина ξ приймає одне із можливих значень $x_з$, дорівнює стрибку функції розподілу в точці $x_з$.

Цю властивість наочно видно з наведеного вище прикладу.

2.3. Неперервні випадкові величини (н. в. в.)

Крім дискретних випадкових величин, які приймають окремі числові значення і утворюють скінченну або нескінченну послідовність чисел, часто також зустрічаються випадкові величини, можливі значення яких заповнюють деякий інтервал.

Прикладом такої випадкової величини може бути відхилення від номіналу певного розміру деталі при правильно налагодженому процесі. Такі випадкові величини не можуть бути задані за допомогою закону розподілу ймовірностей $P(x)$, не можна кожному значенню поставити у відповідність імовірність.

Функція розподілу $F(x)$ задається аналогічно:
$$F(x) = P(\xi < x).$$

Функція $F(x)$ задана для всіх $\tilde{o} \in (-\infty; \infty)$, і її значення в точці *x* рівне імовірності того, що випадкова величина прийме значення, менше *x*.

Всі рівності і властивості 1, 2 (записані для д. в.) справедливі і в цьому випадку. Доведення аналогічне випадку дискретної величини. Випадкова величина ξ називається ***неперервною*** (***continuous***), якщо для неї існує невід'ємна, кусково-неперервна функція $f(\tilde{o})$ така, що для всіх $\tilde{o} \in (-\infty; \infty)$ виконується рівність:
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{2.1}$$

Функція $f(t)$ називається ***густиною*** (***щільністю***) (***the density***) розподілу ймовірностей або коротко ***густиною розподілу*** (***the density distribution***). Якщо $x_1 < x_2$, то одержимо:

$$P(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(t)dt - \int_{-\infty}^{x_1} f(t)dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt. \qquad (2.2)$$

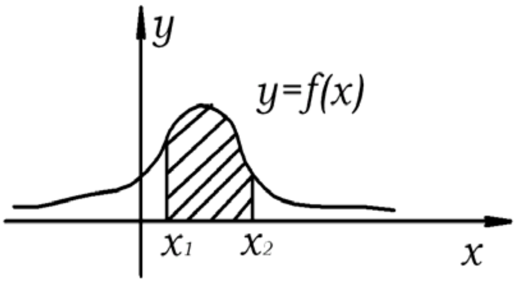


Рис. 2.3

Виходячи з геометричного змісту інтеграла як площі, можна сказати, що ймовірність виконання нерівності $x_1 \le \xi < x_2$ рівна площі криволінійної трапеції з основою $[x_1,\ x_2]$, обмеженою зверху кривою $y = f(\tilde{o})$ (рис. 2.3). Далі $F(+\infty) = P(\xi < +\infty) = 1$, тоді

$$F(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

Звідси слідує: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 0.$

Знайдемо $F(x)$ як похідну інтеграла за змінною верхньою границею, вважаючи $f(t)$ неперервною $F'(x) = \frac{d}{dx}(\int_{-\infty}^{x} f(t)dt) = f(x).$

Для неперервної випадкової величини функція $F(x)$ неперервна в довільній точці *x,* де функція $f(x)$ неперервна. Це випливає з того, що $F(x)$ в цих точках диференційовна. Часто $F(x)$ називають ***інтегральною функцією розподілу (integral distribution function)***, а $f(x)$ ***диференціальною функцією розподілу (the differential distribution functiony).***

Із формули (2.2), приймаючи $x_1=x,\ x_2=x+\Delta x$ і в силу неперервності $F(x)$ маємо:

$$\lim_{x\to 0} P(x \le \xi < x + \Delta x) = \lim_{x\to 0} \Delta F(x) = P(\xi = x) = 0\,.$$

Таким чином, імовірність того, що неперервна випадкова величина може прийняти окреме числове значення *x*, дорівнює нулю:

$$P(\xi = x_1) = P(\xi = x_2) = 0.$$

Отже,

$$P(x \le \xi < x_2) = P(\xi = x_1) + P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 \le \xi \le x_2).$$

Зауваження. Відомо, якщо подія неможлива, то імовірність її появи рівна нулю. У випадку неперервної випадкової величини число її можливих значень нескінченне. Імовірність того, що ця величина прийме яке-небудь конкретне значення, рівна нулю. Однак з цього не випливає, що ця подія неможлива, тому що в результаті випробування вона може набути довільне зі своїх значень. Нульова імовірність може бути не лише для неможливої, але і для можливої події. Поняття “події можливі, але які мають нульову імовірність" здається на перший погляд парадоксальним. В дійсності воно не більш парадоксальне, ніж уявлення про тіло, що має певну масу, але жодна з точок, що знаходиться всередині тіла, не має певної скінченної маси. Як завгодно малий об'єм, виділений із тіла, має певну скінченну масу; ця маса наближається до нуля при зменшенні об'єму і в границі рівна нулю для точки. Аналогічно для неперервно розподіленої випадкової величини ймовірність попадання на як завгодно малий інтервал відмінна від нуля в той час, як імовірність попадання в строго визначену точку рівна нулю. У випадку неперервної випадкової величини є сенс говорити про ймовірність попадання випадкової величини в інтервал, а не про ймовірність того, що вона прийме певне конкретне значення.

Так, при виготовленні валика нас не цікавить імовірність того, що його діаметр буде рівний номіналу. Для нас важлива імовірність того, що діаметр валика не виходить із поля допуску.

У XVIII ст. швидко почала розвиватися теорія похибок (помилок) спостережень. "Похибка вимірювання в залежності від випадку може приймати різні значення" – основна думка вчених, які займалися теорією випадкових величин, яка на той час була поки що невідомою для них. Вперше така думка була висловлена Галілеєм задовго до робіт відомих математиків, що займалися проблемою неперервної випадкової величини. Він же ввів у обіг поняття "випадкова" і "систематична" похибка вимірювання.

Похибка вимірювання є випадковою величиною з певним невідомим (поки що) розподілом ймовірності.

У своїх роботах Я. Бернуллі розглянув кількість появ події А в n незалежних дослідах, тобто випадкову величину, яка може набувати значення 0, 1, 2, ..., n з імовірностями, які ми обчислюємо за формулами Бернуллі.

Спочатку вчені вважали, що можливі значення похибок вимірювань складають арифметичну прогресію з невизначеною, але дуже малою різницею. Відмовившись від такої думки, науковці почали припускати, що можливі значення, які приймають похибки спостережень, заповнюють певний відрізок, а ймовірності можливих значень визначалися через визначення густини розподілу.

В перших роботах Я. Бернуллі питання густини розподілу розглядається з деякою неточністю. У роботах Лапласа, Гаусса поняття густини розподілу було означено більш точно і наближалося до сучасного. Зокрема Лаплас у своїй відомій книзі "Аналітична теорія ймовірностей" наводить формулу для обчислення густини розподілу суми, маючи густини розподілу доданків; вчений вміло оперує з густинами розподілу, однак дослідник не вводить поняття випадкової величини. Лаплас обходив введення цього поняття або шляхом використання теорії похибок вимірювань, або використовуючи "мову" математичного аналізу.

Поняття випадкової величини не було введено аж до першої пол. X1X ст. Його введенню спонукали дослідження бельгійського математика-дослідника А. Кетле (1796-1874). Вчений помітив зв'язок між *розмірами тварин та їх віком. Цей зв'язок підлягав нормальному закону розподілу, для якого потрібно було введення випадкової величини.*

Крім А. Кетле ряд інших вчених розглядали цікаві задачі, розв'язання яких вимагало введення поняття випадкової величини, серед них К. Ф. Гаусс, Д. К. Максвел та ін.

Першу спробу ввести поняття випадкової величини здійснив Пуассон у 1832 р. у своїй роботі "Про ймовірність середніх результатів досліджень". Однак у нього в роботі не зустрічається термін "випадкова величина", натомість присутнє поняття "деяка річ", яка може набувати значення $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots \alpha_\lambda$, *відповідно з імовірностями* $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3 \ldots \rho_\lambda$.

Згодом у своїх роботах П. Л. Чебишов, О. М. Ляпунов використовують термін "величина" (*variable).*

2.4. Числові характеристики випадкових величин

Дуже важливими в теорії імовірностей є окремі числові параметри (*the number of parameters*), що характеризують істотні риси розподілу випадкових величин: математичне сподівання *(the mathematical expectation),* що є деяким середнім значенням, навколо якого ґрунтуються можливі значення випадкової величини; дисперсія (*dispersion*) і середнє квадратичне відхилення (*the mean square deviation*), які характеризують ступінь розсіювання (*the power dissipation*) випадкових величин в околі математичного сподівання.

Поняття математичного сподівання в найпростішому елементарному (але не в явному) вигляді з'явилося досить рано в історії розвитку аксіоматичної частини теорії ймовірності. Неявно (опосередковано) воно було присутнє у листуванні математиків Б. Паскаля і математика П'єра Ферма (1654 р.). Однак вчені у своєму листуванні лише підсвідомо використовували дане поняття, не означаючи його. Вперше формальне означення математичного сподівання дав голландський математик Х. Гюйгенс у своїй книзі "Математичні етюди" (1657 р.), (яка до початку XVIII ст. вважалася зразковою). Гюйгенс пише: "Якщо число випадків, в яких можна отримати суму a, дорівнює ρ, *і число випадків, у яких можна отримати суму b, дорівнює q, і всі випадки можна отримати однаково легко, то вартість мого сподівання визначається виразом:*

$$\frac{pa+qb}{p+q}.$$

Це і є визначення математичного сподівання для дискретних випадкових величин. Означення, наведене Гюйгенсом, фактично є узагальненим поняттям середнього арифметичного, яке широко застосовувалося в торгівлі і промисловості для визначення середніх цін, середнього продукту. Для Голландії середини XVII ст. це є природним, оскільки саме в цей час в цій країні, раніше ніж в багатьох інших, почав розвиватися торгово-промисловий і банківський облік. Саме тому термінологія Х. Гюйгенса носить комерційний характер, зокрема, вчений *вважає, що математичне сподівання – це ціна шансу на виграш в елементарній грі. Він приходить до висновку, що справедлива ціна – це середня ціна. Сам Х. Гюйгенс не називає математичне сподівання так, він використовує термін “вартість шансу”.*

Ідея визначення поняття математичного сподівання присутня у книзі М. Бернуллі “Про застосування мистецтва припущень” (XVIII ст.) і в роботі, що їй передувала, “Мистецтво припущень” Д. Бернуллі (1713 р.) (обидва математики належать до сім’ї відомих швейцарських математиків). Крім того, Д. Бернуллі зробив порівняння формул для обчислення математичних сподівань з правилом обчислення координат центра ваги системи матеріальних точок.

Варто зауважити, що географія розвитку поняття математичного сподівання є досить широкою – охоплює практично всю Європу, що було нехарактерним для XVIII ст., оскільки більшою мірою увагу математиків привертало дослідження питання ймовірності випадкової події. Наприклад, у відомій на той час енциклопедії про ймовірності - книзі П. Лапласа “Аналітична теорія ймовірностей” немає ні визначення математичного сподівання, ні правил та теорем для нього, отже, розвиток поняття математичного сподівання носив діалектичний характер. З одного боку, увага вчених була прикута до поняття ймовірності, з іншого – до понять математичного сподівання і дисперсії для в.в., що були введені дещо пізніше (1936 – 1938 рр.) П. Л. Чебишовим. В лекціях, які він читав у Петербурзькому університеті, він говорить про величини (маючи на увазі випадкові величини), їх математичне сподівання і дисперсію. Однак у своїй книзі “Досвід елементарного аналізу” (1845 р.) автор П. Л. Чебишов не згадує ні про випадкові величини, ні про математичне сподівання, ні про дисперсію.

2.5. Математичне сподівання та його характеристики

Введемо поняття математичного сподівання дискретних (д.в.в.) і неперервних випадкових величин (н.в.в.) та розглянемо їх властивості.

Нехай ξ - дискретна випадкова величина із заданим законом розподілу ймовірностей: $P(\xi = x_i) = p_i$, який показано нижченаведеною таблицею.

Таблиця 2.2

ξ	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_n
$P(\xi = x_1)$	p_1	p	p_3	…	p_i		p_n

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1.$$

Математичним сподіванням (mathematical expectation) $M(\xi) = M\xi$ ***дискретної випадкової величини*** ξ називається сума парних добутків всіх можливих значень випадкової величини на відповідні їм імовірності:

$$M\xi=\sum_{i=1}^{n} x_i \ \rho_i = x_1 p_1 \ + x_2 p_2 + ... x_i p_i + ... x_n p_n .$$

Математичним сподіванням $M\xi$ ***неперервної випадкової величини*** ξ *з* густиною розподілу *f(x)* називається число, яке визначається рівністю:

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx.$$

При цьому вимагається, щоб невласний інтеграл, який стоїть в правій частині рівності, був збіжним.

Приклад. Станок штампує деталі. Проектна довжина деталі є математичним сподіванням в.в. ξ - довжини одержаної деталі.

Властивості математичного сподівання

Властивість 1. *MC=C.* Сталу *C* можна розглядати як випадкову величину ξ, яка може приймати тільки одне значення *C* з імовірністю, рівною одиниці. Тому $M\xi = C \cdot 1 = C$.

Або для неперервних випадкових величин

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty} C \cdot f(x)dx .$$

$$C\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C \cdot 1 = C \ ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 .$$

Властивість 2. Сталий множник (*the sustainable multiplier*) можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(R\xi) = \sum_{i=1}^{n} Rx_i p_i = R\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = RM\xi \ ;$$

або н. в. в. $$M(R\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} Rxf(x)dx = R\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = RM\xi \ .$$

Властивість 3. Математичне сподівання суми декількох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин:

$$\grave{I} \ (\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + ... + M(\xi_n) .$$

Доведення

Доведення проведемо для двох випадкових величин. Нехай д. в. в. ξ має значення x_m, *m=1,2,...* n'; д. в. в. η має значення $y_к$, *k =1,2,...,* n''. Тоді сума $\xi+\eta$ буде д. в. в., значення якої x_m+y_n приймаються з деякими ймовірностями $P(\xi=x_m, \ \eta=y_k)$, тому, використовуючи формулу для математичного сподівання, маємо:

$$M(\xi+\eta) = \sum_{mk}(x_m + y_k)P(\xi = x_m, \eta = y_k) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n'} x_m \sum_{k=1}^{n''} P(\xi = x_m, \eta = y_k) + \sum_{k=1}^{n''} y_k \sum_{m=1}^{n'} P(\xi = x_m, \eta = y_k) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n'} x_m \sum_{k=1}^{n''} P(\xi = x_m) + \sum_{k=1}^{n''} y_k P(\eta = y_k) = M\xi + M\eta .$$

В останній рівності застосована формула повної ймовірності:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i),$$

за якою

$$\sum_{k=1}^{n''}P(\xi=x_m;\eta=y_k)=P(\xi=x_m),$$

$$\sum_{m=1}^{n'}P(\xi=x_m;\eta=y_k)=P(\eta=y_k),$$

де $P(\eta=y_k)$ і $A(\xi=x_m)$ - відповідні події.

Властивість 4. Нехай ξ і η взаємно незалежні випадкові величини. Тоді $M(\xi\eta)=M\xi\cdot M\eta$.

Щоб довести 4-ту властивість, зауважимо, що випадкова величина ($\xi\,\eta$) приймає значення $x_m y_к$ з імовірностями $P(\xi=x_m;\ \eta=y_к)$, ξ і η незалежні,

$$P(\xi=x_m,\ \eta=\text{у}_\text{к})=\text{P}(\xi=x_m)\cdot P(\eta=y_к).$$

і тому

$$M(\xi\eta)=\sum_{mк}x_m y_к p(\xi=x_m,\eta=y_к)=$$

$$=\sum_{m=1}^{n'}x_m P(\xi=x_m)\sum_{к=1}^{n''}y_m P(\eta=y_к)=M\xi\cdot M\eta.$$

Якщо ξ і η залежні, то рівності може не бути. Для неперервних випадкових величин властивість 3 і властивість 4 будуть доведені нижче.

Покажемо зв'язок математичного сподівання випадкової величини із середнім арифметичним значенням д. в. в. при великій кількості випробувань, а саме покажемо, що при великій кількості випробувань середнє арифметичне значень спостережень близьке до математичного сподівання.

Твердження 1. Середнє арифметичне значень д. в. в., які спостерігаються в дослідах при необмеженому зростанні числа випробувань, прямує до її математичного сподівання.

Пояснення. Нехай відбувається N незалежних випробувань. Нехай

значення x_1 з'явилось n_1 раз,

значення x_2 з'явилось n_2 раз,

. . . .

значення $x_к$ з'явилось n_k раз.

Обчислимо середнє арифметичне одержаних значень ξ:

$$\bar{M}\xi=\frac{x_1n_1+x_2n_2+...+x_kn_k}{N}=\frac{x_1n_1}{N}+\frac{x_2n_2}{N}+...+\frac{x_kn_k}{N}.$$

При великій кількості випробувань N відносна частота $\frac{n_k}{N}$ прямує до ймовірності появи значення $x_к$, тоді $\sum_{i=1}^{к}x_i\cdot\frac{n_i}{N}\approx\sum_{i=1}^{к}x_i\cdot p_i$;

$$\overline{M}\xi\to M\xi,\ n\to\infty.$$

Математичне сподівання називається також ***моментом першого порядку (moment of first order)*** або ***середнім значенням (average)*** випадкової величини.

Приклад. Визначити математичне сподівання випадкової величини ξ - числа попадань при трьох пострілах, якщо імовірність попадання при кожному пострілі $P = 0{,}4$.

Розв'язання.

Випадкова величина може прийняти значення: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Складемо таблицю розподілу даної випадкової величини. Імовірності цих значень знаходимо за схемою Бернуллі: n=3; p=0,4; q=0,6.

$$\overline{M}\xi \to M\xi,\ n \to \infty.$$

$$\mathrm{P}(x = 0) = \mathrm{C}_3^0 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}216;$$

$$\mathrm{P}(x = 1) = \mathrm{C}_3^1 \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432;$$

$$\mathrm{P}(x = 2) = \mathrm{C}_3^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}288;$$

$$\mathrm{P}(x = 3) = \mathrm{C}_3^3 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}064.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
ξ	*0*	*1*	*2*	*3*
$P(\xi = x_k)$	*0,216*	*0,432*	*0,288*	*0,064*

$$\sum_{k=0}^{3} P(\xi = x_k) = 1.$$

Математичне сподівання обчислюємо за формулою:

$M\xi = 0 \cdot 0{,}216 + 1 \cdot 0{,}432 + 2 \cdot 0{,}288 + 3 \cdot 0{,}064 = 1{,}2$; $M\xi$ - середнє арифметичне числа попадань.

Твердження 2. Математичне сподівання випадкової величини ξ називається ***центром розподілу імовірності*** (***the probability distribution center)*** в. в. ξ.

Пояснення. Назва "центр розподілу ймовірностей" введено за аналогією з назвою "центр ваги". Якщо по осі *Ox* в точках з абсцисами x_1, x_2, ..., x_n знаходяться маси $p_1, p_2, ..., p_n$, то відомо, що абсциса центра ваги визначається за формулою:

$$\mathrm{x_c} = \frac{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i p_i}}{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{p_i}};$$

якщо $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, то $x_c = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

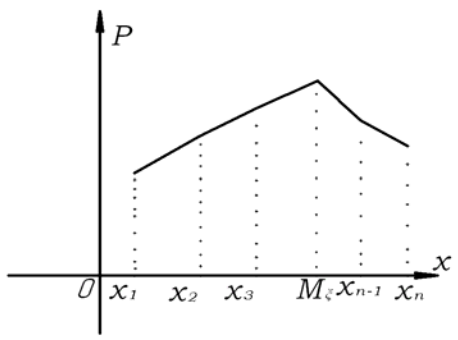


Рис. 2.4

4 Звідки слідує, що центр ваги мас і математичне сподівання обчислюються за аналогічними формулами.

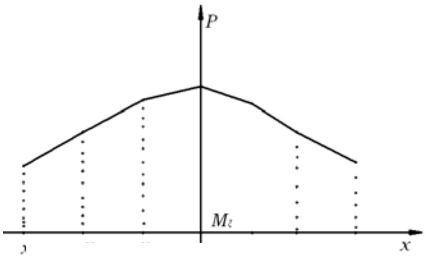


Рис. 2.5

Звідки назва математичного сподівання “центр розподілу ймовірностей” (рис. 2.4).

Нехай дано випадкову величину ξ з відповідним законом розподілу, нехай математичне сподівання - Мξ.

Розглянемо різницю в. в. ξ і її математичного сподівання:

$$\xi - M\xi = \xi_0,$$

де ξ_0- випадкова величина, яку будемо називати ***центрованою випадковою величиною (the centered random variable)*** або ***відхиленням.***

$$M(\xi - M\xi) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M\xi)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - M\xi \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i = M\xi \text{ -}M\text{=}0.$$

Таблиця 2.2

ξ	$\tilde{o}_1$	$\tilde{o}_2$	…	$\tilde{o}_s$	…	$\tilde{o}_n$
$\xi^0 = x_i^0 - M\xi$	$x_1^0 = x_1 - M\xi$	$x_2^0 = x_2 - M\xi$	…	$x_s^0 = x_s - M\xi$	…	$x_n^0 = x_n - M\xi$
$P(\xi^0 = x_i^0)$	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n

$$\sum_{k=0}^{3} P(\xi = x_k) = 1.$$

2.6. Дисперсія, середнє квадратичне відхилення випадкової величини

В багатьох практичних випадках важливим є питання про те, наскільки великі відхилення випадкової величини від її математичного сподівання. Для оцінки розсіювання значень випадкової величини в околі її математичного сподівання вводиться нова числова характеристика - дисперсія (*dispersion*) (“дисперсія” - розсіювання).

Дисперсія випадкової величини є математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання. Випадкова величина (ξ- M_ξ)^2 має той же закон імовірності, що й ξ, тому

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M\xi)^2 P_i \geq 0$$ для дискретної випадкової величини.

Розмірність дисперсії дорівнює квадрату розмірності випадкової величини. Для неперервної випадкової величини дисперсія дорівнює:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M\xi)^2 f(x)dx.$$

Записаний інтеграл повинен бути збіжним.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma\xi = \sqrt{D} \geq 0$ є ***характеристикою розсіювання (the characteristic scattering)*** в. в. ξ; розмірність $\sigma\xi$ збігається з розмірністю в. в.

Властивість 1. $D\xi = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M\xi)^2 p_i = M\xi^2 - M(\xi)^2$.

$$D\xi = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M\xi)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i M\xi p_i + \sum_{i=1}^{n}(M\xi)^2 P_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2M\xi\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + (M\xi)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2(M\xi)^2 + (M\xi)^2 =$$

$$= M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Для неперервної випадкової величини аналогічно:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M\xi)^2 f(x)dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x^2 - 2xM\xi + (M\xi)^2) f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2M\xi \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + (M\xi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2(M\xi)^2 + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Властивість 2. $DC=0$, C - *const*.

За властивістю 1 математичного сподівання

$$MC=C;\ DC=M(C-C)^2=M0=0.$$

Властивість 3. $DC\xi = C^2 DC$.

$$DC\xi = M(C\xi - MC\xi)^2 = MC^2 \cdot (\xi - M\xi)^2 = C^2 D\xi.$$

Доведення останніх двох властивостей для дискретних і неперервних в. в. однакове.

Властивість 4. Якщо ξ і λ незалежні випадкові величини, то дисперсія суми цих величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(\xi + \lambda) = D\xi + D\lambda.$$

Доведення.

$$D(\xi + \lambda) = M(\xi + \lambda)^2 - [M(\xi + \lambda)]^2;$$

$$M(\xi + \lambda)^2 = M(\xi^2 + 2\xi\lambda + \lambda^2) = M\xi^2 + 2M(\xi\lambda) + M(\lambda^2).$$

ξ і λ - незалежні випадкові величини;

$$M(\xi\lambda) = M\xi + M\lambda.$$

$$D(\xi + \lambda) = M(\xi + \lambda)^2 - (M(\xi + \lambda)^2);$$

$$M(\xi + \lambda)^2 = M(\xi^2 + 2\xi\lambda + \lambda^2) = M\xi^2 + 2M(\xi\lambda) + M\lambda^2;$$

ξ і λ - незалежні випадкові величини;

$$M(\xi\lambda) = M\xi \cdot M\lambda;$$

$$M(\xi + \lambda)^2 = M\xi^2 + 2M\xi \cdot M\lambda + M\lambda^2;$$

$$(M(\xi + \lambda))^2 = (M\xi + M\lambda)^2 = (M\xi)^2 + 2M\xi \cdot M\lambda + (M\lambda)^2;$$

$$D(\xi+\lambda)=M(\xi)^2+2M\xi\cdot M\lambda+M\lambda^2-(M\xi)^2-2M\xi\cdot M\lambda-(M\lambda)^2=$$
$$=(M(\xi^2)-(M\xi)^2)+(M\lambda^2-(M\lambda)^2)=D\xi+D\lambda.$$

Властивість 4 розповсюджується на довільне скінченне число попарно незалежних випадкових величин:

$$D(\xi_1+\xi_2+...+\xi_n)=D(\xi_1)+D(\xi_2)+...+D(\xi_n).$$

Дисперсія не може бути від'ємною. Вона тим менша чисельно, чим тісніше групуються значення x_i в околі математичного сподівання $M\xi$.

Навпаки, якщо можливі великі відхилення x_i від $M\xi$ і якщо це відбувається з великими ймовірностями, то дисперсія також буде великою. Таким чином, дисперсію і середнє квадратичне можна розглядати як *міру розсіювання випадкової величини* ξ *навколо середнього значення* $M\xi$.

Дисперсія $D\xi$ являє собою ***момент другого порядку (second order moment***) випадкової величини $\xi - M\xi$.

2.7. Початкові і центральні теоретичні моменти

Розглянемо д. в .в. ξ, задану законом розподілу:

ξ	*1*	*2*	*5*	*100*
P	*0,6*	*0,2*	*0,19*	*0,01*

Знайдемо математичне сподівання:

$$M\xi=1\cdot 0{,}6+2\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}19+100\cdot 0{,}01=2{,}95.$$

Закон розподілу ξ^2

ξ^2	*1*	*4*	*25*	*10000*
P	*0,6*	*0,2*	*0,19*	*0,01*

$$M\xi^2=1\cdot 0{,}6+4\cdot 0{,}2+25\cdot 0{,}19+10000\cdot 0{,}01=106{,}15.$$

Бачимо, що $M\xi^2$ значно більше $M\xi$. Це пояснюється тим, що після піднесення до квадрата можливе значення величини ξ^2, яке відповідає значенню x=100 величини ξ, стало рівним 10000, тобто значно збільшилося; імовірність цього значення залишилась. Таким чином, перехід від $M\xi$ до $M\xi^2$ дає можливість краще врахувати вплив на математичне сподівання того можливого значення, яке досить велике і має малу імовірність.

Якби ξ мала декілька великих і малоймовірних значень, то перехід до ξ^2, а тим більше ξ^3, ξ^4, дав можливість ще більше «врахувати вклад» цих великих, але малоймовірних значень.

Тому важливо розглядати математичне сподівання цілого додатного степеня випадкової величини (не тільки дискретної, але й неперервної).

Взагалі, ***початковий момент (starting point)*** порядку k випадкової величини ξ визначається як математичне сподівання величини:

$$\gamma_k = M\xi^k .$$

Для дискретної випадкової величини: $\gamma_k = \sum\limits_{k=1}^{n} x_i^k p_i$.

Для неперервної випадкової величини: $\gamma_\kappa = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^\kappa f(x)dx$,

так $$\gamma_1 = M\xi,\ \gamma_2 = M\xi^2 .$$

Користуючись цими моментами, формулу для обчислення дисперсії можна записати $D\xi = \gamma_2 - (\gamma_1)^2$.

Крім моментів в. в. $\sigma^2\xi = D\xi = M\xi - (M\xi)^2$ розглядаються моменти відхилення $\xi - M\xi$.

Центральним моментом порядку k в. в. ξ називають математичне сподівання центрованої випадкової величини $(\xi - M\xi)^k$ $\mu_k = M(\zeta - M\zeta)^k$ Значить, $\mu_1 = M\left[(\xi - M\xi)\ \right] = 0$, $\mu_2 = M\left[(\xi - M\xi)^2\right] = D\xi = (\sigma\xi)^2$.

Легко одержуються співвідношення, які з’єднують початкові і центральні моменти:

$$\mu_2 = \gamma_2 - \gamma_1^2 .$$

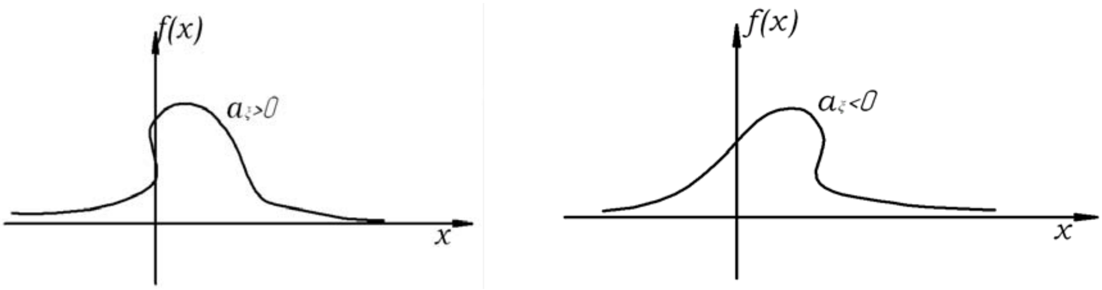
Використовуючи означення центрального моменту та властивості математичного сподівання, отримаємо формулу:

$$\mu_3 = \gamma_3 - 3\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_1^3;$$

$$\mu_4 = \gamma_4 - 4\gamma_3\gamma_1 + 6\gamma_1\gamma_1^2 - 3\gamma_1^4.$$

Третій центральний момент μ_3 дає характеристику асиметрії (скошеності) розподілу (рис. 2.6, а; б). Якщо випадкова величина ξ розподілена симетрично відносно свого математичного сподівання, то третій центральний момент $\mu_3 = 0$.

Третій центральний момент має розмірність кубу випадкової величини, тому звичайно розглядають безрозмірну величину – відношення μ_3 до середнього квадратичного відхилення в третьому степені.



а) б)

Рис. 2.6

$\alpha\xi = \dfrac{\mu_3}{(\sigma\xi)^3}$, $\alpha\xi$ - коефіцієнт асиметрії.

Четвертий центральний момент μ_4 є характеристикою гостровершинності або плосковершинності розподілу. Ці властивості розподілу описуються за допомогою так званого **ексцесу.**

***Ексцесом* (*the kurtosis*)** називається величина $C\xi = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4\xi} - 3$.

Число 3 випливає із співвідношення $\dfrac{\mu_4}{\sigma^4\xi}$ тому, що для найбільш розповсюдженого нормального розподілу (з яким ми ознайомилися пізніше)

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4\xi} = 3.$$

Крива нормального розподілу, для якого ексцес дорівнює нулю, прийнята за еталон, з яким порівнюють інші розподіли. Криві більш гостровершинні мають додатний ексцес, криві більш плосковершинні мають від'ємний ексцес (рис. 2.7).

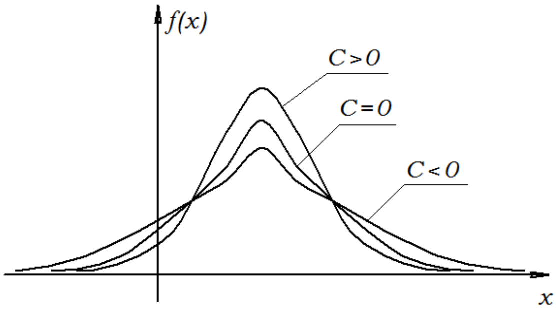


Рис. 2.7

Крім розглянутих початкових і центральних моментів на практиці застосовуються абсолютні моменти.

Абсолютний початковий момент $B_к$=M($|\xi|^к$).

Абсолютний центральний момент $Г_к = M(|\xi - M\xi|^k)$.

Абсолютні моменти парних порядків збігаються зі звичайними моментами. Перший абсолютний центральний момент називається середнім арифметичним відхиленням, характеризує розсіювання в. в.

Значення в. в. ξ, при якому густина розподілу має найбільше значення, називається ***модою*** і позначається M_0.

Мода може як збігтися, так і не збігтися з математичним сподіванням. Число, яке позначається M_e, називається медіаною, якщо воно задовольняє рівність:

$$\int_{-\infty}^{M_e} f(x)dx = \int_{M_e}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}; \text{ а значить } P(\xi < M_e) = P(M_e \le \xi) = \frac{1}{2}.$$

Якщо неперервна випадкова величина ξ може приймати значення тільки на скінченному проміжку $[a, b]$, то математичне сподівання обчислюється за формулою, наведеною нижче.

Цю формулу можна вважати узагальненням формули для дискретної випадкової величини. Дійсно, розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на інтервали $(x_{к-1}, x_к)$. В кожному з інтервалів візьмемо точку ξ_k. Розглянемо допоміжну дискретну випадкову величину ξ, яка приймає значення: $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...\xi_n$. Нехай імовірності відповідних значень д. в. в. будуть $P_{1,} P_{2,} \ldots, P_{к,} \ldots P_n$:

$$P_1 = f(\xi_1)\Delta x_1, \ P_2 = f(\xi_2)\Delta x_2, \ \ldots, \ P_k = f(\xi_k)\Delta x_k, \ \ldots \ P_n = f(\xi_n)\Delta x_n.$$

відповідні елементи імовірності.

Математичне сподівання даної дискретної величини ξ: $M\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_k P_k$,

або

$$M\xi = \xi_1 f(\xi_1)\Delta x_1 + \xi_2 f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k + ... + \xi_n f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Переходячи до границі при $max\ \Delta x_к \to 0$, одержимо:

$$M\xi = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b xf(x)dx.$$

Вираз, який стоїть справа, є математичне сподівання неперервної випадкової величини *x*, яке може прийняти довільне значення з відрізка $[a,b]$. Аналогічні міркування можна привести і для нескінченного інтервалу. Математичне сподівання є центр розподілу імовірності н. в. в. Якщо *f(x)* парна, тобто симетрична відносно *Oy,* то $M\xi$=0. Центр розподілу імовірності збігається з початком координат. Для центрованої в. в. математичне сподівання дорівнює нулю:

$$M(\xi - M\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_\xi) f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx - M_\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = M\xi - M\xi = 0.$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення дискретних і неперервних випадкових величин. В чому різниця між ними?
2. Що називається функцією розподілу? Які вона має властивості?
3. Яким чином було вперше введено функцію розподілу?
4. Який зв'язок між диференціальною та інтегральною функціями розподілу?
5. Основне означення і властивості математичного сподівання та дисперсії. Середнє квадратичне відхилення. Хто вперше сформулював означення математичного сподівання?
6. Дайте означення початковому моменту.

3. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ І НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

3.1. Розподіли Бернуллі та Пуассона для дискретних випадкових величин

Приклад 1. Нехай в. в. $\xi = m$ - число появи події *A* в *n* незалежних випробуваннях, причому в кожному з випробувань *A* з'являється з імовірністю *P(A)=p* і не з'являється з імовірністю *P(A)*=1-*p*=*q*. Знайти для в. в. ξ $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$.

Нехай ξ_i в. в., яка визначає кількість появи *A* в *i*-му іспиті. Тоді закон розподілу для кожного ξ_i має вигляд:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n .$$

ξ_i	*0*	*1*
P_i	$q=1-p$	P
ξ_i^2	*0*	*1*

$$M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 + ... + M\xi_n = np\,;$$

$$M\xi_i = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p\,;$$

$$D(\xi_з) = M(\xi_i^2) - M(\xi_i)^2 = M(\xi_i - M\xi_i)^2 = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p =$$

$$= p - p^2 = p(1-p) = pq\,.$$

$$D\xi = D\xi_1 + D\xi_2 + ... + D\xi_n = \sum_{i=1}^{n} pq = npq;$$

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{npq}\,.$$

Приклад 2. Нехай ξ - випадкова величина, розподілена за законом Пуассона.

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^\kappa e^{-\lambda}}{k!}\ , k = 0,\ 1,\ 2,\ ...\ n,\ ...$$

$$M\xi = \sum_{\kappa=0}^{\infty} k \frac{\lambda^\kappa e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\lambda^{\kappa-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\lambda^\kappa}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda\,.$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

$$M$$

$$(\xi^2) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^\kappa e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{\kappa=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{\kappa-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{\kappa=0}^{\infty} ((k-1)+1) \frac{\lambda^{\kappa-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{\kappa=2}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} +$$

$$+\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{\kappa-1}}{(k-1)!}=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\lambda^{\kappa}}{k!}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

$$D\xi=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=D\xi=\lambda\,;\sigma\xi=\sqrt{D\xi}=\sqrt{\lambda}\,.$$

За законом Пуассона дисперсія в. в. дорівнює її математичному сподіванню.

Ця властивість застосовується при вирішенні питання правдивості гіпотези про те, що випадкова величина розподілена за законом Пуассона. Знайдені з випробування досліду статистичні характеристики - математичне сподівання і дисперсія, у випадку, якщо вони близькі за значенням, підлягають закону Пуассона.

Пуассон Сімеон Дені (Poisson S. D.), (1781 - 1840) - французький механік, фізик і математик. Науковий доробок С. Пуассона величезний. Він написав понад 300 праць, значна частина яких відіграла важливу роль у становленні сучасної науки, а деякі його праці не втратили свого значення і дотепер. Пуассон ґрунтовно розробив багато розділів математичної фізики: капілярність, згинання пластинок, теплопровідність тощо. Йому належить розв'язання багатьох задач електростатики (розподіл електрики на поверхні провідників) та магнетостатики. У математиці істотне значення мають праці Пуассона, присвячені визначеним інтегралам, рівнянням у скінченних різницях, диференціальним рівнянням із частинними похідними, теорії ймовірностей, варіаційному численню, рядам тощо. Вчений ґрунтовно поліпшив способи застосування теорії ймовірностей, довів теорему, що стосувалася закону великих чисел (закон Пуассона), вперше скориставшись терміном "закон великих чисел".

3.2. Рівномірний розподіл для неперервних випадкових величин

В деяких задачах зустрічаються неперервні випадкові величини, про які відомо, що їх можливі значення знаходяться в межах певного визначеного інтервалу. Крім того відомо, що в межах цього інтервалу всі значення в. в. однаково імовірні (точніше мають одну і ту ж густину ймовірності). Про такі випадкові величини кажуть, що вони розподілені за ***законом рівномірної щільності (law of uniform density)***.

Приклад 1. Відбувається зважування на точних терезах; одна поділка дорівнює 1 г; результат зважування показує, що вага знаходиться між k і k+1 грамами. Вага тіла приймається рівною $k+\frac{1}{2}$ г. Похибка при зважуванні ξ (випадкової величини) є випадковою величиною, розподіленою з рівномірною щільністю на відрізку [$-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$].

Приклад 2. Поїзди метрополітену їдуть з інтервалом 2 хвилини. Пасажир виходить на платформу в деякий момент часу. Час Т, протягом якого йому потрібно чекати поїзд, є випадковою величиною, розподіленою з рівномірною щільністю на відрізку [0; 2] хвилин.

Приклад 3. Обертне симетричне колесо зупиняється внаслідок тертя. Кут θ, утворений деяким фіксованим рухомим радіусом колеса з нерухомим радіусом після зупинки колеса, є випадкова величина з рівномірною щільністю розподілу на відрізку [0; 2π].

$$\gamma(\theta)=\begin{cases}0, & \theta\notin(0;2\pi),\\ \frac{1}{2}, & \theta\in(0;2\pi).\end{cases}$$

Розподіл імовірностей називають ***рівномірним***, якщо на інтервалі, до якого належать всі можливі значення випадкової величини, густина розподілу зберігає стале значення *С* при $x\in[a,в]$. Знайдемо сталу *С*. Оскільки всі можливі значення випадкової величини містяться на інтервалі *(а, в)* і *f(x)=0* при $x<a$ і $x>в$, то має виконуватись співвідношення:

$$\int_a^b f(x)dx=1 \quad \text{або} \quad \int_a^b cdx=1 \quad \text{і} \quad c=\frac{1}{b-a}.$$

Отже, щільність ймовірності рівномірного розподілу, зображена на (рис. 3.1, а), запишеться аналітично так:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\quad x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & при\quad a\le x\le b,\\ 0, & при\quad x>b.\end{cases}$$

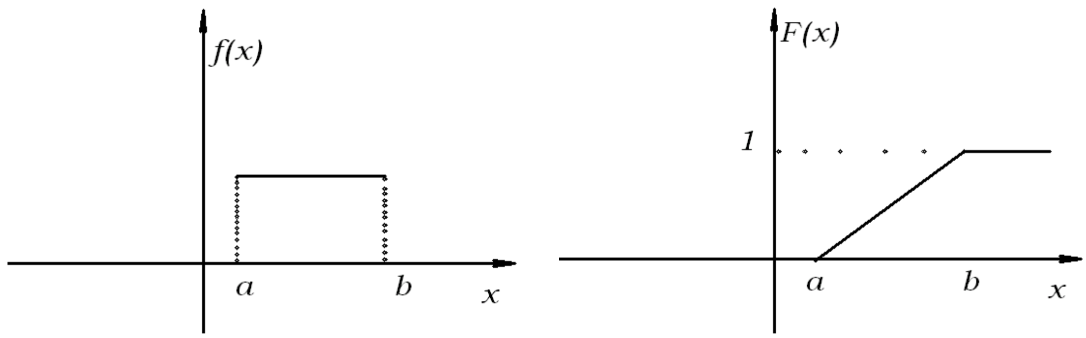
Знайдемо функцію розподілу рівномірно розподіленої на [*a*, *b*] випадкової величини:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{X} f(x)dx.$$

1. Для $x<a,$ $F(x)=\int_{-\infty}^{X} 0(x)dx=0;$

2. Для $a\le x\le b,$ $F(x)=\int_a^X f(x)dx=\int_a^x \frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a};$

3. Для $x>b,$ $F(x)=\int_{-\infty}^{a<x} 0dx+\int_a^b \frac{1}{b-a}dx+\int_b^{+\infty} 0dx=1.$



а) б)

Рис. 3.1

На (рис. 3.1, б) зображено функцію розподілу рівномірно розподіленої на $[a, b]$ випадкової величини.

Визначимо основні числові характеристики в. в. ξ, яка підлягає закону рівномірного розподілу на відрізку $\lfloor a,\ b \rfloor$. Математичне сподівання дорівнює:

$$M\xi = \int_a^b \frac{xdx}{\text{в} - a} = \frac{1}{\text{в} - a} \int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}\,.$$

В силу симетричності рівномірного розподілу *медіана* дорівнює $\frac{a+b}{2}$.

При рівномірному законі розподілу мода відсутня.

Дисперсія дорівнює : $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$.

$$M(\xi^2) = \int_a^b \frac{x^2dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}\,\frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}\,.$$

$$(M\xi)^2 = \frac{(b+a)^2}{4}\,.$$

$$D\xi = \frac{a^2 + ba + b^2}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} = \frac{1}{12}(4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2) =$$

$$= \frac{1}{12}(a^2 - 2ab + b^2) = \frac{(a-b)^2}{12}\,.$$

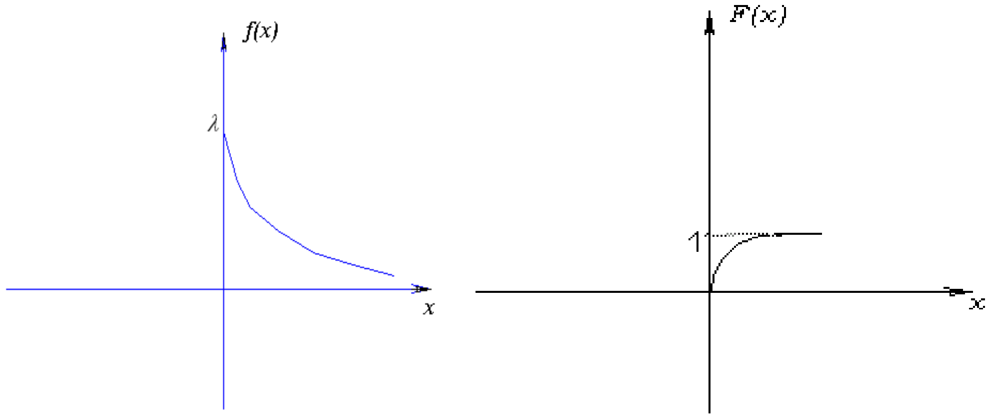
Середнє квадратичне відхилення: $\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

3.3. Показниковий (експоненціальний) розподіл для неперервних випадкових величин (н. в. в.)

Показниковий (***експоненціальний) розподіл*** – це розподіл неперервної випадкової величини ξ з параметром $\lambda > 0$, заданий законом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \ \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, \ \ \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Графік щільності експоненціального розподілу зображено на (рис. 3.2, а, б).



а) б)

Рис. 3.2

Функція розподілу має вигляд:

$$P(\xi < M_e) = P(M_e \le \xi) = \frac{1}{2}.$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} f(t)dt = -\int_{0}^{x} \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{\lambda} d(-t\lambda) =$$

$$= -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Графік зображено на рис. 3. 2, б.

Обчислимо математичне сподівання.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda e} dx = \left[\begin{array}{l} u = x; \int dv = \int \lambda e^{-\lambda x} dx \\ du = dx; v = -e^{-\lambda x} \end{array}\right. =$$

$$= -x \cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} d(-x \cdot \lambda) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\lambda x}} = \frac{1}{\lambda};$$

$$M\xi = \frac{1}{\lambda}.$$

Знайдемо дисперсію для даного закону. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \frac{1}{\lambda^2} = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda} = \begin{bmatrix} u = x^2; dv = \lambda e^{-\lambda x} dx \\ du = 2xdx; v = e^{-\lambda x} \end{bmatrix} =$$

$$= -x^2 \cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xe^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} x = u; dv = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}dx \\ dx = du; V = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{bmatrix} = -2x \cdot \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - 2\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}d(-x\lambda) - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= -\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^2} - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\lambda^2}\frac{1}{e^{\lambda x}} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2};$$

$$D\xi = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Використано: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{\lambda x}} = 0$. $\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$.

Ймовірність попадання на відрізок $\lfloor a,\ b \rfloor$.

$$P(a \le \xi \le b) = \int_a^{в} f(x)dx = \lambda\int_a^b e^{-\lambda x}dx = -e^{-\lambda x}\Big|_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda a}.$$

Експоненціальний розподіл використовується в теорії надійності.

Функція надійності $R(t)$ визначає імовірність безвідмовної роботи елемента за час t: $R(t)=exp\left[-\lambda t\right]$.

3.4. Геометричний закон розподілу

Нехай здійснюються незалежні випробування, в кожному з яких імовірність появи події дорівнює p, непояви $(1\text{-}p=q)$.

Випробування припиняються з появою події A. Нехай у перших $k\text{-}1$ випробуваннях подія A не відбулася, а в k-му випробуванні відбулась. Імовірність цієї події дорівнює $P(\xi = k) = pq^{k-1}$. Такий розподіл називають **геометричним.**

Математичне сподівання геометричного розподілу:

$$M\xi = \sum_{R=1}^{\infty} kp(\xi = k) = 1p + 2pq + 3pq^2 + \ldots npq^{n-1} + \ldots =$$

$$= p\left[1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \cdots\right].$$

Дослідимо на збіжність ряд, що міститься у квадратних дужках. Для цього знайдемо його n-ну частинну суму:

$$S_n = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на q:

$$S_n q = q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n.$$

Віднімемо від першої рівності другу:

$$S_n - S_n q = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} - nq^n.$$

Перші n членів є геометричною прогресією зі знаменником q і першим членом одиницею. Тому $1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1^n}=\frac{1-q^n}{1-q}$.

Тоді $$S_n(1\text{-}q)=\frac{1-q^n}{1-q}-nq^n.$$

Звідси $S_n=\frac{1-q^n}{(1-q)^2}-\frac{nq^n}{1-q}$. Враховуючи, що $0<q<1$, знаходимо

$$\lim_{n\to\infty} S_n \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Отже, $M\xi=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}$.

Дисперсію знаходимо за формулою: $D\xi=M_{(\xi^2)}-(M_\xi)^2$.

$$(M\xi)^2=\frac{1}{p^2}.$$

Знайдемо

$$M\xi^2=1p+2^2pq+3^2pq^2+\ldots+n^2pq^{n-1}+\ldots=$$
$$=p(1^2+2^2q+3^2q^2+\ldots+n^2q^{n-1}+\ldots).$$

Можна показати, що $1^2+2^2q+3^2q^2+\ldots+k^2q^{k-1}=\frac{1+q}{(1-q)^3}$.

Тоді $$M\xi^2=P\frac{1+(1-p)}{(1-q)^3}=\frac{2-p}{p^2}.$$

Отже, $\mathrm{D}\xi=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}=\frac{q}{p^2}$; $\quad \sigma\xi=\sqrt{\frac{1-p}{p^2}}=\frac{\sqrt{q}}{p}$.

3.5. Нормальний розподіл (закон Гаусса)

Нормальний закон розподілу (normal law of distribution) (який ще називається законом Гаусса) відіграє виключно важливу роль в теорії ймовірностей і займає серед інших законів розподілу особливий стан. Це закон, який найчастіше зустрічається на практиці. Головна особливість, яка виділяє нормальний закон серед інших законів, полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу.

Так, наприклад, велика кількість гарматних пострілів, здійснених в різних умовах, показує, що розсіювання снарядів на площині при пострілі з однієї гармати при встановленому прицілі підлягає нормальному закону.

“Універсальність” нормального закону пояснюється тим, що *будь-яка випадкова величина*, яка є сумою великої кількості окремих числових значень, кожне з яких підпорядковується різним законам розподілу і несуттєво впливає на суму, розподілена майже за нормальним законом.

Більшість випадкових величин, таких, наприклад, як похибки вимірів, похибки гарматних стрільб і т. д. можуть бути подані як суми великої кількості малих доданків - елементарних похибок, кожна з яких визначається дією окремої причини, яка не залежить від інших. Яким би законам розподілу не підпорядковувались окремі елементарні похибки, особливості цих розподілів в сумі великої кількості доданків нівелюються і сума підпорядковується закону, що близький до нормального. Підсумовані похибки в загальній сумі повинні грати відносно малу роль.

Випадкова величина ξ нормально розподілена або підпорядковується закону розподілу Гаусса, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \text{ де } a \text{ - довільне дійсне число, } \sigma > 0.$$

Нижче буде доведено $a = M_\xi$, $D_\xi = \sigma^2$.

Виходячи з даного визначення, функція розподілу може бути записана:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt .$$

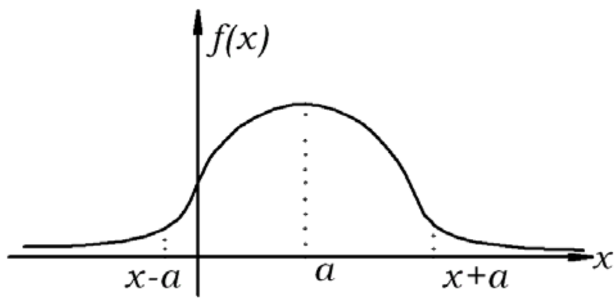


Рис. 3.3

Графік функції $f(x)$ симетричний відносно прямої *x=a.* За допомогою похідних можна показати, що функція $f(x)$ досягає максимуму при *x=a*, а її графік має точки перетину при $x_1=a+\sigma$ і $x_2=a-\sigma$ (рис. 3.3).

При $x \to \pm\infty$ графік функції $f(x)$ асимптотично наближається до осі *Ox*: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

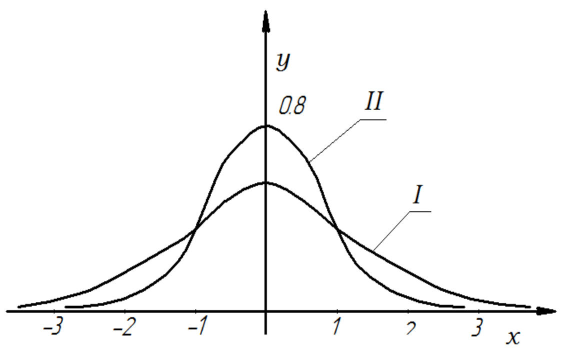


Рис. 3.4

Даний розподіл названо в честь німецького математика Карла Фрідріха Гаусса, який займався проблемами теорії ймовірності.

При збільшенні σ крива щільності розподілу стає більш пологою (рис. 3.4).

Навпаки, при зменшенні σграфік щільності розподілу більше стискається до осі *Oy*. При *a* = 0 віссю симетрії є вісь *Oy*. На рис. 3. 4. зображено два графіка функції *y = f(x).*

Графік (I) відповідає значенням: $a = 0$, $\sigma = 1$.

Графік (II) відповідає значенням: $a = 0$, $\sigma = 1/2$.

Покажемо, що функція *f(x)* задовольняє умову $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, тобто при довільних a і σ виконується співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 .$$

Зробимо в цьому інтегралі заміну змінної, покладаючи $\frac{(x-a)^2}{\sigma} = t$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Запишемо різні форми відомої формули Пуассона:

$$\text{I.} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} ;$$

$$\text{II.} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dz = \sqrt{2\pi} ; \qquad (3.1)$$

$$\text{III.} \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Використовуючи першу з них, одержимо:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1 .$$

Знайдемо імовірність попадання величини ξ в заданий інтервал:

$$P(x_1 \le \xi \le x_2) ,$$

$$P(x_1 \le \xi \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

Зробимо в цьому інтервалі заміну змінної: $\frac{x-a}{\sigma} = t$.

Тоді $x = a + \sigma t$, $dx = \sigma dt$ і $P(x_1 \le \xi \le x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\frac{\tilde{o}_1 - \grave{a}}{\sigma}}^{\frac{\tilde{o}_2 - \grave{a}}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

Останній інтеграл не розв'язується в елементарних функціях. Тому для визначеного інтеграла вводиться функція

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt ,$$

яка називається ***інтегралом імовірності (probability integrals).*** Для цієї функції складено таблиці її значень (додаток A). Після перетворень одержимо:

$$P(-\infty<\xi<+\infty)=\Phi(+\infty)-\Phi(-\infty)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\begin{bmatrix}-t=z\\-dt=dz\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}=1.$$

$$P(x_1\le\xi\le x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x_2-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x_2-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x_1-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\Phi(\frac{x_2-a}{\sigma})-\Phi(\frac{x_1-a}{\sigma}). \qquad (3.2)$$

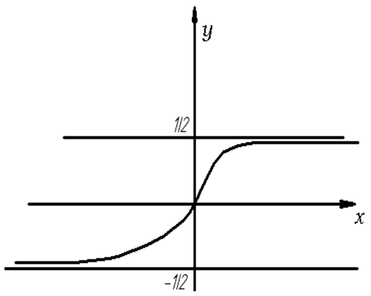


Рис. 3.5

На рис. 3.5 зображено інтегральну функцію розподілу *F(x)*.

Інтеграл ймовірностей має властивості:

1) $\Phi(0)=0$;

2) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=\frac{1}{2}$;

$\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=-\frac{1}{2}$.

3) $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, інтеграл ймовірностей - непарна функція.

$$\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\begin{Bmatrix}-t=z\\dt=-dz\end{Bmatrix}=$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=-\Phi(x).$$

Нехай $\varepsilon>0$. Знайдемо імовірність того, що нормально розподілена випадкова величина ξ відхиляється від параметра a за абсолютною величиною не більше, ніж на ε, тобто $P(|\xi-a|\le\varepsilon)$. Нерівність $|\xi-a|\le\varepsilon$ рівносильна нерівностям $a-\varepsilon\le\xi\le a+\varepsilon$. Беремо в рівності (3. 2) $x_1=a-\varepsilon$, $x_2=a+\varepsilon$ і одержимо:

$$P(|\xi-a|\le\varepsilon)=P(a-\varepsilon\le\xi\le a+\varepsilon)=\Phi(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma})=$$

$$=\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})-\Phi(-\frac{\varepsilon}{\sigma})=2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}),$$

Внаслідок того, що інтеграл ймовірностей непарна функція:

$$\Phi(-\frac{\varepsilon}{\sigma}) = -\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}).$$

Тому
$$P(|\xi - a| \le \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}). \qquad (3.3)$$

Приклад 1. Нехай в. в. ξ підпорядковується нормальному закону розподілу ймовірностей з параметрами $a = 0$, $\sigma = 2$. Визначити:

1) $P(-2 < \xi < 3)$,

2) $P(|\xi| < 0{,}1)$.

Розв'язання.

Використовуючи формулу (3.2), одержимо:

$$P(-2 < \xi < 3) = \Phi(\frac{3-0}{2}) - \Phi(\frac{-2-0}{2}) = \Phi(1{,}5) - \Phi(-1) = \Phi(1{,}5) + \Phi(1);$$

З таблиці (додаток *А*) знаходимо: $\Phi(1{,}5) = 0{,}43319$, $\Phi(1) = 0{,}34134$.

Отже, $P(-2 < \xi < 3) = 0{,}43319 + 0{,}34134 = 0{,}77453$.

$a = 0$, $|\xi| = |\xi - a|$.

За формулою (3.3)

$$P(|\xi| < 0{,}1) = 2\Phi(\frac{0{,}1}{2}) = 2\Phi(0{,}05) = 2 \cdot 0{,}01994 = 0{,}03988.$$

Приклад 2. В яких границях буде змінюватись випадкова величина, яка підпорядковується нормальному закону розподілу, щоб виконувалась рівність $P(|\xi - a| < \varepsilon) = 0{,}9973$?

Розв'язання.

$P(|\xi - a| \le \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) = 0{,}9973$, $\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) = 0{,}49865$. З таблиці (додаток *А*) знаходимо, що цьому значенню відповідає $\frac{\varepsilon}{\sigma} = 3$, звідки $\varepsilon=3\sigma$.

Одержаний факт означає: якщо в. в. підпорядковується нормальному закону розподілу, то можна стверджувати, що з імовірністю 0,9973 в. в. знаходиться в інтервалі $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$.

Дана ймовірність наближається до одиниці, тому вважають, що значення нормально розподіленої в. в. практично не виходять за границі інтервалу $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$. Цей факт називають "*правилом трьох сигм*".

Для нормально розподіленої в. в. всі відхилення (з точністю 0,9973) знаходяться на інтервалі $[a - 3\sigma; a + \sigma]$.

З правила трьох сигм випливає спосіб визначення середнього квадратичного відхилення: беруть максимальне практично можливе відхилення від середнього і ділять на три. Таке грубе обчислення рекомендують у випадку, коли немає інших способів визначення σ.

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію для нормального закону розподілу:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= \left[\frac{x-a}{\sigma} = z; x = a + z\sigma; dx = \sigma dz\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(a+\sigma z)e^{-\frac{z^2}{2}}dz\sigma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}}dz = a,$$

тому що
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 1;$$

і за властивістю непарних функцій $\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}}dz = 0;$

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M_\xi)^2 f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= \left[\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = t; x = a + t\sqrt{2}\sigma; dx = dt\sqrt{2}\sigma; (x-a)^2 = 2t^2\sigma^2\right] =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}dt\sqrt{2}\sigma = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t2te^{-t^2}dt = \left[\begin{matrix} t = u; dt = du; \\ 2te^{-t^2}dt = dv; v = -e^{-t^2}\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left[-te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\right] = \sigma^2;$$

$$D_\xi = \sigma^2;\ \sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} = \sigma.$$

Математичне сподівання для нормального закону $M\xi = a$, дисперсія $D\xi = \sigma^2$, σ - середнє квадратичне відхилення.

Приклад 3. По автостраді, яка має вигляд смуги завширки 20 м, ведеться обстріл в напрямку, перпендикулярному автостраді. Прицілювання ведеться по середній лінії автостради. Середнє квадратичне відхилення в напрямку обстрілу дорівнює $\sigma = 8$ м. Робиться систематична помилка в напрямку обстрілу: постріли не долітають 3 м. Знайти імовірність попадання в автостраду при одному пострілі.

Розв'язання.

Виберемо початок координат в довільній точці на середній лінії автостради і направимо вісь абсцис перпендикулярно автостраді. Попадання або непопадання снаряда в автостраду визначається значенням тільки однієї координати точки падіння снаряду ξ (друга координата не має значення).

В. в. ξ розподілена за нормальним законом з параметрами $a=-3$, $\sigma=8$.

Попадання снаряду в автостраду відповідає попаданню в. в. ξ на ділянку від $\alpha=-10$ до $\beta=+10$.

Використовуючи формулу (3.2), одержимо:

$$P(-10<\xi<10)=\Phi(\frac{10+3}{8})-\Phi(\frac{-10+3}{8})=\Phi(\frac{13}{8})-\Phi(\frac{-7}{8})=$$

$$\Phi(1,625)+\Phi(0,875)=0,4477+0,30834=0,756.$$

Приклад 4. Розмір діаметра втулок ξ, що виготовляються в цеху, можна вважати нормально розподіленою в. в. з математичним сподіванням $a=m\xi=2,5\text{см}$ і дисперсією $D\xi=0,0001\text{см}^2$. В яких границях можна практично гарантувати розмір діаметра втулки, якщо імовірність практичної достовірності приймається 0,9973.

$$\sigma_\xi=0,01\ \text{см};\quad P(|\xi-a|<\varepsilon)=0,9973=2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma});\quad \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})=0,49865;\quad \frac{\varepsilon}{\sigma}=3;$$

$$\varepsilon=3\cdot0,01=0,03.$$

Можна гарантувати діаметр втулки в інтервалі (2,47 - 2,53) см.

Виникнення нормального закону розподілу як одного з фундаментальних законів (the fundamental laws) теорії ймовірності пов'язано безпосередньо з розвитком теорії похибок. Іще Тихо де Браге у 80-х рр. XVI ст. для усунення похибок проводив спостереження одного і того ж об'єкта у видозмінених умовах, і, комбінуючи ці спостереження, намагався позбавитися від випадкових похибок.

А. Лежандр у своїй роботі «Нові методи для визначення орбіт комет» в додатку «Про метод найменших квадратів» запропонував спосіб найменших квадратів: «Коли всі умови задачі виражені відповідним чином, потрібно так визначити коефіцієнти, щоб похибки були щонайменші».

Цей метод полягає в тому, щоб зводити суму квадратів похибок до мінімуму. «Рівнянь отримуємо рівно стільки, скільки є невідомих... Спосіб, який я називаю способом найменших квадратів, мабуть, зможе принести велику користь у всіх питаннях фізики і астрономії, де потрібно отримати найбільш точний результат». Багато питань теорії похибок змогли бути розв'язаними лише завдяки теорії ймовірностей.

Яким способом розподіляються похибки при вимірюваннях? Чи підлягають вони певному закону? Чи існує спосіб визначення межі числового значення похибки при даному вимірюванні? Ці питання постали перед вченими у кінці XVIII століття. Їх вирішення стало можливим лише завдяки теорії ймовірностей.

На початку XIX ст. два математики, незалежно один від одного, майже одночасно знайшли закон, за яким розподіляються випадкові похибки. Це нормальний закон розподілу.

Першим із цих математиків був великий німецький вчений К. Ф. Гаусс (1777-1855 рр.), другий – маловідомий американський математик Р. Едрейн - (1775-1843 рр.). До кінцевого результату – нормального закону розподілу кожен з математиків йшов своїм шляхом.

Робота Едрейна була опублікована в 1808 році, робота Гаусса "Теорія руху" вийшла у світ в 1809 році. Р. Едрейн розв'язував конкретну задачу, при її узагальненні й отримав розподіл в. в. (похибок).

Гаусс займався астрономією і геодезією, що привело його до багаточисельних способів обробки результатів. В астрономії і геодезії проводяться багаточисельні вимірювання в різних місцях, різними інструментами. Результати цих вимірювань допускали помилки. Тому перед Гауссом постало питання встановлення найбільш ймовірного значення шуканої величини.

Розрахунки привели Гаусса до фундаментального способу найменших квадратів, який розробляв Лежандр, і до вияснення центрального значення нормальної кривої розподілу в питаннях, що пов'язані з теорією ймовірності.

Теорія похибок, розроблена Гауссом, вимагала умов застосування нормального закону розподілу, що, у свою чергу, спричинило появу задачі про оцінку параметрів нормального закону розподілу. Гаусс обґрунтував спосіб найменших квадратів за допомогою теорії ймовірностей.

Вперше метод найменших квадратів був опублікований Гауссом в 1809 р. В одному зі своїх листів до Ольберта Гаусс пише: "Щоб найкращим чином представити декілька величин, яким не можна дати точних значень, потрібно звести до мінімуму суму квадратів похибок". Гаусс робить акцент на тому, що результати повинні бути не з окремих спостережень, а з комбінованих. При цьому, похибки, по можливості, будуть знищуватись.

Гаусс розглядає таку задачу. При однакових змінах деякої величини випадкові похибки мають диференціальну щільність розподілу ймовірностей $\varphi(\Delta)$. *Потрібно визначити* $\varphi(\Delta)$ *при умові, що найбільш імовірнісне значення величини, яку вимірюємо, дорівнює середньому арифметичному з усіх значень.*

Наведемо міркування Гаусса.

Ймовірність, яку приписуємо будь-якій похибці Δ, *одержуємо як функцію від* Δ, *яку ми будемо позначати* $\varphi(\Delta)$... *Ми можемо вважати, що її максимум буде, коли* $\Delta = 0$, *і в більшості випадків вона однакова для рівних і протилежних за знаком значень* Δ. $\varphi(\Delta)$ *повинна бути складена так, щоб від значення* $\Delta = 0$ *в обидва боки вона асимптотично наближалася до нуля. Гаусс у своїх міркуваннях приходить до висновку, що* $\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}$. *Величину h він розглядає як міру точності спостережень.*

Згодом, як наслідок, вчений вивів твердження про те, що щільність ймовірності даної сукупності спостережень досягає максимального значення за умови, що сума квадратів відхилень спостережених значень перетворюється в мінімум.

У творі “Визначення точності спостережень” (1957) розглядається оцінка h за результатами спостережень. Тут Гаусс вводить в розгляд функцію $\theta(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$ *і наводить невелику таблицю значень цієї функції. Для аргументу t, при* $\theta(t)=0{,}5$*; він вводить позначення* ρ *(тобто* $\theta(\rho)=0{,}5$*), причому* $\rho=0{,}4769363$.

Величину $\frac{\rho}{h}=r$ *він назвав імовірнісною помилкою для функції* $\theta(ht)$.

У своїй роботі “Теорія комбінацій спостережень, що мають найменші похибки” Гаусс стверджує, що вимірювання завжди матимуть похибки. Одні з цих похибок матимуть випадковий характер, інші – змінюються за певним законом, все залежить від умови задачі. Гаусс широко охоплює поняття щільності розподілу ймовірностей похибок, позначаючи їх тут $\varphi(x)$*. Додатні і від’ємні похибки однієї і тієї ж величини бувають однаково часто, тому* $\varphi(-x)=\varphi(x)$*. Менші похибки зустрічаються частіше, ніж більші, тому значення* $\varphi(x)$ *буде максимальним при x=0 і постійно зменшується зі зростанням x. Очевидно, що* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

Питання для самоперевірки

1. Назвіть основні розподіли для дискретних і неперервних випадкових величин.
2. Який розподіл називається рівномірним? Основні параметри розподілу.
3. Показниковий розподіл та його властивості.
4. Нормальний розподіл або закон Гаусса. Функції розподілу.
5. З чим пов’язане виникнення нормального закону розподілу?
6. Які математики прийшли одночасно до виведення нормального закону розподілу?
7. Запишіть інтеграл імовірностей. Яке він має застосування?
8. Сформулюйте правило “трьох сигм”.

4. ДВОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Часто потрібно розв'язувати задачі, в яких розглядаються події, що описуються не однією, а декількома, зокрема, двома випадковими величинами. Так, якщо станок-автомат штампує цілиндричні валики, то діаметр валика ξ_1 і його висота ξ_2 утворюють систему двох випадкових величин (ξ_1, ξ_2).

Двовимірною випадковою величиною (***two-dimensional random variable)*** називають систему двох випадкових величин (ξ_1, ξ_2), для яких визначена імовірність $P(\xi_1 < x, \xi_2 < y)$ одночасного виконання нерівностей $\xi_1 < x$ та $\xi_2 < y$, де x і y – довільні дійсні числа. Систему двох випадкових величин (ξ_1, ξ_2) можна показати випадковою точкою в декартовій системі координат (x, y).

Функція двох змінних $F(x,y)=P(\xi_1 < x, \xi_2 < y)$, визначена для довільних x і y, називається функцією розподілу величин (ξ_1, ξ_2).

Функція розподілу (distribution function) - це імовірність попадання випадкової точки (ξ_1, ξ_2) в "нескінченний квадрат" з вершиною в точці (x, y), що знаходиться лівіше і нижче вертикального та горизонтального обмежень.

Сформулюємо властивості функції розподілу системи двох випадкових величин.

1. Функція розподілу $F(x,y)$ є функція неспадна. Тобто при $x_2 > x_1$, $F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$, при $y_2 > y_1$, $F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$.

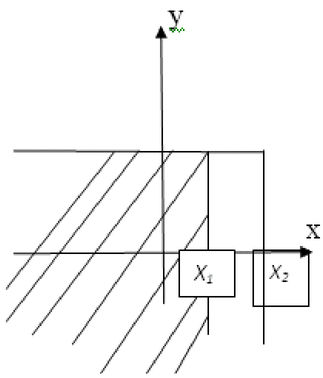


Рис. 4.1

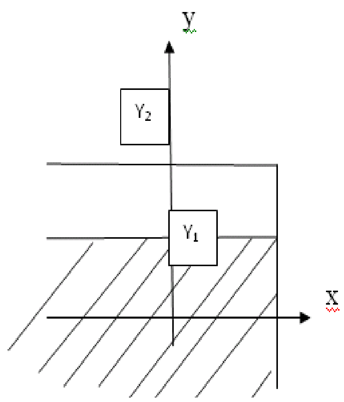


Рис. 4.2

В цій властивості $F(x,y)$ можна переконатись, використовуючи геометричну інтерпретацію функції розподілу як ймовірності попадання в "квадрат" з вершиною (x,y). Дійсно, збільшуючи x, (зміщуючи праву границю "квадрата" вправо (рис. 4.1) або збільшуючи y (зміщуючи верхню границю вгору (рис. 4.2), ми не можемо зменшити імовірність попадання в цей "квадрат". Двовимірна випадкова величина (ξ_1, ξ_2) називається *дискретною*, якщо ξ_1, ξ_2 - дискретні величини.

Нехай будь-які можливі значення ξ_1, ξ_2 утворюють кінцеві послідовності $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ і $y_1, y_2, y_3, \dots y_s$. Можливі значення величини (ξ_1, ξ_2) мають вигляд (x_i, y_j), де $i – 1, 2, 3, n$, $j – 1, 2, 3, \dots s$. Позначимо через p_{ij}

імовірність того, що $(\xi_1, \xi_2) = (x_i, y_j)$, $p_{ij} = P(\xi_1 = x_i), (\xi_2 = y_j)$, функція розподілу має вигляд $F(x,y) = \sum_i \sum_j p_{ij}$, де подвійна сума поширена на i та j, для яких $x_i < x$, $y_j < y$. Двовимірну випадкову величину (ξ_1, ξ_2), як і одновимірну, можна задавати таблицею, яка називається її законом розподілу. В першому рядку вказані значення, яких набуває величина ξ_1, а в першому стовпці - величина ξ_2. В інших клітинках таблиці вказано відповідні ймовірності, причому їх сума завжди дорівнює одиниці.

Розглянемо, наприклад, двовимірну випадкову величину, задану такою таблицею:

ξ_1 \ ξ_2	-1	0	1
0,1	p_{11}=0,05	p_{12}=0,2	p_{13}=0,3
0,2	p_{21}=0,1	p_{22}=0,2	p_{23}=0,15

Сума всіх ймовірностей:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} p_{ij} = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{21} + p_{22} + p_{23} =$$
$$= 0,05 + 0,2 + 0,3 + 0,1 + 0,2 + 0,15 = 1,0.$$

Дві дискретні випадкові величини ξ_1 і ξ_2 називаються незалежними, якщо для всіх пар i та j виконуються співвідношення:

$$p_{ij} = p[(\xi_1 = x_i), (\xi_2 = y_j)] = p(\xi_1 = x_i) \cdot p(\xi_2 = y_j).$$

Приклад 1. Два гральних кубика кидають по одному разу. Позначимо через ξ_1 число очок, які випали на першому кубику, а через ξ_2 – на другому, тоді (ξ_1, ξ_2) – двовимірна дискретна величина. Покажемо, що величини ξ_1 та ξ_2 незалежні. Оскільки кожна із величин ξ_1, ξ_2 незалежно одна від одної може приймати 6 різних значень, то число різних значень двовимірної випадкової величини (ξ_1, ξ_2) рівне 36.

Всі ці значення рівноможливі, тому $P[(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)]' = 1/36$.

З іншого боку, $P(\xi_1 = x_i) = 1/6$ і $P(\xi_2 = y_j) = 1/6$.

Таким чином $P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = P(\xi_1 = x_i) \cdot P(\xi_2 = y_j) = 1/36$.

Всюди на $-\infty$ функція розподілу дорівнює нулю:

$$F(x; -\infty) = F(-\infty; y) = F(-\infty; -\infty) = 0.$$

В цій властивості ми переконуємось, спостерігаючи, що при необмеженому посуванні вліво правої границі квадрата ($x \to -\infty$) чи вниз його верхньої границі ($y \to -\infty$), або рухаючи одочасно обома границями, імовірність попадання у відповідний квадрат прямуватиме до нуля.

Коли один з аргументів дорівнює $+\infty$, функція розподілу системи перетворюється в функцію розподілу випадкової величини, яка відповідає другому аргументу:

$$F(x; +\infty) = F_1(x),\ F(+\infty; y) = F_2(x),$$

де $F_1(x)$, $F_2(x)$ - відповідно, функції розподілу випадкових величин ξ_1 і ξ_2.

Якщо обидва аргументи дорівнюють $+\infty$, функція розподілу системи дорівнює одиниці: $F(+\infty;+\infty)=1$.

Дійсно, при $x \to +\infty$, $y \to +\infty$ "квадрат" з вершиною (x, y) переходить на всю площину xOy, попадання в яку є вірогідна подія.

Основне питання для системи двох випадкових величин є питання про ймовірність попадання випадкової точки (ξ_1, ξ_2) в межі заданої області D на площині xOy.

Імовірність попадання випадкової точки в задану область виражається найбільш просто в тому випадку, коли ця область являє собою прямокутник зі сторонами, паралельними осям координат. Виразимо через функцію розподілу ймовірність попадання випадкової точки (ξ_1, ξ_2) в прямокутник R, обмежений абсцисами α і β та ординатами γ і δ (рис. 4. 3).

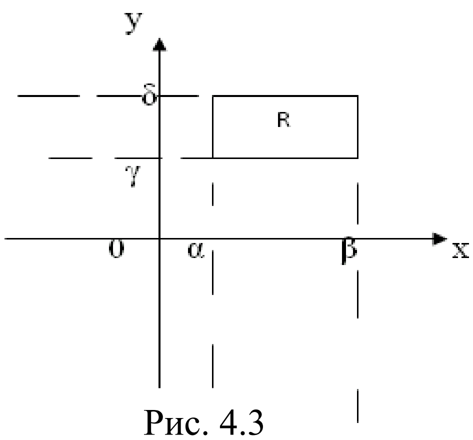


Рис. 4.3

$$P((\xi_1,\xi_2)\in R)=F(\beta,\delta)-F(\alpha,\delta)-F(\beta,\gamma)+F(\alpha,\gamma). \quad (4.1)$$

Далі визначимо формулу для ймовірності попадання випадкової точки в область довільної форми.

Двовимірна величина (ξ_1, ξ_1) називається *неперервною*, якщо існує така неперервна невід'ємна функція $f(x, y)$ двох змінних, що ймовірність попадання випадкової точки $M(\xi_1, \xi_1)$ в деяку область σ площини xOy дорівнює подвійному інтегралу від функції $f(x, y)$ по області σ:

$$P(M(\xi_1,\xi_2)\in\sigma)=\iint_{\sigma} f(x,y)dxdy\,.$$

Функція $f(x, y)$ називається ***щільністю розподілу*** імовірності системи двох випадкових величин ξ_1, ξ_2. Тоді функцію розподілу системи випадкових величин можна записати так:

$$F(x,y)=P[(\xi_1<x);(\xi_2<y)]=\iint_{\sigma} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{x} dx\int_{-\infty}^{y} dy f(x,y)dy.$$

Графічно $f(x, y)$ - поверхня розподілу. Неперервні випадкові величини ξ_1, ξ_2 називаються незалежними, якщо $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, де $f_1(x)$ і $f_2(y)$ – відповідно, щільності розподілу імовірності випадкових величин ξ_1 і ξ_2. В цьому випадку:

$$F(x,y)=P(\xi_1<x);(\xi_2<y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f_1(\tilde{o})f_2(y)dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{x}f_1(x)dx\int_{-\infty}^{y}f_2(y)dy=F_1(x)\cdot F_2(y).$$

де $F_1(x)$ і $F_2(y)$ - відповідно, функції розподілу величин ξ_1, ξ_1 .

Приклад 2. Двовимірна випадкова величина *(ξ_1, ξ_1)* має щільність розподілу $f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$.

Знайти:

1) Імовірність попадання випадкової точки $M(\xi_1,\ \xi_2)$ в квадрат: $\begin{cases}0\le x\le 1.\\ 0\le y\le 1'\end{cases}$

2) Функцію розподілу *F(x,y)*;

3) Щільності і функції розподілу кожної з величин $\xi_1,\ \xi_2$ окремо.

Розв'язання.

1) Імовірність Р попадання випадкової точки *M(ξ_1, ξ_2)* в квадрат, зображений на рисунку (рис. 4.4), дорівнює $\iint\limits_{\infty}f(x,y)d\sigma$.

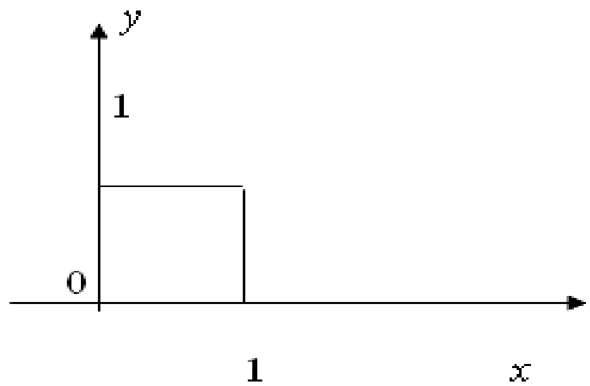


Рис. 4.4

$$P=\iint\limits_{\sigma}f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}\cdot\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}(arctgy|_0^1\cdot arctgx|_0^1=\frac{1}{\pi^2}(arctg1-arctg0)(arctg1-arctg0)^2=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{16}.$$

Можна переконатися, що виконується рівність.

$$P=\iint\limits_{-\infty}f(x,y)d\sigma=1.$$

Для неперервних випадкових величин важливими характеристиками є дві функції розподілу: $F(x,y)$ - функція розподілу, $f(x,y)$ - щільність розподілу.

2) $F(x,y)=P(\xi_1<x,\ \xi_2<y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}\frac{dy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\cdot\int_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{\pi^2}(arctgx+\frac{\pi}{2})\cdot(arctgy+\frac{\pi}{2})=F_1(x)\cdot F_2(y).$$

3) $f(x,y)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\cdot\frac{1}{\pi(1+y^2)}=f_1(x)f_2(y)$.

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}f_1(x)dx\cdot\int_{-\infty}^{y}f_2(x)dy=F_1(x)\cdot F_2(y).$$

4.1. Щільність розподілу двовимірної випадкової величини

Введена в попередньому розділі характеристика системи - функція розподілу - існує для системи довільних випадкових величин, як перервних дискретних, так і неперервних. Основне практичне значення має система неперервних випадкових величин. Розподіл системи неперервних величин звичайно характеризують не функцією розподілу, а щільністю розподілу.

Визначимо щільність розподілу системи двох випадкових величин.

Нехай маємо систему двох неперервних випадкових величин (ξ_1, ξ_2), яка визначається випадковою точкою на площині $x0y$. Розглянемо на цій площині малий прямокутник зі сторонами $\Delta \tilde{o}$ і Δy, що прилягає до точки з координатами (x,y). Ймовірність попадання в цей прямокутник дорівнює:

$P((\xi_1, \xi_2) \in R_\Delta) = F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y).$

Розділимо імовірність попадання в прямокутник на площу цього прямокутника і перейдемо до границі при $\Delta \tilde{o} \to 0$ і $\Delta y \to 0$.

Припустимо, що F має похідні за x і y першого та другого порядку.

$$\lim_{\Delta x\to 0\Delta y\to 0}\frac{P(\xi_1,\xi_2)\in R\Delta}{\Delta x\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0\Delta y\to 0}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)}{\Delta x\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}(\frac{F'_x(x,y+\Delta y)-F'_x(x,y)}{\Delta y})=F''_{xy}(x,y).$$

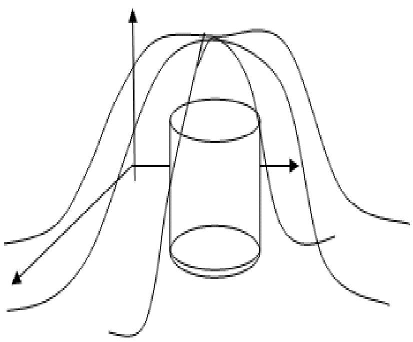


Рис. 4.5

Права частина являє собою другу мішану частинну похідну функції $F(x,y)$ за x і y. Позначимо цю похідну:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=F''_{xy}(x,y).$$

Функція $f(x,y)$ називається щільністю розподілу системи. Геометрично функцію $f(x,y)$ можна зобразити деякою поверхнею, яка називається поверхнею розподілу (рис. 4. 5).

Елементом імовірності (the element probability) для двовимірної випадкової величини називається вираз: $f(x,y)dxdy$.

Елемент імовірності є ні що інше, як імовірність попадання в елементарний прямокутник зі сторонами *dx, dy,* що прилягає до точки *(x,y).* Ця ймовірність дорівнює об'єму елементарного паралелепіпеда, що обмежений зверху поверхнею *f(x, y)* і опирається на елементарний прямокутник *dxdy.*

Ймовірність попадання випадкової точки в довільну область *D* може бути отримана додаванням (інтегруванням) елементів імовірності по всій площині *D*: $P(\xi_1, \xi_2) \in D = \iint_D f(x, y)dxdy$ (рис. 4. 5).

Геометрично імовірність попадання в область *D* зображується об'ємом циліндричного тіла *C*, обмеженого зверху поверхнею розподілу, яка спирається на область *D*. Із загальної формули випливає формула для імовірності попадання в прямокутник *R,* обмежений абсцисами α і β і ординатами γ і δ.

$$P((\xi_1, \xi_2) \in R) = \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta f(x, y)dxdy .$$

Скористаємось формулою для того, щоб виразити функцію розподілу системи *F(x,y)* через щільність розподілу $f(x, y)$.

Функція розподілу *F(x,y)* є імовірність попадання в нескінченний квадрат; останній можна розглядати як прямокутник, обмежений абсцисами $-\infty$ і x та ординатами $-\infty$ і у. Тоді маємо:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y)dxdy .$$

Легко переконатись в таких властивостях щільності розподілу системи.

1. Щільність розподілу системи є функція невід'ємна $f(x, y) \geq 0$. Це видно з того, що щільність розподілу є границя відношення двох невід'ємних величин: імовірності попадання в прямокутник і площі прямокутника, яка є також додатною.

2. Подвійний інтеграл (*the double integral*) в нескінченних границях від щільності розподілу системи дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1 .$$

Це видно з того, що цей інтеграл є ні що інше, як імовірність попадання в усю площину *x0y*, тобто ймовірність вірогідної події.

Геометрично ця властивість означає, що повний об'єм тіла, обмеженого поверхнею розподілу і площиною *x0y,* дорівнює одиниці.

4.2. Числові характеристики системи двох випадкових величин. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції

Закони розподілу системи випадкових величин є її вичерпними імовірнісними характеристиками. Однак дуже часто такі характеристики не можуть бути застосовані, оскільки обмеженість експериментального матеріалу не дає можливості побудувати закон розподілу системи.

При дослідженнях, пов'язаних із системами випадкових величин, велике застосування знайшли числові характеристики. Вони в певній мірі можуть дати уявлення про характер закону розподілу. В основу отримання числових характеристик системи покладено поняття моментів. Так, як і для однієї випадкової величини, визначають початкові та центральні моменти для двох випадкових величин.

Початковим моментом ν_{ks} порядку $k+s$ системи (ξ_1, ξ_2) називається математичне сподівання добутку k-го степеня ξ_1 і на s-го степеня ξ_2

$$\gamma_{ks} = M[\xi_1^k, \xi_2^s].$$

Формули для обчислення початкових моментів γ_{ks} записуються так: для системи дискретних випадкових величин

$$\gamma_{ks} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^k y_j^s P_{ij},$$

де $P_{ij} = P(\xi_1,=x_i, \xi_2=y_j)$ - імовірність того, що система (ξ_1, ξ_2) приймає значення (x_i,y_j), а сума розподіляється по всіх можливих значеннях випадкових величин (ξ_1, ξ_2).

Для системи неперервних випадкових величин:

$$\gamma_{ks} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy,$$

де $f(x,y)$ – щільність розподілу системи.

На практиці найбільш вживаними є початкові моменти першого порядку:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{10} = M(\xi^1{}_1, \xi_2{}^0) = M\xi_1 \\ \gamma_{01} = M(\xi^1{}_1, \xi_2{}^0) = M\xi_2 \end{aligned}\right\},$$

які є математичними сподіваннями випадкових величин ξ_1 і ξ_2, що входять в систему. Ці математичні сподівання визначають координати точки, яка називається центром розсіювання системи на площині.

Тепер перейдемо до розгляду центральних моментів.

Центральним моментом μ_{ks} порядку $(k+s)$ системи (ξ_1, ξ_2) називається математичне сподівання добутку k-го і s–го степенів відповідних центрованих величин:

$$\mu_{ks} = M[(\xi_1 - M_{\xi_1})^k, (\xi_2 - M_{\xi_2})^s].$$

Формули для обчислення моментів μ_{ks} записуються таким чином:

1) для системи дискретних випадкових величин

$$\mu_{ks} = \sum_i \sum_j (x_i - M_{\xi_1})^k (y - M_{\xi_2})^s P_{ij},$$

2) для системи неперервних випадкових величин:

$$\mu_{ks} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - M_{\xi_1})^k (y - M_{\xi_2})^s f(x,y) dxdy .$$

На практиці найчастіше використовуються центральні моменти другого порядку. Два з них відомі як дисперсії величин ξ_1 і ξ_2.

$$D_{\xi_1} = \mu_{20} = M[(\xi_1 - M_{\xi_1})^k (\xi_2 - M_{\xi_2})^0] = M[(\xi_1 - M_{\xi_1})^2],$$

$$D_{\xi_2} = \mu_{02} = M[(\xi_1 - M_{\xi_1})^0 (\xi_2 - M_{\xi_2})^2] = M[(\xi_1 - M_{\xi_1})^2],$$

які характеризують розсіювання випадкової точки в напрямку осей *0x*, *0y*.

Особливу роль при дослідженні системи двох випадкових величин відіграє другий *мішаний центральний момент* μ_{11}, який називається ***кореляційним моментом* (*moment correlation*)** або ***моментом зв'язку* (*moment connection*)**. Він зазвичай позначається k_{ξ_1,ξ_2}.

$$k_{\xi_1,\xi_2} = \mu_{11} = M[(\xi_1 - M_{\xi_1})(\xi_2 - M_{\xi_2})].$$

Момент зв'язку k_{ξ_1,ξ_2} визначений як математичне сподівання добутку відхилень двох випадкових величин від їх математичних сподівань. Крім розсіювання величин ξ_1, ξ_2 може характеризувати взаємний вплив цих випадкових величин. Для оцінювання ступеня цього впливу зазвичай використовують не сам момент зв'язку, а безрозмірне відношення $r_{\xi_1,\xi_2} = k_{\xi_1,\xi_2} / \sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}$ яке називають ***коефіцієнтом кореляції випадкових величин*** ξ_1 і ξ_2.

Кореляційний момент і коефіцієнт кореляції мають таку властивість.

Теорема. Якщо випадкові величини ξ_1, ξ_2 незалежні, то кореляційний момент і коефіцієнт кореляції рівні нулю.

Доведення.

Доведення проведемо для неперервних випадкових величин. Нехай ξ_1 і ξ_2 - незалежні випадкові величини зі щільністю розподілу $f(x,y)$. Тоді $f(x,y)= f_1(x)f_2(y)$, *де* $f_1(x)$ *і* $f_2(y)$ - щільності розподілу, відповідно, величин ξ_1 і ξ_2.

Отже,

$$k_{\xi_1\xi_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - M_{\xi_1})(y - M_{\xi_2}) f(x,y) dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_{\xi_1}) f_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - M_{\xi_2}) f_2(y) dy.$$

Тобто подвійний інтеграл перетворюється в добуток двох інтегралів, кожний з яких рівний нулю, оскільки вони є математичними сподіваннями центрованих випадкових величин. Отже, для незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2 $k_{\xi_1\xi_2} = 0$. Із рівності нулю кореляційного моменту випливає рівність нулю коефіцієнта кореляції. Аналогічно доводиться ця властивість і для дискретних випадкових величин.

Рівність нулю коефіцієнта кореляції є тільки необхідною, але не достатньою умовою для незалежності випадкових величин. Дві випадкові величини ξ_1 і ξ_2 називаються ***некорельованими,*** якщо їх коефіцієнт кореляції дорівнює нулю; ξ_1 і ξ_2 називаються ***корельованими***, якщо їх коефіцієнт кореляції відмінний від нуля. Таким чином, якщо випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні, то вони і некорельовані, але із некорельованості випадкових величин не можна зробити висновок про їх незалежність. Крім кореляційного моменту і коефіцієнта кореляції, взаємний зв'язок двох випадкових величин може бути описаний за допомогою лінії регресії. Дійсно, при кожному значенні $\xi_1 = \tilde{o}$ величина ξ_2 залишається випадковою величиною, яка допускає розсіювання своїх значень. Залежність ξ_2 від ξ_1 визначається в зміні значень ξ_2 при переході від одного значення *x* до іншого. Цю залежність описує крива регресії
$y = m_y(x)$.

Аналогічно, залежність ξ_1 від ξ_2, яка визначається в зміні значень ξ_1 при переході від одного значення у до іншого, описується кривою регресії $x = m_x(y)$.

4.3. Нормальний закон розподілу на площині

З усіх законів розподілу системи двох випадкових величин найбільше поширення на практиці має нормальний розподіл.

Розглянемо спочатку нормальний розподіл для системи двох незалежних випадкових величин.

Нехай ξ_1 і ξ_2 - нормально розподілені і незалежні випадкові величини, а відповідні їм щільності розподілення мають вигляд:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_{\xi_1}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m_{\xi_1})^2}{2\sigma^2_{\xi_1}}}; \qquad f_2(x) = \frac{1}{\sigma_{\xi_2}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-m_{\xi 2})^2}{2\sigma^2_{\xi_2}}}.$$

Отже, щільність розподілу системи (ξ_1, ξ_2), на підставі теореми добутку щільностей розподілу для випадку незалежних величин отримаємо у вигляді:

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(x) = \frac{1}{\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2} 2\pi} \cdot e^{\frac{-(h^2+l^2)}{2}}; \qquad (4.2)$$

$$\text{при} \quad h = \frac{(y - m_{\xi_2})}{\sigma_{\xi_2}}; \qquad l = \frac{(x - m_{\xi_2})}{\sigma_{\xi_1}}.$$

Якщо центр розсіювання системи збігається з початком координат, то $m_{\xi_1} = m_{\xi_2} = 0$, отже,

$$f(x,y) = \frac{1}{\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2} 2\pi} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{\sigma^2_{\xi_1}} + \frac{y^2}{\sigma^2_{\xi 2}})}. \qquad (4.3)$$

Вираз (4.3) називається канонічною формою нормального розподілу на площині.

Для дослідження виду поверхні розподілу необхідно застосувати метод перерізів. Перетинаємо поверхню розподілу площинами, паралельними координатній площині *x0y*. Проектуючи переріз на цю координатну площину, ми отримаємо сімейство подібних і однаково розміщених еліпсів зі спільним центром в початку координат. Для того, щоб переконатися в цьому, запишемо рівняння лінії перетину поверхні розподілу площиною $z = z_0 = const$.

Очевидно, що сталому значенню z_0 функції (4.2) відповідає стале значення степеня, тобто: $x^2/\sigma_{\xi 1}^2 + y^2/\sigma_{\xi 2}^2 = k^2$ ($k = const$).

Це рівняння є рівнянням проекції на координатну площину *x0y* лінії перерізу поверхні розподілу площиною $z = z_0$. Перетворивши рівняння до вигляду $\dfrac{x^2}{(\sigma_{\xi_1} k)^2} + \dfrac{y^2}{(\sigma_{\xi_2} k)^2} = 1$ побачимо, що воно є рівнянням еліпса, головні півосі якого пропорційні σ_x і σ_y і збігаються, відповідно, з осями $0x$, $0y$, а центр знаходиться в початку координат. Оскільки k може змінюватися від нуля до нескінченності, то ми маємо сімейство подібних і однаково розміщених еліпсів. Кожний еліпс із цього сімейства є геометричним місцем точок, де щільність розподілу $f(x,y)$ дорівнює постійній величині. Тому вони називаються *еліпсами однакової щільності* або *еліпсами розсіювання*. Спільні осі симетрії всіх еліпсів розсіювання називаються *головними осями розсіювання*. При $\sigma_{\xi_1} = \sigma_{\xi_2}$ еліпси перетворюються в кола і розподіли називають круговими.

Перетинаючи поверхню розподілу площинами, паралельними координатній площині *y0z*, ми будемо отримувати криві, подібні кривим нормального розподілу. Таким чином, поверхня розподілу має вигляд горба, вершина якого знаходиться на осі *0z* (рис. 4.6).

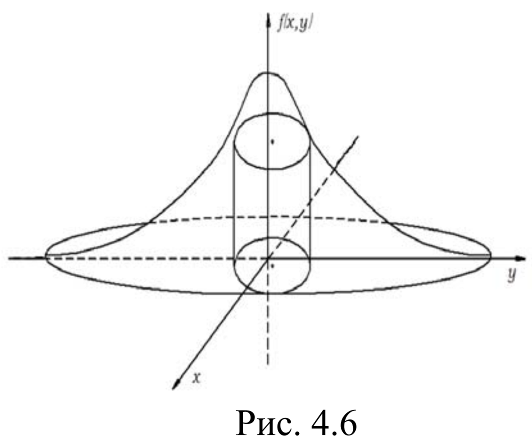


Рис. 4.6

Поверхня розподілу (рис. 4. 5) відрізняється від поверхні розподілу (рис. 4. 6) тільки тим, що центр еліпсів розсіювання має координати (m_{ξ_1}, m_{ξ_2}), а головні осі розсіювання паралельні, відповідно, осям координат, тобто поверхня розподілу (рис. 4.5) отримується паралельним перенесенням поверхні розподілу (рис. 4.6).

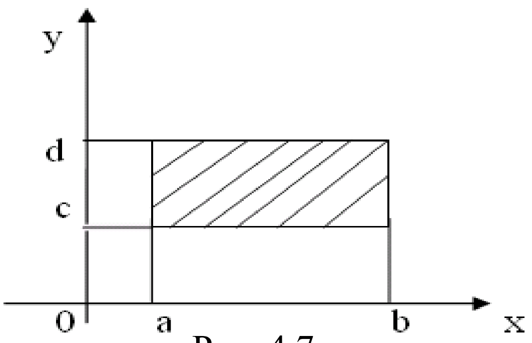


Рис. 4.7

Обчислимо для розподілу (4.2) імовірність попадання в прямокутник зі сторонами, паралельними осям координат. Прямокутник обмежений абсцисами a і b і ординатами c і d (рис. 4.7).

Застосовуючи загальну формулу для розрахунку імовірності попадання випадкової точки в довільну область для вказаного випадку, запишемо початковий вираз для шуканої імовірності у вигляді:

$$P(a<\xi_1<b, c<\xi_2<d)=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dx=$$

$$=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy=$$

$$=\int_a^b \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m_\xi)^2}{2\sigma_x^2}}dx\cdot\int_c^d \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(y-m_\xi)^2}{2\sigma_y^2}}dy.$$

Для кожної з випадкових величин ξ_1, ξ_2 використаємо формулу для обчислення імовірностей за нормальним законом розподілу.

$$P(a<\xi_1<b, c<\xi_2<d)=[\Phi(\frac{b-m_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_1}})-\Phi(\frac{a-m_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_2}})]\cdot[\Phi(\frac{d-m_{\xi_2}}{\sigma_{\xi_2}})-\Phi(\frac{c-m_{\xi_2}}{\sigma_{\xi_2}})],$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}dx}.$$

Якщо сторони прямокутника не паралельні осям координат (головним осям розсіювання), ця формула для імовірності попадання в прямокутник не застосовуються.

Двовимірний нормальний розподіл допускає узагальнення на систему n випадкових величин ($\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_n$). А саме: якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_n$ мають нормальний розподіл і незалежні між собою, то система випадкових величин ($\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_n$) має n–вимірний нормальний розподіл зі щільністю імовірності:

$$f(x_1,x_2,\dots x_n)=\frac{1}{\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}\dots\sigma_{\xi_n}(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{1}{2}[\frac{(x_1-m_{\xi 1})}{\sigma_{\xi 1}{}^2}+\frac{(x_2-m_{\xi 2})}{\sigma_{\xi 2}{}^2}+\dots+\frac{(x_n-m_{\xi n})}{\sigma_{\xi n}{}^2}]}.$$

Розглянемо нормальний розподіл на площині для залежних величин. Щільність нормального розподілу для двовимірної випадкової величини (ξ_1, ξ_2) записується формулою:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}\sqrt{1-r_{\xi_1\xi_2}^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-r_{\xi 1\xi 2}{}^2)}\cdot[\frac{(x-m_{\xi 1})^2}{\sigma_{\xi 1}{}^2}-\frac{2r_{\xi 1\xi 2}(x-m_{\xi 1})\cdot(y-m_{\xi 2})}{\sigma_{\xi 1}\sigma_{\xi 2}}+\frac{(y-m_{\xi 2})^2}{\sigma_{\xi 2}{}^2}]};$$

де m_{ξ_1}, m_{ξ_2} - математичні сподівання випадкових величин ξ_1 і ξ_2, $\sigma_{\xi_1}, \sigma_{\xi_2}$ - середні квадратичні відхилення, $r_{\xi_1\xi_2}$ - коефіцієнт кореляції випадкових величин ξ_1 і ξ_2 .

Твердження. Якщо нормально розподілені випадкові величини некорельовані, то вони незалежні.

Раніше відмічалось, що для довільного вектора (ξ_1, ξ_2) умова $r_{\xi_1\xi_2}$ не гарантує незалежності ξ_1 і ξ_2.

Одне з найбільш відомих практичних застосувань нормального розподілу ймовірностей двох величин є використання його в теорії розсіювання артилерійського вогню. Нехай в площині цілі введені декартові координати (x,y). Багаточисельні спостереження підтверджують, що щільність імовірності попадання снаряду в точку (x,y) площини цілі з великою точністю виявляється рівною нормальній щільності $f(x,y)$ при правильно вибраних параметрах a, b, σ_1, σ_2 і r. Ця обставина лежить в основі розрахунку середнього числа снарядів, потрібних для ураження заданої цілі.

Питання для самоперевірки

1. Основне означення двовимірної випадкової величини.
2. Функція розподілу системи двох випадкових величин та її властивості.
3. Як вводиться поняття щільності для системи двох випадкових величин і які її властивості?
4. Які числові характеристики вводяться для двовимірної випадкової величини? Наведіть їх означення і властивості.
5. Що називається коефіцієнтом кореляції? Які його властивості?
6. Який вигляд мають формули щільності для нормального розподілу на площині? Яке їх застосування для обчислення ймовірностей?

5. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

Теорія ймовірностей вивчає закономірності, властиві масовим випадковим явищам. Закономірності виявляються при великій кількості випадкових явищ, що відбуваються при однакових умовах.

Це означає, що характеристики випадкових подій і випадкових величин в цих умовах стають *стійкими*: середній їх результат (наприклад, частота події, середні значення випадкової величини) перестає бути випадковим і може бути передбачений з великим ступенем визначеності. Вказана особливість є суттю “закону великих чисел”.

Розглянемо групу теорем, що присвячені граничним законам розподілу. Нехай ξ *випадкова* величина з математичним сподіванням $Ì\ \xi$ та дисперсією $D\xi$.

В подальшому при доведенні теорем будемо користуватись нерівністю Чебишова, що доведена в теоремі 1.

Теорема 1. Ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання за абсолютною величиною не менше будь-якого додатного числа *ε*, що не перевищує $\dfrac{D\xi}{\varepsilon^2}$:

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Доведення.

Нехай ξ – неперервна в. в. із щільністю розподілу *f(x)*. Тоді

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx.$$

Позначимо *AB*: $|\xi - M\xi| < \varepsilon$. Виділимо на числовій осі праворуч і ліворуч від математичного сподівання $M\xi$ відрізки, кожен довжиною *ε*. Якщо у виразі для $D\xi$ інтеграл по всій осі *0x* замінити інтегралом по області, який лежить зовні відрізка *AB*, то, оскільки під інтегралом знаходиться невід’ємна функція, величина інтеграла може тільки зменшитися, тобто:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx \geq \int_{|x - M\xi| \geq \varepsilon} (x - M\xi)^2 f(x)dx.$$

Замінюючи $|\tilde{o} - M\xi|$ під знаком інтеграла на *ε*, ми знову можемо тільки зменшити величину інтеграла.

$$D\xi \geq \int_{|x - M\xi| \geq \varepsilon} \varepsilon^2 f(x)dx = \varepsilon^2 \int_{|x - M\xi| \geq \varepsilon} f(x)dx.$$

Інтеграл в правій частині визначає ймовірність того, що випадкова величина ξ прийме значення, яке знаходяться за межами відрізка *AB:*

$$D\xi \geq \varepsilon^2 P(|\xi - M\xi| > \xi).$$

Звідки:

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Нерівність Чебишова може бути записана в іншій формі, для протилежної події. Імовірність абсолютної величини відхилення в. в. від математичного сподівання, менша ε, визначається за формулою:

$$P(|\xi - M\xi| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Зауваження. Нерівність Чебишова має для практики обмежене значення, оскільки часто дає грубу оцінку.

Нехай, наприклад, $\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{D\xi}$, тоді одержимо:

$$P(|\xi - M\xi| \geq \frac{1}{2}\sqrt{D\xi}) \leq \frac{D\xi}{\frac{1}{4}D\xi} = 4.$$

Зрозуміло, що жодна йвомірність не може бути більшою не тільки чотирьох, але навіть одиниці. Якщо, наприклад $\varepsilon = 10\sqrt{D\xi}$, то: $P(|\xi - M\xi| \geq 10\sqrt{D\xi}) \leq \frac{D\xi}{100D\xi} = 0{,}01$. Це вже непогана оцінка імовірності. Таким чином, бачимо, що нерівність Чебишова корисна лише при відносно великих ε.

Теоретичне значення нерівності Чебишова дуже велике. Нижче ми скористаємось цією нерівністю при доведенні теореми Чебишова.

Приклад. Дано випадкову величину ξ з математичним сподіванням $M\xi$ і дисперсією $(\sigma\xi)^2$. Оцінити зверху ймовірність того, що в. в. ξ відхилиться від свого математичного сподівання не менше, ніж на $3\sigma\xi$.

Розв'язання.

Вважаючи в нерівності Чебишова $\varepsilon = 3\sigma$, одержимо:

$$P(|\xi - M\xi| \geq 3\sigma\xi) \leq \frac{D\xi}{9(\sigma\xi)^2} = \frac{1}{9},$$

імовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання вийде за межі трьох середніх квадратичних відхилень, не може бути більша $\frac{1}{9} \approx 0{,}11(1)$.

Нерівність Чебишова дає тільки верхню границю імовірності даного відхилення. Вище цієї межі ймовірність не може бути.

В більшості випадків імовірність того, що величина ξ вийде за межі відрізка $M \pm 3\sigma\xi$, значно менша $\frac{1}{9}$. Наприклад, для нормального закону ця ймовірність дорівнює 0,003. На практиці найчастіше ми маємо справу з випадковими величинами, значення яких дуже рідко виходять за межі $M\xi \pm 3\sigma\xi$.

Якщо закон розподілу випадкової величини невідомий, а відомі тільки $M\xi$ і $\sigma\xi$, відрізок $(M\xi - 3\sigma\xi;\ M\xi + 3\sigma\xi)$ вважають відрізком практично можливих значень випадкової величини (так зване правило "трьох сігм").

5.1. Закон великих чисел Чебишова

Теорема 2. Нехай $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\xi_n$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин, що мають обмежені в сукупності дисперсії, тобто $D_{\xi_i} \le c$ для будь-якого *i*. Тоді яке б не було $\varepsilon > 0$ справедливе співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} P[|\frac{\xi_1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{M(\xi_1) + M(\xi_2) + \ldots + M(\xi_n)}{n}| < \varepsilon] = 1.$$

Зміст закону великих чисел Чебишова полягає в нижчевикладеному. Якщо окрема випадкова величина приймає значення, що дуже відрізняється від математичного сподівання, середнє арифметичне великого числа випадкових величин з імовірністю, близькою до одиниці, приймає значення, що мало відрізняється від середнього арифметичного їх математичних сподівань.

Доведення.

Нехай $\xi = \dfrac{\xi_1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$, тобто середнє арифметичне *n* випадкових величин. Випадкова величина ξ_n має математичне сподівання:

$$M(\xi) = M(\frac{\xi_1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}) = \frac{1}{n} M(\xi_1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n) = \frac{M(\xi_1) + M(\xi_2) + \ldots + M(\xi_n)}{n}$$

і дисперсію

$$D(\xi) = D(\frac{\xi_1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}) = \frac{1}{n^2}[D(\xi_1) + D(\xi_2) + \ldots + D(\xi_n)].$$

Використано властивості математичного сподівання і дисперсії. Застосовуючи до випадкової величини нерівність Чебишова, знайдемо, що

$$P[|\xi - M(\xi)| < \varepsilon] \ge 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}\ ,\ \text{тому}$$

$$P[|\frac{\xi_1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} + \frac{M(\xi_1) + M(\xi_2) + \ldots + M(\xi_n)}{n}| < \varepsilon] \ge$$

$$\ge 1 - \frac{D(\xi_1) + D(\xi_2) + \ldots + D(\xi_n)}{n^2\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{c}{n^2\varepsilon^2}.$$

Оскільки $D(\xi_i) \le c$ при будь-якому *i*, отже,

$$D(\xi_1) + D(\xi_2) + \ldots + D(\xi_n) \le nc.$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, маємо

$$\lim_{n\to\infty} P[|\frac{\xi_1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{M(\xi_1) + M(\xi_2) + \ldots + M(\xi_n)}{n}| < \varepsilon\,|] = 1.$$

Окремий випадок закону великих чисел Чебишова

Теорема 1. Нехай $\xi_1,\ \xi_2,\ ...\ \xi_n$ - послідовність попарно незалежних випадкових величин, що мають обмежені в сукупності дисперсії ($D\xi_i \le c$) і однакові математичні сподівання $M\xi_i = a$. Тоді, яке б не було $\varepsilon > 0$, справедливе співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} P[| \frac{\xi_1 + \xi_1 + ... + \xi_n}{n} - a | < \varepsilon |] = 1,$$

оскільки:

$$\frac{M(\xi_1) + M(\xi_2) + ... + M(\xi_n)}{n} = a.$$

Зауваження. Кажуть, що випадкова величина ξ_n збігається за ймовірністю до числа *A*, якщо при як завгодно малому $\varepsilon > 0$ імовірность нерівності $|\xi_n - A| < \varepsilon$ із збільшенням *n* необмежено наближається до одиниці. Збіжність за імовірністю не означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = A$. Дійсно, в останньому випадку нерівність $|\xi_n - A| < \varepsilon$ виконується для всіх достатньо великих значень *n.* У разі збіжності за ймовірністю ця нерівність для окремих як завгодно великих значень *n* може не виконуватися. Проте невиконання нерівності $|\xi_n - A| < \varepsilon$ для великих значень *n* подія дуже рідкісна (малоімовірна).

Буручи це до уваги, окремий випадок закону великих чисел Чебишова можна сформулювати так.

Окремий випадок закону великих чисел Чебишова

Середнє арифметичне $\dfrac{\xi_1 + \xi_1 + ... + \xi_n}{n}$ попарно незалежних випадкових величин $\xi_1,\ \xi_2,\ ...\ \xi_n$, що мають обмежені в сукупності дисперсії і однакові математичні сподівання $M(\xi_i) = a$, збігається за імовірністю до *a*.

Зміст окремого випадку закону великих чисел Чебишова. Нехай потрібно знайти дійсне значення *a* деякої величини, наприклад, розмір деякої деталі. Для цього проводемо ряд незалежних один від одного вимірювань. Будь-яке вимірювання супроводжується певною похибкою. Тому кожен можливий результат вимірювання є випадкова величина ξ_i (індекс *i* - номер вимірювання).

Припустимо, що в кожному вимірюванні немає систематичної похибки, тобто відхилення від істинного значення *a* вимірюваної величини в той чи інший бік рівноймовірні. В цьому випадку математичні сподівання всіх випадкових величин ξ_i однакові і дорівнюють вимірюваній величині *a*, тобто $M(\xi_i) = a$.

Припустимо, що вимірювання проводяться з деякою гарантованою точністю. Це означає, що для всіх вимірювань $D\xi_з \le c$.

Таким чином, ми знаходимося в умовах закону великих чисел Чебишова, а тому, якщо число вимірювань достатньо велике, то з практичною достовірністю можна стверджувати, що яке б не було $\varepsilon > 0$, середнє арифметичне результатів вимірювань відрізняється від дійсного значення a менше, ніж на $\varepsilon > 0$.

Теорія ймовірностей почала перетворюватися в строгу науку завдяки працям П. Л. Чебишова.

Чебишов Пафнутій Львович (1821-1894). Двадцятирічним хлопцем Чебишов закінчив університет, а через два роки опублікував свою першу наукову роботу. В 25 років в Московському університеті захистив дисертацію, що була присвячена теорії ймовірностей. У двадцять вісім років він отримав у Петербурзькому університеті ступінь доктора. Дисертацією була його книга "Теорія порівнянь", якою згодом більш ніж півстоліття науковці та студенти користувалися як одним із глибоких і серйозних джерел з теорії чисел.

5. 2. Закон великих чисел Бернуллі

Нехай проводиться послідовність n незалежних випробувань, в результаті кожного з яких може з'явитися або не з'явитися подія A, причому ймовірність появи цієї події одна і та ж при кожному випробуванні і рівна p. Якщо подія A фактично відбулося m разів в n випробуваннях, то відношення $\frac{m}{n}$ називають частотою появи події A. Частота є випадкова величина, причому ймовірність того, що частота приймає значення $\frac{m}{n}$, виражається за формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Закон великих чисел *у формі Бернуллі полягає в нижчевикладеному*: з імовірністю, як завгодно близькою до одиниці, можна стверджувати, що при достатньо великій кількості випробувань частота появи події A як завгодно мало відрізняється від її ймовірності в окремому досліді, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P[|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon] = 1,$$

де ε - будь-яке додатне число. Іншими словами, при необмеженому збільшенні числа n випробувань частота $\frac{m}{n}$ події A збігається за ймовірністю до $p(A)$ - ймовірності події A в окремому досліді.

Доведення.

Розглянемо випадкову величину $\xi = \frac{m}{n}$. Оскільки $M(m) = np$ і $D(m) = npq$, то

$$M(\xi) = M(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n} M(m) = \frac{np}{n} = p.$$

$$D(\xi) = D(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n^2} D(m) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}.$$

Застосуємо до випадкової величини ξ нерівність Чебишова.

$$1 \geq P(|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\frac{m}{n})}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, очевидно маємо

$$\lim_{n\to\infty} P[|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon] = 1.$$

Ми говоримо, що при великій кількості випробувань частота $p^*(A) = \frac{m}{n}$ події A має властивість стійкості. Ця обставина знаходить своє пояснення в законі великих чисел Бернуллі.

Теорема Бернуллі

При необмеженому збільшенні кількості незалежних випробувань (при однакових умовах) частота події *А* збігається за ймовірністю до її ймовірності p в окремому досліді.

Якщо позначити частоту події A в n дослідах через $p*$, теорему Бернуллі можна записати у вигляді

$$\lim_{n\to\infty} P(|p^* - p| < \varepsilon) = 1.$$

Доведення.

Позначимо через x_1 випадкову величину — кількість появ події *А* в першому досліді, через x_2 — кількість появ події *А* в другому випробуванні і так далі.

Кожна з величин $x_i (i = 1, 2...n)$ є дискретною випадковою величиною з двома можливими значеннями: 0 і 1. Ряд розподілу величини має вигляд:

x_i	0	1
p_i	q	p

де $q = 1 - p$ є ймовірність непояви події *А* в *i*-ому випробуванні.

Математичне сподівання кожної з величин x_i рівне p, а дисперсія - pq.

Частота p^* є середнє арифметичне випадкових величин x_1, x_2, ..., x_n.

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Застосовуючи окремий випадок теореми Чебишова, одержимо твердження теореми.

Узагальненням теореми Бернуллі на випадок, коли випробування відбуваються за неоднакових умов, є теорема Пуассона, яка формулюється так: при необмеженому збільшенні кількості незалежних випробувань в змінних умовах частота події A збігається за ймовірністю до середнього арифметичного її ймовірностей p_i при даних випробуваннях.

Доведення теореми Пуассона випливає з узагальненої теореми Чебишова, аналогічно як доведення теореми Бернуллі випливає з теореми Чебишова.

Якоб Бернуллі розв'язав деякі задачі комбінаторики і, у зв'язку з вивченням суми виду 1m + 2m + ...+ nm, відкрив числа, які згодом було названо бернуллієвими. У цій праці він довів так звану теорему Бернуллі - важливий окремий випадок закону великих чисел, що має важливе значення в теорії ймовірностей та її застосуваннях у статистиці. Завдяки цьому теорія ймовірностей, яка раніше стосувалася лише азартних ігор, набула важливого значення в практичній діяльності людей. У механіці Якобу Бернуллі належать праці про визначення центра кочення тіл та опору тіл різної форми, що рухаються в рідині.

5. 3. Центральна гранична теорема

Розглянуті попередні теореми є різними формами закону великих чисел.

Закон великих чисел встановлює факт збіжності за ймовірністю деяких випадкових величин до сталих їх характеристик.

При цьому ні в одній з форм закону великих чисел не маємо справи із законами розподілу випадкових величин.

Часто доводиться мати справу з такими випадковими величинами, які є сумами великої кількості незалежних випадкових величин. За деяких умов виявляється, що ця сума має розподіл, близький до нормального, хоча кожен з доданків може не підпорядковуватися нормальному закону розподілу ймовірностей.

Центральна гранична теорема теорії ймовірності (теорема Ляпунова) встановлює умови, за яких вказаний граничний закон є нормальним (О. М. Ляпунов (1857-1918) - видатний російський математик).

Теорема. Нехай ξ_1, ξ_2, ... ξ_n — послідовність попарно незалежних випадкових величин з математичними сподіваннями $M(\xi_i) = a$, дисперсіями $D(\xi_i) = \sigma_{\xi_i}{}^2$. Ці величини мають такі дві властивості:

1. Існує таке L, що для будь-якого i має місце нерівність $|\xi_i - M(\xi_i)| < L$, тобто всі значення випадкових величин, як то кажуть, рівномірно обмежені щодо їх математичних сподівань.

2. Сума $\sum_{i=1}^{n} \sigma i^2$ необмежено зростає при $n \to \infty$.

Тоді при досить великому n сума $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ має розподіл, близький до нормального (без доведення).

Нехай a і σ^2 — математичне сподівання і дисперсія випадкової величини

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n .$$

Тоді

$$a = M(\xi) = M(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i ;$$

$$\sigma^2 = D(\xi) = D(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{\xi_i}^{\ 2} ;$$

$$D_{\xi_1} + D_{\xi_2} + ... + D_{\xi_n} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{\xi_i}^{\ 2} .$$

З теореми Ляпунова випадкова величина ξ для великих значень n має розподіл, близький до нормального, тобто має місце формула

$$P(x_1 < \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n < x_2) \approx \Phi(\frac{x_2 - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1 - a}{\sigma}), \qquad (5.1)$$

де Φ — інтеграл імовірності.

Основний закон похибок

Якщо проводиться деяке вимірювання, то на його результат впливає велика кількість чинників, які породжують похибки вимірювань.

Похибки вимірювань можна розділити на три групи:

1) грубі похибки; 2) систематичні похибки; 3) випадкові похибки.

Грубі похибки виникають від неуважності при читанні показів приладу, неправильному записі показів, неправильному використанні приладу. Цих похибок можна уникнути дотриманням правил вимірювання.

Систематичні похибки спотворюють результат вимірювання в певну сторону. Вони походять від недосконалості приладів, від особистих якостей спостерігача і можуть бути усунені відповідними поправками.

Випадкові похибки виникають внаслідок великої кількості окремих причин, що не підлягають точному врахуванню і що діють у кожному окремому випадку різним чином. Ці похибки виникають від непомітних механічних причин, через зміни параметрів вимірювальних приладів, залежних від метеорологічних умов, і так далі. Кожна з цих причин окремо породжує при вимірюванні невелику похибку v_i.

При додаванні ці невеликі похибки утворюють сумарну похибку $V = \sum_{i=1}^{n} v_i$, якою вже не можна нехтувати. Сумарна похибка V - це випадкова величина, що є сумою великої кількості незначних незалежних одна від одної випадкових величин і згідно з наслідком з теореми Ляпунова має нормальний розподіл. Припускаючи, що вимірювання відбувається без грубих і систематичних похибок, можна вважати, що результат вимірювання є випадкова величина ξ, математичне сподівання якої рівне істинному значенню a вимірюваної величини: $M(\xi) = a$.

Оскільки сумарна похибка $v = \xi - a$ підпорядковується нормальному закону розподілу, то можливий результат вимірювання $\xi = a + v$ теж підпорядковується нормальному закону розподілу. У цьому полягає основний закон похибок.

5.4. Інтегральна і локальна теореми Лапласа (Муавра-Лапласа)

Теорема. Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких імовірність поява події A одна й та ж і рівна р (р$\neq$1, р$\neq$0). Нехай m - число появ події A в n вимірюваннях. Тоді для достатньо великих n випадкова величина m має розподіл, близький до нормального, з параметрами

$$a = M(m) = np, \qquad \sigma = \sqrt{D(m)} = \sqrt{npq}.$$

$\xi_з$	*0*	*1*
$ð_з$	q	p

Доведення.

Нехай $\xi_з$ - число появи події A в i-тому досліді.

Тоді $a_з = M(\xi_з) = p$, $\sigma_i^2 = D(\xi_з^2) = np$.

Тобто $\xi_з$ може приймати тільки два значення 0 або 1, то для будь-якого i маємо $(\xi_з - a_i) = (\xi_i - p) \le |\xi_i| + |p| \le 1 + 1 = 2$.

Величина $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma i^2 = npq$ прямує до нескінченності при $n \to \infty$.

Отже, послідовність випадкових величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n задовольняє умови теорії Ляпунова. Тому сума цих величин $m = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ для достатньо великих n має розподіл, близький до нормального, що і потрібно було довести.

Обчислимо ймовірність того, що випадкова величина m, тобто кількість появ події A в n випробуваннях, задовольняє нерівність $x_1 < m < x_2$, де x_1 і x_2 — дані числа. Оскільки $a = M(m) = np$, $\sigma = \sigma(m) = \sqrt{npq}$, то

$$P(x_1 < m < x_2) \approx \Phi\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

II частина теореми (локальна теорема Лапласа)

$P_n(m) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}$ для достатньо великих n. Функція $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2}$ – щільність нормального закону затабульована.

Лаплас П’єр Сімон (1749-1827)

Народився в бідній селянській сім'ї у Нормандії.

Французький астроном, математик, фізик, іноземний член Петербурзької АН (1802). Довів стійкість Сонячної системи (завдяки руху всіх планет в один бік, малим ексцентриситетам і малим взаємним нахилам їх орбіт, довів, що повинна існувати незмінність середніх відстаней планет від сонця, а коливання інших елементів орбіт повинні знаходитися в дуже невеликих межах). Лаплас створив космогонічну гіпотезу утворення всіх тіл Сонячної системи, що названа його іменем. В загальних рисах вона не змінилася і дотепер.

Наукова діяльність Лапласа була надзвичайно широкою й різноманітною. Йому належать численні фундаментальні праці з математики, експериментальної й математичної фізики, небесної механіки. У галузі математики Лаплас створив праці з теорії диференціальних рівнянь, зокрема, з інтегрування рівнянь із частинними похідними методом “каскадів”. Він глибоко досліджував теорію лінійних рівнянь, на якій ґрунтуються задачі теорії потенціалу, теплопровідності, електростатики та гідродинаміки. Лаплас розвинув і систематизував результати, здобуті Б. Паскалем, П. Ферма, Я. Бернуллі та іншими математиками в питаннях теорії ймовірностей, удосконалив методи доведення, довів важливу граничну теорему, яка називається теоремою Муавра-Лапласа. У 1730 висловив її лише для окремих випадків; розвинув теорію похибок і, хоч і не строго, довів (1811) спосіб найменших квадратів. У 1799 запропонував спосіб мінімального наближення функцій, який потім був спрощений Ла Валле Пуссеном Шарль Жаном. Теорія ймовірностей значною мірою сформувалася саме в працях Лапласа.

Приклад 1.

Знайти ймовірність того, що подія А з’явиться рівно 70 разів в 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи події в кожному випробуванні рівна 0,25.

Розв’язання.

За умовою n=243; k=70, p=0,25; q=0,75. Оскільки n=243 - достатньо велике число, скористаємося локальною теоремою Лапласа;

$$P_n(k = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x))\,;\; x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}\,;$$

$$x = \frac{70 - 243\cdot 0,25}{\sqrt{243\cdot 0,25\cdot 0,75}} = \frac{9,25}{6,75} = 1,37\,;$$

$$\varphi(1,37)=0,1561;$$

$$P_{243}(70)=\frac{1}{6,75}\cdot 0,1561=0,0231.$$

Знайдемо: $P(70<\xi<140)$;

$$\frac{140-60,75}{6,75}=11,08; \quad \frac{70-60,75}{6,75}=1,37.$$

$$P(70<\xi<140)\approx 0,5-0,4147\approx 0,0853.$$

$$P(55<\xi<65)\approx \Phi(\frac{65-60,75}{6,75})-\Phi(\frac{55-60,75}{6,75})\approx \Phi(0,68)+\Phi(0,95)=$$

$$=0,2517+0,3212=0,5729.$$

Приклад 2. Знайти ймовірність того, що в результаті 1000 підкидань монети число випадання герба буде знаходитися в інтервалі (475, 525).

Розв'язання.

p=0,5; n=1000. Отже, np=500, npq=250.

Вважаючи у формулі:

$$P(\alpha<\xi<\beta)\approx \Phi(\frac{\beta-np}{\sqrt{npq}})-\Phi(\frac{\alpha-np}{\sqrt{npq}});\ [P(|\xi-a|<\varepsilon)=2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})];$$

$\alpha=475,\ \beta=525,$ отримаємо

$$P(475<\xi<525)\approx \Phi(\frac{525-500}{\sqrt{250}})-\Phi(\frac{475-500}{\sqrt{250}})=$$

$$=2\Phi(\frac{25}{15,5})=2\Phi(1,5)=0,8854.$$

Приклад 3. Завод випускає 90% виробів першого сорту і 10% виробів другого сорту. Навмання вибирають 1000 виробів. Знайти ймовірність того, що число виробів першого сорту опиниться в межах від 900 до 940.

Розв'язання.

Ймовірність вибору виробів першого сорту p=0,9, число дослідів n=1000. Отже, np=900, npq=90.

Застосовуючи формулу $P(\alpha<\xi<\beta)\approx \Phi(\frac{\beta-np}{\sqrt{npq}})-\Phi(\frac{\alpha-np}{\sqrt{npq}})$, отримаємо

$$P(900<\xi<940)\approx \Phi(\frac{940-900}{\sqrt{90}})-\Phi(\frac{900-900}{\sqrt{900}})\approx \Phi(\frac{40}{3\cdot 3,01})=0,5.$$

Формула (5.1) спрощується, якщо α менше, а β більше $M_\xi=np$ на одне і те ж число ε

$$P(np-\varepsilon<\xi<np+\varepsilon)=P(|\xi-np|<\varepsilon)=2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}). \tag{5.2}$$

Частота події $p^*(A)=\frac{m}{n}$ є випадковою величиною, математичне сподівання якої $M(\frac{m}{n})=p$, а дисперсія $\frac{1}{n^2}D(m)=D(\frac{m}{n})=\frac{qp}{n}$. Тому на підставі (5.2) можемо записати:

$$P(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon)=2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}). \tag{5.3}$$

Приклад 4. Імовірність попадання в ціль при одному пострілі рівна 0,7. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб з імовірністю, не меншою 0,96; можна було стверджувати, що відхилення частоти попадання в ціль від імовірності тієї ж події буде не більше 0,01?

Розв'язання.

Використовуючи формулу (5.3) при p=0,7, q=1-p=0,3, $\varepsilon=0,01$ і $\Phi(t)$ =0.96 отримаємо:

$$P(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon)=2\Phi(0,01\sqrt{\frac{n}{0,21}})=0,96.$$

$$0,01\sqrt{\frac{n}{0,21}}=2,05;\quad n\approx 8825.$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте і доведіть нерівність Чебишова.
2. В чому полягає суть закону великих чисел Чебишова. Сформулюйте його та доведіть.
3. Закон великих чисел Бернуллі. Теорема Бернуллі.
4. Сформулюйте центральну граничні теорему Ляпунова та її висновки.
5. В чому полягає основний закон похибок?
6. Інтегральна та локальна теореми Муавра-Лапласа та їх застосування.

6. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Математична статистика – це розділ математики, в якому вивчаються методи обробки і аналізу експериментальних даних, одержаних в результаті досліджень масових випадкових явищ. Основними задачами математичної статистики є:

1. Складання статистичного ряду або статистичної сукупності на основі генеральної і вибіркової сукупностей, яке ґрунтується на обчисленні частот появи значень випадкової величини.
2. На основі записаного статистичного ряду будуються функції розподілу $f(x)$ і $F(x)$.
3. Оцінка невідомих параметрів розподілу (математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, різні початкові і центральні моменти).
4. Статистична перевірка гіпотез.

Якщо в попередніх задачах за допомогою функцій розподілу визначається закон розподілу, то тут перевіряється відповідність значень спостережуваної випадкової величини з побудованими функціями розподілу.

Першою публікацією зі статистики вважають “Книгу чисел” в Біблії, в Старому Заповіті, в якій розказано про перепис військовозобов'язаних, проведений під керівництвом Мойсея та Аарона.

Вперше в художній літературі термін “статистика” ми знаходимо у творі Шекспіра “Гамлет” (1602). Зміст цього слова у Шекспіра визначається як знать, придворні.

Існує близько 200 визначень цього терміна. У XVIII ст. статистика описувала стан держави, її мета полягала в поданні фактів в найбільш стислій формі. Статистика полягає у спостереженні явищ, які можуть бути підраховані або виражені за допомогою чисел (1895). Статистика - це чисельне подання фактів з будь-якої галузі дослідження у їх взаємозв'язку (1909). З XX ст. статистику почали розглядати перш за все як самостійну наукову дисципліну. Статистика є сукупність методів і принципів, згідно з якими проводиться збір, аналіз, порівняння, подання та інтерпретація числових даних (1925).

Термін “статистика”, в кінцевому рахунку, випливає з Нью Латинської колегії ("Державна рада") та італійського слова statista "державний" або "Політика").

В 1954 р. академік АН УРСР Б. В. Гнеденко дав таке визначення: “Статистика складається з трьох розділів:

1) збір статистичних відомостей, тобто відомостей, що характеризують окремі одиниці будь-яких масових сукупностей;

2) статистичне дослідження отриманих даних, що полягає у з'ясуванні тих закономірностей, які можуть бути встановлені на основі даних масового спостереження;

3) розробка прийомів статистичного спостереження та аналізу статистичних даних. Останній розділ, власне, і складає зміст математичної статистики".

6.1. Побудова статистичного ряду і функцій розподілу

Нехай вивчається неперервна випадкова величина ξ, значення якої одержані протягом деякого часу із незалежних одне від одного спостережень. Вся сукупність значень, одержаних в результаті таких спостережень, є генеральна сукупність. Якщо проводити n незалежних одну від одної вибірок, то сукупність їх результатів $x_1, x_2, ..., x_n$ називається випадковою вибіркою, або просто вибіркою з даної генеральної сукупності, а число n є об'ємом цієї вибірки.

Одержання обгрунтованих виводів про властивості генеральної сукупності за властивістю вибірки є задача аналізу генеральної сукупності. Розіб'ємо діапазон n значень вибірки неперервної випадкової величини ξ на інтервали однакової довжини Δx , кількість яких рівна k.

Нехай m_i, число C_i -ξ – величини, які спостерігаються в i-тому інтервалі. Розділивши m_i на загальне число значень $n,$ одержимо частоту появи значень в i-тому інтервалі:

$$P_i^* = \frac{m_i}{n}, \; при \; чому \; \sum_{i=1}^{k} P_i^* = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

$$C_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} - середнє \; значення \; інтервалу.$$

Із вказаних величин складемо таблицю, яка називається ***статистичним рядом (Statistical series)*** або ***статистичною сукупністю (statistical combination)***:

Номери інтервалів	Інтервали	m_i	$P_i^* = \frac{m_i}{n}$	C_i - середнє значення інтервалу
1	$[x_0, x_1)$	m_1	P_1^*	$\frac{x_1 + x_0}{2} = C_1$
2	$[x_0, x_2)$	m_2	P_2^*	$\frac{x_2 + x_1}{2} = C_2$
…	…	…	…	…
k	$[x_{k-1}, x_k)$	m_i	P_k^*	$\frac{x_k + x_{k-1}}{2} = C_k$

Емпіричною (або ***статистичною***) функцією розподілу випадкової величини ξ називається частота події, що полягає в тому, що величина ξ в результаті випробовування прийме значення, менше x:

$$F^*(x) = P^*(\xi < x).$$

На практиці достатньо знайти значення статистичної функції розподілу $F^*(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_k$, що є кінцями інтервалів статистичного ряду:

$$\begin{cases} F^*(x_0) = P^*(\xi < x_0) = 0; \\ F^*(x_1) = P^*(\xi < x_1) = \dfrac{m_1}{n} = P_1^*; \\ F^*(x_2) = P^*(\xi < x_2) = \dfrac{m_1 + m_2}{n} = P_1^* + P_2^*; \\ F^*(x_k) = P^*(\xi < x_k) = \dfrac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{n} = P_1^* + P_2^* + \ldots + P_k^* = 1. \end{cases}$$

Слід зазначити, що $F^*(x) = 0$ *при* $x = x_0, F^* = 1, x > x_k$.

При збільшенні числа випробувань n частота події $\xi > x$ збігається за ймовірністю до ймовірності цієї події. Це означає, що статистично функція розподілу $F^*(x)$ збігається за імовірністю до функції розподілу $F(x)$.

$$\lim_{n\to\infty} P(|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon) = 1.$$

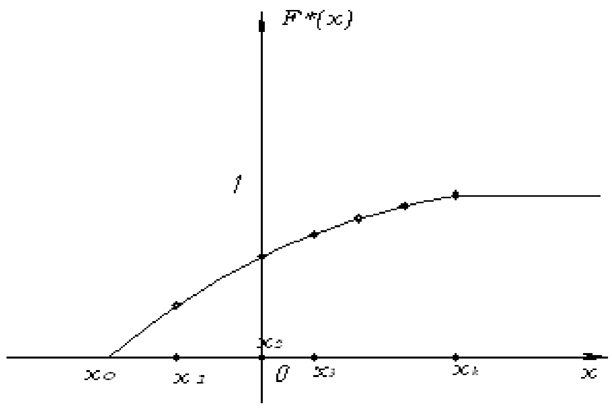


Рис. 6.1

Побудувавши точки $M_i(x_i, F^*(x_i))$ і з'єднавши їх плавною кривою, отримаємо приблизний графік емпіричної функції розподілу (рис. 6.1). Використовуючи теореми, що їх відносять до законів великих чисел, можна довести, що при великій кількості випробувань n з імовірністю, близькою до одиниці, емпірична функція розподілу $F^*(x)$ відрізняється як завгодно мало від реальної функції розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ.

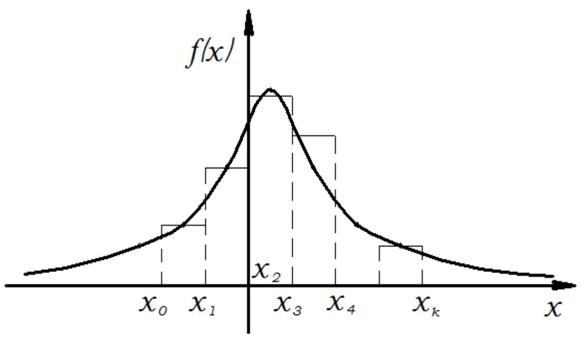


Рис. 6.2

Для побудови графіка щільності розподілу виконуємо такі кроки. На осі абсцис відкладаємо інтервали (x_0, x_1), (x_1, x_2), …, (x_{k-1}, x_k). На кожному інтервалі будуємо прямокутник, площа якого дорівнює частоті p_i^* появи величини на даному інтервалі. Висота h_i цього прямокутника дорівнює $h_i = \dfrac{p_i^*}{\Delta x}$,

де Δx - довжина кожного. Сума площ всіх побудованих прямокутників дорівнює одиниці.

Розглянемо функцію $y = f^*(x)$, яка в кожному з інтервалів (x_{i-1}, x_i) постійна і дорівнює h_i. Графік цієї функції називається гістограмою і являє собою ступінчасту лінію. Тут також можна довести, що для великих n з практичною достовірністю $f^*(x)$ як завгодно мало відрізняється від реальної щільності розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини ξ. Відповідно до теореми Бернуллі при необмеженому збільшенні числа випробувань n частота події $\xi<x$ збігається за імовірністю до імовірності цієї події.

$$\lim_{n\to\infty} P(|P^* - P| < \varepsilon) = 1 .$$

6.2. Обчислення невідомих параметрів розподілу

За допомогою гістограми наближено будується графік щільності розподілу випадкової величини ξ.

Вигляд цього графіка часто дає можливість зробити припущення про закон розподілу ймовірностей. Цей закон містить параметри, які потрібно обчислити з дослідних даних. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ - значення із випробувань неперервної випадкової величини ξ. Величину $M_\xi^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i}{n} = \bar{x}$ називають статистичним середнім (або середнім вибірковим). В другій частині рівності кожне із значень, що спостерігаються, вважають приблизно рівним середньому значенню c_i на цьому інтервалі. Статистичне середнє прямує за імовірністю до математичного сподівання випадкової величини при великій кількості випробувань.

Визначимо вибіркову статистичну дисперсію.

$$\sigma_B^{2*} = D_B^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - M_\xi^*)^2}{n} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (c_i - \bar{x})^2}{n} = \bar{\sigma}_{\hat{A}}^2 = D_B ,$$

де $\bar{\sigma}_B^2$ - вибіркове статистичне середнє квадратичне відхилення.

Виправлені або незміщені дисперсії:

$$\sigma_н^{2*} = D_н^* = \frac{n}{n-1} D_н^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - M_\xi^*)^2}{n-1} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (c_i - \bar{x})^2}{n-1} = \bar{D}_н = \bar{\sigma}_н^2 .$$

Аналогічно визначають статистичні початкові і центральні моменти довільного порядку

$$\mu^* = M^*[\xi^k] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}; \; \nu^* = M^*([\xi - M_\xi^*]^k) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - M_\xi^{\ *})^k}{n}.$$

При збільшенні кількості спостережень всі статистичні характеристики будуть збігатись за імовірностями до відповідних характеристик випадкової величини ξ і при достатньо великих n можуть бути прийняті рівними їм.

6.3. Властивості точкових оцінок

Розглянемо таку задачу. Є випадкова величина ξ, її закон розподілу містить невідомий теоретичний параметр a. Потрібно на основі дослідних даних знайти оцінку параметра a. Позначимо через $x_1, x_2,..., x_n$ значення випадкової величини ξ, які одержують в результаті проведених n незалежних дослідів.

Нехай величина $\bar{a}$, обчислена на основі дослідних даних, є оцінкою параметра a. Це означає, що $\bar{a}$ є функцією величин $x_1, x_2, ..., x_n$, крім того, значення $x_1, x_2, ..., x_n$ слід розглядати як випадкові величини, кожна з яких розподілена за тим самим закону, що ξ. Тому $\bar{a}$ є також випадковою величиною, закон розподілу якої залежить, по-перше, від закону розподілу випадкової величини ξ, по-друге, від числа дослідів n. Для того, щоб оцінка $\bar{a}$ мала практичну цінність, вона повинна мати такі властивості:

1. Незміщеність оцінки.

Розрізняють оцінки *зміщені* і *незміщені*. *Зміщеними* називаються оцінки, математичне сподівання яких не дорівнює оцінювальному параметру:

$$M[\bar{a}(x_1, x_2, ..., x_n)] \neq a .$$

Незміщеними називаються оцінки, для яких виконується умова:

$$M[\bar{a}(x_1, x_2, ..., x_n)] = a .$$

Природно, за наближений параметр брати незміщені оцінки для того, щоб не робити систематичної помилки в сторону підвищення або зниження цієї оцінки.

2. Обгрунтовані або слушні оцінки.

Оцінка $\bar{a}(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ для параметра $\bar{a}$ називається *обгрунтованою*, якщо вона збігається за імовірністю до оцінювального параметра при необмеженому зростанні числа досліджень *n,* тобто:

$$\lim_{n\to\infty} P[|\tilde{a}(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) - a| < \varepsilon] = 1, \qquad (6.1)$$

де ε – як завгодно мале додатне число. Для задоволення цієї вимоги досить, щоб дисперсія оцінки прямувала до нуля при $n\to\infty$, тобто, щоб виконувалась умова:

$$\lim_{n\to\infty} D[|\tilde{a}(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)] = 0, \qquad (6.2)$$

і щоб оцінка була незміщеною. Від (6.1) легко перейти до (6.2), якщо скористатись нерівністю Чебишова. Отже, обгрунтованість оцінки означає, що при достатньо великій кількості випробувань n з як завгодно великою вірогідністю відхилення оцінки від істинного значення параметра менше будь-якої наперед заданої величини.

Очевидно, такі вимоги повинна задовольняти кожна оцінка, придатна для практичного використання.

3. Ефективність оцінки.

Оцінки, які мають властивості незміщеності і обґрунтованості, при обмеженому числі дослідів можуть відрізнятися дисперсіями.

Очевидно, що чим менша дисперсія оцінки, тим менша ймовірність грубої помилки при визначенні наближеного значення параметра. Тому необхідно, щоб дисперсія оцінки була мінімальною, тобто щоб виконувалась умова:

$$D[|\tilde{a}(x_1, x_2, ..., x_n)] = D_{\min}.$$

Оцінка, що має таку властивість, називається ***ефективною*** (***effective)***.

З метою отримання оцінок, які приймають як приблизні значення вихідних параметрів, необхідно користуватись сформульованими властивостями оцінок.

6.4. Визначення приблизного значення вимірюваної величини і приблизного значення дисперсії в випадку прямих рівномірних вимірювань

Визначити приблизне значення вимірюваної величини ξ – це означає провести оцінку математичного сподівання величини ξ. При цьому, якщо вимірювана величина ξ постійна, то оцінка для $M\xi$ - приблизне значення справжнього значення вимірюваної величини, а якщо вимірювана величина випадкова, то оцінка для $M\xi$ є приблизне значення математично сподівання вимірюваної випадкової величини ξ.

Необхідність отримання за дослідженими даними приблизного значення дисперсії виникає в зв'язку із визначенням характеристики точності або характеристики розсіювання випадкової величини.

Нехай є випадкова величина ξ з математичним сподіванням $M\xi$ і дисперсією $D\xi$ (або параметри невідомі). Потрібно на основі дослідних даних знайти обґрунтовані і незміщені оцінки цих параметрів. Позначимо через x_1, x_2, ..., x_n значення випадкової величини ξ, що спостерігалися в результаті проведення n незалежних рівноточкових вимірювань, тобто вимірювань, проведених в однакових умовах. Вважають ці умови виконаними, якщо вимірювання проводиться одним приладом. Природно, за оцінки математичного сподівання прийняти середнє арифметичне спостережуваних значень, які ми обчислили через: $\bar{M} = M^*\xi = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$. Покажемо, що ця оцінка є обґрунтованою і незмінною. Дійсно, згідно з законом великих чисел:

$$\lim_{n\to\infty} P[|\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - M\xi| < \varepsilon] = 1.$$

Це означає, що $M^*\xi$ є обґрунтованою оцінкою. Оцінка $M\xi$ є також незміщеною або

$$M(M^*\xi) = M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} M[x_i]}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M\xi}{n} = M\xi. \qquad (6.3)$$

Це слідує з того, що значення $x_1, x_2, ..., x_n$ розглядаються як випадкові величини, кожна із яких розподілена за тим же законом, що і випадкова величина ξ. Перейдемо до оцінки дисперсії $D\xi$. Візьмемо статистичну дисперсію і перевіримо її на обґрунтованість і незміщеність. Статистична дисперсія має вигляд:

$$D^*\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M^*\xi)^2}{n}, \; \partial e M^*\xi = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}. \qquad (6.4)$$

Перетворимо вираз до вигляду:

$$D^*\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M^*\xi)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i M^*\xi + (M^*\xi)^2)}{n} =$$
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{2M^*\xi\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(M^*\xi)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (M^*\xi)^2. \qquad (6.5)$$

Перший член у правій частині останнього рівняння являє собою середнє арифметичне n спостережених значень випадкової величини ξ^2 $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = (M^*\xi)^2$; він збігається за імовірністю до $M(\xi^2)$. Другий член збігається за імовірністю до $M^2\xi$. Це означає, що вся права частина рівності збігається за імовірністю до величини $M[\xi^2] - M^2\xi = D\xi$.

Отже, статистична дисперсія $D^*\xi$ є обгрунтованою оцінкою дисперсії $D\xi$. Перевіримо, чи є оцінка $D^*\xi$ також незміщеною. Для цього в формулу (6.5) замість $M^*\xi$ підставимо вираз із формули (6.4) і проведемо вказані дії:

$$D^*\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n^2} - \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i x_j}{n^2} =$$
$$= \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i x_j. \qquad (6.6)$$

Оскільки дисперсія $D\xi$ не залежить від того, в якій точці виберемо початок координат, то виберемо початок в точці $M\xi$ і знайдемо математичне сподівання величини (6.6):

$$M[D^*\xi] = \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} M[\xi_i^2] - \frac{2}{n^2}\sum_{i<j} M[\xi_i \xi_j] = \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\xi - \frac{2}{n}\sum_{i<j} Kx_j x_i].$$

З незалежності випробувань випливає, що $Kx_i,x_j = 0$, отже, рівність приймає вигляд: $M[D_x^*] = \frac{n-1}{n} D\xi$. Звідси видно, що статистична дисперсія $D\xi^*$ не є незміщеною оцінкою для дисперсії $D\xi$, її математичне сподівання не дорівнює $D\xi$, а трохи менше. Якщо помножити величину $D\xi^*$ на $\frac{n}{n-1}$, то ми отримаємо оцінку для дисперсії $D\xi$, яка є незміщеною, тому що $M\left[\frac{n}{n-1} D^*\xi\right] = \frac{n}{n-1} M[D^*\xi] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D\xi$. Оскільки множник $\frac{n}{n-1}$ прямує до одиниці при $n \to \infty$, то оцінка $\frac{n}{n-1} D^*\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M^*\xi)^2}{n-1}$ буде також і обґрунтованою.

Таким чином, якщо в результаті проведених n незалежних вимірювань випадкової величини ξ з невідомим математичним оцінюванням $M\xi$ і дисперсією $D\xi$ отримаємо значення: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то для визначення цих параметрів слід користуватися такими приблизними оцінками:

$$M^*\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad D^*\xi = \frac{n}{n-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (M^*\xi)^2\right). \tag{6.7}$$

Зазначимо, що за оцінку для дисперсії випадкової величини ξ з відомим математичним сподіванням $M\xi$ необхідно брати статистичну дисперсію $D^*\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M\xi)^2}{n}$. В цьому випадку статистична дисперсія задовольняє умови незміщеності і обґрунтованості.

6.5. Довірчий інтервал. Довірча ймовірність

При статистичній обробці даних часто вимагається не тільки знайти для параметра a відповідне числове значення, а й оцінити його надійність і точність. Ця задача важлива при малій кількості спостережень, оскільки точкова оцінка a^* в значній мірі є випадковою і наближена заміна a на a^* може призвести до серйозних похибок.

Для визначення точності оцінки a^* в математиці користуються довірчими інтервалами, а для визначення надійності – довірчою імовірністю. Розкриємо суть цих понять. Нехай для параметра a отримана з випробування незміщена оцінка a^*. Потрібно оцінити можливу при цьому помилку. Задаємо деяку вірогідність β (наприклад β=0,9) і знайдемо таке значення ξ >0, для якого $P(|a^* - a| < \varepsilon) = \beta$. Або ще можна записати так: $P(a^* - \varepsilon < a < a^* + \varepsilon) = \beta$. Остання рівність означає, що невідоме значення параметра a з імовірністю β потрапить в інтервал $l_\beta(a^* - \varepsilon, a^* + \varepsilon)$. Тут невідоме значення параметра a є невипадковою величиною, а інтервал l_β є випадковою величиною, оскільки положення інтервалу на осі залежить від випадкової величини a^* (центр інтервалу). Тому вказана вище імовірність трактується як імовірність того, що випадковий інтервал l_β накриє точку a.

Інтервал l_β називається довірчим інтервалом, а імовірність β – довірчою імовірністю або надійністю β, що відповідає даному довірчому інтервалу l_β.

Розглянемо задачу про довірчий інтервал для математичного сподівання.

Нехай проведено n незалежних випробувань над випадковою величиною ξ з невідомим математичним очікуванням $M\xi$ і дисперсією $D\xi$. На основі дослідних даних отримаємо незміщені оцінки:

$$M^*\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad D^*\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - M^*\xi)^2}{n-1}.$$

Потрібно побудувати довірчий інтервал l_β, який відповідає довірчій імовірності β для математичного сподівання випадкової величини ξ. Оскільки $M^*\xi$ являє собою суму n незалежних однаково розподілених величин ξ_i, то, згідно з центральною граничною теоремою, її закон розподілення близький до формального. Користуючись властивостями математичного сподівання і дисперсій:

$$M[M^*\xi] = M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[x_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\xi = M\xi,$$

$$D[M^*\xi] = D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[x_i] = \frac{D_x}{n}.$$

Тепер знайдемо $\varepsilon_\beta : P(|M^*\xi - M\xi| < \varepsilon_\beta) = \beta$. Враховуючи те, що закон розподілу випадкової величини $M^*\xi$ близький до нормального, виразимо ймовірність β в лівій частині через функцію Φ:

$$P(|M^*\xi - M\xi| < \varepsilon_\beta) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_\xi}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma_\xi}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_\xi}\right) = \beta.$$

З останнього рівняння $$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_\xi}\right)=\frac{\beta}{2},\quad \varepsilon_\beta=\sigma_\xi\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right), \tag{6.8}$$

де $\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)$- функція, обернена до Φ, $\sigma_{M^*}=\sqrt{\frac{D\xi}{n}}$ виражається через невідому нам дисперсію $D\xi$, тому за її значення можна взяти оцінку $\tilde{D}$ і подати приблизно $\sigma_{M^*}=\sqrt{\frac{D^*\xi}{n}}$. Таким чином, довірчий інтервал для математичного сподівання $l_\beta(M^*-\varepsilon_\beta, M^*+\varepsilon_\beta)$, де ε_β визначається з формули (6.8).

Приклад. Проведено 20 дослідів над величиною ξ. Результати наведені в таблиці:

i	x_i	i	x_i
1	10,9	11	10,8
2	10,7	12	10,3
3	11,0	13	10,5
4	10,5	14	10,8
5	10,6	15	10,9
6	10,4	16	10,6
7	11,3	17	11,3
8	10,8	18	10,8
9	11,2	19	10,9
10	10,9	20	10,7

Потрібно знайти оцінку M^* для математичного сподівання величини ξ і побудувати довірчий інтервал, який відповідає довірчій ймовірності β=0,86.

Розв'язання. Маємо $M^*=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i=10,78$. Використовуючи формулу для оцінки дисперсії, знайдемо

$$D^*=\left(\frac{\sum_{i=1}^{20}x_i^2}{20}-10,78^2\right)\frac{20}{19}=0,064;\quad \sigma_{M^*}=\sqrt{\frac{D^*}{n}}=0,0564.$$

За формулою знайдемо значення ε_β:

$$\varepsilon_\xi=0,0564\cdot\sqrt{2}\cdot\Phi^{-1}(0,86)=0,083.$$

Границі довірчого інтервалу:

$$M^*-\varepsilon_\beta=10,78-0,083\approx 10,70;$$

$$M^*+\varepsilon_\beta=10,78+0,083\approx 10,86.$$

Довірчий інтервал: $l_\beta=(10,70;\,10,86)$.

6.6. Правила правдивості гіпотез

Постановка задачі. Нехай на основі даного статистичного матеріалу нам потрібно перевірити гіпотезу H; яка твердить, що випадкова величина має функцію розподілу $F(x)$.

Для того, щоб прийняти або спростувати гіпотезу H, будемо розглядати випадкову величину $\eta(y)$, що характеризує ступінь розходження теоретичних і статистичних тверджень. Величину η можна вибрати різними способами. Наприклад, за $\eta(y)$ можна взяти максимальне відхилення статистичної функції розподілу від теоретичної $F(x)$

$$y = \max |F^*(x) - F(x)|.$$

Закон розподілу випадкової величини $\eta(y_i)$ залежить від закону розподілу випадкової величини ξ, над якою виконувались досліди, і від числа дослідів n.

Нехай в результаті проведених n дослідів над випадковою величиною ξ величина η прийняла значення y. Запитується, чи можна пояснити прийняте значення $\eta=y$ випадковими причинами, або ж це значення занадто велике і вказує на наявність суттєвої різниці між теоретичним і статистичним розподілом, тобто на хибність гіпотези H?

Нехай гіпотеза H істинна. Знайдемо імовірність того, що випадкова величина η за рахунок випадкових причин, по'язаних з обмеженим числом дослідного матеріалу, прийме значення не менше, чим дослідне значення y, тобто знайдемо ймовірність $P(\eta \geq y)$. Якщо ця ймовірність мала, то гіпотезу H слід спростувати як малоімовірну, якщо ця імовірність велика, то експериментальні дані не протирічать гіпотезі H.

Найбільш простим методом перевірки гіпотез є так званий критерій згоди академіка А. М. Колмогорова.

Схема застосування А. М. Колмогорова:

1. За результатами n проведених вимірювань будується статистична функція розподілу $F^*(x)$;
2. На тому ж графікові будується запропонована теоретична функція розподілу $F(x)$;
3. Визначається максимальна величина модуля відмінності їх ординат

$$D = \max |F^*(x) - F(x)|.$$

Колмогоров А. М. довів, що який би вигляд не мала неперервна функція розподілу $F(x)$ при необмеженому зростанні числа незалежних спостережень n, імовірність нерівності $D\sqrt{n} \geq \lambda$ прямує до границі

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2};$$

4. Обчислюється величина $\lambda = D\sqrt{n}$;

5. За відповідною таблицею (див. нижче) знаходиться імовірність *P(λ)*, відповідна тому, що за рахунок випадкових причин максимальні розходження між $F^*(x)$ і $F(x)$ будуть не менше, ніж при практичному спостереженні.

Якщо ймовірність *P(λ)* дуже маленька, гіпотеза забраковується; при порівняно великій імовірності *P(λ)* гіпотеза вважається сумісною з результатом досліду.

Критерій Колмогорова можна застосовувати тільки у випадку коли розподіл *F(x)* відомий. Якщо ж невідомо точний вигляд функції *F(x)*, то потрібно застосовувати інші критерії.

Λ	0,828	1,224	1,358	1,627	1,959
P(λ)	0,5	0,1	0,05	0,01	0,001

Статистика виникла не пізніше XVIII століття. У правителів держав була необхідність збирати дані про свої народи та країни. Її зміст розширився на початку XIX століття і почав включати збір та аналіз даних в цілому. Нині статистичні дані широко застосовуються у сфері управління, бізнесу, природничих та соціальних наук.

Історичний розвиток методів статистичних досліджень.

1) До першого етапу, як уже було згадано, належать методи, описані в Біблії (наприклад книга Чисел, де наводиться число воїнів у різних племенах). З математичної точки зору справа зводилася до підрахунку числа попадання значень спостережуваних ознак у певні градації.

2) Надалі результати обробки статистичних даних стали подавати у вигляді таблиць і діаграм.

3) Математичні основи статистики були закладені в XVII та XVIII століттях паралельно з розвитком теорії ймовірностей. Відразу після виникнення теорії ймовірностей (Паскаль, Ферма, XVII століття) імовірнісні моделі стали використовуватися при обробці статистичних даних. Наприклад, вивчалася частота народження хлопчиків і дівчаток.

П'єр Сімон Лаплас (1774) зробив першу спробу вивести правило поєднання спостережень із принципами теорії ймовірностей. Він показував закони ймовірності помилки на кривій. Лаплас вивів формулу для середньої з трьох спостережень, також дав формулу для закону об'єкта помилки (1781).

4) Метод найменших квадратів було винайдено на рубежі XIX століття кількома авторами. У 1794 р. (за іншими даними - в 1795 р.) К. Гаусс розробив метод найменших квадратів, один з найбільш популярних нині статистичних методів, і застосував його при розрахунку орбіти астероїда Церерра - для боротьби з похибками астрономічних спостережень. З тих пір нові методи теорії ймовірностей і статистики були в постійному розвитку.

5) Сучасний етап розвитку статистичних методів можна відраховувати з 1900 р., коли англієць К. Пірсон заснував журнал «Biometrika». Перша третина XX ст. пройшла в напрямку досліджень параметричної статистики. Вивчалися методи, засновані на аналізі даних з *параметричних родин розподілів, описуваних кривими сімейства Пірсона. Найбільш поширеним був нормальний (гауссів) розподіл. Для перевірки гіпотез використовувалися критерії Пірсона, Стьюдента, Фішера, Колмогорова. Було запропоновано метод максимальної правдоподібності, дисперсний аналіз, сформульовано основні ідеї планування експерименту.*

Отже, статистика як наука була створена, на загальну думку фахівців, порівняно недавно - у першій половині XX ст. Саме тоді було розроблено основні ідеї та отримано результати. Починаючи з 70-х років XX ст. дослідження з математичної статистики присвячені узагальненню та подальшому математичному вивченню цих завдань. Потік нових математичних результатів (теорем) не слабшає, але нові практичні рекомендації з обробки статистичних даних при цьому не з'являються. Можна сказати, що математична статистика як науковий напрямок замкнулася всередині себе.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте основні поняття математичної статистики (генеральна і вибіркова сукупності), статистичний ряд (або сукупність), формули і побудови статистичних функцій розподілу.
2. Наведіть формули для статистичних параметрів, їх збіжність до теоретичних параметрів.
3. Означення і одержання формул для довірчого інтервалу і довірчої ймовірності.
4. Сформулюйте основні критерії згоди.
5. Наведіть основні пункти розвитку статистичних досліджень.

Додаток А

Таблиця значень функції Лапласа (інтеграл ймовірності)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$$

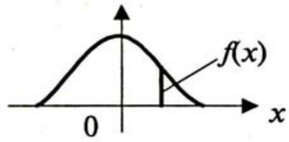
x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,49	0,1879	0,98	0,3365	1,47	0,4292
0.01	0.0040	0.50	0.1915	0.99	0.3389	1.48	0.4306
0.02	0.0080	0.51	0.1950	1.00	0.3413	1.49	0.4319
0.03	0.0120	0.52	0.1985	1.01	0.3438	1.50	0.4332
0.04	0.0160	0.53	0.2019	1.02	0.3461	1.51	0.4345
0.05	0.0199	0.54	0.2054	1.03	0.3485	1.52	04357
0.06	0.0239	0.55	0.2088	1.04	0.3508	1.53	0.4370
0.07	0.0279	0.56	0.2123	1.05	0.3531	1.54	0.4382
0.08	0.0319	0.57	0.2157	1.06	0.3554	1.55	0.4394
0.09	0.0359	0.58	0.2190	1.07	0.3577	1.56	0.4406
0.10	0.0398	0.59	0.2224	1.08	0.3599	1.57	0.4418
0.11	0.0438	0.60	0.2257	1.09	0.3621	1.58	0.4429
0.12	0.0478	0.61	0.2291	1.10	0.3643	1.59	0.4441
0.13	0.0517	0.62	0.2324	1.11	0.3665	1.60	0.4452
0.14	0.0557	0.63	0.2357	1.12	0.3686	1.61	0.4463
0.15	0.0596	0.64	0.2389	1.13	0.3708	1.62	0.4474
0.16	0.0636	0.65	0.2422	1.14	0.3729	1.63	0.4484
0.17	0.0675	0.66	0.2454	1.15	0.3749	1.64	0.4495
0.18	0.0714	0.67	0.2486	1.16	0.3770	1.65	0.4505
0.19	0.0753	0.68	0.2517	1.17	0.3790	1.66	0.4515
0.20	0.0793	0.69	0.2549	1.18	0.3810	1.67	0.4525
0.21	0.0832	0.70	0.2580	1.19	0.3830	1.68	0.4535
0.22	0.0871	0.71	0.2611	1.20	0.3949	1.69	0.4545
0.23	0.0910	0.72	0.2642	1.21	0.3869	1.70	0.4554
0.24	0.0948	0.73	0.2673	1.22	0.3888	1.71	0.4564
0.25	0.0987	0.74	0.2703	1.23	0.3907	1.72	0.4573
0.26	0.1026	0.75	0.2734	1.24	0.3925	1.73	0.4582
0.27	0.1064	0.76	0.2764	1.25	0.3944	1.74	0.4591
0.28	0.1103	0.77	0.2794	1.26	0.3962	1.75	0.4599
0.29	0.1141	0.78	0.2823	1.27	0.3980	1.76	0.4608
0.30	0.1179	0.79	0.2852	1.28	0.3997	1.77	0.4616
0.31	0.1217	0.80	0.2881	1.29	0.4015	1.78	0.4625
0.32	0.1255	0.81	0.2910	1.30	0.4032	1.79	0.4633
0.33	0.1293	0.82	0.2939	1.31	0.4049	1.80	0.4641
0.34	0.1331	0.83	0.2967	1.32	0.4066	1.81	0.4649
0.35	0.1368	0.84	0.2995	1.33	0.4082	1.82	0.4656
0.36	0.1406	0.85	0.3023	1.34	0.4099	1.83	0.4664
0.37	0.1443	0.86	0.3051	1.35	0.4115	1.84	0.4671
0.38	0.1480	0.87	0.3078	1.36	0.4131	1.85	0.4678
0.39	0.1517	0.88	0.3106	1.37	0.4147	1.86	0.4686
0.40	0.1554	0.89	0.3133	1.38	0.4162	1.87	0.4693
0.41	0.1591	0.90	0.3159	1.39	0.4177	1.88	0.4699
0.42	0.1628	0.91	0.3186	1.40	0.4192	1.89	0.4706
0.43	0.1664	0.92	0.3212	1.41	0.4207	1.90	0.4713
0.44	0.1700	0.93	0.3238	1.42	0.4222	1.91	0.4719
0.45	0.1736	0.94	0.3264	1.43	0.4236	1.92	0.4726
0.46	0.1772	0.95	0.3289	1.44	0.4251	1.93	0.4732
0.47	0.1808	0.96	0.3315	1.45	0.4265	1.94	0.4738
0.48	0.1844	0.97	0.3340	1.46	0.4279	1.95	0.4744

Продовження таблиці значень функції Лапласа
(інтеграл ймовірностей)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,96	0,4750	2,22	0,4868	2,54	0,4945	2,84	0,4977
1,97	0,4756	2,24	0,4875	2,56	0,4948	2,86	0,4979
1,98	0,4761	2,26	0,4881	2,58	0,4951	2,88	0,4980
1,99	0,4767	2,28	0,4887	2,60	0,4953	2,90	0,4981
2,00	0,4772	2,30	0,4893	2,62	0,4956	2,92	0,4982
2,02	0,4783	2,32	0,4898	2,64	0,4959	2,94	0,4984
2,04	0,4793	2,34	0,4904	2,66	0,4961	2,96	0,4985
2,06	0,4803	2,36	0,4909	2,68	0,4963	2,98	0,4986
2,08	0,4812	2,38	0,4913	2,70	0,4965	3,00	0,49865
2,10	0,4821	2,40	0,4918	2,72	0,4967	3,20	0,49931
2,12	0,4830	2,42	0,4922	2,74	0,4969	3,40	0,49966
2,14	0,4838	2,44	0,4927	2,76	0,4971	3,60	0,499841
2,16	0,4846	2,46	0,4931	2,78	0,4973	3,80	0,499928
2,18	0,4854	2,48	0,4934	2,80	0,4974	4,00	0,499968
2,20	0,4861	2,50	0,4938	2,82	0,4976	4,50	0,499997
		2,52	0,4941			5,00	0,500000

Додаток Б

Значення функції Гаусса $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$



Цілі та десяткові частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001338									
4,5	0,0000160									
5,0	0,0000015									

Додаток В

Значення функції Пуассона $P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1216	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

m \ λ	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0002	0,0019	0.0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0 0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

ЛІТЕРАТУРА

1. Бєсов Л. М. Історія науки і техніки / Л. М. Бєсов. – 3-тє вид., переробл. і доп. – Харків : НТУ “ХПІ” , 2005. – 376 с.

2. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей : учебник / Б. В. Гнеденко. – Изд. 6-е, перераб. и доп. – М. : Наука. Гл. Ред. физ. -мат. лит., 1988. – 448 с.

3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 1979.

4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 1977.

5. Гурский Е. И. Теория вероятностей с элементами математической статистики / Е. И. Гурский . - М. : "Высшая школа", 1971.

6. Майстров Л. Е. Теория вероятности. Исторический очерк / Л. Е. Майстров. – М. : Наука, 1967.

7. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики / Бабак В. П., Білецький А. Я., Приставка О. П., - К. : КВІЦ, 2003. - 432с.

8. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика : Підручник / П. С. Сеньо. – Київ : Центр навчальної літератури, 2004.

ГЛОСАРІЙ

Біноміальний розподіл - the binomial distribution
Випадковий – random
Випадкові величини - the random variables
Випадкові процеси - random processes
Гіпотези - the hypothesis
Густина (щільність) - the density
Густина розподілу - the density distribution.
Двомірна випадкова величина - two-dimensional random variable
Дискретий - discrete
Дисперсія - the dispersion
Диференціальна функція розподілу - the differential distribution functiony
Добуток - the product
Достовірний -reliable
Дробові числа - floating point numbers
Ексцес – the kurtosis
Елемент імовірності - the element probability
Еліптичний - elliptic
Ефективний - effective
Закон рівномірної щільності - the law of uniform density
Залежний - dependent
Інтеграл імовірності - the probability integrals
Інтегральна функція розподілу – the integral distribution function
Ймовірність - the probability
Комбінаторика - the combinatorics
Конусний – conical
Кореляційний момен - the moment correlation
Математичним сподіванням - mathematical expectation
Многокутник розподілу - the polygons sharing
Множина елементарних подій - the set of elementary events.
Момент зв'язку - the moment connection
Момент другого порядку - second order moment
Момент першого порядку - the moment of first order
Найімовірніше число - the most likely number
Незалежний - independent
Неможливий - could not be random
Неперервний - the continuous
Несумісні події –the incompatible events
Нормальний закон розподілу - normal law of distribution
Перестановка - the permutation
Повна група подій - the complete group of events
Подвійний інтеграл - the double integral
Подія – the event
Послідовність - the progression

Початковий момент - starting point
Приріст - the growth
Простір - space
Протилежний – opposite
Розміщення - an accommodation
Ряд розподілу - the number distribution
Среднє значення - an average
Середнє квадратичне відхилення - the mean square deviation
Співвідношення - ratio
Сполученням – combination
Сталий множник - the sustainable multiplier
Статистична ймовірність - the statistical probability
Статистичний ряд – - the statistical series
Статистичною сукупністю statistical combination
Степінь розсіювання - the power dissipation
Сума – the amount
Сумісні події – the compatible evenst
Твірна функція - produced feature
Фундаментальний закон - the fundamental laws
Функція   розподілу – the distribution function
Функція розподілу ймовірностей - probability distribution function
Характеристика розсіювання - the characteristic scattering
Центр розподілу імовірності - the probability distribution center
Центрована випадкова величина - the centered random variable
Числові параметри - the number of parameters

Навчальне видання

Тичинська Любов Михайлівна
Черепащук Альона Анатоліївна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
Ч. 1
Історичні екскурси
та основні теоретичні відомості

Навчальний посібник

Редактор В. Дружиніна
Оригінал-макет підготовлено А. Черепащук

Підписано до друку 24.06.2010р.
Формат $29,7 \times 42 \, {}^{1}\!/_{4}$. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний Ум. друк. арк. 4.7.
Наклад 75 прим. Зам №

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК №3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07. 2009 р.