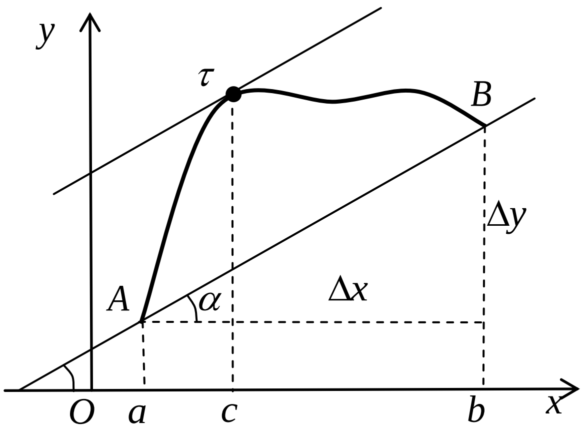
І. В. АБРАМЧУК,
Н. В. САЧАНЮК-КАВЕЦЬКА, Л. І. ПЕДОРЧЕНКО

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

І. В. Абрамчук,
Н. В. Сачанюк-Кавецька, Л. І. Педорченко

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2010

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73
А16

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 9 від 23.04.2009 р.)

Рецензенти:
В. М. Михалевич, доктор технічних наук, професор
В. В. Кухарчук, доктор технічних наук, професор
О. З. Тимошенко, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Абрамчук, І. В.
А16 Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної : навчальний посібник / І. В. Абрамчук, Н. В. Сачанюк-Кавецька, Л. І. Педорченко. – Вінниця : ВНТУ, 2010. - 152 с.

В посібнику розглянуто основні поняття та теореми теорії функцій, теорії границь і диференціального числення функції однієї змінної. Наведена достатня кількість прикладів та задач, які вдало доповнюють текстовий матеріал, зрозумілі та легко сприймаються. Особливістю даного посібника є детальний розгляд техніки обчислення границь і дослідження параметричної функції. Розглянуто використання прикладного пакета *MathCad* при побудові графіків функцій та перевірці правильності обчислення границь.

До кожної теми розроблені питання для самоперевірки та розглянуто 50 варіантів завдань для самостійної роботи.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Вступ до математичного аналізу та диференціальне числення функцій однієї змінної є теоретичною основою для подальшого вивчення інших розділів вищої математики та таких фундаментальних курсів, як «Теоретичні основи електротехніки», «Теоретичні основи радіотехніки», «Рівняння математичної фізики», «Прикладна механіка», «Загальна фізика» й ін. Починаючи з 19-20 ст. методами математичного аналізу почали вивчати складніші математичні об’єкти, ніж функції, що привело до виникнення функціонального аналізу та багатьох інших математичних дисциплін. Це робить актуальним створення нових навчальних посібників з математичного аналізу.

Математичний аналіз – це сукупність розділів математики, присвячених дослідженню функцій методами нескінченно малих. Основи математичного аналізу закладено в працях І. Ньютона, Г. Лейбніца, Л. Ейлера та інших математиків 17-18 ст. Обґрунтування математичного аналізу за допомогою поняття границі належить О. Л. Коші.

Основний принцип, яким керувались автори при підготовці вступу до математичного аналізу та диференціального числення функцій однієї змінної для студентів технічних вузів, – підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної технічної спрямованості. Це не тільки навчальний посібник, але й коротке керівництво до розв’язування задач. Основи теорії, викладені в навчальному посібнику, супроводжуються великою кількістю задач, які наводяться з розв’язуванням, та задачами для самостійної роботи. Задачі з розв’язанням розглядаються протягом всього викладання навчального матеріалу. Задачі для самостійної роботи розглядаються в кінці кожної теми.

Посібник складається з трьох розділів. В першому розділі розглядаються поняття функцій, види функцій, елементарні функції та можливість побудови графіків функцій за допомогою елементарних функцій. В другому розділі розглядаються елементи теорії границь. Особливістю даного розділу є детальний розгляд техніки обчислення границь. В третьому розділі розглядаються поняття похідної та диференціала, правила диференціювання, основні теореми диференціального числення та застосування диференціального числення до дослідження функцій. Окрім того, наведена детальна схема дослідження параметричних функцій та можливість перевірки результатів аналітичного дослідження функцій за допомогою програмного пакета *Mathcad*.

Даний посібник може бути використаний студентами як денної, так і заочної форм навчання.

Тема 1. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

1.1. Поняття функції

Нехай X та Y – дві не порожні числові множини, а x та y - відповідно їх елементи.

Означення 1.1. Якщо кожному елементу $x \in X$ за деяким правилом чи законом f ставиться у відповідність єдиний елемент $y \in Y$, то кажуть, що на множині X задано *функцію* (function) f зі значеннями з множини Y і записують

$$X \xrightarrow{f} Y \Leftrightarrow y = f(x).$$

При цьому x називають *незалежною змінною* або *аргументом* (argument). Множина X називається *областю визначення* функції (domain of function) і позначається $D(f)$, а множина Y називається *областю значень* функції (range of function) і позначається $E(f)$. Функціональний оператор f вказує на те, які операції треба виконати над незалежною змінною, щоб отримати значення функції.

Функцію можна задати аналітично, за допомогою таблиці та графічно.

При аналітичному способі функція задається за допомогою формул, при побудові яких використовується запас раніше вивчених спеціальних функцій та набір арифметичних операцій. В цьому випадку область визначення може бути явно не вказана, але її розуміють як множину всіх значень $x \in R$, при яких ця формула має зміст.

Наприклад,

1) функція Діріхле $D(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \text{ - раціональне число,} \\ 0, \text{ якщо } x \text{ - ірраціональне число.} \end{cases}$;

2) $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

(термін «sgn» походить від латинського signum – знак);

3) $y = [x]$, де символом $[x]$ позначено цілу частину числа x.

При табличному способі задані значення функції в окремих точках та передбачений закон, за яким змінюються значення функції між цими точками (інтерполяція). Досить часто вважають, що функція між точками змінюється лінійно (лінійна інтерполяція).

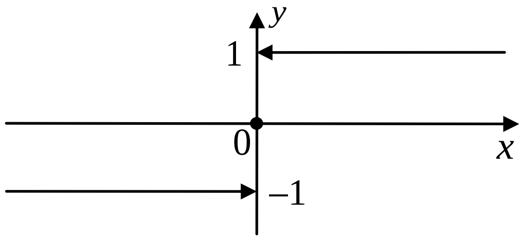
При графічному способі функція задається графіком.

Введемо на площині декартову систему координат.

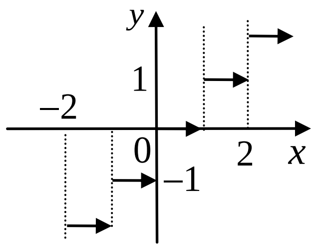
Означення 1.2. *Графіком* функції (graph of function) $y = f(x)$ називається множина точок $M(x, f(x))$ площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

Побудувати графіки.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$



$y = [x]$.



Приклад 1.1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Розв'язання. Функція визначена, якщо $4 - x^2 \geq 0$, тобто, якщо $x^2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2$. Таким чином, областю існування функції є відрізок $-2 \leq x \leq 2$, тобто $x \in [-2; 2]$.

Перерахуємо основні види функцій.

Означення 1.3. Функція $y = f(x)$ називається *парною* (even function), якщо $f(-x) = f(x)$ для всіх $\pm x \in D(f)$. Графік такої функції симетричний відносно осі *Oy*.

Наприклад, функції $y = x^2 + 3$, $y = \cos x$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ є парними.

Означення 1.4. Функція $y = f(x)$ називається *непарною* (odd function), якщо $f(-x) = -f(x)$ для всіх $\pm x \in D(f)$. Графік такої функції симетричний відносно початку координат.

Наприклад, функції $y = \sin x$, $y = x^3$, $y = \dfrac{1}{x}$ є непарними.

Зауваження. Якщо функція не є парною, а також не є непарною, то вона називається функцією *загального виду*.

Означення 1.5. Функція $y = f(x)$ називається *періодичною* (periodic function), якщо існує таке додатне число T (яке називається періодом функції), що для будь-якого значення x виконується рівність

$$f(x+T) = f(x).$$

Наприклад, функція $y = \mathrm{tg}(x)$ є періодичною з періодом (period) $T = \pi$, функція $y = \sin\frac{x}{2}$ має період $T = 4\pi$.

Означення 1.6. Функція $y = f(x)$ називається *неспадною* (nondecreasing) [*незростаючою* (nonincreasing)] на проміжку X, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ виконується умова $f(x_1) \le f(x_2)$ [$f(x_1) \ge f(x_2)$].

Якщо в останніх умовах замінити знак нерівності на строгий, ми прийдемо до поняття *зростаючої* (increasing) [*спадної* (decreasing)] функції.

Функції, що зростають, спадають, не зростають, не спадають на проміжку X, називаються *монотонними* (monotonic) на цьому проміжку.

Наприклад, функція, зображена на рис.1.1, зростає на проміжках: $(-\infty; -5.5]$, $[-4; -1]$; спадає на проміжках: $[-5.5; -4]$, $[-1; 2)$, $(2; +\infty)$.

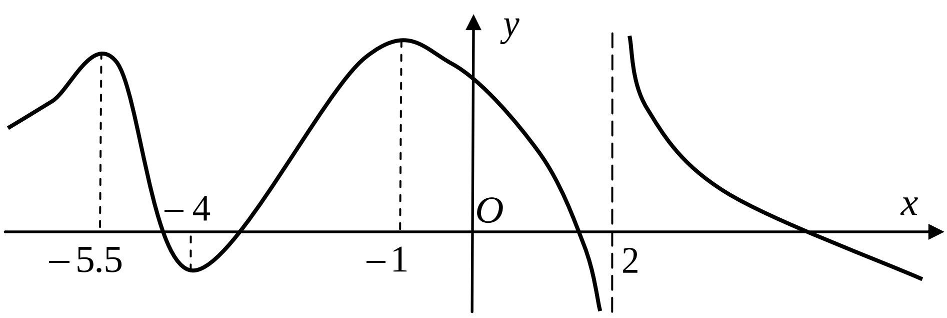


Рис. 1.1

Обернена функція

Якщо рівняння $y = f(x)$ можна однозначно розв'язати відносно змінної x, тобто існує $x = g(y)$ таке, що $y = f(g(y))$, то функція $x = g(y)$ або в стандартних позначеннях $y = g(x)$ (позначають також $y = f^{-1}(x)$) називається *оберненою функцією* (inverse function) до функції $y = f(x)$.

Якщо областю визначення функції $y = f(x)$ є множина *X*, а областю значень - Y , то областю визначення оберненої функції є *Y*, а областю значень - *X*.

Графіки оберненої функції $y = f^{-1}(x)$ та функції $y = f(x)$ симетричні відносно прямої $y = x$.

Можна показати, що для строго монотонної функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку *X*, $E(f) = Y$, завжди існує строго монотонна обернена функція $y = f^{-1}(x)$, визначена на проміжку *Y*, $E\left(f^{-1}\right) = X$.

Приклад 1.2. Знайти функцію, обернену до функції $y = 2x + 2$, і побудувати їх графіки.

Розв'язання. Дана функція очевидно є строго монотонною при $x \in R$, тому для неї існує обернена. Розв'язуючи рівняння відносно *x*, дістанемо $x = \frac{y}{2} - 1$ або в стандартних позначеннях $y = \frac{x}{2} - 1$.

Отже, оберненою до заданої функції є функція $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Побудуємо графіки цих функцій (рис. 1.2).

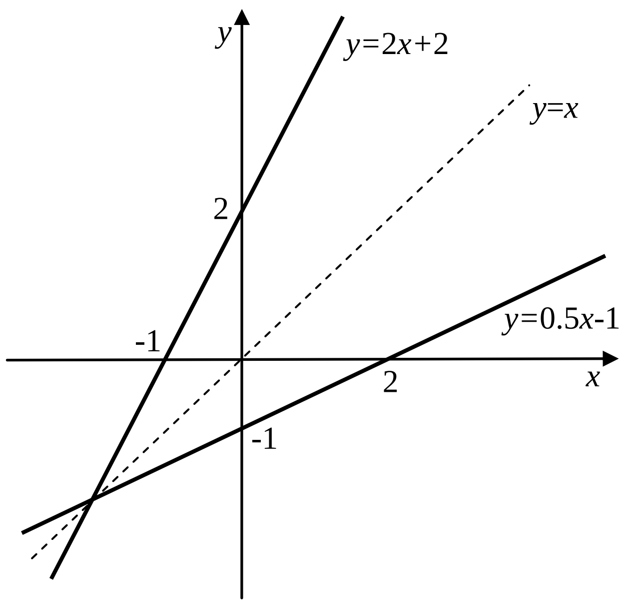


Рис. 1.2

Складена функція

Якщо аргументом функції $y = f(u)$ є функція незалежної змінної *x*, тобто $u = \varphi(x)$, то функція $y = f[\varphi(x)]$ називається *складеною функцією* (combined function) (*суперпозицією функцій* f і φ) від *x*. При цьому функцію f називають *зовнішньою* (exterior function), а функцію φ – *внутрішньою* (inner function) функцією складеної функції $y = f[\varphi(x)]$.

Складена функція здійснює відображення: $X \to U \to Y$, де $X = D(\varphi)$, $U = E(\varphi) = D(f)$, $Y = E(f)$.

Наприклад, функція $y = \sin^3 x$ є складеною *степеневою* функцією, аргументом якої є тригонометрична функція, тобто $y = u^3$, де $u = \sin x$.

Складеною функцією є також *степенево-показникова* функція

$$f(x) = u(x)^{v(x)}.$$

Неявна функція

Функція, задана рівнянням $F(x, y) = 0$, що не розв'язане відносно залежної змінної y, називається *неявною функцією* (implicit function) (функцією, заданою неявно).

Наприклад, рівняння $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad y > 0$ (частина еліпса з півосями $a = 3$, $b = 2$, що знаходиться над віссю абсцис) визначає y як неявну функцію від x.

Функція, задана параметрично

Кажуть, що змінна y як функція аргументу x *задана параметрично* (parametric function), якщо обидві змінні x та y є функціями третьої змінної t, $t \in [\alpha, \beta]$:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Наприклад, функцію $y = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ (відповідає частині еліпса з півосями $a = 3$, $b = 2$, що знаходиться над віссю абсцис) можна задати параметрично:

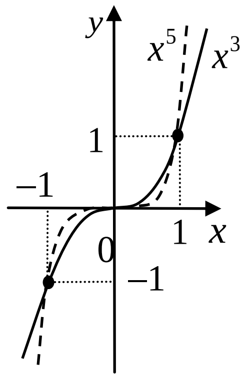
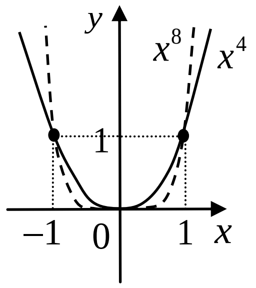
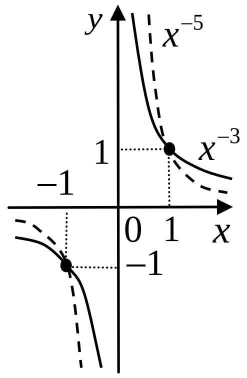
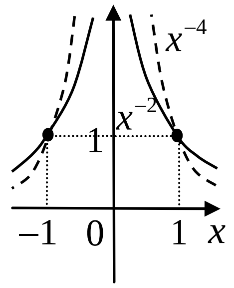
$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}, \; 0 \le t \le \pi .$$

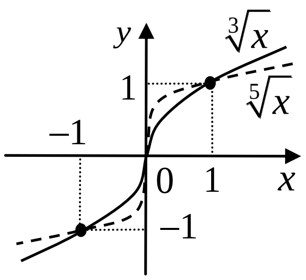
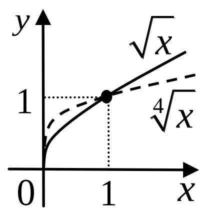
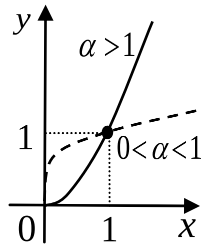
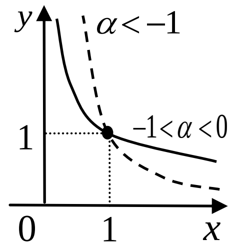
Досить часто параметричний спосіб подання функції використовують, коли її важко (неможливо) подати у вигляді $y = f(x)$.

Базисні елементарні функції

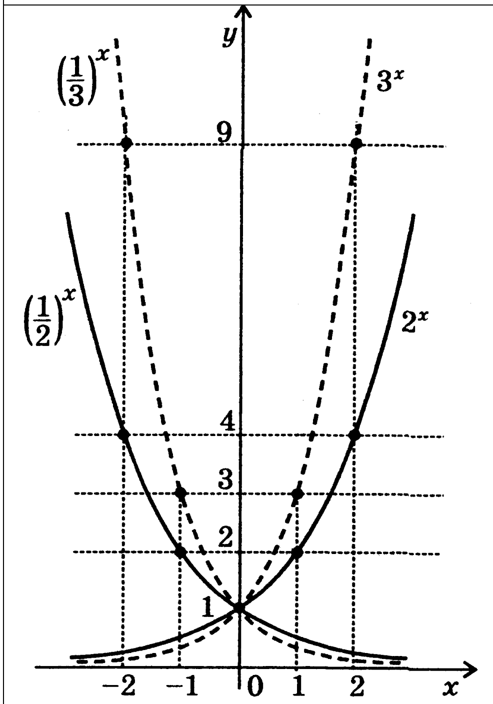
До базисних елементарних функцій (basic primitive function) належать:

1) *Степенева функція* (Power function);

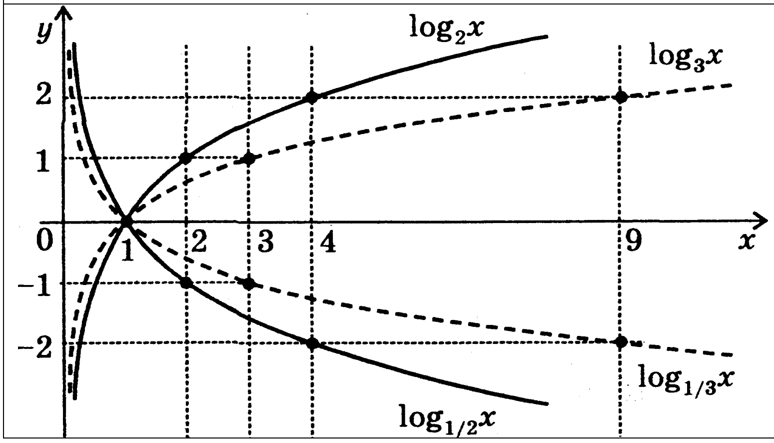
$y=x^{n},\quad n\in N$		$y=x^{-n},\quad n\in N$	
n непарне	n парне	n непарне	n парне
			
$x\in R,\ y\in R.$	$x\in R,\ y\geq 0.$	$x\neq 0,\ y\neq 0.$	$x\neq 0,\ y>0.$

$y=\sqrt[n]{x},\quad n\in N$		$y=x^{\alpha},\quad \alpha\in R$	
n непарне	n парне	$\alpha>0$	$\alpha<0$
			
$x\in R,\ y\in R.$	$x\in R,\ y\geq 0.$	$x\geq 0,\ y\geq 0.$	$x>0,\ y>0.$

2) *Показникова функція* (Exponential function);

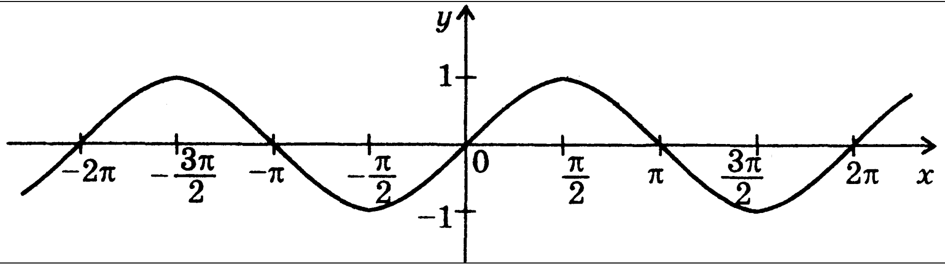
<table>
<tr><td colspan="2">$y = a^x, \quad a > 0$
(при $a = 1$ вироджується в $y = 1$).</td></tr>
<tr><td>
</td><td>1 область визначення $x \in R$;
2 область значень $y > 0$;
3 зростає при $a > 1$;
4 спадає при $0 < a < 1$.</td></tr>
</table>

3) *Логарифмічна функція* (Logarithm function);

<table>
<tr><td colspan="2">$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>1 обл. визначення
$x > 0$;
2 обл. значень
$y \in R$;
3 зростає
при $a > 1$;
4 спадає при
$0 < a < 1$.</td></tr>
</table>

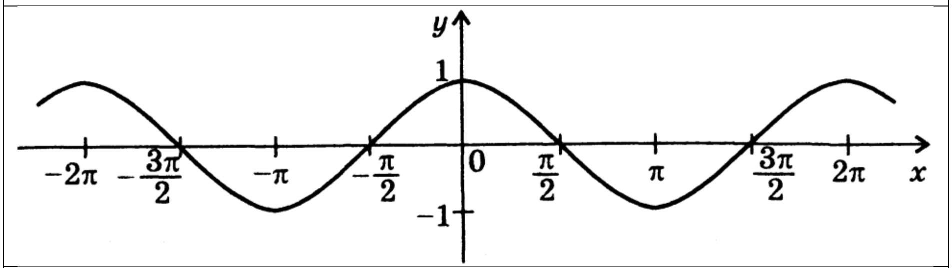
4) *Тригонометричні функції* (Trigonometric functions);

$y = \sin x$

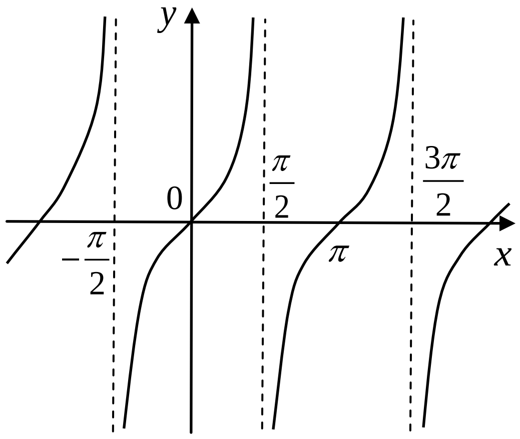
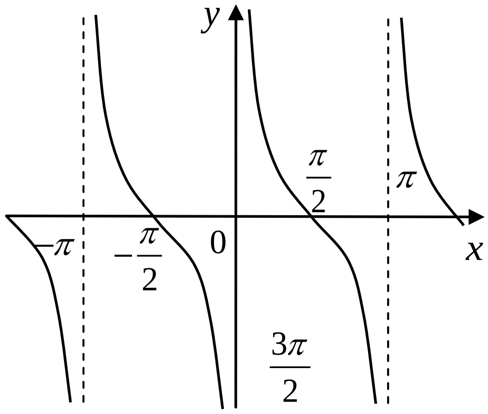


1 область визначення $x \in R$;
2 область значень $y \in [-1; 1]$;
3 період $T = 2\pi$;
4 функція є непарною;
5 зростає при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$;
6 спадає при $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$.

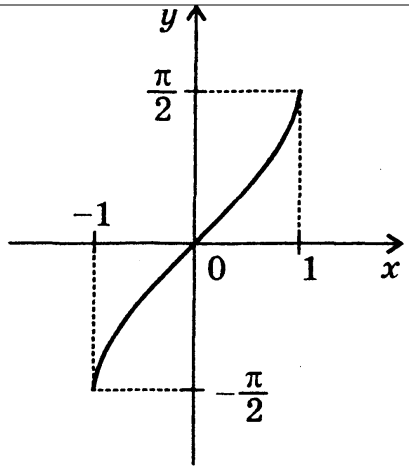
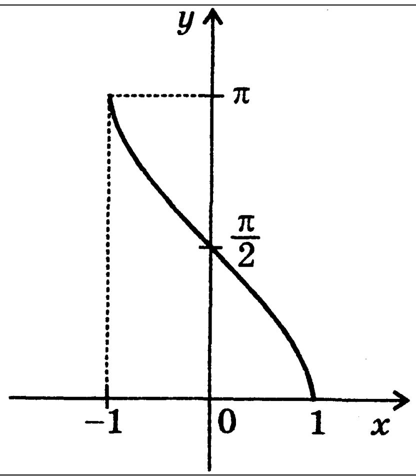
$y = \cos x$

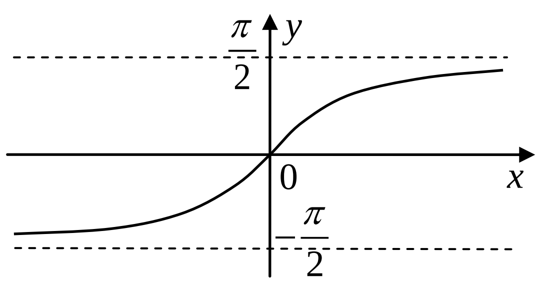
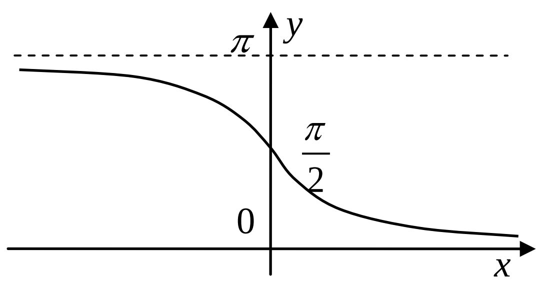


1 область визначення $x \in R$;
2 область значень $y \in [-1; 1]$;
3 період $T = 2\pi$;
4 функція є парною;
5 зростає при $x \in (-\pi + 2\pi k; 0 + 2\pi k), k \in Z$;
6 спадає при $x \in (0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in Z$.

$y=\operatorname{tg}x$	$y=\operatorname{ctg}x$
	
1 область визначення $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k,\quad k\in Z$; 2 область значень $y\in R$; 3 період $T=\pi$ 4 функція є непарною; 5 зростає при $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right), k\in Z$.	1 область визначення $x\neq 0+\pi\cdot k,\quad k\in Z$; 2 область значень $y\in R$; 3 період $T=\pi$; 4 функція є непарною; 5 спадає при $x\in\left(0+\pi k;\pi+\pi k\right), k\in Z$.

5) *Обернені тригонометричні функції* (Inverse trigonometric functions).

$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$
	
1 область визначення $x\in[-1;1]$; 2 область значень $y\in[-\pi/2;\pi/2]$; 3 функція є непарною; 4 функція є зростаючою.	1 область визначення $x\in[-1;1]$; 2 область значень $y\in[0;\pi]$; 3 функція є спадною.

$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y = \mathrm{arcctg}\, x$
	
1 область визначення $x \in R$; 2 область значень $y \in [-\pi/2; \pi/2]$; 3 функція є непарною; 4 функція є зростаючою.	1 область визначення $x \in R$; 2 область значень $y \in [0; \pi]$; 3 функція є спадною.

З базисних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій та операцій суперпозиції утворюють функції, що їх називають елементарними.

1.2. Побудова графіків функцій шляхом елементарних перетворень

При побудові графіка функції $y = m \cdot f(kx + a) + b$ використовують в певній послідовності перетворення графіка функції $y = f(x)$. Ці перетворення можна виконати, наприклад, в такій послідовності.

а) Будуємо графік $y = f(x)$.

б) Графік функції $y = f(kx)$, $k>0$ дістанемо стискуванням графіка а) в k разів вздовж осі абсцис до осі ординат для випадку $k>1$, або розтягуванням в $1/k$ раз вздовж осі абсцис від осі ординат у випадку $0<k<1$. Стискування графіка вздовж осі абсцис в k раз ($k>1$) здійснюється так: абсциса кожної точки зменшується в k раз, ордината при цьому залишається незмінною (кожна точка $M(x, y)$ графіка $y = f(x)$переходить у точку $M\left(\frac{1}{k}x, y\right)$ графіка $y = f(kx)$).

Якщо ж $k<0$, то можна спочатку побудувати графік $y = f(|k|x)$, а потім відобразити його симетрично відносно осі ординат.

в) Графік $y = m \cdot f(kx)$, $m>0$ дістанемо розтягуванням графіка б) в m разів вздовж осі ординат відносно осі абсцис для випадку $m>1$, або стискуванням в $1/m$ раз вздовж осі ординат відносно осі абсцис у випадку $0<m<1$. Розтягування графіка вздовж осі ординат в m раз ($m>1$) здійснюється так: ордината кожної точки збільшується в m раз, абсциса при цьому залишається незмінною (кожна точка $M(x,y)$ графіка $y = f(kx)$ переходить у точку $M(x, my)$ графіка $y = m \cdot f(kx)$).

У випадку $m<0$ можна спочатку побудувати графік $y = |m| \cdot f(kx)$, а потім відобразити його симетрично відносно осі абсцис.

г) Графік функції $y = m \cdot f(kx + a)$ або $y = m \cdot f\left(k\left(x + \frac{a}{k}\right)\right)$, $k>0$ дістанемо паралельним перенесенням графіка в) вліво вздовж осі Ox на $\frac{a}{k}$ одиниць для $a>0$ і вправо на $\left|\frac{a}{k}\right|$ для $a<0$.

д) Графік функції $y = m \cdot f(kx + a) + b$ дістанемо паралельним перенесенням графіка г) вгору на b одиниць вздовж осі Oy для $b>0$ і вниз на $|b|$ для $b<0$.

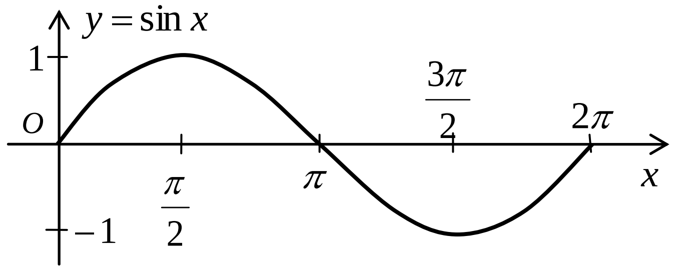
Розглянуті перетворення можна виконувати у будь-якому порядку, але величини, на які графік переноситься вздовж координатних осей, залежать від порядку перетворень.

Проілюструємо побудову графіка функції за наведеним алгоритмом.

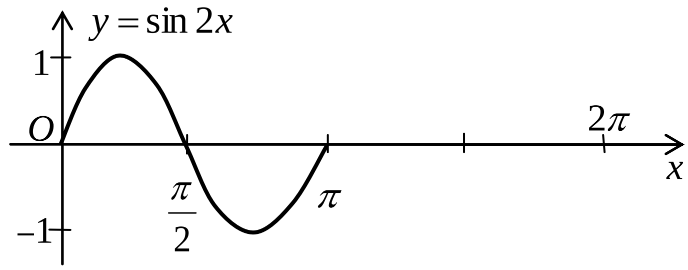
Приклад 1.3. Побудувати графік функції $y = -3\sin(2x - 1) + 2$.

Розв'язання

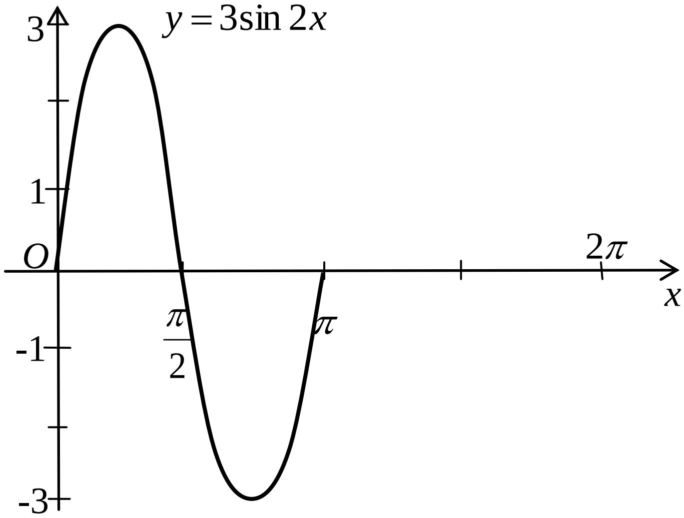
а) За вихідний беремо графік функції $y = \sin x$. Для зручності розглянемо побудову графіка тільки на одному періоді $T = 2\pi$.



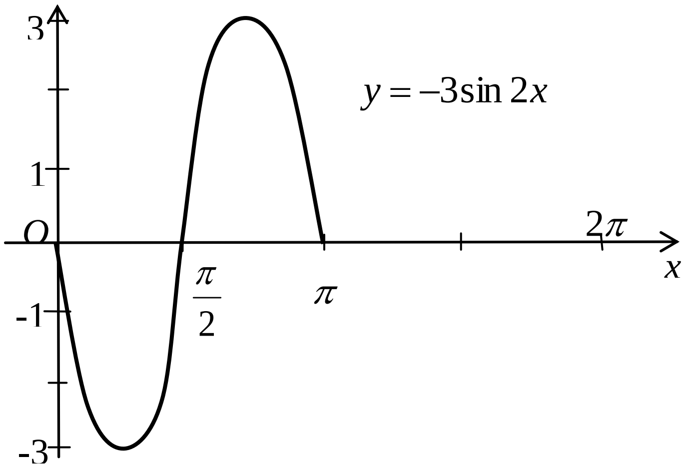
б) Оскільки $|k| = 2 > 1$, то стискаємо графік функції $y = \sin x$ в два рази вздовж осі Ox. Дістаємо графік функції $y = \sin 2x$.



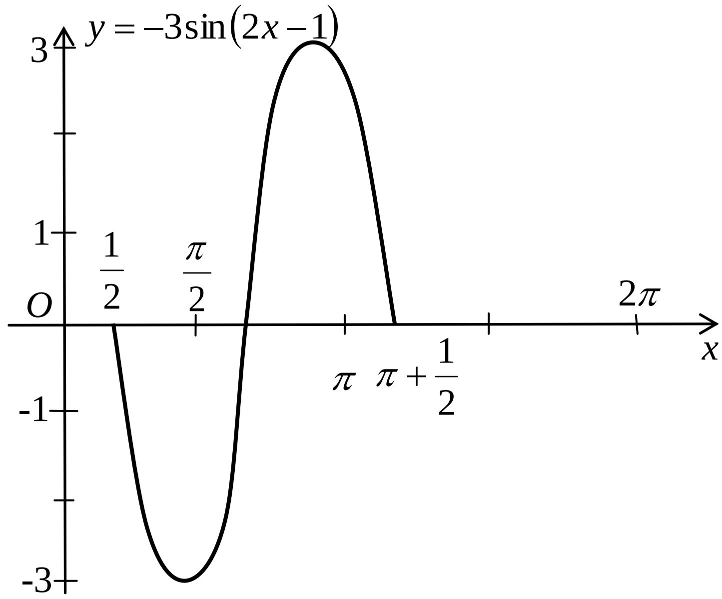
в) Розтягуємо графік функції $y = \sin 2x$ в три рази вздовж осі Оу, оскільки $|m| = 3 > 1$. Дістаємо графік функції $y = 3\sin 2x$.



г) Симетрично відобразивши останній графік відносно осі *Ox*, дістанемо графік функції $y = -3\sin 2x$.



д) Отриманий графік паралельно переносимо на $1/2$ вправо вздовж осі *Ox*, дістанемо графік функції $y = -3\sin(2x - 1)$ або $y = -3\sin 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$.



e) Нарешті, отриманий графік $y=-3\sin(2x-1)$ паралельно перенесемо на дві одиниці вгору вздовж осі *Oy*, оскільки *b*=2>0. Дістанемо графік функції $y=-3\sin(2x-1)+2$ (рис. 1.3).

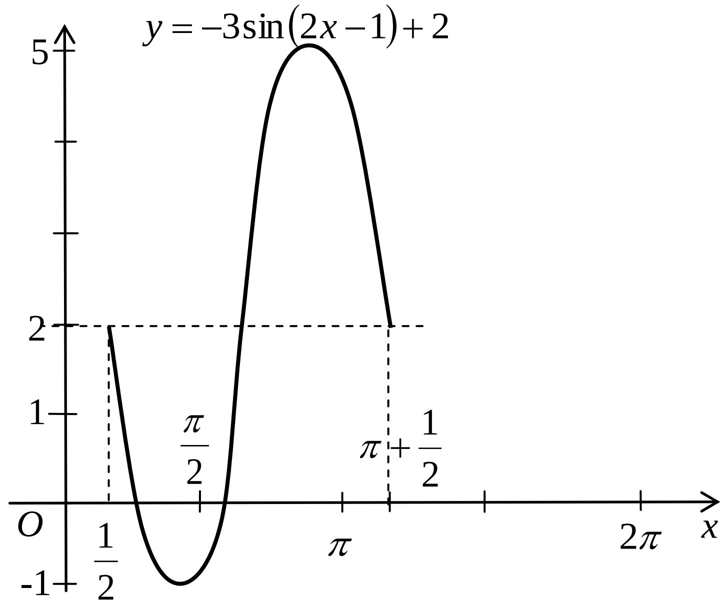


Рис. 1.3

Приклад 1.4. Побудувати графік функції $y=\dfrac{5x-3}{2x+1}$.

Розв'язання

Область існування функції: $(-\infty;-1/2)\cup(-1/2;+\infty)$.

Поділивши чисельник на знаменник, дістанемо

$$y=\frac{5}{2}+\frac{-11/2}{2x+1}, \text{ або } y=\frac{5}{2}+\left(-\frac{11}{4}\right)\cdot\frac{1}{x+1/2}.$$

Графік такої функції можна отримати з графіка функції $y=\frac{1}{x}$ за допомогою таких перетворень:

а) паралельного перенесення графіка $y=\frac{1}{x}$ вздовж осі абсцис на $\frac{1}{2}$ одиниць вліво;

б) розтягування графіка а) вздовж осі ординат в $\frac{11}{4}$ раз;

в) симетричного відображення графіка б) відносно осі абсцис;

в) паралельного перенесення вздовж осі ординат на $\frac{5}{2}$ одиниць вгору.

Будуємо схематичний графік функції $y=\frac{5x-3}{2x+1}$ (рис. 1.4).

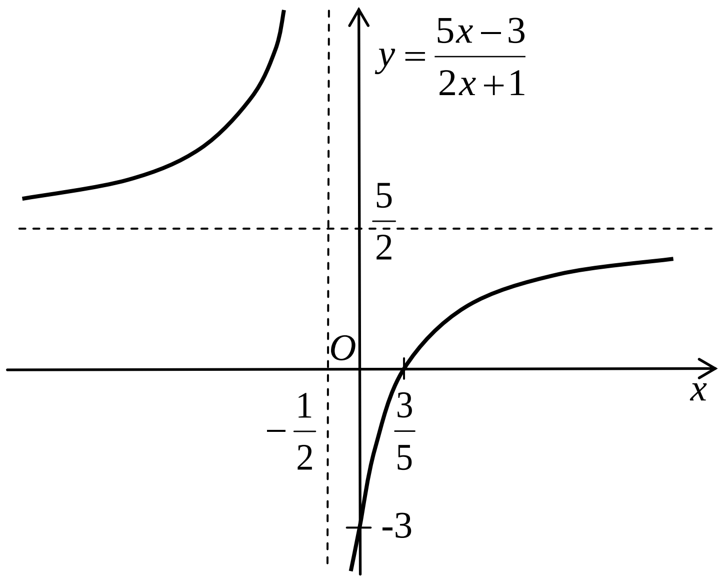


Рис. 1.4

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення функції. Вкажіть способи, якими можна задати функцію. Наведіть приклади.

2. Чи можуть точки графіка функції мати однакові абсциси? Відповідь обґрунтуйте.

3. Яку функцію називають парною? Наведіть приклади парних функцій.

4. Яку функцію називають непарною? Наведіть приклади непарних функцій.

5. Яку функцію називають складеною? Наведіть приклади складених функцій, визначте в кожному випадку зовнішню і внутрішню функції.

6. Яку функцію називають оберненою до даної? Наведіть приклади взаємно обернених функцій. Як розташовані графіки взаємно обернених функцій?

7. Яка функція називається заданою неявно? Наведіть приклади.

8. Яка функція називається параметричною? Наведіть приклади.

9. Дайте означення усіх монотонних функцій.

10. Перелічіть основні елементарні функції та вкажіть їх властивості.

11. За допомогою яких елементарних перетворень графіка функції $y = f(x)$ можна побудувати графік функції $y = m \cdot f(kx+a)+b$?

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Побудувати схематичні графіки заданих функцій шляхом перетворення графіків відповідних базисних елементарних функцій.

1.	$y=3-e^{x+1}$;	$y=\dfrac{x}{x+1}$;	$y=\dfrac{1}{2}\sin(3x+1)$.
2.	$y=-e^{2-x}$;	$y=\dfrac{x-1}{x+1}$;	$y=2\sin(2x-1)$.
3.	$y=1-e^{2-x}$;	$y=\dfrac{x+3}{x-1}$;	$y=1+\sin(3x-2)$.
4.	$y=2+e^{x-1}$;	$y=\dfrac{x-2}{x+2}$;	$y=-3\sin(x-2)$.
5.	$y=-2+e^{x+3}$;	$y=\dfrac{x-3}{x+1}$;	$y=2-3\sin(2x+1)$.
6.	$y=3-e^{2-x}$;	$y=\dfrac{x}{x+4}$;	$y=5\sin(\dfrac{x}{2}+1)$.

7.	$y=2e^{2+x}$;	$y=\dfrac{x}{2x+1}$;	$y=1{,}5\cos(2x-1)$.
8.	$y=-1+e^{2x+1}$;	$y=\dfrac{-x}{x+3}$;	$y=2\cos(\dfrac{x}{2}+1)$.
9.	$y=e^{\frac{x}{2}+1}+2$;	$y=\dfrac{1-x}{x-2}$;	$y=2\cos(\dfrac{x}{3}-2)$.
10.	$y=-3+e^{\frac{x}{2}+2}$;	$y=\dfrac{2x}{x+2}$;	$y=-3\cos(2x+1)$.
11.	$y=2e^{1-\frac{x}{3}}$	$y=\dfrac{-3x}{x+1}$;	$y=2\cos(\dfrac{x}{3}+2)$.
12.	$y=1-e^{\frac{x}{2}+1}$;	$y=\dfrac{2-x}{3x-1}$;	$y=-\sin(2x-3)$.
13.	$y=2-e^{1-x}$;	$y=\dfrac{x}{3x+2}$;	$y=-5\sin(\dfrac{x}{2}+1)$.
14.	$y=1+e^{1-2x}$;	$y=\dfrac{-3x}{2x+4}$;	$y=3\sin(\dfrac{x}{3}-3)$.
15.	$y=3-e^{x+4}$;	$y=\dfrac{3+x}{4-x}$;	$y=\cos(\dfrac{x}{3}+1)$.
16.	$y=4+e^{1-2x}$;	$y=\dfrac{x}{3x-2}$;	$y=\sin(\dfrac{2x}{3}+1)$.
17.	$y=2e^{1-3x}$;	$y=\dfrac{-3x}{2x+1}$;	$y=\cos(\dfrac{x}{2}-2)$.
18.	$y=-2+e^{4-x}$;	$y=\dfrac{2x+1}{3x-4}$;	$y=2\cos(3x+2)$.
19.	$y=-1+e^{2+2x}$;	$y=\dfrac{x-2}{3x+1}$;	$y=-3\sin(2x-1)$.
20.	$y=-3e^{\frac{x}{2}-1}$;	$y=\dfrac{3x-1}{2x+4}$;	$y=2\cos(2x+3)$.
21.	$y=1-2e^{4-2x}$;	$y=\dfrac{2-3x}{2x+3}$;	$y=-4\cos(\dfrac{x}{3}+4)$.
22.	$y=2-e^{-\frac{x}{2}}$;	$y=\dfrac{2x}{2x-5}$;	$y=-3\cos(\dfrac{x}{2}-2)$.
23.	$y=2+3e^{1-2x}$;	$y=\dfrac{1+x}{4x-2}$;	$y=\sin(\dfrac{x}{2}+1)$.
24.	$y=1+2^{2-x}$;	$y=\dfrac{2-x}{2x+3}$;	$y=5\cos(\dfrac{x}{2}+2)$.
25.	$y=-2+3^{x-1}$;	$y=\dfrac{2x}{x+5}$;	$y=-3\sin(\dfrac{x}{3}-1)$.

26.	$y=-3+e^{1-3x}$;	$y=\frac{x-4}{2x+5}$;	$y=-5\sin(\frac{x}{3}-2)$.
27.	$y=-4+e^{2x-1}$;	$y=\frac{3x}{5x-1}$;	$y=5\sin(3x+2)$.
28.	$y=2-e^{4-3x}$;	$y=\frac{2x}{x+2}$;	$y=\frac{1}{3}\cos(3x+2)$.
29.	$y=-e^{3-x}$;	$y=\frac{2x-1}{x+2}$;	$y=3\sin(2x+1)$.
30.	$y=1-e^{2+x}$;	$y=\frac{2x-3}{x+1}$;	$y=1+\cos(3x+1)$.
31.	$y=2+e^{1-2x}$;	$y=\frac{x+2}{x-4}$;	$y=-2\sin(x+3)$.
32.	$y=-3+e^{3-x}$;	$y=\frac{x+3}{x+5}$;	$y=6\sin(\frac{x}{2}-1)$.
33.	$y=2-e^{3-x}$;	$y=\frac{x}{x-3}$;	$y=2\sin(\frac{x}{2}+2)-1$.
34.	$y=3\ e^{x-3}$;	$y=\frac{2x}{x+3}$;	$y=1{,}5\ \sin(3x+1)$.
35.	$y=-1+e^{3x+1}$;	$y=\frac{-x}{3-x}$;	$y=3\cos(2+\frac{x}{3})$.
36.	$y=e^{1-\frac{x}{2}}+3$;	$y=\frac{1-2x}{x+2}$;	$y=-2\sin(3-2x)$.
37.	$y=-5+e^{2+\frac{x}{2}}$;	$y=\frac{-4x}{2+x}$;	$y=\cos(\frac{x}{3}+1)$.
38.	$y=-2+e^{1-2x}$;	$y=\frac{6x}{3-6x}$;	$y=-2\cos(2+2x)$.
39.	$y=-4+e^{2-\frac{x}{2}}$;	$y=\frac{x+3}{2-x}$;	$y=-\sin(3+\frac{x}{2})+1$.
40.	$y=3-e^{1-x}$;	$y=\frac{2x}{3x+1}$;	$y=-2\cos(2+\frac{x}{2})$.
41.	$y=2+e^{1-2x}$;	$y=\frac{x}{3-2x}$;	$y=-5\sin(1-\frac{x}{3})$.
42.	$y=-3+e^{x+1}$;	$y=\frac{x+2}{x-3}$;	$y=\cos(\frac{x}{4}+2)$.
43.	$y=4+e^{1-3x}$;	$y=\frac{2x}{x+4}$;	$y=\cos(\frac{2x}{3}+2)$.
44.	$y=3e^{2-x}$;	$y=\frac{-2x}{2x+1}$;	$y=\sin(\frac{x}{2}-3)$.

45. $y=-1+e^{2-x}$; $y=\dfrac{3x+2}{2x-1}$; $y=3\cos(2x+1)$.

46. $y=-2+e^{3x+3}$; $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$; $y=-2\sin(x+2)$.

47. $y=1-2e^{\frac{x}{2}-1}$ $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$; $y=-2\sin(2-2x)$.

48. $y=1-2e^{1-x}$; $y=\dfrac{-3x}{2x+5}$; $y=-3\cos(\dfrac{x}{2}-1)$.

49. $y=1-e^{1+\frac{x}{3}}$; $y=\dfrac{2+3x}{2-3x}$; $y=-4\cos(\dfrac{x}{3}+1)$.

50. $y=3+2e^{1-2x}$; $y=\dfrac{2+x}{3x-1}$; $y=\sin(\dfrac{x}{2}+3)$.

Тема 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ

2.1. Границя послідовності та границя функції

Поставимо у відповідність кожному $n \in N$ деяке дійсне число $x_n = f(n)$. В цьому випадку кажуть, що задано *числову послідовність* (sequence, number sequence) (позначають $\{x_n\}$).

Наприклад, числовими послідовностями є: числа Фібоначчі 1, 1, 2, 3, 5, 8,…; арифметична та геометрична прогресії.

Означення 2.1. Число a називається *границею послідовності* (limit of sequence) $\{x_n\}$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Якщо ввести позначення: $\forall$ – довільний (будь-який); $\exists$ – існує, то означення 2.1 можна скорочено записати так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: \quad |x_n - a| < \varepsilon .$$

Те, що число a є границею послідовності $\{x_n\}$, записують так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \text{ або } x_n \to a \text{ при } n \to \infty .$$

Послідовність, яка має границю, називається *збіжною* (convergent sequence), а яка не має границі – *розбіжною* (divergent sequence).

Будь-який інтервал виду $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, називається ε*-околом точки* (neighborhood of point) a на числовій осі.

З геометричної точки зору, якщо число a є границею послідовності $\{x_n\}$, то в довільний ε-окіл точки a потраплять всі члени послідовності $\{x_n\}$, окрім скінченної їх кількості (ε може бути як завгодно малим). Можна сказати, що члени послідовності $\{x_n\}$ групуються навколо точки a.

Приклад 2.1. Довести за означенням, що $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n+1}{4n-2} = \dfrac{1}{2}$.

Доведення. За означенням 2.1 для кожного $\varepsilon > 0$ ми повинні вибрати номер N так, щоб при всіх $n > N$ виконувалась нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. В нашому випадку дана нерівність набуває вигляду

$$\left|\frac{2n+1}{4n-2}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon. \qquad (*)$$

Оскільки $\left|\frac{2n+1}{4n-2}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2n-1}$, то нерівність (*) перепишемо так $\frac{1}{2n-1}<\varepsilon$, звідки $n>\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)$. Тепер, якщо ми оберемо $N=N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right]$, то при всіх $n>N$ нерівність (*) буде виконуватись, а отже число $\frac{1}{2}$ за означенням є границею даної послідовності.

Наприклад, при вибраному $\varepsilon=0,001$ отримаємо $N=500$, а це означає, що для всіх $n>N=500$ члени x_n цієї послідовності потраплять в окіл

$$\left|x_n-\frac{1}{2}\right|<0.001.$$

Границя функції в точці

Нехай функція $f(x)$ визначена на деякій множині X і точка $a\in X$ або $a\notin X$. Візьмемо з X послідовність точок $\{x_n\}$, відмінних від a, яка збігається до цього числа:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,x_n,\ldots. \qquad (2.1)$$

Значення функції $f(x)$ в точках послідовності (2.1) утворюють в свою чергу числову послідовність $\{f(x_n)\}$:

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3),\ldots, f(x_n),\ldots \qquad (2.2)$$

Означення 2.2. (за Гейне). Число b називається *границею функції* (limit of function) $f(x)$ в точці $x=a$ (або при $x\to a$), якщо для будь-якої збіжної до a послідовності (2.1) значень аргументу x, відмінних від a, відповідна послідовність (2.2) значень функції збігається до числа b.

Позначають це так:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b, \qquad (2.3)$$

або

$$f(x)\to b \text{ при } x\to a.$$

Це означення границі функції за Гейне (мовою послідовностей), його можна записати скорочено так:

$$\forall \{x_n\},\ x_n \neq a, \lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Приклад 2.2. Довести, що $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2+2x+5}{x+1} = 5$.

Доведення. За означенням 2.2: $\forall \{x_n\}, x_n \neq 1, \lim x_n = 1;$

$$\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3x_n^{\ 2}+2x_n+5}{x_n+1} = \frac{3\cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{\ 2} + 2\cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n + 5}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n + 1} = \frac{3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 5}{1+1} = 5.$$

Ця границя не залежить від вибору послідовності $\{x_n\}$, яка збігається до числа 1.

Означення 2.3. (за Коші). Число b називається границею функції $f(x)$ в точці $x = a$ (або при $x \to a$), якщо для будь-якого як завгодно малого числа ε існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x - a| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Скорочено це означення можна записати так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in X:\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

З геометричної точки зору, якщо число b є границею функції $f(x)$ в точці $x = a$, то для всіх значень аргументу x, які групуються навколо точки $x = a$, відповідні значення функції групуються навколо точки $y = b$.

Зауваження. Можна показати, що означення 2.2 та 2.3 є еквівалентними.

Приклад 2.3. Довести, що $\lim\limits_{x\to -1} (2x+5) = 3$.

Доведення. Застосуємо означення 2.3:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R:\ 0 < |x - (-1)| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon \text{ (рис. 2.1).}$$

$$|f(x) - 3| = |(2x+5) - 3| = |2x+2| = 2\cdot|x+1| < \varepsilon \Rightarrow |x+1| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ тобто } \delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

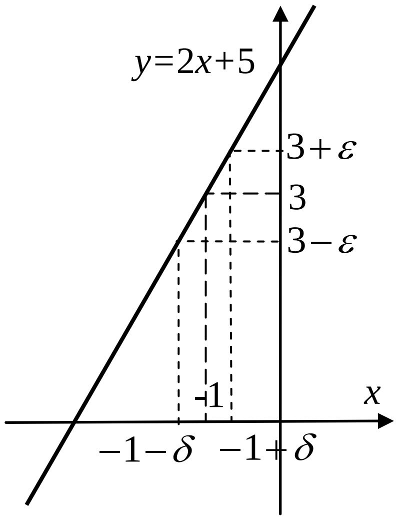


Рис. 2.1

Нехай, наприклад, $\varepsilon = 0{,}2$, тоді відповідне $\delta = 0{,}1$ і

$$\forall x \in R \quad 0 < |x+1| < 0{,}1 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0{,}2.$$

Односторонні границі (one-sided limit)

Означення 2.4. Число b називається *границею функції* $f(x)$ *справа* (right-handed limit) [*зліва* (left-handed limit)] в точці $x = a$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $a < x < a + \delta$ [$a - \delta < x < a$], виконується нерівність

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Скорочено означення границі справа (зліва) в точці $x = a$, можна записати так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in X: \ a < x < a + \delta \ (a - \delta < x < a) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Позначають границю справа $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ або $f(a+0)$;

границю зліва - $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ або $f(a-0)$.

Для існування границі функції $f(x)$ в точці $x = a$ необхідно і достатньо, щоб мала місце рівність

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = b.$$

Границя функції на нескінченності

Означення 2.5. Число b називається границею функції $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число *N*, що для всіх *x*, які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Скорочено означення границі при $x \to \infty$ можна записати так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in X, |x| > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Якщо при цьому елементи x_n послідовності $\{x_n\}$ додатні (від'ємні), то пишуть так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b; \ (\lim_{x \to -\infty} f(x) = b).$$

Приклад 2.4. Довести, що $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$.

Доведення. Нехай виконується нерівність

$$|f(x) - 1| < \varepsilon,$$

$$|f(x) - 1| = \left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon \ ,$$

звідси $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. І, якщо за N прийняти $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$, то $\forall |x| > N \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$, тобто $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) > 0 \quad \forall |x| > N \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$, а це за означенням 2.5 означає, що $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ (рис. 2.2).

Нехай, наприклад, $\varepsilon = 0{,}1$; тоді $N = 10$. Отже виконується

$$\forall x : \ |x| > 10 \Rightarrow \left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| < 0{,}1.$$

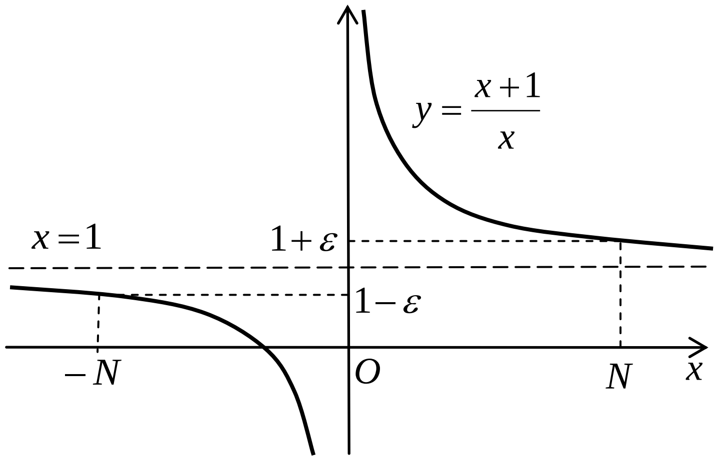


Рис. 2.2

2.2. Важливі границі

1) *Перша важлива границя*

Розглянемо функцію $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ $(x\neq 0)$. Значення цієї функції при $x=0$ не існує, але $f(x)\to 1$ при $x\to 0$.

Теорема 2.1. Справедлива рівність

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (2.4)$$

Границю (2.4) називають першою важливою (першою чудовою) границею.

Доведення. Нехай $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ (x вимірюється в радіанах).

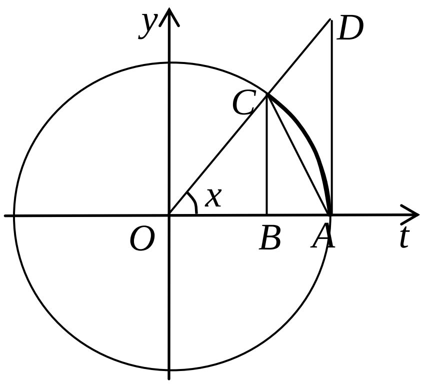


Рис. 2.3

Розглянемо рис. 2.3, на якому позначено $R=OA=1$, $\angle AOC=x$, $\sin x=BC$, $\operatorname{tg} x=AD$.

Виходячи з геометричних міркувань матимемо:

$$S_{\Delta AOC}<S_{сект.AOC}<S_{\Delta AOD};$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin x<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1^2\operatorname{tg} x;$$

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x.$$

Оскільки $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то, поділивши останню нерівність на $\sin x > 0$, матимемо:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ або } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Знайдемо $\lim\limits_{x\to 0+0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0+0}\left(1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}\right) = 1 - 2\cdot \lim\limits_{x\to 0+0} \sin^2\dfrac{x}{2} = 1,$

$$\left(0 < \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2},\, x \to 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \to 0 \Rightarrow \sin\frac{x}{2} \to 0\right).$$

Отже,

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

У випадку $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ доведення проводиться аналогічно. Тут маємо:

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Об’єднаємо отримані результати:

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Графік функції $y = \dfrac{\sin x}{x}$ має вигляд (рис. 2.4).

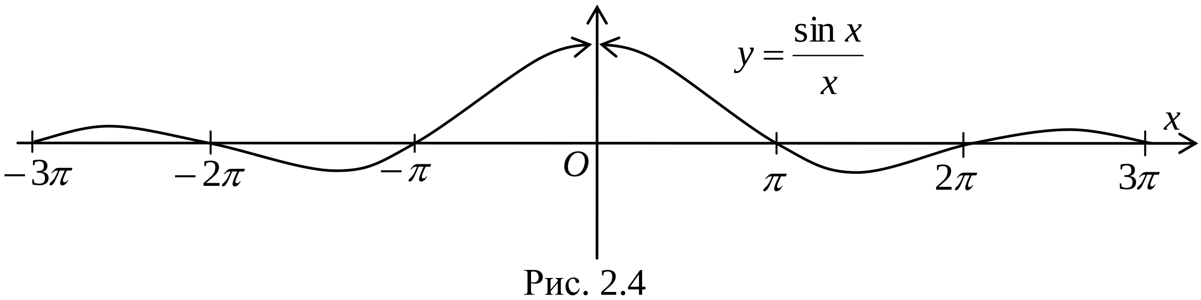


Рис. 2.4

2) *Друга важлива границя*

Теорема 2.2. Функція $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ при $x\to\infty$ має границею число e, тобто

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \qquad (2.5)$$

Границю (2.5) називають другою важливою (другою чудовою) границею.

(Зауважимо, що числом e прийнято позначати границю такої збіжної послідовності: $e\overset{df}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, це число є ірраціональним (irrational) $e=2{,}71828\ldots$.)

Доведення. Розглянемо випадок, коли $x\to\infty$. Нехай

$$n<x<n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{n} \Rightarrow 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{n}.$$

Піднесемо члени отриманої нерівності до степенів, показники яких є частинами нерівності $n<x<n+1$. Дістанемо

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Перейдемо до границі при $n\to\infty$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e\cdot 1^{-1}=e,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Аналогічно доводиться справедливість рівності $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Зауваження. Якщо $x \to \infty$, то $\frac{1}{x} \to 0$. Поклавши $\frac{1}{x} = t$ $\left(x \to \infty \Rightarrow \frac{1}{x} = t \to 0 \right)$, матимемо іншу форму запису другої важливої границі

$$\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e. \tag{2.6}$$

Натуральний логарифм. Логарифм числа x за основою e називається натуральним логарифмом і позначається $\ln x$.

2.3. Нескінченно малі (н. м.) і нескінченно великі (н. в.) функції та зв'язок між ними

Означення 2.6. 1) Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно малою, якщо

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0.$$

2) Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою* функцією (infinitesimal function) (або просто н. м.) в точці $x = a$ (або при $x \to a$), якщо

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Аналогічні означення н. м. при $x \to a - 0$, $x \to a + 0$, $x \to \infty$, $x \to a$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Для спрощення процесу доведення сформулюємо та доведемо властивості нескінченно малих для випадку послідовностей.

Теорема 2.3. Якщо $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, то $\alpha_n = x_n - a$ є нескінченно малою.

Доведення. За означенням границі послідовності маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Оскільки $\alpha_n = x_n - a$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: \quad |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Це означає, що $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$ і α_n – нескінченно мала.

Теорема 2.4. Якщо $\alpha_n = x_n - a$ – нескінченно мала, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доведення. Оскільки α_n – нескінченно мала, то за означенням 2.6 маємо:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: \quad |\alpha_n| < \varepsilon,$$

або

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Згідно з означенням границі числової послідовності одержуємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Теорема 2.5. Алгебраїчна сума (добуток) скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою.

Доведення. Доведемо теорему, наприклад, для випадку суми двох нескінченно малих послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \exists N_1 = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \forall n > N_1: \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \exists N_2 = N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \forall n > N_2: \quad |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

За $N(\varepsilon)$ оберемо $\max\{N_1, N_2\}$ та оцінимо модуль $|x_n + y_n|$:

$$|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким чином,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: \quad |x_n + y_n| < \varepsilon \leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0.$$

Теорема 2.6. Добуток нескінченно малої послідовності на послідовність обмежену є нескінченно малою послідовністю.

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ – обмежена послідовність, тоді існує таке число M, що для всіх номерів n виконується нерівність $|x_n| \le M$.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то $\forall\varepsilon > 0\left(\dfrac{\varepsilon}{M}\right) \quad \exists N = N\left(\dfrac{\varepsilon}{M}\right), \quad \forall n > N: \quad |y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Оцінимо модуль $|x_n \cdot y_n|$, маємо:

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon .$$

Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: \quad |x_n \cdot y_n| < \varepsilon \leftrightarrow \lim_{n \to \infty} x_n \cdot y_n = 0 .$$

Зауваження. Частка від ділення нескінченно малої послідовності на послідовність, яка має відмінну від нуля границю, є величина нескінченно мала.

Запам'ятай добре! Усі перераховані вище властивості мають місце і для нескінченно малих функцій.

Означення 2.7. 1) Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно великою, якщо

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty ,$$

тобто, $\forall M > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |x_n| > M$, де M – як завгодно велике додатне число.

2) Функція $f(x)$ називається *нескінченно великою* функцією (infinite function) (або просто н. в.) в точці $x = a$ (або при $x \to a$), якщо:

$$\forall M > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x: \; 0 < |x - a| < \delta(M) \Rightarrow |f(x)| > M .$$

Символічно це записують так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty .$$

Якщо ж виконується нерівність $f(x) > M \;\; (f(x) < -M)$, то пишуть

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad (\lim_{x \to a} f(x) = -\infty).$$

Аналогічно визначаються границі:

$$\lim_{x \to a \pm 0} f(x) = +\infty , \quad \lim_{x \to a \pm 0} f(x) = -\infty .$$

Мають місце теореми.

Теорема 2.7

1) Алгебраїчна сума нескінченно великих послідовностей (функцій) одного знака є нескінченно великою;
2) добуток нескінченно великих послідовностей (функцій) є нескінченно великим.

Зв'язок між н. в. та н. м. розкриває наведена нижче теорема, сформульована для послідовностей.

Теорема 2.8

1) Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно велика послідовність, то послідовність $\{\alpha_n\}=\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ є нескінченно малою;
2) Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно мала послідовність, то послідовність $\{\alpha_n\}=\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ є нескінченно великою.

Доведення. 1) Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно велика послідовність, то

$$\forall M>0 \quad \exists N \quad \forall n>N \quad |x_n|>M .$$

Тоді $\left|\frac{1}{x_n}\right|<\frac{1}{M}$. Оскільки M – як завгодно велике додатне число, то число $\varepsilon=\frac{1}{M}$ є як завгодно малим, тому

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N \quad \forall n>N \quad \left|\frac{1}{x_n}\right|<\varepsilon \leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0 .$$

2) Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно мала послідовність, то

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N \quad \forall n>N \quad |x_n|<\varepsilon .$$

Тоді $\left|\frac{1}{x_n}\right|>\frac{1}{\varepsilon}$. Оскільки ε – як завгодно мале додатне число, то число $M=\frac{1}{\varepsilon}$ є як завгодно великим, тому

$$\forall M>0 \quad \exists N \quad \forall n>N \quad \left|\frac{1}{x_n}\right|>M \leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\infty .$$

2.4. Порівняння н. м. функцій

Нехай функції $\alpha(x), \beta(x)$ - н. м. при $x \to a$, тобто $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$. Складемо відношення $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ називається н. м. *вищого порядку* (high order infinitesimal) (н. м. вищого порядку малості), ніж $\beta(x)$ при $x \to a$. Це записують так: $\alpha(x)=o(\beta(x))$ („o" маленьке від β).

2. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$ $(c \neq 0 \text{ і } c \neq \infty)$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються н. м. *одного порядку* (equal order infinitesimals) при $x \to a$. Це записують так: $\alpha(x)=O(\beta(x))$ („O" велике від β).

3. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *еквівалентними* н. м. (equivalent infinitesimal) при $x \to a$. Це записують так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Таблиця еквівалентних н. м. функцій ($\alpha(x) \to 0$).

$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$,	$e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$,
$\mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$,	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$,
$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$,	$\sqrt{1+\alpha(x)}-1 \sim \frac{1}{2}\alpha(x)$,
$\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$,	$(1+\alpha(x))^p-1 \sim p\cdot\alpha(x)$,
$a^{\alpha(x)}-1 \sim \ln a \cdot \alpha(x)$,	$\ln\cos\alpha(x) \sim -\frac{1}{2}\alpha^2(x)$.

Теорема 2.9. Н. м. функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ будуть еквівалентними ($\alpha(x) \sim \beta(x)$) при $x \to a$ тоді і тільки тоді, коли їх різниця $\alpha(x)-\beta(x)$ є н. м. вищого порядку, ніж н. м. $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to a$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай н. м. $\alpha(x) \sim \beta(x)$ (або $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$) при $x \to a$. Доведемо, що їх різниця $\alpha(x)-\beta(x)$ є н. м. вищого порядку, ніж н. м. $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to a$. Для цього розглянемо границю:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\left(1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)=1-\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1-1=0.$$

А отже $\alpha(x)-\beta(x)$ є н. м. вищого порядку, ніж н. м. $\alpha(x)$ при $x\to a$.

Достатність. Доведемо, що якщо різниця $\alpha(x)-\beta(x)$ є н. м. вищого порядку, ніж н. м. $\alpha(x)$ при $x\to a$, то $\alpha(x)\sim\beta(x)$. Дійсно

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=0\Rightarrow\lim_{x\to a}\left(1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)=0\Rightarrow 1-\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\Rightarrow\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$$

тому $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$. Цілком аналогічно доводиться, що якщо різниця $\alpha(x)-\beta(x)$ є н. м. вищого порядку, ніж н. м. $\beta(x)$ при $x\to a$, то $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Теорема 2.10. Якщо н. м. $\alpha(x)\sim\delta(x)$, $\beta(x)\sim\gamma(x)$ при $x\to a$, то справедлива рівність

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\delta(x)}{\gamma(x)}.$$

Доведення. Дійсно

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\gamma(x)}{\delta(x)}\cdot\frac{\delta(x)}{\gamma(x)}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\delta(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\delta(x)}{\gamma(x)}=1\cdot1\cdot\lim_{x\to a}\frac{\delta(x)}{\gamma(x)}.$$

Зауваження. Теорема 2.10 дає можливість замінювати під знаком границі н. м. множники та дільники на еквівалентні (н. м. доданки замінювати на еквівалентні в загальному випадку не можна).

При порівнянні нескінченно великих (н. в.) функцій мають місце аналогічні правила порівняння. Наприклад, дві н. в. функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються *еквівалентними* (equivalent) при $x\to a$, якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Так, при $x\to\pm\infty$ має місце еквівалентність:

$$\boxed{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\sim a_nx^n,}$$

тому при обчисленні границі відношення двох многочленів на нескінченності ми можемо замінити вираз під знаком границі на еквівалентне відношення старших степенів многочленів, взятих зі своїми коефіцієнтами.

2.5. Основні теореми про границю

Теорема 2.11. Границя сталого дорівнює сталому, тобто

$$\lim_{n\to\infty} k = k \text{, де } k = const.$$

Доведення. Нехай $\{x_n\} = \{k\}$, де $k = const$. Розглянемо різницю $x_n - k$, маємо: $x_n - k = k - k = 0$ – нескінченно мала величина. За теоремою 2.4 маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = k$.

Теорема 2.12. Границя суми дорівнює сумі границь.

Доведення. Нехай, наприклад, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$. Дійсно

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \ \exists N_1 = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \ \forall n > N_1 : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \ \exists N_2 = N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \ \forall n > N_2 : |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

За $N(\varepsilon)$ оберемо $\max\{N_1, N_2\}$ та оцінимо модуль $|x_n + y_n|$, маємо:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad \forall n > N : \ |(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b.$$

Зауваження. Випадок суми довільного скінченного числа числових послідовностей доводиться аналогічно.

Теорема 2.13. Границя добутку дорівнює добутку границь.

Доведення. Нехай, наприклад, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$. Дійсно, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то за теоремою 2.3 $x_n = a + \alpha_n$, де α_n – нескінченно мала величина. Аналогічно, $y_n = b + \beta_n$, де β_n – нескінченно мала. Тоді

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

Оскільки константа є величиною обмеженою, то за теоремою 2.6 величини $a\beta_n$, $b\alpha_n$ є нескінченно малими; за теоремою 2.5 величина $\alpha_n\beta_n$ також є нескінченно малою. Оскільки сума трьох нескінченно малих величин є нескінченно малою, то $x_n \cdot y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ є нескінченно мала і за теоремою 2.4.

Зауваження

1) Сталий множник можна виносити за знак границі.

Дійсно,

$$\lim_{n\to\infty} k \cdot x_n = \lim_{n\to\infty} k \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = k \cdot \lim_{n\to\infty} x_n .$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^k = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^k$.

Дійсно,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^k = \lim_{n\to\infty} \underbrace{x_n \cdot x_n \cdot \ldots \cdot x_n}_{k \quad раз} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \ldots \cdot \lim_{n\to\infty} x_n}_{k \quad раз} = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k .$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$.

Теорема 2.14. Границя частки двох послідовностей дорівнює частці границь цих послідовностей, якщо границя знаменника не дорівнює нулю, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \text{ де } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0 .$$

Зауваження. Доведення даної теореми проводиться аналогічно доведенню теореми 2.13.

Теорема 2.15.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$, де $a = const$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, де $a = const$.

Теорема 2.16. Якщо для послідовності $\{x_n\}$ відомо, що для всіх n $x_n \ge 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $a \ge 0$.

Доведення. Проведемо доведення методом від супротивного. Нехай $a < 0$, але тоді $|x_n - a| \ge |a|$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne a$. Остання рівність суперечить умові теореми. Це означає, що наше припущення хибне і $a \ge 0$.

Теорема 2.17. Якщо для послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ відомо, що $x_n \ge y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Доведення. За умовою теореми $x_n - y_n \ge 0$, тоді за теоремою 2.16

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) \ge 0 \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n \ge 0 \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \ge \lim_{n\to\infty} y_n .$$

Теорема 2.18. $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n]^{y_n} = \left[\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right]^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Запам'ятай добре! Аналогічні теореми мають місце для границь функцій в точці.

2.6. Техніка обчислення границь

1. *Безпосереднє обчислення границь шляхом підстановки граничного значення та використання основних теорем про границю.*

Приклад 2.5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3 - 2x + 3}{x+7} = \dfrac{2^3 - 2\cdot 2 + 3}{2+7} = \dfrac{7}{9}$.

Приклад 2.6. $\lim\limits_{x\to 2} 4^{\frac{2x}{x+1}} = 4^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{x+1}} = 4^{\frac{2\cdot 2}{2+1}} = 4^{\frac{4}{3}}$.

Приклад 2.7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x + \sin x}{1 + tg^2 x} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}}{1 + tg^2\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Запам'ятай добре!

1) Якщо при підстановці граничного значення одержуємо різницю або частку нескінченно великих, то кажуть, що ми маємо *невизначеність* (ambiguity, uncertainty) типу $[\infty-\infty]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

2) Відношення нескінченно малих величин називають невизначеністю типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, а добуток нескінченно малої на нескінченно велику називається невизначеністю типу $[0\cdot\infty]$.

2. *Розкриття невизначеностей типу* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$*, якщо під знаком границі стоїть дробово-раціональна функція* (fractional rational function) $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$*, де*

$$P_m(x)=p_m x^m+p_{m-1}x^{m-1}+\ldots+p_1x+p_0,$$
$$Q_n(x)=q_n x^n+q_{n-1}x^{n-1}+\ldots+q_1x+q_0,\ (x\to\infty).$$

а) Якщо $m>n$*, то* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\infty$*;*

б) якщо $m<n$*, то* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=0$*;*

в) якщо $m=n$*, то* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_m(x)}=\frac{p_m}{q_m}$,

оскільки $p_m x^m+\ldots+p_1x+p_0\sim p_m x^m$, $q_m x^m+\ldots+q_1x+q_0\sim q_m x^m$ і

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{p_m x^m}{q_m x^m}=\lim_{x\to\infty}\frac{p_m}{q_m}=\frac{p_m}{q_m}.$$

Приклад 2.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-5x^2-7}{3x^3-4}=\left|\begin{matrix}x^3-5x^2-7\sim x^3,\\ 3x^3-4\sim 3x^3,\ x\to\infty\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{3x^3}=\frac{1}{3}.$

Приклад 2.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{8x^2+x+3}}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{8x^2+x+3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}.$

Приклад 2.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x^2-7}{3x^2-4}=\infty$.

Приклад 2.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-7}{3x^2-4}=0$.

Приклад 2.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2+3}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+3}=\ln 1=0$.

3. *Розкриття невизначеностей типу* $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$*, коли під знаком границі стоїть вираз виду* $\dfrac{f_1(\sqrt[m]{P_l(x)},P_r(x))}{f_2(\sqrt[n]{P_k(x)},P_s(x))}$ *(* $x\to\infty$*).*

Як правило, при розкритті таких невизначеностей кожен многочлен під знаком границі заміняють на еквівалентний ($p_m x^m+\ldots+p_1x+p_0\sim p_m x^m$) та, виконавши необхідні скорочення, обчислюють цю границю.

Приклад 2.13.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-5)\cdot\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}{\sqrt{9x^4+2x-2}}=\left|\begin{array}{l}6x-5\sim 6x,\quad x\to\infty\\ x^3+3x^2+1\sim x^3,\ x\to\infty\\ 9x^4+2x-2\sim 9x^4,\ x\to\infty\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{6x\cdot\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{9x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x\cdot x}{3x^2}=2\cdot$$

Приклад 2.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+8x+5}{2x-3}-2x\right)=[\infty-\infty]$.

Розв'язання. Тут ми маємо невизначеність типу $[\infty-\infty]$. Перейдемо до невизначеності $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для цього зведемо до спільного знаменника вирази, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+8x+5-4x^2+6x}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{14x+5}{2x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{array}{l}14x+5\sim 14x,\ x\to\infty\\ 2x-3\sim 2x,\ x\to\infty\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{14x}{2x}=7.$$

4. *Розкриття невизначеностей типу* $[\infty - \infty]$ *з ірраціональними виразами під знаком границі* ($x \to \infty$).

Для розкриття таких невизначеностей потрібно домножити та поділити вираз, що стоїть під знаком границі, на спряжений. Виконавши необхідні перетворення обчислюємо дану границю.

Приклад 2.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-5x+3}\right)=[\infty-\infty]$.

Розв'язання. Домножимо вираз, що стоїть під знаком на границі, на спряжений:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x-1\right)-\left(x^2-5x+3\right)}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-5x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x-4}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-5x+3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{2|x|}=\frac{8}{2}=4.$$

Приклад 2.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-5}\right)=[\infty-\infty]$.

Розв'язання. Домножимо вираз, що стоїть під знаком на границі, на спряжений:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3\right)-\left(x^2-5\right)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-5}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=8\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=8\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2|x|}=0.$$

5. *Розкриття невизначеностей типу* $\left[\frac{0}{0}\right]$ *при* $x \to a$, *коли під знаком границі стоїть відношення многочленів.*

Для розкриття таких невизначеностей потрібно виділити в чисельнику та знаменнику дробу, що знаходиться під знаком границі, множник $(x-a)$. Виконавши необхідні скорочення обчислюємо дану границю.

Приклад 2.17. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-3}{9x^2-8x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Оскільки при $x=1$ многочлени, що стоять в чисельнику і знаменнику, перетворюються на нуль, то за теоремою Безу вони розкладаються на множники, серед яких обов'язково присутній множник $(x-1)$.

В чисельнику виконаємо ділення x^3+x^2+x-3 на $(x-1)$ в стовпчик:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2+x-3 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2} & x^2+2x+3 \\ 2x^2+x-3 & \\ \underline{2x^2-2x} & \\ 3x-3 & \\ \underline{3x-3} & \\ 0 & \end{array}$$

, тоді $x^3+x^2+x-3=(x-1)\cdot\left(x^2+2x+3\right)$.

Оскільки добуток коренів знаменника $-\frac{1}{9}$, один з них $x=1$, то другий $x=-\frac{1}{9}$. Отже, $9x^2-8x-1$ розкладається на множники:

$$9(x-1)\left(x+\frac{1}{9}\right)=(x-1)(9x+1).$$

Маємо $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2+2x+3\right)}{(x-1)(9x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2x+3}{9x+1}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Приклад 2.18 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Оскільки при $x=1$ многочлени, що стоять в чисельнику і знаменнику, перетворюються в нуль, то за теоремою Безу вони розкладаються на множники, серед яких обов'язково присутній множник $(x-1)$.

В чисельнику виконаємо ділення x^3+2x^2-x-2 на $(x-1)$ в стовпчик:

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-x-2 & x-1 \\ \hline \underline{x^3-x^2} & x^2+3x+2 \\ \quad 3x^2-x-2 & \\ \quad \underline{3x^2-3x} & \\ \qquad 2x-2 & \\ \qquad \underline{2x-2} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

, тоді $x^3+2x^2-x-2=(x-1)\cdot\left(x^2+3x+2\right)$.

Оскільки добуток коренів знаменника -4, один з них $x=1$, то другий $x=-4$. Отже, x^2+3x-4 розкладається на множники: $(x-1)(x+4)$.

Маємо $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+3x+2\right)}{(x-1)(x+4)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+3x+2}{x+4}=\dfrac{6}{5}$.

6. *Розкриття невизначеностей типу* $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ *при* $x\to a$ *з використанням таблиці еквівалентних величин.*

Приклад 2.19

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{\sin2x\cdot\mathrm{tg}x}=\left|\begin{array}{l}1-\cos4x=2\sin^2 2x\sim2(2x)^2=8x^2,\ x\to0\\ \sin2x\sim2x,\quad x\to0\\ \mathrm{tg}x\sim x,\quad x\to0\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{8x^2}{2x\cdot x}=\frac{8}{2}=4.$$

Приклад 2.20

$$\lim_{x\to0}\frac{5^x-1}{\ln(1-3x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}5^x-1\sim x\cdot\ln5,\ x\to0\\ \ln(1-3x)\sim-3x,\ x\to0\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\ln5}{-3x}=-\frac{\ln5}{3}.$$

Приклад 2.21. Довести, що при $x\to0$ н. м. $e^{3x}-e^{2x}$ і $\sin2x-\sin x$ будуть еквівалентними.

Розв'язання. Знайдемо границю відношення цих функцій.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 2x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\left(e^{x}-1\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to 0\\ e^{x}-1\sim x,\\ \sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2},\\ \cos\frac{3x}{2}\to 0,\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\cdot x}{2\cdot\frac{x}{2}\cdot 1}=1$$

Отже, за означенням ці величини еквівалентні.

Запам'ятай добре! В тих випадках, коли потрібно розкрити невизначеність типу $[0\cdot\infty]$, її зводять шляхом елементарних перетворень до невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, які розкривають, використовуючи таблицю еквівалентностей.

Приклад 2.22. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)\cdot\left[\ln(x+1)-\ln(x-2)\right]=[\infty-\infty]$.

Розв'язання. Перейдемо до іншої невизначеності. Для цього використаємо властивості логарифмічної функції:

$$\lim_{x\to+\infty}(x+3)\left[\ln(x+1)-\ln(x-2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+3)\cdot\ln\frac{(x+1)}{(x-2)}\right]=[\infty\cdot 0]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+3)\ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right)\right]=\left|\ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right)\sim\frac{3}{x-2},\ x\to+\infty\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+3)\cdot\frac{3}{x-2}\right]=3\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{array}{l}x+3\sim x,\ x\to\infty\\ x-2\sim x,\ x\to\infty\end{array}\right|=3\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=3.$$

Приклад 2.23. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]$.

Розв'язання. Перетворимо невизначеність $[0\cdot\infty]$ в невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ (це завжди можна зробити), після чого приведемо границю до виду, коли можливе застосування еквівалентних перетворень.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-x)}=$$

$$=\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-x)\sim\frac{\pi}{2}(1-x),1-x\to 0\right|=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\frac{\pi}{2}(1-x)}=\frac{2}{\pi}.$$

Приклад 2.24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{\sin 3(x-1)}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Оскільки при $x=1$ многочлен в чисельнику перетворюється в нуль ($x=1$ - корінь чисельника), то за теоремою Безу він розкладається на множники, один з яких $(x-1)$. За теоремою Вієта другий корінь $x=-5$. Тому $x^2+4x-5=(x-1)(x-(-5))$. Маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{\sin 3(x-1)}=\left|\sin 3(x-1)\sim 3(x-1),\ x\to 1\right|=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{3(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{3}=2.$$

Приклад 2.25. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)\cdot\left[\ln(3x-2)-\ln(x+1)\right]=\left[\infty\cdot(\infty-\infty)\right].$

Розв'язування. Перейдемо до іншої невизначеності. Для цього використаємо властивості логарифмічної функції:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x-5)\cdot\ln\frac{3x-2}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-5)\cdot\ln\frac{3(x+1)-5}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-5)\cdot\ln\left(3-\frac{5}{x+1}\right)\right].$$

Оскільки $\ln\left(3-\dfrac{5}{x+1}\right)\to\ln 3$ при $x\to+\infty$, то невизначеності в останній границі немає і

$$\lim_{x\to+\infty}(x-5)\cdot\left[\ln(3x-2)-\ln(x+1)\right]=+\infty\cdot\ln 3=+\infty.$$

7. *Розкриття невизначеностей типу* $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ *при* $x\to a$ *з ірраціональними виразами під знаком границі.*

Для розкриття таких невизначеностей потрібно домножити і поділити вираз, що стоїть під знаком границі, на спряжений до виразу, який містить ірраціональність. Виконавши необхідні перетворення обчислюємо дану границю.

Приклад 2.26. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{5-2x}-3}{3x^3+6x^2-5x-10}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для її розкриття потрібно звільнитися від ірраціональності у чисельнику. З цією метою помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $\sqrt{5-2x}+3$.

$$\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{5-2x}-3\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}{\left(3x^3+6x^2-5x-10\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{\left(5-2x\right)^2-3^2}{\left(3x^3+6x^2-5x-10\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{-2x-4}{\left(3x^3+6x^2-5x-10\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Оскільки при $x=-2$ многочлен $3x^3+6x^2-5x-10$ в знаменнику перетворюється в нуль, то за теоремою Безу знаменник ділиться на різницю $\left(x-(-2)\right)$ без остачі. Виконаємо ділення $3x^3+6x^2-5x-10$ на $x+2$ в стовпчик:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+6x^2-5x-10 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{3x^3+6x^2} & 3x^2-5 \\ -5x-10 & \\ \underline{-5x-10} & \\ 0 & \end{array}$$

, тоді $3x^3+6x^2-5x-10=\left(x+2\right)\cdot\left(3x^2-5\right)$.

Отже,

$$\lim_{x\to-2}\frac{-2\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)\left(3x^2-5\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{-2}{\left(3x^2-5\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=\frac{-2}{7\cdot\left(3+3\right)}=-\frac{1}{21}.$$

Приклад 2.27. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для її розкриття потрібно звільнитися від ірраціональності у чисельнику та знаменнику. З цією метою помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})$. Маємо:

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}=$$

$$\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10})(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(3x+7-2x-10)(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(4x+13-x-22)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(3x-9)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}}{\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}}=\frac{1}{3}\frac{5+5}{4+4}=\frac{5}{12}.$$

8. *Розкриття невизначеності типу* $\left[1^{\infty}\right]$ *з використанням другої важливої границі*

$$\lim_{\alpha(x)\to0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e, \qquad (*)$$

тут $\alpha(x)$ *довільна н. м. функція* $\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e\right\}$.

Приклад 2.28. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x}$.

Розв'язання. *Спосіб І.* Маємо невизначеність $\left[1^{\infty}\right]$. Виконаємо тотожні перетворення, які приведуть границю до виду (*)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x}{x+2}-1\right)\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-2}}\right]^{\frac{-2}{x+2}\cdot x}.$$

Вираз, що знаходиться в квадратних дужках, приведено до виду (*), де $\alpha(x)=\frac{-2}{x+2}\to0$ при $x\to\infty$, тому $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-2}}=e$. Отже, матимемо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-2}{x+2}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-2x}{x}}=e^{\frac{-2}{1}}=e^{-2}.$$

Спосіб II.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-2}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+2}\right)^x=\left\{\begin{matrix}\alpha(x)=\dfrac{-2}{x+2}, \quad \alpha(x)\to 0\\ при \quad x\to\infty;\ x=-2\dfrac{1+\alpha(x)}{\alpha(x)}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{-2\frac{1+\alpha(x)}{\alpha(x)}}=\lim_{\alpha(x)\to 0}\left(\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right)^{-2-2\alpha(x)}=$$

$$=\left[\lim_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(-2-2\alpha(x))}=e^{-2}.$$

Приклад 2.29. $\lim\limits_{x\to 2}\left(5-2x\right)^{\frac{2x}{x-2}}$.

Розв'язання. *Спосіб I.* Маємо невизначеність $\left[1^{\infty}\right]$. Виконаємо тотожні перетворення, які приведуть границю до виду (*)

$$\lim_{x\to 2}\left(5-2x\right)^{\frac{2x}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(1+\left(4-2x\right)\right)^{\frac{2x}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left[\left(1+\left(4-2x\right)\right)^{\frac{1}{4-2x}}\right]^{\left(4-2x\right)\cdot\frac{2x}{x-2}}.$$

Вираз, що знаходиться в квадратних дужках, приведено до виду (*), де $\alpha\left(x\right)=4-2x\to 0$ при $x\to 2$, тому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(4-2x\right)\right)^{\frac{1}{4-2x}}=e$. Отже, матимемо:

$$\lim_{x\to 2}\left(5-2x\right)^{\frac{2x}{x-2}}=\lim_{x\to 2}e^{\left(4-2x\right)\cdot\frac{2x}{x-2}}=\lim_{x\to 2}e^{\frac{-4x\left(x-2\right)}{x-2}}=\lim_{x\to 2}e^{-4x}=e^{-8}.$$

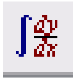
Спосіб II.

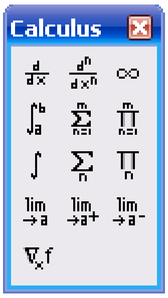
$$\lim_{x\to 2}\left(5-2x\right)^{\frac{2x}{x-2}}=\lim_{x\to 2}e^{\ln\left(5-2x\right)^{\frac{2x}{x-2}}}\lim_{x\to 2}e^{\frac{2x}{x-2}\ln\left(5-2x\right)}=e^{4\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(1+(4-2x))}{x-2}}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}(4-2x)\to 0 \quad при \quad x\to 2\\ \ln(1+(4-2x))\sim 4-2x\end{matrix}\right\}=e^{4\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-2x}{x-2}}=e^{4\lim\limits_{x\to 2}\frac{-2(x-2)}{x-2}}=e^{-8}.$$

2.7. Обчислення границь за допомогою програмного пакета *MathCad*

Обчислення границь функцій та послідовностей – одна з найважливіших задач математичного аналізу. Таке обчислення часом є досить складним з технічної точки зору, тому застосування комп'ютера може: а) значно зекономити сили і час, якщо за мету ставити лише відшукання відповіді; б) допомогти проконтролювати отриманий результат, якщо обчислення границі має бути виконане у розгорнутій формі (навчальний процес).

В середовищі MathCad для обчислення границі слід звернутися до меню Calculus  (Вычисления), яке можна знайти на панелі Math (Математика) (шлях: View→Toolbars→Math).



Дане меню містить три види операторів границі: 1) границя в точці або *двостороння границя* (Two-sided Limit), можна ввести також комбінацією клавіш ([Ctrl]+[L]); 2) границя функції справа (Limit from Above), можна ввести також комбінацією клавіш ([Ctrl]+[Shift]+[A]); 3) границя функції зліва (Limit from Below), можна ввести також комбінацією клавіш ([Ctrl]+[Shift]+[B]).

Відмітимо, що на панелі Calculus (Вычисления) знаходиться символ нескінченності «∞» (Infinity), який можна також ввести комбінацією ([Ctrl]+[Shift]+[Z]). Символ «∞» в нотації MathCad відповідає символу «$+\infty$» у звичайній математичній нотації.

Як оператор, який запускає обчислення границі, треба використовувати **лише** оператор символьного обчислення «→» (Evaluate Symbolically), його можна ввести комбінацією ([Ctrl]+[.]). В іншому випадку система видасть повідомлення про помилку: «You must evaluate this operator symbolically».

Система MathCad має досить широкі можливості для обчислення як стандартних, так і вельми складних границь. Так, нижче на рис. 2.5 наведені приклади обчислення деяких границь в середовищі MathCad.

Зауважимо, що:

- якщо MathCad не в змозі обчислити границю, то як відповідь видається та сама границя;
- у випадку, коли границя не визначена (і не прямує до нескінченності), система видасть повідомлення «undefined» - «невизначена», дивись десятий приклад;

- інколи для спрощення отриманого результату доцільно використовувати символьний оператор спрощення «simplify» - «спростити», дивись четвертий приклад.

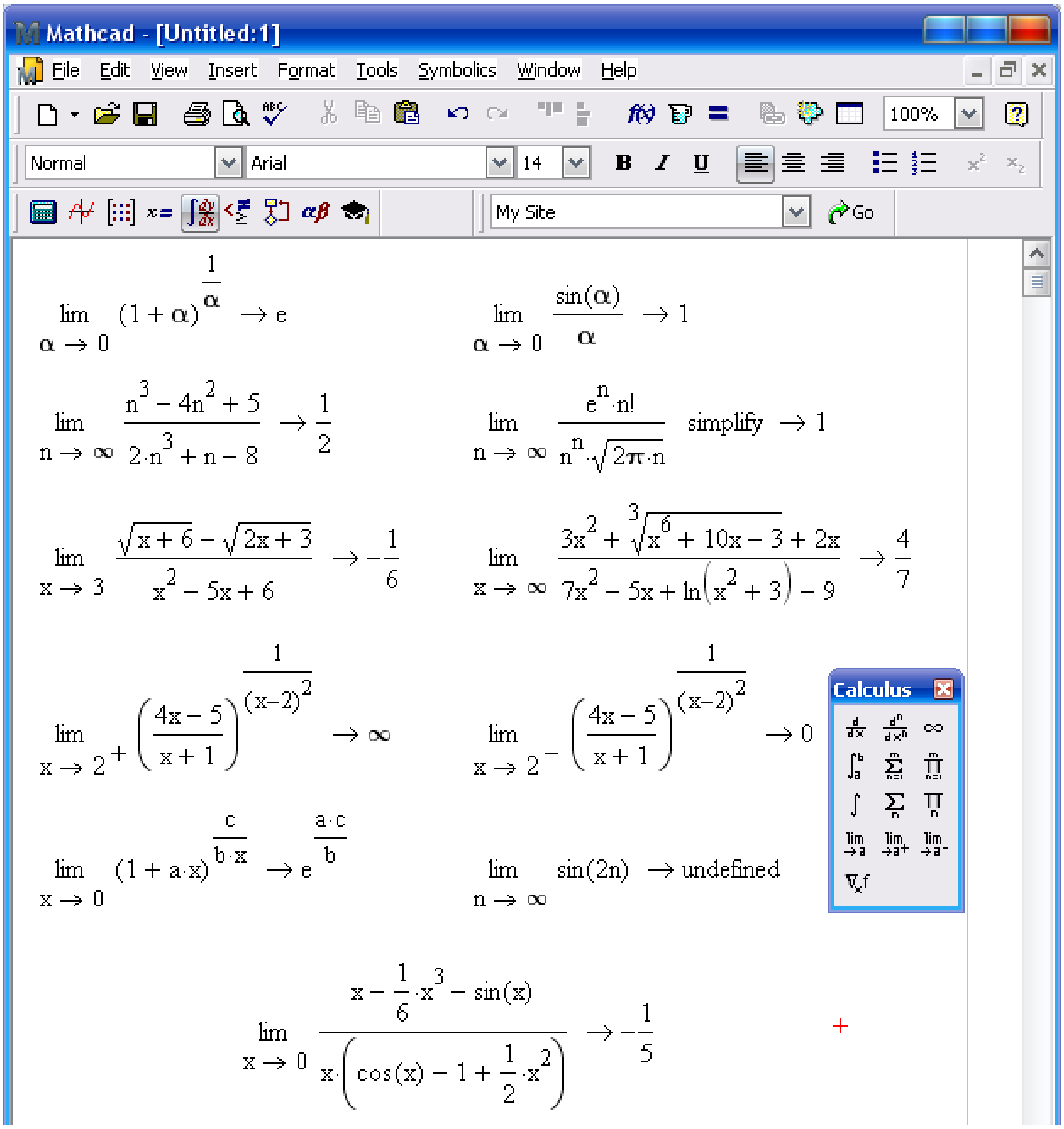


Рис. 2.5

2.8. Неперервність функції

Означення 2.8. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0 (continuous function at point), якщо:

1) вона визначена в цій точці і в деякому її околі;

2) нескінченно малому приростові аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції:

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0, \text{ або } \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (2.7)$$

Приклад 2.30. Дослідити на неперервність функцію $y = \cos x$ в точці x_0.

Розв'язання.

$$\forall x_0 \in R, \quad \exists f(x_0) = \cos x_0, \ \exists f(x_0 + \Delta x) = \cos(x_0 + \Delta x);$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos(x_0) = -2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\sin\frac{\Delta x}{2} \to 0$; $\sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ – величина обмежена, тому, за теоремою 2.4, $\Delta y \to 0$. Отже, $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$, і тому, за означенням 2.8, функція $y = \cos x$ – неперервна в точці x_0.

Неперервність функції в точці можна означити і по-іншому.

Означення 2.9. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо вона має в цій точці границю, яка дорівнює значенню функції в точці x_0, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (2.8)$$

Рівність (2.8) можна деталізувати: границя зліва в точці x_0 має дорівнювати границі справа і дорівнювати значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \qquad (2.8^*)$$

Означення 2.10. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною на проміжку* (continuous function on interval), якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Арифметичні операції над неперервними функціями приводять знову до неперервних функцій.

Теорема 2.19. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ є неперервними в точці x_0, тоді неперервними в цій точці будуть також функції:

1) $y_1(x)=\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x),\ \forall\alpha,\beta\in R$;

2) $y_2(x)=f(x)\cdot g(x)$;

3) $y_3(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ за додаткової умови $g(x_0)\neq 0$.

Доведення. Нехай функції $f(x),\ g(x)$ –неперервні в точці x_0. Тоді, за означенням 2.9, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$. Використаємо теореми про арифметичні операції над функціями, що мають границю:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} y_1(x)=\alpha\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\beta\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\alpha\cdot f(x_0)+\beta\cdot g(x_0)=y_1(x_0)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} y_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0)=y_2(x_0)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} y_3(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}=y_3(x_0)$.

Бачимо, що означення 2.9 виконується в кожному з цих випадків. Тобто ми показали, що при виконанні арифметичних дій над неперервними функціями ми знову отримаємо неперервні функції.

Неперервність складеної функції

Теорема 2.20. Якщо функція $u=\varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $f(u)$ неперервна в точці $u_0=\varphi(x_0)$, то складена функція $f(\varphi(x))=F(x)$ неперервна в точці x_0.

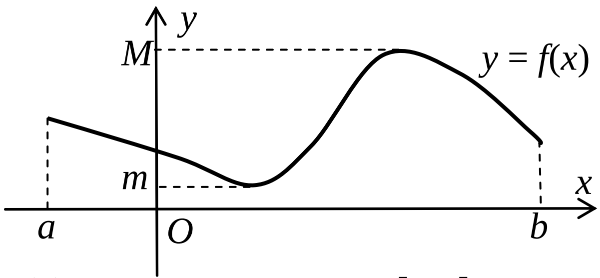
Доведення. Справді, оскільки функція $u=\varphi(x)$ неперервна в точці x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0$; $f(u)$ – неперервна в точці u_0, тому $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)=f(\varphi(x_0))=F(x_0)$. А це означає, що функція $f(\varphi(x))=F(x)$ неперервна в точці x_0.

Властивості функцій, неперервних на відрізку

Теорема 2.21. (Вейєрштрасса). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона:

1) обмежена (bounded function) на цьому відрізку;

2) досягає на цьому відрізку свого найбільшого $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$ та найменшого $m=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$ значень (рис. 2.6).



$$m=\inf_{[a,b]} f(x),\ M=\sup_{[a,b]} f(x);\ \forall x\in[a,b]:\quad m\le f(x)\le M\ .$$

Рис. 2.6

Теорема 2.22. (Больцано – Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $f(a)<C<f(b)$, то всередині відрізка існує принаймні одна точка *c*, в якій функція набуває рівного *C* значення (рис. 2.7).

$$f(a)<C<f(b)\Rightarrow \exists c\in[a,b],\ f(c)=C\,.$$

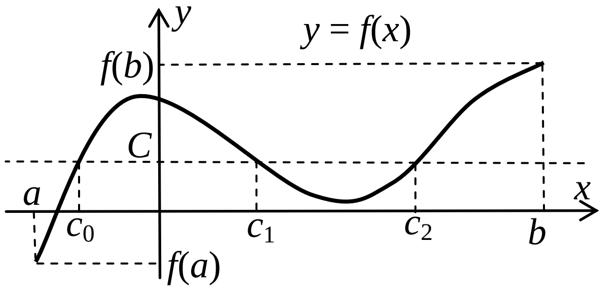
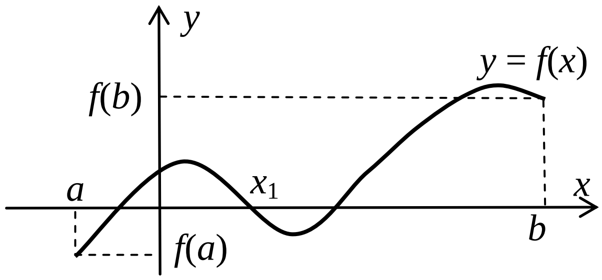


Рис. 2.7

Наслідок з теореми Больцано – Коші. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і в його кінцевих точках набуває різних за знаком значень, то всередині відрізка існує принаймні одна точка, в якій значення функції дорівнює нулю (рис. 2.8).



$$f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \exists x_1 \in [a,b],\ f(x_1)=0$$

Рис. 2.8

Точки розриву функції та їх класифікація

Означення 2.11. Якщо функція $y=f(x)$ в точці x_0 не є неперервною, то точка $x=x_0$ називається *точкою розриву* функції (discontinuity point).

Зауваження. Елементарна функція не може мати розривів у внутрішніх точках своєї області визначення.

Точки розриву функції можна поділити на види:

- *Точки розриву першого роду* (ordinary discontinuity).

Означення 2.12. Точка $x=x_0$ називається *точкою розриву* функції $y=f(x)$ *першого роду*, якщо існують скінченні односторонні границі при $x \to x_0$, але вони не рівні між собою.

$$x_0 \text{ – точка розриву першого роду } \overset{df}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=b_1, \quad \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=b_2, \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}.$$

Приклад 2.31. Дослідити на розрив функцію $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$.

Розв'язання. Оскільки $f(-2)$ не існує, то $x=-2$ – точка розриву функції.

Обчислимо односторонні границі функції в точці $x=-2$:

$$\lim_{x\to-2-0} f(x)=\lim_{x\to-2-0}\frac{-(x+2)}{x+2}=-1, \qquad \lim_{x\to-2+0} f(x)=\lim_{x\to-2+0}\frac{x+2}{x+2}=1.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to-2+0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to-2-0} f(x)$, то точка $x=-2$ є точкою розриву першого роду.

Графік даної функції подано на рисунку 2.9.

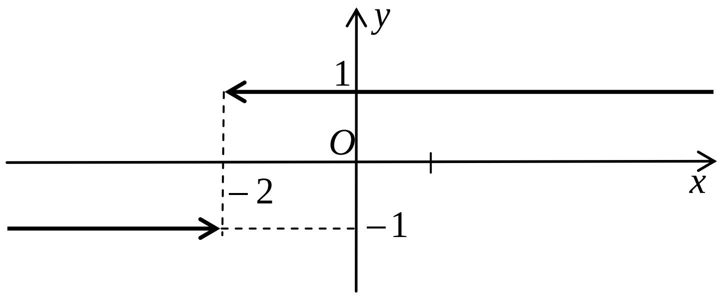


Рис. 2.9

- *Точки розриву другого роду* (no ordinary discontinuity).

Означення 2.13. Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву* функції $y = f(x)$ *другого роду*, якщо хоч би одна з односторонніх границь (зліва чи справа) при $x \to x_0$ не існує (зокрема, дорівнює нескінченності (infinite discontinuity)).

Приклад 2.32. Дослідити на розрив функцію $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання. Оскільки $f(1)$ не існує, то $x = 1$ – точка розриву функції. Обчислимо односторонні границі функції в точці $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \text{ (оскільки } x \to 1-0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}} \to 0\text{);}$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = \infty, \text{ (оскільки } x \to 1+0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to +\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty\text{).}$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$ не існує, то точка $x = 1$ є точкою розриву другого роду.

Для схематичної побудови графіка функції, окрім односторонніх границь в точці $x = 1$, знайдемо границю при $x \to \pm\infty$:

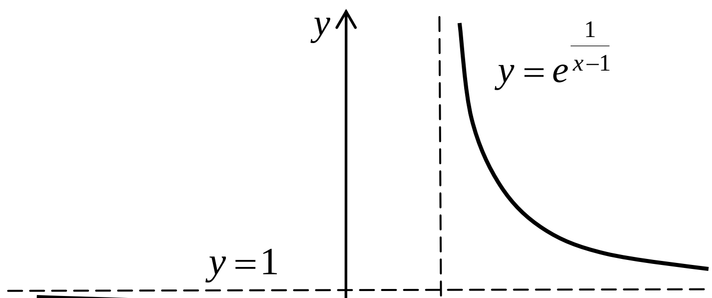


Рис. 2.10

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1,$$

(оскільки

$$x \to \pm\infty \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}} \to 1).$$

А це означає, що пряма $y = 1$ є одночасно лівою і правою горизонтальною асимптотою.

Графік даної функції подано на рисунку 2.10.

- *Точки усувного розриву* (removable discontinuity, removable jump).

Означення 2.14. Точка $x = x_0$ називається *точкою усувного розриву* функції $y = f(x)$, якщо в цій точці виконується умова $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$, але або $b \neq f(a)$, або $f(a)$ не існує.

Приклад 2.33. Дослідити на розрив функцію $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Розв'язання. Оскільки $f(1)$ не існує, то $x = 1$ – точка розриву функції. Обчислимо границі зліва і справа в точці $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} (x+1) = 2,$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} (x+1) = 2.$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 2$, то точка $x = 1$ є точкою усувного розриву.

Отже маємо: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x + 1 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Схематичний графік зображено на рисунку 2.11.

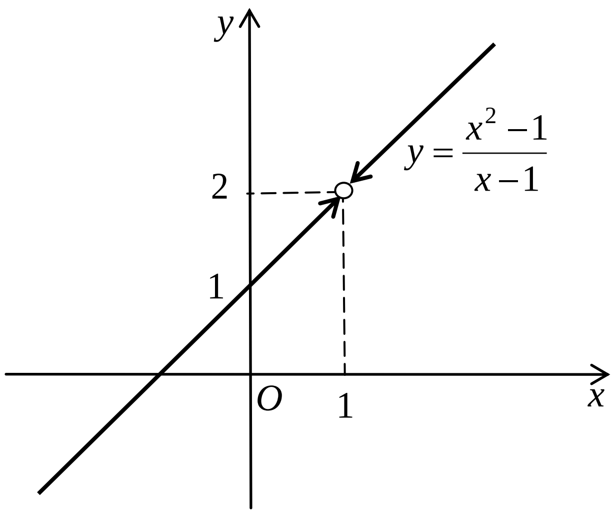


Рис. 2.11

Приклад 2.34. Дослідити функцію $f(x)=\dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ і визначити вид точок розриву, якщо вони є. Зробити схематичний рисунок.

Розв'язання. Дана функція визначена для всіх $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Оскільки $f(1)$ не існує, то $x=1$ – точка розриву функції.

Обчислимо односторонні границі в точці $x=1$:

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=2, \text{ (т. як } x\to1-0\Rightarrow\frac{1}{x-1}\to-\infty\Rightarrow 2^{\frac{1}{x-1}}\to0\text{);}$$

$$\lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0, \text{ (т. як } \frac{1}{x-1}\to+\infty\Rightarrow 2^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty\text{).}$$

Оскільки границі $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)$ існують, проте $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-0} f(x)$, то точка $x=1$ є точкою розриву першого роду.

В точці $x=1$ функція має стрибок, що дорівнює різниці

$$f(1+0)-f(1-0)=0-2=-2.$$

Для схематичної побудови графіка функції знайдемо її границю при $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1, \text{ (т. як } x\to\pm\infty\Rightarrow\frac{1}{x-1}\to0\Rightarrow 2^{\frac{1}{x-1}}\to1\text{).}$$

А це означає, що пряма $y=1$ є горизонтальною асимптотою.

Схематичний графік даної функції зображено на рис. 2.12.

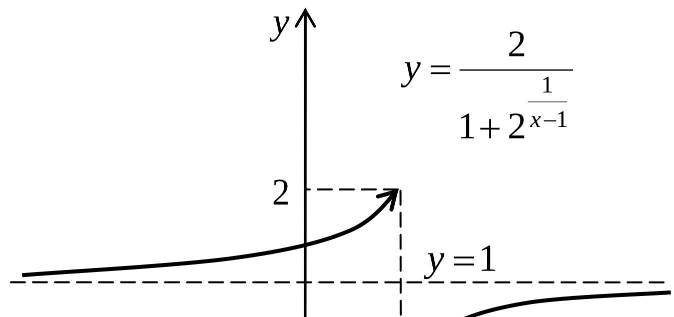


Рис. 2.12

Приклад 2.35. Дослідити задану функцію на неперервність і визначити рід точок розриву, якщо вони є. Зробити схематичний рисунок.

$$f(x)=\begin{cases} -x-2, & x<-1, \\ 1-x^2, & -1\le x\le 1, \\ x-1, & x>1. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо неелементарну функцію, що неперервна на кожному з інтервалів: $(-\infty,-1),[-1,1],(1,+\infty)$. Очевидно, що вона може бути розривною лише в точках $x=-1$, $x=1$, в яких змінюється аналітичний вираз, що задає функцію. Перевіримо умови неперервності в цих точках.

1) Розглянемо точку $x=-1$.

Функція визначена в цій точці і $f(-1)=1-(-1)^2=0$.

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}(-x-2)=-1,\ \lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\left(1-x^2\right)=0.$$

Отже, існують односторонні границі функції в точці $x=-1$, але вони не рівні між собою. А це означає, що дана точка є точкою розриву першого роду.

2) Розглянемо точку $x=1$.

Функція визначена в цій точці і $f(1)=1-1^2=0$.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}\left(1-x^2\right)=0,\ \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(x-1)=0.$$

Отже, існують односторонні границі функції в точці $x=1$, вони рівні між собою і дорівнюють значенню функції в цій точці: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=f(1)$. Це означає, що в даній точці функція неперервна.

Зробимо схематичний рисунок (рис. 2.13).

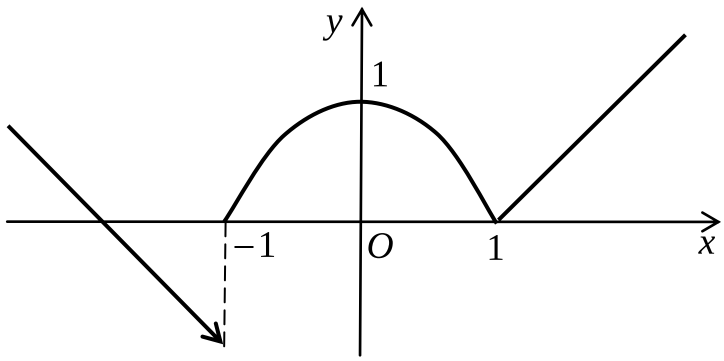


Рис. 2.13

Питання для самоперевірки

1. Яка послідовність називається збіжною? Сформулюйте означення границі послідовності.
2. Сформулюйте означення границі функції за Гейне.
3. Сформулюйте означення границі функції за Коші.
4. Сформулювати означення границі функції на нескінченності.
5. Дайте означення односторонніх границь функції в точці.
6. Сформулюйте основні теореми про границю. Будь-які чотири з них доведіть.
7. Сформулюйте і доведіть теорему про першу важливу границю.
8. Сформулюйте теорему про другу важливу границю.
9. Дайте означення нескінченно малої функції в точці. Наведіть приклад.
10. Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то що можна сказати про функцію $\alpha(x) = f(x) - b$ при $x \to a$?
11. Дайте означення нескінченно великої функції в точці. Наведіть приклад.
12. Якщо $\alpha(x)$ н. м. вищого порядку, ніж $\beta(x)$ при $x \to a$, то …
13. Яка з наведених функцій має вищий порядок малості при $x \to 0$: $f_1(x) = 5x^3 + x^2 + 3x$, $f_2(x) = x^2 + 3x + \sqrt{x}$? Відповідь обґрунтуйте.
14. Які н. м. функції називаються функціями одного порядку? Як це записують?
15. Які н. м. функції називаються еквівалентними функціями? Як це записують?
16. Як визначається еквівалентність двох нескінченно великих функцій?
17. Сформулюйте і доведіть теореми про еквівалентні н. м. функції.
18. Перерахуйте основні еквівалентності.
19. Яка з наведених функцій має вищий порядок малості при $x \to 0$: $f_1(x) = 2x^3 - x^2 + 3\,\mathrm{tg}\,x$, $f_2(x) = x^2 + 2x + \arcsin\sqrt{x}$? Відповідь обґрунтуйте.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 2.1. Знайти границі функцій.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+3x^2-4}{\sqrt{9x^6+4x}}$, $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{4-x^2}\right)$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x}{x^3+x^2-x-1}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{5x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{\operatorname{tg}5x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^x-5^{2x}}{3x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^x$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+2x}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x}{x+1}-2x\right)$, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+1}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$,

$\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{x+1}{3x-3}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{2x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\ln(1+3x)}$, $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec}x}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln x-\ln(x+1)\right]$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^8+3x+4}}{3x^4-2}\right)$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x+\sin x}{3\sin2x}$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin3x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)$, $\lim\limits_{x\to2}(x-1)^{\frac{3x}{x-2}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x+3}-x\right)$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x-4}\right)^{1-x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x-2}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{3x^2}\right)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-8}+x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin5x}}{\ln(1+2x)}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x-\sin2x}{3x}$,

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\ln\dfrac{x}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-2}-\sqrt{x^2-4}\right)$,

$\lim\limits_{x\to-1}(2+x)^{\frac{x}{3x+3}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1-x^2\right)}{\operatorname{arctg}^2 2x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-8}+x}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\left[\ln3x-\ln(3x+1)\right]$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6^x-1}{4x}$,
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x-\sin2x}{3x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin5x}-1}{\ln(1+2x)}$, $\lim\limits_{x\to-1}(2+x)^{\frac{x}{3x+3}}$,
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+3x+1}\right)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{\sqrt{4x^4+5x^3}}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x-8}$, $\lim\limits_{x\to2}(3-x)^{\frac{2x}{x-2}}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}^2(x/3)}{2x^2}$,
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x-2)-\ln x\right]$, $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\mathrm{ctg}^2x}$,
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x+3}{x^4-12x+1}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)$,
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{2x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to-2}(3+x)^{\frac{3x}{x+2}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{32x^5-x^8}}{e^{5x}-1}$,
$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\left[\ln(2x+1)-\ln x\right]$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{3x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{2x}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{9x^2-x+3}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^x-1}{5x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+1}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{6x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos5x}{1-\cos3x}$,
$\lim\limits_{x\to-1}(2+x)^{\frac{x-1}{x+1}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x-1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln x-\ln(4x-3)\right]$,
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\mathrm{arctg}\,3x}{\ln(1-2x)}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^3-8}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^2}{3x^4+1}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{5x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x^2-x+2}-\sqrt{5x^2+2x-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{5x^2}$,
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{3x}$, $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{3x+2}{x-1}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin3x}-1}{2x}$, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$,
$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x+\sin5x}{x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{4x}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x^3-x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{x^2+3x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}$, $\lim\limits_{x\to -3}(4+x)^{\frac{x-2}{x+3}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3x-2}}{x+5}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{2x+1}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{e^{3x}-1}$,

$\lim\limits_{x\to +\infty}(3x+1)\left[\ln(x-1)-\ln(x+2)\right]$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-1}{5x}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{2-x}-1}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3x+2}{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\ln(1+3x)}$,

$\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-1)\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{-4x}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+5}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-1}{4x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-\sqrt{4x^2+2x+5}\right)$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{3x-3}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin x}$, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x^3}-\dfrac{1}{x-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{3x+4}{x-1}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{e^{7x}-1}$,

$\lim\limits_{x\to +\infty}(3x+2)\left[\ln(2x)-\ln(2x-1)\right]$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x-1}\right)^{3x}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+4}{4x^3+3x^2+1}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-1}{5x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{16x^4-x^8}}{e^{8x}-1}$,

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{2x-4}$, $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{2x-3}{x}}$, $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+5x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x+1)\left[\ln(4x)-\ln(4x+1)\right]$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{4x+3}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{2^x-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2-3x-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\operatorname{tg}^2 2x}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{4x}$, $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{5x-3}{x-2}}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+4x+5}$, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{e^{\sin x}-1}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left[\ln(2x-3)-\ln(x+1)\right]$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x+\sin 5x}{2x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x-1}-\sqrt{x^2+3x-2}\right)$,

$\lim\limits_{x\to3}\frac{2x-6}{\sqrt{x-1}-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x-1}{8x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{4x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(3x+5)-\ln 3x\right]$,

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\frac{1}{\cos x}\right)$, $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3-3x+1}{2x^5+3x^4+1}$, $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x+4}{x^3+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\ln(x-3)-\ln x\right]$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{5-x}-2}$,

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3\sin^2 2x}$;, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{x-3}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-3x)}{5x}$, $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\operatorname{arctg}(x+2)}{4-x^2}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+1}{2x+\sqrt[3]{x}}$, $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-3x-10}{x^3+x^2-2x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)\left[\ln 5x-\ln(4x+3)\right]$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}10x}{\sin^2 2x}$,

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{10-x}-3}{2x-2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{-\frac{1}{\cos x}}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{\sin 3x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin\sqrt[3]{x^4}}{x-\sqrt[3]{x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+3}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2+5x-6}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln(2x-1)-\ln x\right]$,

$\lim\limits_{x\to0}\frac{6x}{\sqrt{x+4}-2}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{7^x-1}{3x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{3\sin^2 x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{5x}$, $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{2}{\sin x}}$,

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\operatorname{arctg}3x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+14}+x}{3x+5}$, $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-4x-5}{x^3-3x^2-50}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(3x+2)-\ln x\right]$,

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$, $\lim\limits_{x\to64}\frac{\sqrt{x}-8}{4-\sqrt[3]{x}}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-2x^2)}{5x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+2x^2}{\sin^2(x/4)}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x^2}-1}{1-\cos x}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{x-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)^2 x}{5x^3+2}$, $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{4}{4-x^2}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln x^2-\ln(x-1)\right]$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1}$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+6x)}{\sin 4x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9^x-1}{3x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 3x}-1}{\arcsin 2x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+3}\right)^{2x-1}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4x}\right)$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3-8}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\left[\ln(4x-1)-\ln x\right]$, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-\sqrt{3x}}{x-3}$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 5x}{\sin 3x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 6x}-1}{2x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{\operatorname{tg} x}$, $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{3}{x-1}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+2}}{4x+1}$, $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+4x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(6x-1)\left[\ln x-\ln(x-2)\right]$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^x}{\sin 2x}$,

$\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$, $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1-3x}{4x}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x}{2^x-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+6\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$, $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-2x-15}{x^2+3x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{3x}, a>0, a\neq1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-5x)}{6x}$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{3\sin^2 2x}$, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-\sqrt{x+9}}{2x^2+x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+4)\left[\ln x-\ln(2x-3)\right]$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right)$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3+2}{\sqrt{4x^8+2x^2+4}}$, $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^3-16x}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{3\operatorname{tg}^2 x}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin \pi x}{e^{x-1}-1}$, $\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{\frac{2}{x-3}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln(5x-3)-\ln x\right]$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x}\right)^{2x+1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x+1}{3x^3+2x-1}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-3x}{2x^2-9x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\left[\ln x-\ln(6x-1)\right]$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{e^{x^2}-1}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{1-\cos x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-5}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{2x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3^x-1}$,

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{2-x}$, $\lim\limits_{x\to-1}(2+x)^{\frac{3}{x+1}}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x+1}{\sqrt{x^4-x+2}}$, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-5}\right)$, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+1}$,

$\lim\limits_{x\to-2}(3+x)^{\frac{5}{x+2}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sin 3x+\sin 7x}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{2x-2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln(3x+2)\right]$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\operatorname{tg}4x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x}\right)^{x-1}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$, $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 7x}{3\sin^2 2x}$,

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{x^3-1}$, $\lim\limits_{x\to-3}(4+x)^{\frac{6}{x+3}}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sin\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{2x}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x-4)-\ln(x+1)\right]$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x-3}}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-1}{\sin^2 3x}$,

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{x^3-8}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3x+6}{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-1}{x(x-1)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(7x+3)-\ln x\right]$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{8^x-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-2}\right)^{x+4}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}-\dfrac{x^2+2x}{3x+1}\right)$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4}$, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4-x}-1}{x^2-3x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{2x^2}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\operatorname{arctg}x^2}$, $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\pi-x}{\operatorname{tg}2x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{6^x-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln x-\ln(8x+2)\right]$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{3x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x}-\sqrt{x^2-8}\right)$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{\sqrt{x^2+x-1}}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+6\sqrt{x}}-x\right)$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{x^2-4}$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos8x}{2\sin^2x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1-x^2\right)}{\operatorname{arctg}x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x^2}-1}{2x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x-4)-\ln(x+3)\right]$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\pi\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{x-1}$.

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x+1}}{4x+3}$, $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3-x^2-9x+9}{x^2-9}$, $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{3+x}-1}{x^2+2x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-1}{\operatorname{tg}^2 2x}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}(1/x)}{\ln\left(1+(1/x)\right)}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{8x}-1}{3x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6^x-1}{\sin x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln x-\ln(3x+8)\right]$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-4}\right)^x$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x}\right)$.

32. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+5x-1}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+8x-9}{x^3-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+7}\right)$, $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{4+x}-1}{x^2+3x}$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos9x-1}{\sin^2 2x}$, $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{3x+1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-5x)}{e^{2x}-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(4x+5)-\ln x\right]$,

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-3)}{\operatorname{arctg}(x-1)}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2+2}\right)^{2x^2}$.

33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5x^2+3x-1}}{\sqrt{20x^2+3}}$, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+6x+5}{x^3+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)$, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x)}{8^x-1}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos2x-\cos8x}{3\sin^2x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin3x}{e^{6x}-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln x-\ln(5x+6)\right]$,

$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2x+1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{5x}$.

34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x+2}-\dfrac{2x^2-1}{x-2}\right)$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-8}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos9x}{2\sin^2x}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{x^2-2x}$,

$\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{3x-2}{x-1}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{7x}-1}{\operatorname{arctg}5x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-4x)}{9^x-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(3x+5)-\ln x\right]$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x}\right)^{5-2x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$.

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x^3+x+3}$, $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}\right)$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x-\sin8x}{\operatorname{tg}5x}$, $\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$,

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+8x)}{3^x-1}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin2x}{e^{4x}-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-9}\right)$, $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+4)\left[\ln x-\ln(x-1)\right]$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x+3}\right)^x$.

36. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{27x^3+4x^2}}{2x^3+3x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to7}\frac{x^2-6x-7}{x^2-7x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin4x+\sin x}{\operatorname{arctg}5x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{h+x}-\sqrt{h}}{x}$,

$\lim\limits_{x\to0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{2x+5}{x^2}}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{5x^2}-1}{\operatorname{tg}^2x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-9x)}{5^x-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-4)\left[\ln x-\ln(x+9)\right]$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+8}\right)$.

37. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+2x}{x+3}-5x\right)$, $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-4x-5}{x^3-25x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos2x-1}{2\operatorname{tg}3x}$, $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{5-x}-1}{x^2-4x}$,

$\lim\limits_{x\to0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{3x+1}{x^2}}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}3x}{e^{8x}-1}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+6x)}{4^x-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(7x+3)-\ln x\right]$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-2}\right)^{1-x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x-1}\right)$.

38. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+3}}{5x^2+4x-1}$, $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-2x-8}{2x^2+4x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+8}\right)$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos8x}{3\sin^24x}$,

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{10-x}-3}{x^2-x}$, $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{3x+1}{2x-2}}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin3x}{e^{6x}-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln x-\ln(6x+2)\right]$,

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{2^x-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{3x^2}$.

39. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^4+3x^2-1}{3x^4-2x+5}$, $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-x^2-2x}{x^3-8}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos5x}{4x^2}$, $\lim\limits_{x\to-4}\frac{\sqrt{5+x}-1}{x^2-16}$,

$\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{x+1}{x-1}}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}^2x}{e^{5x^2}-1}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{7^x-1}{\ln(1-4x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(5x+4)-\ln x\right]$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+9}\right)$.

40. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$, $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^3-16x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{\arcsin 2x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x^2+x}$,

$\lim\limits_{x\to2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-\sin 5x)}{\operatorname{arctg} 6x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{7x^2}-1}{3^x-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)\left[\ln x\ln(x+2)\right]$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+5}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6}\right)$.

41. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{\sqrt{8x^3+2x-1}}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(3x+8)\ln x\right]$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{11-x}-3}{x^2-2x}$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 9x-1}{\operatorname{tg} 4x}$, $\lim\limits_{x\to3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^x-1}{\ln(1+x)}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+6x)}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

42. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{x^3-27}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 5x}{\operatorname{arctg} 4x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+7}\right)$,

$\lim\limits_{x\to1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+x^5}}{\operatorname{arctg} 5x}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{10-x}-3}{x^2-x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+4x)}{e^{3x}-1}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)^{2x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\left[\ln x-\ln(4x+9)\right]$.

43. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{32x^5+x^3+2}}{3x+1}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{x^3+1}$,

$\lim\limits_{x\to1}(6-5x)^{\frac{x}{2x-2}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\left[\ln x-\ln(x+4)\right]$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{16x^4+x^3}}{\operatorname{tg} 5x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{6x}-1}{\ln(1-8x)}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{-2x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-8}\right)$.

44. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x}{x+3}-2x\right)$, $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3-4x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 4x-1}{\operatorname{tg} 3x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+5x}$,

$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{x+3}{x}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\operatorname{tg} 3x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+8x)}{5^x-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(5x-2)-\ln x\right]$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)^{3x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-4}\right)$.

45. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3(2+3x)}{(x+2)x^3}$, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-4x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\arcsin 2x}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{10-x}-3}{9x^3-9x^2}$,
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x}$, $\lim\limits_{x\to 1}(5-4x)^{\frac{2x}{x-1}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-6x)}{5^x-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\right)$,
$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+5)\left[\ln(x-3)-\ln x\right]$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x}$.

46. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^3+4x+2}$, $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-8x-9}{x^2-9x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\left[\ln(x+3)-\ln x\right]$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$,
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\,\mathrm{tg}\,x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{6^x-1}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mathrm{tg}\,x}-1}{\arcsin 3x}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{x+2}{x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-2}{4x}\right)^{3x}$,
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-5}\right)$.

47. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3+x^2}{x^3+2x^2-2x-1}$, $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-5x}$, $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+8x)}{10^x-1}$,
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 3x}{\mathrm{arctg}\,x}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{x+2}{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{8x}-1}{\mathrm{arctg}\,2x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x}$,
$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+6)-\ln x\right]$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-6}\right)$.

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^3(x-1)}{(x^2+1)x^2}$, $\lim\limits_{x\to 3};\dfrac{x^2-9x+18}{x^2-3x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sin 3x+\sin 5x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-1}{\ln(1+3x)}$,
$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{3+x}-3}{x-6}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{e^{x^2}-1}$, $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x}{x-2}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+)7-\ln x\right]$,
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+2}\right)^{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-7}\right)$.

49. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^5-3x^4+7x}}{3x^5+2x^3-3}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-9x+8}{x^3-1}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 8x-1}{\sin^2 2x}$, $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{9-x}-2}{x-5}$,
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^x-1}{\ln(1+2x)}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 2x}{e^{x^2}-1}$, $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{2x}{x-2}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\left[\ln(x+4)-\ln x\right]$,
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x}\right)^{2x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-8}\right)$.

50. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+5x^2}}{6x+8}$, $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^3-4x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos7x-1}{3\sin^2 x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{3x}{x-1}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{6x}-1}{\operatorname{tg}4x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+8x)}{2^x-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(6x+5)-\ln x\right]$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+1}{6x-1}\right)^{2x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-5}\right)$.

Завдання 2.2. Дослідити функцію на неперервність, визначити характер її точок розриву.

1. $y=\dfrac{-6}{(x+3)^2}$; $y=e^{\frac{x}{x+2}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x-2}$; $y=\begin{cases}x+4, & x<-1,\\ x^2+2, & -1\le x\le1,\\ 2x, & x>1.\end{cases}$

2. $y=\dfrac{3}{(x+1)^3}$; $y=2^{\frac{2x}{3-x}}$; $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$; $y=\begin{cases}x+2, & x\le-1,\\ x^2+1, & -1<x\le1,\\ 3-x, & x>1.\end{cases}$

3. $y=\dfrac{5}{(x-2)^4}$ $y=3^{\frac{1}{2x+1}}$; $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x}+3$; $y=\begin{cases}-x, & x\le0,\\ -(x-1)^2, & 0\le x\le2,\\ x-3, & x>2.\end{cases}$

4. $y=\dfrac{2}{x-1}$; $y=e^{\frac{x+1}{x-2}}$; $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$; $y=\begin{cases}\cos x, & x\le0,\\ x^2+1, & 0<x\le1,\\ x, & x>1.\end{cases}$

5. $y=\dfrac{-2}{(x-3)^2}$ $y=4^{\frac{2x}{x-1}}$; $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$; $y=\begin{cases}-x, & x\le0,\\ x^2, & 0<x\le2,\\ x+1, & x>2.\end{cases}$

6. $y=\dfrac{3}{(x-3)^3}$; $y=5^{\frac{2x+1}{x-3}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2}{x-1}$; $y=\begin{cases}-x, & x\le0,\\ \sin x, & 0<x\le\pi,\\ x-2, & x>\pi.\end{cases}$

7. $y=\dfrac{4}{(x+1)^5}$; $y=2^{\frac{1}{2x+2}}$; $y=\dfrac{x^2+x-6}{x+2}$; $y=\begin{cases}-(x+1), & x\le0,\\ (x-1)^2, & 0<x\le1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$

8. $y=\dfrac{-3}{(x+5)^2}\quad y=3^{\frac{1}{2-2x}}\quad y=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{x+1};\quad y=\begin{cases}-x^2, & x\le 0,\\ \operatorname{tg}x, & 0<x\le \pi/4,\\ 2, & x>\pi/4.\end{cases}$

9. $y=\dfrac{-2}{x-4};\quad y=e^{\frac{1}{6-3x}}\quad y=\dfrac{x^2+3x-4}{x+4};\quad y=\begin{cases}-2x, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$

10. $y=\dfrac{-5}{(x+3)^3}\quad y=6^{\frac{4+x}{3-x}};\quad y=\dfrac{x^3-1}{x-1}+2;\quad y=\begin{cases}-2x, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$

11. $y=\dfrac{1}{(x-5)^4}\quad y=2^{\frac{1}{4-2x}};\quad y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2}{x-2};\quad y=\begin{cases}\sin x, & x\le 0,\\ 0.5x, & 0<x\le 2,\\ 3, & x>2.\end{cases}$

12. $y=\dfrac{2}{(x-4)^5};\quad y=5^{\frac{1+2x}{1-x}};\quad y=\dfrac{x^2-2x-8}{x+2};\quad y=\begin{cases}x^2, & x\le 1,\\ -2x+3, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

13. $y=\dfrac{4}{x+2};\quad y=4^{\frac{1}{3-3x}};\quad y=\dfrac{x^3-1}{x-1};\quad y=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1,\\ 2x, & 1<x\le 3,\\ x+2, & x>3.\end{cases}$

14. $y=\dfrac{-1}{(x-4)^2};\quad y=3^{\frac{3x}{2-x}};\quad y=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{x+2};\quad y=\begin{cases}-x, & x\le -1,\\ 2-x^2, & -1<x\le 1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$

15. $y=\dfrac{3}{(x+4)^3};\quad y=e^{\frac{1+2x}{3-x}};\quad y=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3};\quad y=\begin{cases}x-3, & x\le 0,\\ x+1, & 0<x\le 4,\\ 3+\sqrt{x}, & x>4.\end{cases}$

16. $y=\dfrac{-6}{(x+1)^4};\quad y=2^{\frac{1+x}{x-3}};\quad y=\dfrac{x^3+8}{x+2};\quad y=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 0, & 0<x\le 2,\\ x-2, & x>2.\end{cases}$

17. $y=\dfrac{5}{(x-1)^5};\quad y=7^{\frac{1-x}{x-2}};\quad y=\dfrac{x^2+3x-4}{x+4};\quad y=\begin{cases}2x^2, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 2, & x>1.\end{cases}$

18. $y=\dfrac{2+x}{(x-6)^2}$; $y=9^{\frac{1+2x}{1-x}}$; $y=\dfrac{x^3+1}{x+1}$; $y=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

19. $y=\dfrac{6+x}{(x-3)^2}$; $y=e^{\frac{1}{8-4x}}$; $y=\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$; $y=\begin{cases}x-1, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ 2x, & x>2.\end{cases}$

20. $y=\dfrac{7}{(x+1)^3}$; $y=4^{\frac{1}{2x+2}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}+\dfrac{\pi}{2}$; $y=\begin{cases}\cos x, & x\le \pi/2,\\ 0, & \pi/2<x\le \pi,\\ x, & x>\pi.\end{cases}$

21. $y=\dfrac{4-x}{(x+5)^2}$; $y=7^{\frac{4x}{x+1}}$; $y=\dfrac{x^3-8}{x-2}$; $y=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\pi/2,\\ x, & x\ge \pi/2.\end{cases}$

22. $y=\dfrac{3}{(x+6)^3}$; $y=10^{\frac{4-x}{x+2}}$; $y=\dfrac{x^2-x-12}{x+3}$; $y=\begin{cases}3x+1, & x<0,\\ x^2+1, & 0\le x<1,\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}$

23. $y=\dfrac{-7+x}{(x-2)^4}$; $y=9^{\frac{1+3x}{x-3}}$; $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{1-x}$; $y=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ x+1, & x>2.\end{cases}$

24. $y=\dfrac{6}{(x-4)^5}$; $y=3^{\frac{5-x}{1-x}}$; $y=\dfrac{x^3-x}{x-1}$; $y=\begin{cases}2, & x\le -\pi/4,\\ \operatorname{tg} x, & -\pi/4<x<0,\\ 3x, & x\ge 0.\end{cases}$

25. $y=\dfrac{-2-x}{(x+1)^2}$; $y=6^{\frac{1}{2x+2}}$; $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$; $y=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \sqrt{x+2}, & -2\le x<2,\\ x+1, & x\ge 2.\end{cases}$

26. $y=\dfrac{3x+3}{x-2}$; $y=2^{\frac{2x}{3-3x}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2}{x+3}$; $y=\begin{cases}-0.5x, & x<-2,\\ x^2+1, & 0\le x<1,\\ 2, & x\ge 1.\end{cases}$

27. $y=\dfrac{2x}{(x-7)^2}$; $y=5^{\frac{1}{4-2x}}$; $y=\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$; $y=\begin{cases}x-2, & x<-1,\\ -x^2, & -1\le x<1,\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$

28. $y=\dfrac{-3}{(2x+6)^3}$; $y=4^{\frac{3x}{3+x}}$; $y=\dfrac{x^3-4x}{x-2}$; $y=\begin{cases}x-1, & x\le 0,\\ -\cos x, & 0<x\le \pi,\\ 3, & x>\pi.\end{cases}$

29. $y=\dfrac{-5}{(x+7)^4}$; $y=3^{\frac{x+1}{8-x}}$; $y=\dfrac{x^2-5x-6}{x+1}$; $y=\begin{cases}-0.5x, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le \dfrac{3\pi}{2},\\ 2, & x>\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}$

30. $y=\dfrac{4x}{(x-1)^2}$; $y=6^{\frac{-3}{4+4x}}$; $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x-3}$; $y=\begin{cases}2, & x\le -1,\\ 3-x^2, & -1<x\le 1,\\ x, & x>1.\end{cases}$

31. $y=\dfrac{-5}{(2x-6)^2}$ $y=8^{\frac{3x}{2+x}}$; $y=\dfrac{x^3-9x}{x-3}$; $y=\begin{cases}-3x-3, & x\le -1,\\ x^2-1, & -1<x\le 1,\\ x, & x>1.\end{cases}$

32. $y=\dfrac{-8x}{(x+1)^4}$; $y=7^{\frac{-5}{4+x}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x+4}$; $y=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ -x, & 0\le x\le 1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$

33. $y=\dfrac{-9}{(x-2)^5}$; $y=9^{\frac{1}{5-5x}}$; $y=\dfrac{\sin 3x}{x}+1$; $y=\begin{cases}-x-2, & x<-2,\\ \sqrt{2+x}, & -2\le x<1,\\ 3, & x\ge -1.\end{cases}$

34. $y=\dfrac{-7x}{(x+3)^2}$; $y=3^{\frac{4+x}{8+x}}$; $y=\dfrac{x^2+5x-6}{x-1}$; $y=\begin{cases}-\cos x, & x\le 0,\\ x-1, & 0<x\le 2,\\ 2, & x>2.\end{cases}$

35. $y=\dfrac{6+x}{(x+2)^2}$; $y=4^{\frac{3x}{5-x}}$; $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{-x}-\dfrac{\pi}{2}$; $y=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ 1, & 0<x\le 1,\\ x+1, & x>1.\end{cases}$

36. $y=\dfrac{-2+x}{(x+7)^3}$; $y=6^{\frac{2x+1}{x-1}}$; $y=\dfrac{x^2-6x-7}{x+1}$; $y=\begin{cases}4, & x\le 1,\\ (x+1)^2, & 1<x\le 3,\\ x-2, & x>3.\end{cases}$

37. $y=\dfrac{-4+x}{(x+1)^2}$; $y=3^{\frac{x}{x-7}}$; $y=\dfrac{x^3-4x^2+6x}{x}$; $y=\begin{cases}2, & x\le -2,\\ x^2-2, & -2<x\le 1,\\ 0.5x, & x>1.\end{cases}$

38. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$; $y=2^{\frac{-1}{5x-5}}$; $y=\dfrac{\sin 4x}{x}-2$; $y=\begin{cases}\sqrt{-x-1}, & x\le -1,\\ x^2, & -1<x\le 0,\\ 2, & x>0.\end{cases}$

39. $y=\dfrac{-6x}{(x-1)^4}$; $y=5^{\frac{5x}{x-4}}$; $y=\dfrac{x^2-4x-5}{x+1}$; $y=\begin{cases} x+2, & x<0, \\ \operatorname{tg} x, & 0\le x\le \pi/4, \\ 1, & x>\pi/4. \end{cases}$

40. $y=\dfrac{9+3x}{(x+2)^2}$; $y=e^{\frac{1+2x}{5-x}}$; $y=\dfrac{x^3+2x^2+x}{x}$; $y=\begin{cases} -1, & x<-\pi/2, \\ \operatorname{tg} x, & -\pi/2\le x\le 0, \\ 2x, & x>0. \end{cases}$

41. $y=\dfrac{-1}{(3x-9)^5}$; $y=8^{\frac{1}{2x-1}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x+5}$; $y=\begin{cases} 2-x, & x<0, \\ (x-1)^2, & 0\le x\le 2, \\ x-1, & x>2. \end{cases}$

42. $y=\dfrac{3+x}{(x+8)^2}$; $y=7^{\frac{2x}{1-x}}$; $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; $y=\begin{cases} x, & x<0, \\ -\cos x, & 0\le x\le \pi, \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$

43. $y=\dfrac{5x}{(x-3)^2}$; $y=9^{\frac{-1}{2x+2}}$; $y=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$; $y=\begin{cases} -x-1, & x\le -1, \\ \sqrt{x+1}, & -1<x\le 3, \\ 4, & x>3. \end{cases}$

44. $y=\dfrac{-5}{(x-2)^4}$ $y=e^{\frac{-x}{7-x}}$; $y=\dfrac{x^3-9x}{x+3}$; $y=\begin{cases} 0.5x, & x<0, \\ x^2, & 0\le x\le 1, \\ x-1, & x>2. \end{cases}$

45. $y=\dfrac{8-4x}{(x-1)^2}$; $y=7^{\frac{x+6}{x+5}}$; $y=\dfrac{\sin x}{-x}+2$; $y=\begin{cases} -2x, & x<0, \\ -x^2, & 0\le x\le 1, \\ x+2, & x>1. \end{cases}$

46. $y=\dfrac{-7x}{(x+2)^3}$; $y=5^{\frac{-4}{x-3}}$; $y=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$; $y=\begin{cases} -1, & x<-\pi, \\ \cos x, & -\pi\le x\le 0, \\ 0.5x, & x>0. \end{cases}$

47. $y=\dfrac{x^2}{(x-6)^2}$; $y=3^{\frac{4}{3x+9}}$; $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5-x}$; $y=\begin{cases} 1, & x<-\pi/2, \\ -\sin x, & -\pi/2\le x\le 0, \\ 2x, & x>0. \end{cases}$

48. $y=\dfrac{-8x}{(x-7)^2}$; $y=2^{\frac{1+x}{5-x}}$; $y=\dfrac{x^2-16x}{x+4}$; $y=\begin{cases} -3x, & x\le 0, \\ \sqrt{x}, & 0<x\le 4, \\ x+3, & x>4. \end{cases}$

49. $y=\dfrac{-3+x}{(x-8)^4}$; $y=4^{\frac{2x}{x+4}}$; $y=\dfrac{x^2-4x-12}{x+2}$; $y=\begin{cases}\sin x, & x\le 0,\\ 0.5x, & 0<x\le 2,\\ 2x-1, & x>2.\end{cases}$

50. $y=\dfrac{9+3x}{(x+2)^3}$; $y=6^{\frac{1}{1-2x}}$; $y=\dfrac{\sin 2x}{-x}+2$; $y=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ 2x+1, & 0<x\le 3,\\ x-1, & x>3.\end{cases}$

Тема 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1. Похідна функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку X і точка $x_0 \in X$. Надамо аргументу функції приросту Δx ($\Delta x > 0$ або $\Delta x < 0$) такого, щоб точка $x_0 + \Delta x \in X$. Функція дістане при цьому приріст

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right).$$

Складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

Означення 3.1. Відношення приросту функції до приросту аргументу називається *середньою швидкістю зміни функції* (rate of change of function).

Це відношення показує, скільки одиниць приросту функції припадає на одиницю приросту аргументу.

Означення 3.2. Границя відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називається швидкістю зміни функції в даній точці або її *похідною* (derivative) і позначається одним із символів:

$$f'(x_0), \quad y'(x_0), \quad \frac{d\,f(x_0)}{d\,x}.$$

Отже, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}. \qquad (3.1)$$

Якщо похідна функції $y = f\left(x\right)$ в точці x_0 існує, то функція називається *диференційовною* (differentiable function) *в точці* x_0.

Якщо функція диференційовна в кожній точці деякого проміжку *X*, то вона називається *диференційовною на проміжку X*.

Операція відшукання похідної називається *диференціюванням*.

Приклад 3.1. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції $y=\sin(x)$.

Розв'язання. Знайдемо приріст даної функції в точці $x=x_0$.

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\sin(x_0+\Delta x)-\sin(x_0)=2\cdot\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2x_0+\Delta x}{2}\right),$$

звідки

$$f'(x_0)\overset{(3.1)}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2x_0+\Delta x}{2}\right)}{\Delta x},$$

оскільки $\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\sim\frac{\Delta x}{2}$; $\cos\left(\frac{2x_0+\Delta x}{2}\right)\to\cos(x_0)$ при $\Delta x\to 0$, то

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\cos(x_0)}{\Delta x}=\cos(x_0).$$

Остання формула справедлива для будь-якого $x\in R$, тому запишемо її так:

$$(\sin x)'=\cos x. \tag{3.2}$$

Відмітимо, що цілком аналогічно можна вивести формулу

$$(\cos x)'=-\sin x. \tag{3.3}$$

Геометричний зміст похідної (geometric sense of derivative)

Похідна функції $y=f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту *дотичної* (tangent line) до графіка даної функції у точці $M_0(x_0, f(x_0))$, тобто

$$f'(x_0)=tg\alpha, \tag{3.4}$$

де α –кут, який утворює дотична τ з додатним напрямком осі Ox (рис. 3.1).

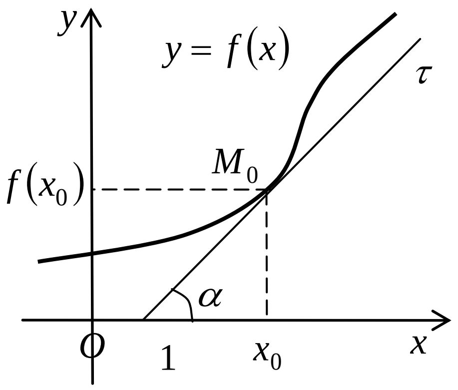


Рис. 3.1

Приклад 3.2. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції $y = 3x - x^2$ у точці $x = 2$ і з'ясувати зміст одержаного результату.

Розв'язання. Знайдемо приріст даної функції в точці $x = x_0$.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \left(3(x_0 + \Delta x) - (x_0 + \Delta x)^2\right) - \left(3x_0 - x_0{}^2\right) = 3\Delta x - 2x_0\Delta x - (\Delta x)^2 =$$
$$= (3 - 2x_0)\Delta x - (\Delta x)^2.$$

Звідки $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(3-2x_0)\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = 3 - 2x_0 - \Delta x$.

Отже $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(3 - 2x_0 - \Delta x) = 3 - 2x_0$.

Якщо $x_0 = 2$, то $f'(2) = 3 - 2 \cdot 2 = -1$. Це означає, що в даній точці функція спадає з такою ж самою швидкістю, з якою зростає аргумент.

З геометричного погляду $f'(2) = tg\alpha = -1$, звідки $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ – кут, який утворює дотична τ, проведена до параболи у точці $M_0(2;2)$ (рис. 3.2).

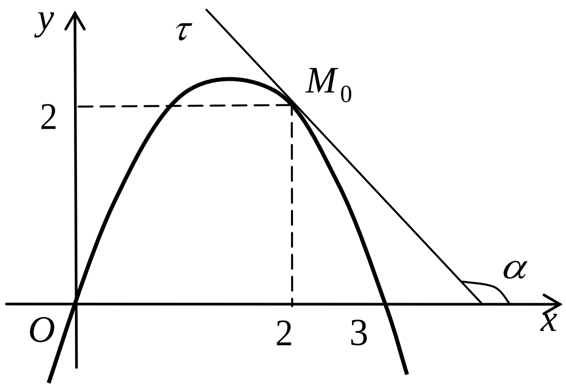


Рис. 3.2

Зв'язок між диференційовністю функції та її неперервністю

Для існування границі (3.1) необхідно, щоб $\Delta y \to 0$ ($\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$). Тому функція повинна бути неперервною. Але не завжди існує границя (3.1) для неперервної функції. Ця умова не є достатньою а лише необхідною умовою диференційовності.

Приклад 3.3 $f(x) = |x|$. Чи існує $f'(0)$?

Розв'язання. Функція $y = |x|$ неперервна на всьому проміжку $(-\infty, +\infty)$, проте в точці $x = 0$ вона не має похідної. Дійсно:

якщо $\Delta x > 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$;

якщо $\Delta x < 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$.

Отже, в цій точці $x = 0$ функція $y = |x|$ не має похідної.

Теорема 3.1. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x = x_0$, то вона неперервна в цій точці.

Доведення. Нехай існує $f'(x_0)$. За означенням похідної $\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists f(x_0)$. Також ми маємо $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, де α – нескінченно мала при $\Delta x \to 0$. Тоді $\Delta y = (f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x) \to 0$, якщо $\Delta x \to 0$. Отже, ми довели, що $y = f(x)$ неперервна в точці $x = x_0$ (за означенням).

3.2 Правила диференціювання (Table of Derivative Rule)

Теорема 3.2. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають похідні в точці x, то справедливі формули для похідних суми, добутку та частки цих функцій:

1) $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$ - (Sum Rule);

2) $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$ - (Product Rule);

3) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}$, при $v(x) \neq 0$ - (Quotient Rule).

Доведення. 1) Дійсно, розглянемо похідну суми даних функцій:

$$(u(x)+v(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u+v+\Delta v)-(u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x)+v'(x),$$ що і потрібно було довести.

2) Розглянемо похідну добутку даних функцій:

$$(u(x)\cdot v(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\cdot v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-u\cdot v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\Delta u+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\cdot\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v\cdot\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = u'(x)\cdot v(x)+v'(x)\cdot u(x)+0,$$

що і потрібно було довести (тут використано, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$, оскільки диференційовна функція $v(x)$ - неперервна).

3) Розглянемо похідну частки даних функцій за умови, що $v(x)\neq 0$:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(u+\Delta u)-u(v+\Delta v)}{\Delta x\cdot v\cdot(v+\Delta v)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{\Delta x\cdot v\cdot(v+\Delta v)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot(v+\Delta v)} = \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v\cdot(v+\Delta v))} =$$

$$= \frac{v\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v^2+\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v\cdot\Delta v)} = \frac{u'(x)\cdot v(x)+v'(x)\cdot u(x)}{(v(x))^2+0},$$

що і потрібно було довести.

Зауваження. Сталий множник при диференціюванні виноситься за знак похідної (Constant Multiple Rule), тобто:

$$(c\cdot u(x))' = c\cdot u'(x),$$ де $c = const$.

Приклад 3.4. Знайти похідну функції $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. За означенням функція $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ визначена при $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. Знайдемо похідну частки за теоремою 3.2, використовуючи формули (3.2), (3.3):

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже, при $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ маємо:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{3.5}$$

Похідна складеної функції (Chain Rule)

Нехай функція $y = f(u)$ визначена в деякому околі точки u і функція $u = \varphi(x)$ визначена в деякому околі точки x, таким чином визначена складена функція $y = f[\varphi(x)]$.

Теорема 3.3. Якщо функція $y = f(u)$ має похідну в точці u і функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці x, то складена функція $y = f[\varphi(x)]$ також має похідну в точці x, причому

$$y'_x = (f[\varphi(x)])' = f'(u) \cdot \varphi'(x), \tag{3.6}$$

або скорочено

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \tag{3.6*}$$

Доведення. За означенням маємо:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x.$$

Приклад 3.5. Знайти похідну функції $y = \cos^5 3x$.

Розв'язання. Приймаючи $y = u^5, \quad u = \cos 3x$, маємо:

$$y' = \left(u^5\right)'(\cos 3x)' = 5u^4((-\sin 3x) \cdot 3) = 5\cos^4 3x \cdot (-3\sin 3x) = -15\cos^4 3x \cdot \sin 3x.$$

Тут враховано, що $u = \cos 3x$ також складена функція і тому за формулою (3.6) вона має похідну $u' = -3\sin 3x$.

Похідна оберненої функції (derivative of inverse function)

Теорема 3.4. Якщо функція $y=f(x)$, $x\in X$, $y\in Y$ має обернену $x=f^{-1}(y)$ і для всіх $x\in X$ існує похідна $f'(x)\neq 0$, то для всіх $y\in Y$ існує похідна $\left(f^{-1}(y)\right)'$, причому справедлива рівність:

$$\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)} \text{ або } x'_y=\frac{1}{y'_x},\ \left(y'_x\neq 0\right). \tag{3.7}$$

Доведення. З означення похідної маємо:

$$x'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0}}\frac{1}{\Delta y/\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{y'_x}, \text{ тобто } x'_y=\frac{1}{y'_x},\ \left(y'_x\neq 0\right).$$

Приклад 3.6. Знайти похідну функції, оберненої до функції $y=\sin x$.

Розв'язання. Функція $y=\sin x$ неперервна і монотонна на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Отже, на цьому проміжку існує обернена функція, яку позначають $x=\arcsin y$, $y\in[-1,1]$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Нагадаємо, що графіки обернених функцій симетричні відносно прямої $y=x$ (рис. 3.3).

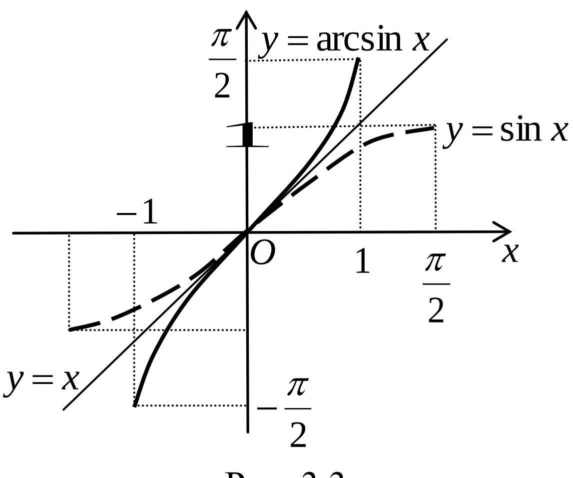


Рис. 3.3

Знаходимо похідну $x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{\cos x}$. Оскільки аргументом оберненої функції є y, то виконаємо такі перетворення:

$$\cos x=+\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-y^2},$$

знак «+» взято, оскільки при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\cos x \geq 0$. Отже $x'_y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ або

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Якщо аргументом є змінна *x*, то маємо формулу

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x|<1). \tag{3.8}$$

Продовжуючи знаходити похідні базисних елементарних функцій з урахуванням означення похідної, її властивостей та правил диференціювання можна скласти наведену нижче таблицю.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

(Table of Derivative Formulas)

1) $(const)' = 0$;

2) $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$, ($\forall n \in N$, або $\forall n \in R$ при $x > 0$);

3) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, ($\forall a > 0, a \neq 1$);

4) $\left(e^x\right)' = e^x$;

5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, ($(\forall a > 0, a \neq 1) \cap \forall x > 0$);

6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, ($\forall x > 0$);

7) $(\sin x)' = \cos x$;

8) $(\cos x)' = -\sin x$;

9) $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, ($x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$);

10) $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, ($x \neq \pi k, \quad k \in Z$);

11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ($|x|<1$);

12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ($|x|<1$);

13) $(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

14) $(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

15) $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$;

16) $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$;

17) $(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;

18) $(\mathrm{cth}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$, $\qquad$ ($x \neq 0$).

Логарифмічне диференціювання

Іноді відшукання похідної спрощується, якщо її попередньо прологарифмувати. В зв'язку з цим такий метод називається *логарифмічним диференціюванням*. Розглянемо як працює цей метод на прикладі.

Приклад 3.7. Знайти похідну складеної функції виду $y = u(x)^{v(x)}$.

Розв'язання. Логарифмуючи рівність дістанемо

$$\ln y = v(x) \cdot \ln u(x).$$

Диференціюючи обидві частини останньої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot (\ln u(x))', \text{або } \frac{1}{y} y' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} u'(x).$$

Виразивши з останньої рівності y' та підставивши $y = u(x)^{v(x)}$, отримаємо

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} u'(x) \right],$$

цю рівність можна переписати так

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = u(x)^{v(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x), \qquad (3.9)$$

де $u(x)^{v(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x)$ –похідна від показникової функції,
$v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'$ – похідна від степеневої функції.

Приклад 3.8. Знайти похідну $y = x^{\sin x}$.

Розв'язання. Логарифмуючи рівність дістанемо:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x .$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності за змінною *x*, матимемо

$$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)' \text{ або } \frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x ,$$

звідки

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x\right).$$

Крім диференціювання степеневопоказникових функцій метод логарифмічного диференціювання доцільно застосовувати також у випадку, коли функція подана у вигляді добутку (частки) досить великої кількості функцій.

Приклад 3.9. Знайти похідну функції $y = e^{x^3} \cdot \mathrm{ctg}^5 x \cdot \arcsin x$.

Розв'язання. Логарифмуючи обидві частини рівності дістанемо

$$\ln y = x^3 \ln e + 5 \ln(\mathrm{ctg} x) + \ln(\arcsin x).$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = (x^3)' + 5(\ln(\mathrm{ctg} x))' + (\ln(\arcsin x))',$$

або

$$\frac{1}{y} y' = 3x^2 + 5\frac{1}{\mathrm{ctg} x} \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right) + \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Звідки

$$y' = e^{x^3} \cdot \mathrm{ctg}^5 x \cdot \arcsin x\left(3x^2 + \frac{5}{\sin x \cdot \cos x} \cdot + \frac{1}{\cdot \sqrt{1-x^2} \arcsin x}\right).$$

Приклад 3.10. Знайти похідну функції

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{(2x-1)^6 (3x+5)^2} .$$

Розв'язання. Логарифмуючи обидві частини рівності дістанемо

$$\ln y = \ln\sqrt{x^2+3} - \ln(2x-1)^6 - \ln(3x+5)^2;$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right) - 6\ln(2x-1) - 2\ln(3x+5).$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = \frac{1}{2}\left(\ln\left(x^2+3\right)\right)' - 6(\ln(2x-1))' - 2(\ln(3x+5))',$$

або

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+3}2x - 6\frac{1}{2x-1}2 - 2\frac{1}{3x+5}3 = \frac{x}{x^2+3} - \frac{12}{2x-1} - \frac{6}{3x+5},$$

звідки

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+3}}{(2x-1)^6(3x+5)^2}\left(\frac{x}{x^2+3} - \frac{12}{2x-1} - \frac{6}{3x+5}\right).$$

Похідна функції, заданої неявно (implicit function derivative)

Якщо на деякому проміжку X диференційовна функція $y = y(x)$ задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, то її похідну $y'(x)$ можна знайти з рівняння

$$[F(x, y)]'_x = 0,$$

де $F(x, y)$ розглядається як складена функція змінної x.

Приклад 3.11. Знайти похідну функції, заданої неявно

$$3y^2 + 2xy + \cos y = 0.$$

Розв'язання. Знаходимо похідну за змінною x, пам'ятаючи, що $y(x)$ є функцією від x, тому $(y(x))' = y'$

$$3\cdot 2y\cdot y' + 2(1\cdot y + x\cdot y') + (-\sin y)\cdot y' = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно y', отримаємо:

$$y'(6y+2x-\sin y)=-2y,$$

звідки

$$y'=\frac{2y}{\sin y-6y-2x}.$$

3.3. Диференціал функції

Нехай функція $y=f(x)$ має в даній точці x_0 скінченну похідну $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$, де $\alpha\to 0$, якщо $\Delta x\to 0$. Звідки

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x.$$

Якщо Δx – нескінченно малий приріст, то доданок $\alpha\cdot\Delta x$ є нескінченно малим вищого порядку, ніж доданок $f'(x_0)\cdot\Delta x$ і якщо $f'(x_0)\neq 0$, то $f'(x_0)\cdot\Delta x$ і Δx –нескінченно малі одного порядку.

Означення 3.3. Якщо функція $y=f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ в точці x_0, то вираз $f'(x_0)\cdot\Delta x$ називається *диференціалом* (differential) функції в цій точці і позначається символом $dy(x_0)$. Тобто,

$$dy(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x. \tag{3.10}$$

Зауваження. Диференціал функції $y=f(x)$ в даній точці є головною лінійною частиною приросту функції, пропорційною приросту аргументу з коефіцієнтом пропорційності $f'(x_0)$:

$$\Delta y=dy(x_0)+\alpha\cdot\Delta x.$$

Диференціал незалежної змінної ототожнюється з її приростом, тобто

$$dx=\Delta x.$$

Для будь-якої диференційовної в точці x функції $y=f(x)$ формулу (3.10) можна записати так:

$$dy=f'(x)\cdot dx.$$

Звідки отримаємо, що

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}, \tag{*}$$

тобто похідну можна розглядати як відношення двох диференціалів.

Правила знаходження диференціала

З правил знаходження похідної випливають правила знаходження диференціала. Якщо функції $u(x),\ v(x)$ –диференційовні в точці x, то

1) $d(u+v)=du+dv$.

2) $d(u\cdot v)=v\cdot du+u\cdot dv$.

Зауваження. $d(c\cdot u)=c\cdot du$, де $c=const$.

3) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2},\ (v\neq 0)$.

Властивість інваріантності форми диференціала

Теорема 3.5. Якщо маємо складену функцію $y=f(u)$, де $u=u(x)$, причому $f(u)$ і $u(x)$ –диференційовні функції, то

$$dy=f'_u\cdot du. \tag{3.11}$$

Дійсно, $dy=f'(u(x))\cdot\Delta x=f'_u\cdot u'_x\cdot\Delta x=f'_u\cdot du$, де $u'_x\cdot\Delta x=du$.

Зауваження. Форма диференціала не залежить від того, є аргумент функції незалежною змінною, чи функцією цієї змінної.

Приклад 3.12. Знайти диференціал функції $y=\sqrt[3]{(2+\cos x)^2}$.

Розв'язання. *Перший спосіб*. Знаходимо похідну від заданої функції:

$$y'=\left(\sqrt[3]{(2+\cos x)^2}\right)'=\left((2+\cos x)^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}(2+\cos x)^{-\frac{1}{3}}\cdot(2+\cos x)'=$$

$$=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2+\cos x}}(-\sin x);$$

$$dy=-\frac{2\sin x}{3\cdot\sqrt[3]{2+\cos x}}dx.$$

Другий спосіб. Знаходимо диференціал, використовуючи формулу (3.11):

$$dy = \frac{2}{3}(2+\cos x)^{-\frac{1}{3}} \cdot d(2+\cos x) = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2+\cos x}}(-\sin x \cdot dx) =$$

$$= -\frac{2\sin x}{3\cdot\sqrt[3]{2+\cos x}}dx.$$

Геометричний зміст диференціала (geometric sense of differential)

Нехай $y = f(x)$, $x_0 \in X$ та існує $f'(x_0)$. За означенням диференціала $dy = f'(x_0)\cdot\Delta x$.

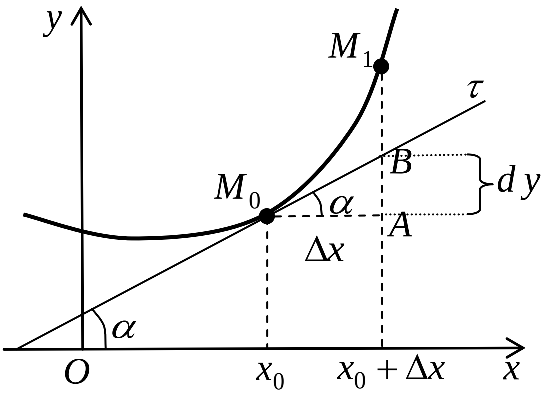


Рис. 3.4

Скористаємося геометричним змістом похідної: $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha$.

З трикутника M_0AB маємо: $|AM_0|\cdot\mathrm{tg}\,\alpha = |AB|$ або $|AB| = f'(x_0)\cdot\Delta x$. Але $f'(x_0)\cdot\Delta x = dy$, тому $dy = |AB|$.

Отже, диференціал функції $y = f(x)$ в точці x_0 визначає приріст ординати дотичної до кривої в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ при переході від абсциси x_0 до абсциси $x_0 + \Delta x$ (рис. 3.4).

Застосування диференціала в наближених обчисленнях

З означення похідної функції в точці x_0 випливає, що її приріст $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ можна подати у вигляді: $\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$, де $\alpha \to 0$, якщо $\Delta x \to 0$.

Отже, при малих Δx має місце наближена рівність:

$$\Delta y \approx dy, \text{ тобто } f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

Звідки

$$f(x_1) = f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x. \qquad (3.12)$$

Формула (3.12) дозволяє знаходити значення функції $y = f(x)$ в точці $x_1 = x_0 + \Delta x$, якщо відомі значення $f(x_0)$ і $f'(x_0)$, з точністю Δ

$$\Delta < M\cdot\Delta x^2,$$

де $M = \max\limits_{x_0 < x < x_0+\Delta x}|f''(x)|$.

Приклад 3.13. Наближено обчислити значення $\sin 28^0$.

Розв'язання. В даному випадку $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$. Покладемо $x_0=\dfrac{\pi}{6}$, що відповідає 30^0 в градусній мірі;

$$\Delta x = x_1 - x_0 = \frac{\pi}{180}\cdot 28 - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{90}.$$

За формулою (3.12), отримаємо:

$$\sin 28^0 \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\frac{\pi}{90}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{90} \approx 0{,}47,$$

тобто $\sin 28^0 \approx 0{,}47$.

Для того, щоб оцінити абсолютну і відносну похибки, скористаємось більш точним значенням, отриманим за допомогою калькулятора: $\sin 28^0 \approx 0{,}469$. Тоді $\Delta \approx |0{,}469 - 0.47| = 0{,}001$, а відносна похибка δ дорівнюватиме:

$$\delta \approx \frac{0{,}001}{0{,}469}\cdot 100\% \approx 0{,}2\%.$$

Приклад 3.14. Наближено обчислити значення $\sqrt[4]{19}$.

Розв'язання. В даному випадку $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $\quad f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$.

Нехай $x_0=16$, $x_1=19$, тоді $\Delta x = x_1 - x_0 = 3$ і за формулою (3.12): $f(x_1)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$, отримаємо, що:

$$\sqrt[4]{19} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}\cdot 3 = 2 + \frac{1}{32}\cdot 3 \approx 2{,}09.$$

Використовуючи калькулятор, отримаємо: $\sqrt[4]{19}\approx 2{,}088$. Тоді $\Delta \approx |2{,}088 - 2{,}09| = 0{,}002$, а відносна похибка δ дорівнюватиме:

$$\delta \approx \frac{0{,}002}{2{,}088}\cdot 100\% \approx 0{,}1\%.$$

Диференціювання функцій, заданих параметрично

Нехай функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ параметрично задають функцію $y = y(x)$, причому $x(t)$ і $y(t)$ – функції диференційовні за змінною t і $x'(t) \neq 0$.

Похідну y'_x від функції y за змінною x знаходимо, диференціюючи $x = x(t)$ і $y = y(t)$ за змінною t (див. формулу (*)):

$$dx = x'(t) \cdot dt, \; dy = y'(t) \cdot dt.$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t) \cdot dt}{x'(t) \cdot dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

тобто

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad (x'_t \neq 0). \tag{3.13}$$

Приклад 3.15. Знайти похідну y'_0 функції $y = f(x)$, заданої параметрично: $x = 8\cos t$, $y = 4\sin t$ в точці $M_0\left(4\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$.

Розв'язання. Знаходимо похідні x'_t та y'_t: $x'_t = -8\sin t$, $y'_t = 4\cos t$. За формулою (*) маємо:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4\cos t}{-8\sin t} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} t.$$

Обчислимо значення параметра t в точці $M_0\left(4\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$.

$$\left.\begin{aligned} 8\cos t = 4\sqrt{2} \Rightarrow \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 4\sin t = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; t = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, $t = \frac{\pi}{4}$ і $y'_0 = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$.

Приклад 3.16. Знайти похідну y' функції, заданої параметрично:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \; y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Розв'язання. Знайдемо похідні x'_t та y'_t:

$$x'_t = 3a\frac{1\cdot\left(1+t^3\right)-3t^2\cdot t}{\left(1+t^3\right)^2} = 3a\frac{1-2t^3}{\left(1+t^3\right)^2},\ y'_t = 3a\frac{2t\cdot\left(1+t^3\right)-3t^2\cdot t^2}{\left(1+t^3\right)^2} = 3a\frac{2t-t^4}{\left(1+t^3\right)^2}.$$

Отже, $y' = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3a\cdot\left(2t-t^4\right)}{\left(1+t^3\right)^2}\cdot\dfrac{\left(1+t^3\right)^2}{3a\cdot\left(1-2t^3\right)}$, тобто $y' = \dfrac{2t-t^4}{1-2t^3}$, $\left(t \neq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

3.4 Похідні та диференціали вищих порядків
(higher derivative, higher-order differential)

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на проміжку X, а $f'(x)$ – її похідна, яка також є функцією відносно x. Від цієї функції знову можна шукати похідну за умови, що вона існує на заданому проміжку. Похідна від похідної $f'(x)$ називається *похідною другого порядку* (second-order derivative) функції $y = f(x)$ і позначається одним із символів:

$$f''(x),\quad y''(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Так у фізиці, якщо $s = s(t)$ – закон, за яким змінюється пройдений шлях при прямолінійному русі точки, то $s''(t) = a(t)$ є *прискоренням* (acceleration) цієї точки в момент часу t.

Аналогічно $\left(f''(x)\right)' = f'''(x) = y'''(x) = \dfrac{d^3y}{dx^3}$ і т. д.

Взагалі *похідною n-го порядку* від функції $y = f(x)$ називається похідна від похідної $(n-1)$-го порядку і позначається

$$f^{(n)}(x), \text{ або } y^{(n)}(x), \text{ або } \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Зауваження. При $n = \{1, 2, 3\}$, похідну n-го порядку позначають відповідно y', y'', y'''; при $n > 3$ позначають: $y^{(4)}, y^{(5)},\ldots$ або $y^{IV}, y^{VI},\ldots$.

Приклад 3.17. Знайти похідну другого порядку від функції

$$y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right).$$

Розв'язання. Знаходимо спочатку y' за формулою $\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$.

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Знаходимо похідну від отриманої функції:

$$\left(y'\right)'=y''=\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)'=\left(\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(a^2+x^2\right)'=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{-x}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}},\text{ тобто } y''=\frac{-x}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}.$$

Приклад 3.18. Знайти похідну n-го порядку від функції $y=\sin x$.

Розв'язання.

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Формула Лейбніца. Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ мають похідні до n-го порядку включно, то для обчислення похідної n-го порядку від добутку цих функцій використовують формулу Лейбніца:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + n \cdot u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot u^{(n-2)}v'' + \ldots + n \cdot u'v^{(n-1)} + v^{(n)}u \,. \tag{3.14}$$

Похідні вищих порядків від функцій, заданих параметрично. Якщо функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ параметрично задають функцію $y = y(x)$, то похідні $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, $y''_x = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, можна послідовно обчислити за формулами:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},\ y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \text{ і т. д.}$$

Так, для похідної другого порядку має місце формула:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}. \tag{3.15}$$

Приклад 3.19. Знайти похідну y'' функції $y = f(x)$, заданої параметрично: $x = 8\cos t$, $y = 4\sin t$.

Розв'язання.

$$y'_t = 4\cos t; \quad x'_t = -8\sin t; \quad y''_t = -4\sin t; \quad x''_t = -8\cos t\,.$$

за формулою (3.15)

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{8\sin t \cdot 4\sin t + 8\cos t \cdot 4\cos t}{(-8\sin t)^3} = -\frac{32}{8^3\sin^3 t} = -\frac{1}{16\sin^3 t}\,.$$

Диференціали вищих порядків. Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на проміжку *X*. Її диференціал

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

називається також *диференціалом першого порядку* і його можна розглядати як функцію змінної x (приріст аргументу dx вважається сталим).

Означення 3.4. *Диференціалом другого порядку* (second differential) функції $y = f(x)$ в точці x називається диференціал від її диференціала першого порядку (за умови, що повторний приріст незалежної змінної x збігається з попереднім dx) і позначається d^2y:

$$d^2y \overset{def}{=} d(dy).$$

За означенням маємо

$$d^2y \overset{def}{=} d(dy) = d(f'(x)\cdot dx) = (f'(x)\cdot dx)' \cdot dx = (f'(x))' \cdot dx \cdot dx = f''(x)\cdot (dx)^2,$$

позначають $(dx)^2 = dx^2$. Таким чином

$$d^2y = f''(x)\cdot dx^2. \qquad (3.16)$$

Аналогічно, *диференціалом n-го порядку* (позначається $d^n y$), n=2,3,... називається диференціал від диференціала порядку $(n-1)$ за умови, що в диференціалах весь час беруться одні й ті самі прирости dx незалежної змінної x. Тобто

$$d^n y \overset{def}{=} d\left(d^{n-1}y\right).$$

При цьому справедлива формула:

$$d^n y = f^{(n)}(x)\cdot dx^n. \qquad (3.17)$$

Приклад 3.20. Обчислити d^2y, якщо $y = \ln(3x+1)$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (3.16). Для цього знайдемо $y''(x)$:

$$y'(x) = \frac{1}{3x+1}\cdot 3,\ y''(x) = 3\cdot\left(\frac{1}{3x+1}\right)' = \frac{-9}{(3x+1)^2}.$$

Отже

$$d^2y = \frac{-9}{(3x+1)^2}dx^2.$$

Питання для самоперевірки

1. Що називають похідною функції в точці.
2. У чому полягає геометричний зміст похідної функції?
3. Який фізичний зміст похідної?
4. Чи буде диференційовна в точці функція неперервною в цій точці? Чи справедливе обернене твердження?
5. Пригадайте таблицю похідних основних елементарних функцій. Спробуйте за означенням вивести формулу $\left(e^x\right)' = e^x$.
6. Сформулюйте і доведіть теорему про похідні суми, добутку, частки двох диференційовних функцій.
7. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну складеної функції.
8. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну оберненої функції. Спробуйте за допомогою цієї теореми вивести похідну для функції $\operatorname{arctg} x$, якщо відомо, що $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
9. Назвіть випадки, коли доцільно використовувати логарифмічне диференціювання. В чому полягає цей метод?
10. Дайте означення диференціала функції в точці.
11. У чому полягає геометричний зміст диференціала функції?
12. В чому полягає властивість інваріантності форми першого диференціала? Поясніть на прикладі складеної функції $y = \cos\left(x^2 + 1\right)$.
13. Як знаходити похідну функції, що задана параметрично?
14. Як використовується диференціал у наближених обчисленнях?
15. Що називається похідною *n*-го порядку? Знайдіть формулу для похідної *n*-го порядку функції $y = a^x$.
16. Що називається диференціалом 2-го порядку?

Завдання для самостійної роботи

Завдання 3.1. Знайти похідні функцій.

1. $y = 3xe^{-3x^2} + 2$; $y = \dfrac{5x}{\sin 3x + 2}$; $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$; $y = 2xe^{\sin 5x}$; $y = \sin(\ln(1+e^{\sqrt{x}}))$; $y = \operatorname{arctg}^3 5x$; $y = \cos^4(1+\sqrt{x})$; $y = x^{\operatorname{tg} x}$; $x\sin 2y + y^2 = 4$.

2. $y=(4-x^2)e^{\sqrt{x}}+\pi$; $y=\dfrac{1–3x^2}{\cos 5x+4}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{1–3x^2}}{5x+4}$; $y=\ln(x+\dfrac{1}{x+4})$;
$y=(3+x^5)\cdot e^{\sin x}$; $y=\operatorname{arctg}\left(\ln(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x)\right)$; $y=\arcsin^4(1-x)$; $y=\sin^3(e^x+3)$;
$y=(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$; $\cos(x+y)=\sqrt[3]{y}$.

3. $y=x^2 2^{-x}+5$; $y=\dfrac{7x}{\sin 5x+2}$; $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2+3}$; $y=\ln(3x-\sqrt{1-x})$; $y=3x\cdot e^{\cos 4x}$;
$y=\sin\ln(1-3^{x^2})$; $y=\arcsin^5 3x$; $y=\sin^8(1+\sqrt[3]{x})$; $y=x^{\sin x}$; $x\sin 2y=y^3$.

4. $y=5x^3\cdot 3^{2-x}+4$; $y=\dfrac{3-x}{\sin 2x-4}$; $y=\dfrac{\sqrt{1-2x^3}}{4-x}$; $y=\ln(\sqrt[3]{1-x^2}+3)$;
$y=x^2e^{-\cos 3x}$; $y=\ln\sin(4+e^{-x})$; $y=\operatorname{arctg}^5(1-3x)$; $y=x^{\cos(1-x)}$;
$y=\cos^3(1-e^{3x})$; $y=x\operatorname{tg}(xy)-e^{-y}=0$.

5. $y=(1-4x)e^{-x^3}+\ln 2$; $y=\dfrac{\arcsin(1-5x^2)}{1-x}$; $y=(1-x^2)\cdot 2^{\cos(1+x)}$;
$y=\sin\ln(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}})$; $y=\dfrac{x^3+2}{\sqrt{x-x^2}}$; $y=\ln\dfrac{1}{x^2+\sqrt{x+3}}$; $y=\arccos^3 7x$;
$y=\sin^5(e^x+x)$; $y=(x+7)^{\cos x}$; $\cos(x+y)+\dfrac{x}{y}=3$.

6. $y=(x+4)e^{1-x^2}+\sqrt{2}$; $y=\dfrac{3x+1}{\arcsin(1-x)}$; $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{3-x^3}$; $y=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1-x}}$;
$y=(3+x^2)\cdot e^{\arccos 2x}$; $y=\operatorname{arctg}\left(\ln(e^{\frac{1}{x}}+5)\right)$; $y=\sin^3(1-e^{2x})$; $y=(x+\sin x)^x$;
$y=\cos(1-y)+\dfrac{x^3}{y}=10$.

7. $y=(x-1)\arccos x+\ln 2$; $y=\dfrac{\cos(1-x)+5}{x^4}$; $y=\dfrac{\sqrt{x^5+4}}{3x+2}$; $y=x^3e^{\operatorname{arctg}3x}$;
$y=\ln(x^2-\sqrt[3]{1-x})$; $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt[5]{x}$; $y=\sin^8 3x$; $y=\ln^7(9x)-e^{-x}$; $y=x^{\ln(1-e^x)}$
$y^3e^{xy}+\cos x=3$.

8. $y = x^2 4^{1-x^2} + \pi$; $y = \dfrac{1+3x^2}{1+3\cos 5x}$; $y = \dfrac{5-x}{\sqrt{1-3x^3}}$; $y = x^3 e^{\operatorname{arctg} 3x}$;
$y = \ln(\sqrt[3]{5-x} + x^2)$; $y = \cos \operatorname{tg}(\sqrt{x} - x^2)$; $y = \arcsin^5(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}})$; $y = \operatorname{arctg}^3(1-x)$;
$y = (1-x)^{\cos 3x}$; $x \arccos y + y^2 = 3$.

9. $y = x^4 e^{1-\sqrt{x}} + 4$; $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{(1+x)^3}$; $y = \dfrac{\cos(1-5x)}{4+x^2}$; $y = \ln(\sqrt[3]{4+x^2} + 1)$; $y = x^5 2^{\operatorname{tg} x}$;
$y = \arccos\left(\ln(e^{-x} + x)\right)$; $y = \operatorname{arctg}^7(1-x)$; $y = (\arcsin x)^{-x^2}$; $y = \sin^8(1+2^{\sqrt{x}})$;
$y\sqrt{x} + \cos(3x+y) = 4$.

10. $y = 3x \cdot e^{-3+2x^3} + 2$; $y = \dfrac{5x}{\sin 3x + 2}$; $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;
$y = 2xe^{\sin 5x}$; $y = \sin \ln(1+e^{\sqrt{x}})$; $y = \operatorname{arctg}^3 5x$; $y = \cos^4(1+\sqrt{x})$; $y = x^{\operatorname{tg} 3x}$;
$x \sin 2y + y^2 = 4$.

11. $y = 3x^5 4^{-7x}$; $y = \dfrac{\operatorname{arctg}(5-x)}{1+x^4}$; $y = \dfrac{1-3x}{\sqrt[5]{(2x+4)^3}}$; $y = \ln(x + e^{-x^3})$;
$y = 2^{\ln 3x}(1-3x^2)$; $y = \operatorname{arctg}\left(\ln(e^{2x} - 4)\right)$; $y = \arcsin^3(1-\dfrac{1}{x})$; $y = \cos^6(1-x)$;
$(3\sin x)^{\sqrt{x}} = y$; $y \ln x - x \ln y = x + y$.

12. $y = 2x^5 e^{1-7x}$; $y = \dfrac{1-7x^2}{\arccos 3x + 4}$; $y = \dfrac{\sqrt{3-4x^2}}{1-5x}$; $y = \ln \dfrac{1}{4+\sqrt[3]{4+2x}}$;
$y = 5^{\cos 4x}(1+4x^3)$; $y = \cos^3(4+e^{\sqrt{x}})$; $y = x^6 \cdot 2^{\operatorname{tg} x}$; $y = \operatorname{arcctg}\left(\ln(1+4e^{4x-5})\right)$;
$y = (\sqrt{x})^{\sin(1-x)}$; $y = \ln(x+y) + x^2$.

13. $y = 4^{3-x}(1-7x^3) + e^2$; $y = \dfrac{2x+7}{\cos(5-x^2)}$; $y = \dfrac{\sqrt[7]{2x-x^3}}{x-7}$; $y = \ln(x^3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}})$;
$y = (4x-7)e^{\sin(1-x)}$; $y = \arcsin \ln(2^{\sqrt{1-x}} + 4)$; $y = \operatorname{tg}^7(1-3x^2)$; $y = \sin^5(1-e^{-x})$;
$y = x^{\operatorname{arctg} 5x}$; $y = \sqrt{x^2+y^2} + \ln\dfrac{x}{y} = e^2$.

14. $y=(1-3x)\cdot 4^{2x}+7$; $y=\dfrac{3+2x}{\sin(1-x)}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{4-5x}}{x^3+4}$; $y=x^2e^{\sin(1-2x)}$;
$y=\ln(\sqrt[4]{1-x}+4x)$; $y=\arccos^2(1+3x)$; $y=\mathrm{tg}\ln\left(1-e^{x^2}\right)$; $y=\mathrm{arctg}^3(3^{\sqrt{x}}+x)$;
$y=(4-7x^3)^{\ln x}$; $\cos(x+y^2)+xy=3$.

15. $y=(x-1)^2e^{x^3}+7$; $y=\dfrac{\arcsin 5x+3}{1-7x^3}$; $y=\dfrac{1+\sqrt[3]{x-x^2}}{1+4x^3}$; $y=\ln(\dfrac{1}{x+4}+\sqrt{x})$;
$y=3^{\sin 8x}(4+7x^4)$; $y=\cos^5(x^2-7x)$; $y=\ln^7(e^{\sqrt[3]{x}}+x)$; $y=\ln\mathrm{arctg}(\sqrt[3]{x}+x)$;
$y=(\sqrt{x}+1)^{2x^2+3}$; $\arcsin(x+y)=\dfrac{y}{x}$.

16. $y=(\sqrt{x}+3)e^{x^2}+7$; $y=\dfrac{(3x-4)^2}{\sqrt{x}+7}$; $y=\dfrac{1+\sqrt[3]{x-x^2}}{1+4x^3}$; $y=\ln(\sqrt[5]{1-x^3+2})$;
$y=x^3 3^{\mathrm{arctg}\, 5x}$; $y=\arcsin\ln(e^{\sqrt{x}}+3x)$; $y=\mathrm{arcctg}^6(5-3x)$; $y=\sin^6(e^{\sqrt[3]{x}}+x)$;
$y=(\arcsin x)^{\sqrt{x}}$; $xy+\ln(x+5y)=3$.

17. $y=2x^3 4^{1-x^8}$; $y=\dfrac{\mathrm{arctg}\left(5x-3x^3\right)}{\sqrt{x}+4}$; $y=\dfrac{5-3x^2}{\sqrt{3x^3+4}}$; $y=x^5 2^{\ln(1-9x)}$;
$y=\ln\left(x+3^{-\sqrt{x}+4}\right)$; $y=\arccos\left(\ln\left(e^{-\sqrt{x^2+4}}\right)\right)$; $y=\sin^7(3-8x)$;
$y=\arcsin^4(1+x^2)$; $y=(5\mathrm{tg}\, x)^{1-\sqrt{x}}$; $\cos(x^2-y)+\dfrac{3x+1}{y}=4$.

18. $y=\sqrt[3]{x^2}e^{1-3x^3}$; $y=\dfrac{x-7x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$; $y=\dfrac{\sin(3x-4x^2)}{5+x^3}$; $y=\mathrm{tg}^7(3-7x)$;
$y=\ln\left(\sqrt[3]{1-2x^2}+1\right)$; $y=x^4 2^{\arcsin\sqrt{x}}$; $y=\mathrm{arctg}\ln\left(e^{\sqrt[3]{x^2-x}}+3\right)$; $y=\sin^4(e^{-x^3}+x^2)$;
$y=(\arccos x)^{\sqrt[3]{x}}$; $\ln(x^2+y)+\dfrac{y}{x^2}=3$.

19. $y=(2-7x^2)\cdot 3^{-3x}+\sqrt{2}$; $y=\dfrac{1-5x}{\cos(3-2x^3)}$; $y=\dfrac{1-4x^4}{\sqrt[3]{5-x}}$; $y=(1-4x^2)^{\sqrt{x}}$;
$y=\ln(3x-\sqrt[3]{x^2})$; $y=(3x-4)e^{\sin 4x}$; $y=\arccos^5(1-4x^2)$; $y=\mathrm{arctg}^4(e^{5x}+3)$;
$y=\mathrm{tg}\ln(5^{\sqrt{x}}+4)$; $\cos(x^3-y)+\dfrac{y}{x}=1$.

20. $y=(1+7x)\cdot e^{3x+x^2}+7$; $y=\dfrac{\arcsin(1-7x)}{\sqrt{1-x^2}}$; $y=\dfrac{\sqrt{x+4}}{x^5+4x^3}$; $7=\ln\left(x+\sqrt[3]{1-x}\right)$;
$y=\left(4-x^3\right)\cdot 3^{\sin(1-3x)}$; $y=\ln\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{4}{x}\right)$; $y=\operatorname{arctg}^2 3x$; $y=\sin^3\left(e^{-\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;
$y=(\cos x)^{1-\sqrt{x}}$; $\ln(x^3-y^3)=x$.

21. $y=\left(1-x^2\right)\cdot 2^{1-\sqrt{x}}+4$; $y=\dfrac{1-7x}{1-2\sin x}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}}{3-4x}$; $y=x^4e^{\cos 5x}$;
$y=\ln\left(\sqrt[3]{1-4x}+x\right)$; $y=\sin\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x}+4\right)$; $y=\operatorname{arctg}^5(1-x)$; $y=\ln^7\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$;
$y=\left(1-4x^2\right)^{\sin 3x}$; $x^3\arccos y-y^4=\sqrt{e}$.

22. $y=(5-3x)3^{x^2}+7$; $y=\dfrac{\sin(5x-x^2)}{1-x}$; $y=\dfrac{5x+4}{\sqrt[3]{x}+4x}$; $y=\cos^3(e^{\sqrt{x}}+4)$;
$y=\ln\left(5x-\sqrt[3]{x^2-7x}\right)$; $y=\ln\sin(5-e^{-\sqrt{x}})$; $y=x^5e^{\operatorname{arctg}x}$; $y=\arccos^7(1-5x)$;
$y=\left(\sqrt{x}\right)^{\ln x}$; $\dfrac{x}{y^2}+\operatorname{arctg}xy=1$.

23. $y=5xe^{x^3+4}+\pi$; $y=\dfrac{\operatorname{arctg}(5-x)}{x^2+4}$; $y=\dfrac{15+x^3}{\sqrt{x-7x^2}}$; $y=\ln\dfrac{x}{1-\sqrt[3]{x}}$;
$y=\arccos\left(\ln\left(7-\sqrt[3]{x}\right)\right)$; $y=x^4 2^{\cos\sqrt{x}}$; $y=\operatorname{arcctg}^4 5x$; $y=\sin^9(3-e^{\sqrt{x}})$;
$y=(x+\cos 3x)^{x^2}$; $\sin(x-y)+x^3y=3$.

24. $y=(1-x^3)e^{5x}+7$; $y=\dfrac{\operatorname{tg}(1-3x)}{x^3+4}$; $y=\dfrac{\cos\sqrt{x}+4}{\sqrt[3]{x}+x}$; $y=\sin^7(1-x^2)$;
$y=x^7 7^{\arcsin 5x}$; $y=\ln\dfrac{x}{\sqrt[6]{1+5x}-x}$; $y=\ln\cos(x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}})$; $y=\ln^4(1+e^{5x})$;
$y=\left(\operatorname{arctg}\left(1-\sqrt{x}\right)\right)^x$; $x^3e^{x+y}-y=4$.

25. $y=(5x-4)e^{\frac{1}{\sqrt{x}}+3}$; $y=\dfrac{(2x+4)^5}{\sqrt[4]{x^3}}$; $y=\dfrac{5+4x^3}{\operatorname{tg}(1-7x)}$; $y=x^3 5^{\cos(1-x)}$;
$y=\ln(\sqrt[3]{1-x^2}-x)$; $y=\arcsin\ln\left(e^{1-5x}-\dfrac{1}{x}\right)$; $y=\cos^7(e^{\sqrt{x}}+3x)$;
$y=\sin^9(1+3^{\sqrt{x}})$; $y=[\cos(1-x)]^x$; $\sqrt{y}x-\sin(5y-x)=0$.

26. $y=(3+2x^2)\cdot e^{\sqrt{3-x}}+4$; $y=\dfrac{4-5x}{\cos 3x-7}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{4-7x}}{3x^2+7}$; $y=(4-x^3)e^{\sin(2+4x)}$;
$y=\ln\left(5x-\dfrac{1}{1-x}\right)$; $y=\sin\ln(1-2^{5x})$; $y=\arcsin^3(2+3x)$; $y=\sin^4(e^{3x}-1)$;
$y=(\operatorname{tg}x)^{3-\sqrt{x}}$; $\cos(x+y)+\sqrt[4]{y}=0$.

27. $y=x^7 2^{5x}+7\pi$; $y=\dfrac{4x^2}{\cos(1-x)+4}$; $y=\dfrac{\sqrt{1-8x}}{x^3+1}$; $y=\ln\left(7x+\sqrt[3]{x^2}\right)$;
$y=4xe^{\cos 9x}$; $y=\cos\ln(1-3^{x^4})$; $y=\arcsin^3(1-7x)$; $y=\sin^4(1-5x^2)$;
$y=(4-5x)^{\sin 2x}$; $y^2\sin 5x+xy=4$.

28. $y=3x^5 3^{-x^2}-\pi^3$; $y=\dfrac{5-2x}{\sin 3x-1}$; $y=\dfrac{\sqrt{1-3x^2}}{3-2x}$; $y=3x^3\cos^{4x}$;
$y=\ln\left(\sqrt[3]{1-5x^2}-x\right)$; $y=\ln\sin(5-e^{3x})$; $y=\operatorname{arctg}^3(1+4x)$; $y=\cos^5(4+e^{2x})$;
$y=x^{\cos(5-2x)}$; $(x+1)\cdot\operatorname{tg}(y^2x)+e^4=0$.

29. $y=(3-2x)e^{-x^3}+\sqrt{3}$; $y=\dfrac{\arcsin(3+4x^2)}{1+3x}$; $y=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}$;
$y=\dfrac{3x^3+4}{\sqrt{2x+x^2}}$; $y=(1-5x^2)\cdot 2^{\cos(1-x)}$; $y=\sin\ln\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; $y=\arcsin^3(e^{-x}+2x)$;
$y=(1-x)^{\cos 3x}$; $\cos(x-y)+\dfrac{y^3}{x}=3$.

30. $y=(3+2x)\cdot 5^{1-x^2}+4$; $y=\dfrac{\sin(1-7x)}{5-x^2}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{1+5x}}{3x^2-2}$; $y=\ln\left(5x-\sqrt[3]{x^2}\right)$;
$y=x^4\cdot e^{\arcsin 2x}$; $y=\ln\cos\left(3-e^{\sqrt{x}}\right)$; $y=(\operatorname{tg}3x)^{x^2}$; $y=\arccos^8 5x$;
$y=\sin^4\left(x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; $\dfrac{x}{y^2}+\operatorname{arctg}(x+y)=\pi^2$.

31. $y=(2-x)\cdot e^{3+2x^2}-4$; $y=\dfrac{5x+4}{\arcsin(3-2x)}$; $y=\ln\dfrac{3}{2x-\sqrt{3-x^2}}$; $y=\dfrac{\sqrt{3+x^2}}{5-x^4}$; $y=(x^2-5)\cdot e^{\arccos 3x}$; $y=\arcsin^5 2x$; $y=\operatorname{arctg}\ln\left(e^{\sqrt{x}}-4\right)$; $y=\sin^9\left(3-e^{5x}\right)$; $\cos(3+y)-\dfrac{y}{x^3}=4$.

32. $y=(1+7x)\cdot e^{4x}+\ln 2$; $y=\dfrac{\cos(1-2x)+4}{x^2}$; $y=x^2\cdot e^{\operatorname{arctg}(1-x)}$; $y=\dfrac{\sqrt{x^3-7x}}{2-x}$; $y=\ln\left(x^4-\sqrt[3]{1+x}\right)$; $y=\sin^6(5-3x)$; $y=\ln^3(4-e^{3x})$; $y=\ln\arccos\left(5-\sqrt[3]{x}\right)$; $y=x^{\ln\left(5-e^{-3x}\right)}$; $(x+1)^2\cdot e^{xy}-\cos(1-y)=0$.

33. $y=x^3\cdot 4^{1+x^2}-4$; $y=\dfrac{5-4x}{1-\cos 2x}$; $y=\ln\left(\sqrt{3-2x}-x^2\right)$; $y=\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{4+2x}$; $y=(1-x)^8\cdot e^{\sin 2x}$; $y=\cos\operatorname{tg}\left(\sqrt[3]{x}-x\right)$; $y=\operatorname{arctg}^3(2+3x)$; $y=\arcsin^3\left(1-\sqrt{x}\right)$; $y=(1-3x)^{\sin 5x}$; $(x+2)\cdot\arcsin y+\dfrac{x}{y}=3$.

34. $y=x^3\cdot e^{4-2\sqrt{x}}+\ln^2 3$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{(1-x)^2}}{x^3+3}$; $y=\dfrac{\cos(2-3x)}{4-2x^2}$; $y=x^8\cdot 2^{tg 5x}$; $y=\ln\left(\sqrt[3]{2-x^3}-1\right)$; $y=\arccos\left(\ln\left(e^{2x}x\right)\right)$; $y=\arccos^6(3+2x)$; $y=\sin^4\left(3-2^{-3x}\right)$; $y=\left[\arcsin(2-x)\right]^{-x^2}$; $x\sqrt{y}+\cos(x+y)=8$.

35. $y=7x\cdot e^{2x^2}+4$; $y=\dfrac{3x-1}{\sin 12x+3}$; $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-2}}{3x-1}$; $y=6x\cdot e^{\sin 3x}$; $y=\ln\left(3x-\sqrt{x-x^2}\right)$; $y=\sin\ln\left(7-e^{-\sqrt[3]{x}}\right)$; $y=\cos^6(3-2\sqrt{x})$; $y=\operatorname{arctg}^3 5x$; $y=(x+1)^{\operatorname{tg}3x}$; $y+(x-2)\cdot\sin 3y=\sqrt{\pi}$.

36. $y=8x^5\cdot 4^{-2x^2}$; $y=\dfrac{\operatorname{arctg}(3-2x)}{3-4x^4}$; $y=\dfrac{4+3x}{\sqrt[5]{(x-1)^2}}$; $y=\ln\left(5x-e^{-x^2}\right)$; $y=2^{\ln 7x}(1-6x^2)$; $y=\operatorname{arctg}\ln\left(e^{5x}+4\right)$; $y=\cos^5(3-2x)$; $y=\arcsin^3\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$; $y=(\sin 5x)^{\sqrt{x}}$; $(y+1)\cdot\ln 3x-x\cdot\ln y=0$.

37. $y=5x^3\cdot 4^{1-x^8}$; $y=\arccos\ln\left(e^{\sqrt{3-2x^2}}+4\right)$; $y=\dfrac{\text{acrtg}(3x-4x^3)}{\sqrt{x}+7}$; $y=\dfrac{4-3x^2}{\sqrt{5x^3-4}}$;
$y=\ln\left(x+3^{5-3\sqrt{x}}\right)$; $y=2^{\ln(4+3x)}\cdot x^5$; $y=(3\operatorname{tg}x)^{2+\sqrt{x}}$; $y=\sin^7(5-3x)$;
$y=\arcsin^4\left(3-\dfrac{4}{x^2}\right)$; $\cos(x^2 5y)+\dfrac{x+3}{y}=4$.

38. $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot e^{5-2x^3}+4$; $y=\dfrac{2x+4x^2}{\sqrt{x^2-7x}}$; $y=\operatorname{arctg}\ln\left(e^{\sqrt[3]{3x^2+x}}-1\right)$;
$y=\dfrac{\sin(5x+4x^2)}{3-x^3}$; $y=\ln\left(\sqrt[3]{5+2x^2}+1\right)$; $y=x^4\cdot 2^{\arcsin(\sqrt{x}+2)}$; $y=\operatorname{tg}^7(5-2x)$;
$y=\sin^4\left(e^{3x^2}-x^2\right)$; $y=(\arccos 3x)^{1-\sqrt[3]{x}}$; $\ln(x^3-7y)+\dfrac{y}{2x}=1$.

39. $y=(1-2x^2)\cdot 3^{2x}+1$; $y=\dfrac{5-x}{\cos(2-3x^3)}$; $y=\arccos^5(2-x^2)$; $y=\dfrac{2+5x^4}{\sqrt{3-2x}}$;
$y=\ln\left(5x+\sqrt[3]{x^2}\right)$; $y=(2x-4)\cdot e^{\sin 5x}$; $y=\operatorname{arctg}^4(e^{7x}+2)$; $y=\operatorname{tg}\ln\left(2^{-\sqrt{x}}+1\right)$;
$y=(3+x^2)^{\sqrt{x}}$; $\cos(x^3-y)+\dfrac{y}{2x}=4$.

40. $y=(2+3x)\cdot e^{3x-x^2}+\sqrt{7}$; $y=\dfrac{\arcsin(3+\sqrt{3x})}{\sqrt{1+x^2}}$; $y=\ln\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{1+x}}$;
$y=\dfrac{\sqrt{2x-4}}{x^5-2x^3}$; $y=(2-x^3)\cdot 3^{\sin(2+x)}$; $y=\cos\ln\left(\sqrt[3]{2x}-\dfrac{5}{x}\right)$; $y=\operatorname{arctg}^7 5x$;
$y=\sin^3\left(e^{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x}\right)$; $y=(\cos 2x)^{1+\sqrt{x}}$; $\ln(x^3+2y^2)+5x=1$.

41. $y=(1+x^2)\cdot 2^{1+\sqrt{x}}+1$; $y=\dfrac{3-7x}{1+2\sin x}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}}{3+2x}$; $y=2x^4\cdot e^{\cos 5x}$;
$y=\ln\left(\sqrt[3]{2+4x}-x\right)$; $y=\sin\operatorname{arctg}(2\sqrt{x}-1)$; $y=\operatorname{arcctg}^5(2+x)$;
$y=\ln^7\left(3-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)$; $y=(2-4x^2)\cdot\cos 2x$; $x^3\arccos 5y-y^4=3$.

42. $y=(5-2x)\cdot 3^{x^2}-2$; $y=\dfrac{\sin(x-7x^{2)}}{4+2x}$; $y=\dfrac{2x-x^2}{\sqrt[3]{x}-x}$; $y=\ln\left(4x-\sqrt[3]{x^2-x}\right)$;
$y=\ln\sin\left(3-e^{5\sqrt{x}}\right)$; $y=(1-x)^5\cdot e^{\operatorname{arctg}x}$; $y=\arccos^8(2-6x)$; $y=\cos^3\left(e^{2\sqrt{x}}-1\right)$;
$y=\left(\sqrt{x}\right)^{\ln(x+1)}$; $y=\dfrac{3x}{y^2}-5\operatorname{arctg}(xy)=0$.

43. $y=7x\cdot e^{x^3+5}+8$; $y=\dfrac{\operatorname{arctg}(5+3x)}{x^2-3}$; $y=\dfrac{4-3x^3}{\sqrt{8x^2+x}}$; $y=\dfrac{5x}{3-2\sqrt[3]{x}}$;
$y=\arccos\ln\left(4+3\sqrt{x}\right)$; $y=(1-x)^4\cdot e^{\cos\sqrt{5x}}$; $y=\operatorname{arctg}^4 5x$; $y=\sin^9\left(4-e^{-\sqrt{x}}\right)$;
$y=(5x-\cos 2x)^{x^2}$; $\sin(x-5y)+x^3(1-y)=0$.

44. $y=(3-x^3)\cdot e^{5x}+\ln 3$; $y=\dfrac{\operatorname{tg}(7-3x)}{4-2x^3}$; $y=\dfrac{\cos\sqrt{3x}-5}{\sqrt[3]{7x}+3x}$; $y=\ln\dfrac{1}{\sqrt[6]{7-x^2+x}}$;
$y=x^3\cdot 7^{\arcsin(5-x)}$; $y=\ln\cos\left(5x+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}\right)$; $y=\sin^9(2-3x^2)$; $y=\ln^4\left(4-e^{2-x}\right)$;
$y=\left(\operatorname{arctg}\left(1-\sqrt{x}\right)\right)^{x-1}$; $y=(1-x^3)\cdot e^{x-y}$.

45. $y=(x+7)\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$; $y=\dfrac{(x-4)^5}{\sqrt[4]{2x^3}}$; $y=\dfrac{2-3x^3}{\operatorname{tg}(3+2x)}$; $y=\ln\left(\sqrt[3]{2-x^3}+x\right)$;
$y=x^3\cdot 5^{\cos(3-x)}$; $y=\arcsin\ln\left(e^{3-x}+\dfrac{1}{x}\right)$; $y=\cos^7\left(e^{-\sqrt{x}}-5x\right)$;
$y=\sin^3\left(6+3^{-\sqrt{x}}\right)$; $y=(\operatorname{ctg}(2-x))^{3x}$; $\sqrt{y}\cdot(x+1)-\sin(y-2x)=0$.

46. $y=(x+3)^2\cdot 2^x+\ln\pi$; $y=\dfrac{2x}{\cos 3x+1}$; $y=\dfrac{\sqrt{1+x}}{x^2-7}$; $y=3x\cdot e^{\cos 5x}$;
$y=\ln\left(5x+\sqrt{1+x}\right)$; $y=\sin\ln\left(3-3^{-x^2}\right)$; $y=\arcsin^5 8x$; $y=\sin^8\left(3-\sqrt[3]{x}\right)$;
$y=x^{\sin 6x}$; $(x+1)\cdot\sin 2y-\dfrac{y}{x}=4$.

47. $y=8x^3\cdot 3^{x-2}+5$; $y=\dfrac{5-x}{\sin 3x-1}$; $y=\dfrac{\sqrt{1+3x}}{1-4x}$; $y=\ln\left(\sqrt[3]{3-x^2}+2x\right)$;
$y=2x^2\cdot e^{\cos(3x-2)}$; $y=\ln\sin(3-e^{5x})$; $y=\operatorname{arctg}^5(4+3x)$; $y=\cos^3(7+e^{-2x})$;
$y=(x-1)^{\cos x}$; $y\cdot\operatorname{tg}(xy)-e^x=3$.

48. $y=2x\cdot e^{3x+x^2}+5$; $y=\dfrac{5+x}{\sin 7x+3}$; $y=\dfrac{\sqrt{2-x^3}}{7+5x}$; $y=\ln^8\dfrac{1}{e^{-x^2}+7}$;
$y=3x^2\cdot 2^{\sin(3-x)}$; $y=\ln\left(\sqrt[3]{5+x^2}-7x\right)$; $y=\arccos^8 15x$; $y=\sin^5(3e^x-7x)$;
$y=(x+9)^{\cos 7x}$; $\cos(2x-3y)+\dfrac{2x}{y}=0$.

49. $y=(5-x^2)e^{\sqrt{2x}}-4$; $y=\dfrac{3-x^2}{\cos 7x-4}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{4-7x^2}}{3x+8}$; $y=\ln(3x-\dfrac{2}{x+1})$;
$y=(5-x^2)e^{\sin(3-x)}$; $y=\arcsin^4(3-x)$; $y=\sin^3(e^{5x}-3)$ $y=(\mathrm{tg}\,5x)^{3-\sqrt{x}}$;
$\cos(3x-y)-\sqrt[3]{2y}=0$.

50. $y=(3+2x)5^{x^3}-\sqrt{8}$; $y=\dfrac{\sin(3+2x)}{3(x-1)^2}$; $y=(x-7)^3e^{\arcsin 5x}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{3+2x}}{(x-1)^2-7}$;
$y=\ln(12x+\sqrt[3]{x^3+4})$; $y=\sin^5(\sqrt{2}x-\dfrac{3}{x^2})$; $y=\ln\cos(5-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})$; $y=\arccos^5 2x$;
$y=(\mathrm{tg}\,8x)^{3+x^2}$; $\dfrac{x^2}{2y}+\mathrm{arctg}(x+y)=1$.

3.5. Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма

Теорема 3.6. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і в деякій точці $x_0 \in (a;b)$ має найбільше або найменше значення. Тоді якщо в точці x_0 існує похідна, то вона дорівнює нулю, тобто $f'(x_0)=0$.

Доведення. Нехай для визначеності функція $f(x)$ в точці x_0 має найбільше значення. Оскільки ми прийняли, що $f(x_0)$ - найбільше значення, то $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) < 0$ для довільної точки $x = x_0 + \Delta x \in (a;b)$ $\Delta x > 0$, звідки випливає, що ($\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, якщо $\Delta x > 0$) і ($\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, якщо $\Delta x < 0$).

Оскільки за умовою теореми похідна в точці $x = x_0$ існує, то, перейшовши до границі за умови, що $\Delta x \to 0$, дістанемо:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \le 0 \text{ і } \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \ge 0.$$

Але умови $f'(x_0) \le 0$ і $f'(x_0) \ge 0$ виконуються одночасно, лише коли

$$f'(x_0)=0.$$

Геометричний зміст теореми Ферма полягає в тому, що якщо в точці x_0 диференційовна функція $f(x)$ має найбільше або найменше значення, то в точці $(x_0; f(x_0))$ дотична до графіка функції $f(x)$ паралельна осі *Ox*.

Теорема Ролля

Теорема 3.7. Якщо функція $y = f(x)$

1) неперервна на відрізку $[a;b]$,

2) має рівні значення $f(a) = f(b)$ на кінцях цього відрізка,

3) диференційовна в усіх точках інтервалу $(a;b)$,

то в цьому інтервалі існує принаймні одна точка $x = c$, $c \in (a;b)$, в якій похідна функції дорівнює нулю

$$\exists c \in (a;b): \quad f'(c) = 0.$$

Доведення. Оскільки $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого M і найменшого m значень (друга теорема Вейєрштрасса). Отже $m \le f(x) \le M$.

Розглянемо два можливі випадки: 1) $M = m$; 2) $m < M$.

1) Нехай $M = m$. Це можливо тільки за умови, що $f(x) = const$ для всіх $x \in [a;b]$, тоді для будь-якого $x = c \in (a;b)$ матимемо: $f'(x) = (const)' = 0$.

2) Якщо $m < M$. Тоді хоча б одне з цих значень M або m досягається всередині відрізка $[a;b]$ в деякій точці $x = c$, $c \in (a;b)$. Нехай для конкретності $f(c) = M$.

Оскільки ми прийняли, що $f(c)$ - найбільше значення і функція в точці c диференційовна, то за теоремою Ферма $f'(c) = 0$.

Зауваження. Між двома коренями функції завжди міститься корінь її похідної, якщо тільки функція задовольняє умови теореми Ролля (рис. 3.5).

Геометричний зміст теореми Ролля

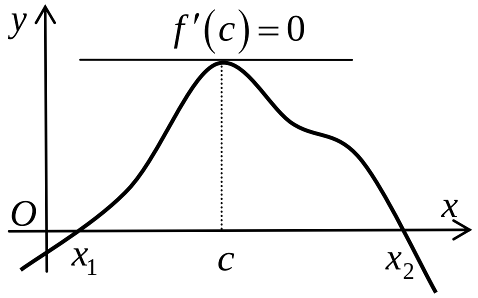


Рис. 3.5

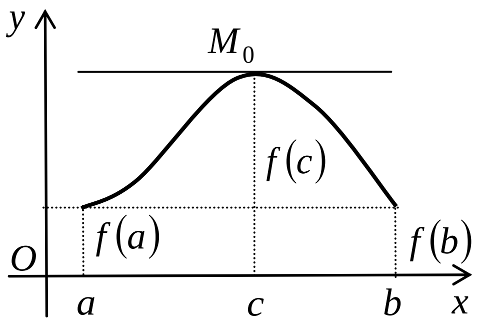


Рис. 3.6

Геометричний зміст теореми Ролля полягає в тому, що на графіку функції, яка задовольняє умови теореми, знайдеться принаймні одна точка $M_0(c, f(c))$, в якій дотична горизонтальна ($f'(c) = 0$) (рис. 3.6).

Приклад 3.21. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ на відрізку $[-1;1]$.

Розв'язування. Перевіримо виконання умов теореми:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ – неперервна на відрізку $[-1;1]$;

2) $f(-1) = f(1) = 1$;

3) $\forall x \in (-1;1)$: $\exists f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

Отже, як ми бачимо, умови теореми виконуються. Неважко помітити, що існує точка $x = c = 0 \in (-1;1)$ в якій похідна дорівнює нулю $f'(c) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{0} = 0$.

Приклад 3.22. Довести, що друга похідна функції

$$f(x) = x \cdot (x^2 - 1) \cdot \cos(0{,}1x) \cdot e^{x^2 - 8}$$

принаймні в одній точці проміжку $(-1;1)$ дорівнює нулю.

Розв'язання. Очевидно, що функція диференційовна на всій числовій осі і перетворюється в нуль в точках $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. Тобто на кожному з відрізків $x \in [-1;0]$ і $x \in [0;1]$ виконуються умови теореми Ролля. А отже $\exists c_1 \in (-1;0)$ і $\exists c_2 \in (0;1)$ такі, що $f'(c_1) = 0$, $f'(c_2) = 0$. Але для функції $f'(x)$ умови теореми Ролля на відрізку $[c_1;c_2]$ також задовольняються: 1) $f'(x)$ всюди неперервна; 2) $f'(c_1) = 0 = f'(c_2)$; 3) $f'(x)$ диференційовна на всій числовій прямій ($\forall x \in R \quad \exists f''(x)$). Тому за теоремою Ролля $\exists \tilde{c} \in (c_1;c_2) \subset (-1;1)$, що $(f'(\tilde{c}))' = f''(\tilde{c}) = 0$, що і потрібно було довести.

Теорема Лагранжа (теорема про скінченні прирости)

Теорема 3.8. Якщо функція $y = f(x)$

1) неперервна на відрізку $[a;b]$,

2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$,

то в цьому інтервалі існує принаймні одна така точка $x = c$, $c \in (a;b)$, що має місце рівність:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{3.18}$$

Доведення. Побудуємо допоміжну функцію $F(x) = f(x) + \lambda x$, де $\lambda = const$. Підберемо λ так, щоб функція $F(x)$ на кінцях відрізка мала рівні значення $F(a) = F(b)$:

$$F(a) = f(a) + \lambda a, \; F(b) = f(b) + \lambda b.$$

$$F(a)=F(b)\Rightarrow f(a)+\lambda a=f(b)+\lambda b\Rightarrow \lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Тоді

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x.$$

Функція $F(x)$ задовольняє умови теореми Ролля. Вона: 1) неперервна на $[a;b]$, 2) $F(a)=F(b)$, 3) диференційовна на $(a;b)$. Отже, за цією теоремою знайдеться $c\in(a;b)$ таке, що $F'(c)=0$.

Знайдемо похідну $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Тоді з умови $F'(c)=0$ матимемо, що $0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, звідки $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, що і потрібно було довести.

Геометричний зміст теореми Лагранжа

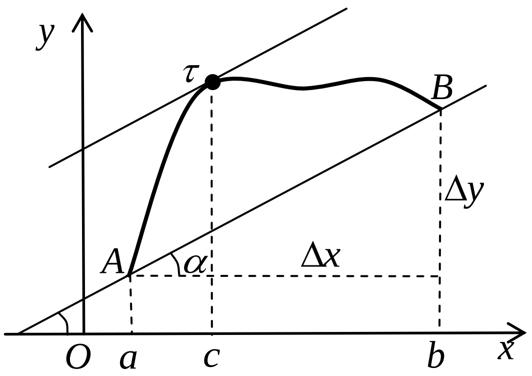


Рис. 3.7

На рис. 3.7 зображено графік функції $y=f(x)$, яка задовольняє умови теореми Лагранжа на відрізку $[a;b]$.

Відмітимо, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{BC}{AC}=\mathrm{tg}\,\alpha$$

є кутовим коефіцієнтом хорди, що стягує дугу *AB*, яка відповідає приросту *b*–*a*. З іншого боку, $f'(c)=\mathrm{tg}\,\alpha$ – кутовий коефіцієнт дотичної в точці з абсцисою $x=c$, $c\in(a;b)$.

Отже, на гладкій дузі *AB* графіка функції $f(x)$ завжди знайдеться принаймні одна внутрішня точка $x=c$, в якій дотична паралельна хорді, що стягує кінці дуги A і B.

Зауваження. Теорему Лагранжа можна записати через прирости:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c) \Rightarrow \Delta y = f'(c) \cdot \Delta x. \qquad (3.19)$$

Приклад 3.23. На дузі *АВ* кривої $y = x^2 + 1$ знайти точку *М*, в якій дотична буде паралельна хорді, якщо $A(-1;2)$, $B(2;5)$.

Розв'язання. Функція $y = x^2 + 1$ неперервна і диференційовна для всіх значень *х*. За теоремою Лагранжа між двома значеннями $a = -1$ і $b = 2$ існує таке значення $x = c$, що має місце рівність, отримана з (3.18)

$$y(b) - y(a) = y'(c) \cdot (b - a),$$

де $y' = 2x$. Підставивши відповідні значення, дістанемо:

$$y(2) - y(-1) = y'(c) \cdot (2+1),\ 5 - 2 = 2c \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}, c \in (-1;2);\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

Отже, маємо точку $M_0\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$.

Теорема Коші (Cauchy theorem) ***(про відношення приростів двох функцій)***

Теорема 3.9. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$

1) неперервні на відрізку $[a;b]$,

2) диференційовні в інтервалі $(a;b)$, причому $\varphi'(x) \neq 0$,

то в цьому інтервалі існує точка $x = c$, $c \in (a;b)$ така, що має місце рівність:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \qquad (3.20)$$

Доведення. Рівність (3.20) можлива, оскільки $\varphi(b) \neq \varphi(a)$, $\varphi(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;b)$.

Побудуємо допоміжну функцію $\Phi(x) = f(x) + \lambda \cdot \varphi(x)$, де $\lambda = const$. Підберемо λ так, щоб функція $\Phi(x)$ на кінцях відрізка мала рівні значення $\Phi(a) = \Phi(b)$:

$$\Phi(a) = f(a) + \lambda \cdot \varphi(a),\ \Phi(b) = f(b) + \lambda \cdot \varphi(b).$$

$$\Phi(a)=\Phi(b)\Rightarrow f(a)+\lambda\cdot\varphi(a)=f(b)+\lambda\cdot\varphi(b)\Rightarrow\lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

Тоді

$$\Phi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\cdot\varphi(x).$$

Функція $\Phi(x)$ задовольняє умови теореми Ролля. Отже за цією теоремою знайдеться таке $c\in(a;b)$, що $\Phi'(c)=0$.

Знайдемо похідну $\Phi'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\cdot\varphi'(x)$. Тоді з умови $\Phi'(c)=0$ матимемо, що $0=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\cdot\varphi'(c)$, звідки

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$ що і потрібно було довести.

Зауваження. Якщо в рівності (3.20) прийняти $\varphi(x)=x$, то як наслідок отримаємо теорему Лагранжа (3.18).

3.6. Правила Лопіталя розкриття невизначеностей (L'Hospital rule)

Теорема 3.10. (І правило Лопіталя). Якщо:

1) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовні на інтервалі $(a;b)$, $\varphi'(x)\neq 0$ для всіх $x\in(a;b)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$;

3) існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$,

то існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причому має місце рівність:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (3.21)$$

Доведення. Довизначимо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ в точці $x=a$ так, щоб вони стали неперервними, тобто покладемо $f(a)=\varphi(a)=0$. Тепер $\forall x\in(a;b)$ ці функції на відрізку $[a;x]$, ($[x;a]$) задовольняють умови теореми Коші. Тому існує точка *c*, $a<c<x$, ($x<c<a$) така, що

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Оскільки $a<c<x$, $(x<c<a)$ то $x\to a\Rightarrow c\to a, c\to x$. Перейшовши в останній рівності до границі, за умови $x\to a$, отримаємо

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$ що і потрібно було довести.

Запам'ятай добре! *Доведену теорему зазвичай називають правилом Лопіталя розкриття невизначеності* $\left[\frac{0}{0}\right]$ *за умови* $x\to a$.

Аналогічні теореми мають місце для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ у випадку односторонніх границь при $x\to a-0,\ x\to a+0$.

Приклад 3.24. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\ln(x-1)}$.

Розв'язання. Ми маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Функції $f(x)=x^3-8$ і $\varphi(x)=\ln(x-1)$ задовольняють умови теореми в деякому околі точки $a=2$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\ln(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(3.21)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3-8\right)'}{\left(\ln(x-1)\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{1/(x-1)}=12.$$

Наслідок 1. Теорема Лопіталя справедлива також при $a=-\infty$, при $a=+\infty$ і при $a=\infty$.

Приклад 3.25. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\mathrm{arctgx}}{e^{\frac{1}{x}}-1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\mathrm{arctgx}}{e^{1/x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{1/x}}=2\cdot1\cdot1=2\,.$$

Наслідок 2. Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють ті самі вимоги, що і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, то правило Лопіталя можна застосувати повторно. При цьому отримаємо

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}. \tag{3.22}$$

І взагалі, правило Лопіталя при виконанні умов теореми можна застосовувати багаторазово.

Приклад 3.26. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Розв'язання. Дана границя дозволяє використовувати формулу (3.21) багаторазово, дійсно:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(3.21)}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(3.21)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(3.21)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Наслідок 3. Якщо в теоремі замінити умову 2) на наведену нижче

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$, то формула (3.21) також має місце.

В цьому випадку правило Лопіталя застосовується для розкриття невизначеності типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$(II правило Лопіталя).

Приклад 3.27. Якщо $\alpha>0$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0,$$

тобто довільний додатний степінь x зростає швидше, ніж $\ln x$ при $x\to+\infty$.

Розв'язування. Дійсно, застосувавши II правило Лопіталя, отримаємо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha\cdot x^{\alpha}}=0.$$

Приклад 3.28. Якщо $n\in N$, $a>1$ то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0,$$

тобто, при $x\to+\infty$ степенева функція x^n зростає повільніше, ніж показникова функція a^x, $a>1$.

Розв'язування. Дійсно, застосувавши правило Лопіталя розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ n раз, отримаємо:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{a^x\ln a}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x\ln^2 a}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{a^x\cdot\ln^n a}=0.$$

Зазначимо, що формули (3.21), (3.22) мають місце лише тоді, коли існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Але буває і так, що границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ існує, у випадку коли границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не існує.

Приклад 3.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x}$ існує і дорівнює $\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Дійсно

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x}+\frac{\sin x}{2x}\right)=\frac{1}{2}.$$

Але відношення похідних $\frac{(x+\sin x)'}{(2x)'}=\frac{1+\cos x}{2}$ не має границі при $x\to\infty$.

Після певних перетворень правило Лопіталя може бути застосовано також до розкриття інших невизначеностей, таких як: $[0\cdot\infty]$, $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$, $[\infty-\infty]$.

Так, границі невизначеностей типів $[0\cdot\infty]$ та $[\infty-\infty]$ доцільно звести до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад 3.30. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу $[0\cdot\infty]$. Приведемо цю невизначеність до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ і застосуємо правило Лопіталя.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot \operatorname{tg} x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctg} x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2 x=-1.$$

Приклад 3.31. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу $[\infty-\infty]$. Спочатку зведемо дроби до спільного знаменника.

$$\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}=\frac{x\cdot\sin x}{\cos x}-\frac{\pi}{2\cos x}=\frac{2x\cdot\sin x-\pi}{2\cos x}.$$

Внаслідок перетворень ми дістали невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin x-\pi}{2\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+2x\cos x}{2\sin x}=\frac{2}{-2}=-1.$$

При розкритті невизначеностей типу $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$ за допомогою правила Лопіталя попередньо необхідно виконати деякі перетворення.

Нехай треба обчислити границю складеної степеневопоказникової функції:

$$\lim_{x\to a}u(x)^{v(x)},$$

де ми маємо невизначеність одного з вищезгаданих типів. Запишемо цю границю у вигляді

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln u(x)^{v(x)}} = \lim_{x\to a} e^{v(x)\cdot\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\left[v(x)\cdot\ln u(x)\right]},$$

тут в показнику маємо вже невизначеність виду $[0\cdot\infty]$, яку можна звести до невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ шляхом знесення в знаменник одного із співмножників, що стоять під знаком границі.

Приклад 3.32. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{1/\ln x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу ∞^0. Виконаємо тотожне перетворення функції:

$$(\ln 2x)^{1/\ln x} = e^{\ln\left((\ln 2x)^{1/\ln x}\right)} = e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\ln 2x)} = e^{\frac{\ln(\ln 2x)}{\ln x}}.$$

Знайдемо границю показника отриманої функції за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln 2x)}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln 2x)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln 2x}\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln 2x} = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{1/\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(\ln 2x)}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln 2x)}{\ln x}} = e^0 = 1.$

Приклад 3.33. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{1/x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу $\left[1^\infty\right]$. Виконаємо тотожне перетворення функції, що стоїть під знаком границі:

$$\left(e^x + x\right)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(e^x + x\right)} = e^{\frac{\ln\left(e^x + x\right)}{x}}.$$

Обчислимо окремо границю, яка міститься в показнику, за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x + x\right)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e^x + x}\cdot\left(e^x + 1\right)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 1}{e^x + x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Отже,

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{1/x} = e^2.$$

3.7 Дослідження функцій, заданих явно

Ознака монотонності функції

Теорема 3.11. Для того, щоб диференційовна на проміжку *X* функція $f(x)$ не спадала (не зростала) на цьому проміжку, необхідно і достатньо, щоб її похідна в усіх точках цього проміжку була невід'ємна (недодатна), тобто $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$).

Якщо похідна функції в усіх точках проміжку додатна (від'ємна), то функція зростає (спадає) на цьому проміжку.

Доведення. *Необхідність.* Нехай диференційовна функція $f(x)$ зростає на проміжку *X*. Тоді $\forall x\in X$ приросту аргументу $\Delta x>0$ відповідає приріст функції $\Delta y\geq 0$, а для $\Delta x<0$ відповідає приріст функції $\Delta y\leq 0$. Таким чином, в обох випадках $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$ і тоді $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$, тобто $f'(x)\geq 0$.

Аналогічно доводиться необхідна умова спадання функції.

Достатність. Нехай $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in X$. Тоді за теоремою Лагранжа $\exists c\in(x;\, x+\Delta x)$ таке, що $\Delta y=f'(c)\cdot\Delta x$. Але оскільки $f'(c)\geq 0$ за умовою, то, якщо $\Delta x>0$, отримаємо, що $\Delta y\geq 0$. Отже, функція $f(x)$ зростає на проміжку *X*.

Аналогічно доводиться достатня ознака спадання функції.

Зауважимо, що умова $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) є достатньою, але не є необхідною умовою зростання (спадання) функції.

Так, наприклад, функція $f(x)=x^3$ зростає на всій числовій осі, але її похідна $f'(x)=3x^2$ не всюди додатна – вона перетворюється в нуль при $x=0$.

Дослідити функцію на монотонність – означає знайти проміжки, на яких вона зростає (спадає).

Схема дослідження функції на монотонність

1. З'ясовують область визначення заданої функції $y=f(x)$.
2. Шукають першу похідну функції $y=f(x)$.
3. Прирівнюють першу похідну до нуля і знаходять корені рівняння $f'(x)=0$ та точки, в яких похідна не існує.
4. Наносять одержані розв'язки рівняння $f'(x)=0$ (зафарбовані точки) та точки, в яких похідна не існує («виколоті» точки), на числову вісь. Ці точки розбивають числову вісь на числові проміжки.

5. Досліджують знак похідної на кожному числовому проміжку. З цією метою з кожного проміжку вибирають довільне значення (точку) та з'ясовують знак похідної в цій точці.
6. За одержаними результатами формують відповідь.

Приклад 3.34. Дослідити функцію $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2$ на монотонність.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є множина дійсних чисел. Обчислимо похідну даної функції: $y'=x^2-2x-3$. Зрозуміло, що похідна дорівнює нулю при $x_1=-1$, $x_2=3$. За методом інтервалів знайдемо проміжки знакосталості $y'(x)$.

На проміжках $(-\infty;-1),(3;+\infty)$ $y'>0$, тому дана функція тут зростає. На проміжку $(-1;3)$ $y'<0$, тому функція спадає на цьому проміжку.

Екстремум функції

Означення 3.5. Точка $x=x_0$ називається точкою *локального максимуму* [*локального мінімуму*] (local maximum [minimum]) функції $f(x)$, якщо для всіх x із деякого околу точки x_0 виконується нерівність:

$$f(x_0)>f(x) \qquad (f(x_0)<f(x)) \text{ при } x\neq x_0.$$

Означення 3.6. Точки локального максимуму (max) і локального мінімуму (min) називаються точками *локального екстремуму* (local extremum), а значення функції в цих точках - екстремальними значеннями функції.

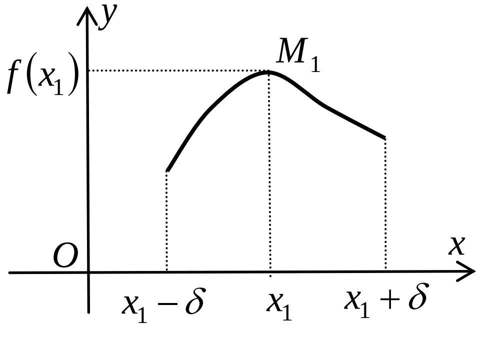


Рис. 3.8

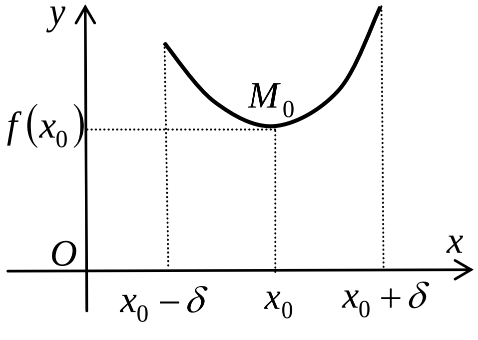


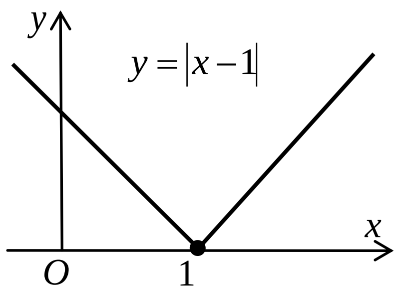
Рис. 3.9

На рис. 3.8 точка $x = x_1$ - точка локального максимуму з екстремальним значенням $f(x_1)$, а точка $x = x_0$ на рис. 3.9 - точка локального мінімуму з екстремальним значенням $f(x_0)$.

Теорема 3.12 (*необхідна умова екстремуму*)**.** Якщо функція має в точці локального екстремуму похідну, то ця похідна дорівнює нулю.

Доведення. Нехай $x = x_0$ - точка локального екстремуму функції $f(x)$. Розглянемо такий окіл точки x_0, в якому інших екстремальних точок немає. Очевидно, що тут виконується теорема Ферма, тобто $f'(x_0) = 0$, що і потрібно було довести.

Помітимо, що рівність похідної нулю не є достатньою умовою екстремуму. Так, наприклад, функція $y = x^3$ не має точок екстремуму, але її похідна $y = 3x^2$ дорівнює нулю при $x = 0$.



Відмітимо також, що точка може бути екстремальною у випадку коли похідна в цій точці не існує. Наприклад, функція $y = |x-1|$ (рис. 3.10) має точку локального мінімуму $x = 1$, але похідна в цій точці не існує (не існує дотична при $x = 1$).

Рис. 3.10

З наведених міркувань випливає, що локальний екстремум може знаходитись лише в такій точці, де похідна дорівнює нулю або не існує.

Означення 3.7. Внутрішні точки області визначення функції, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками* (critical points) *першого роду* для даної функції.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називаються *стаціонарними* (stationary points).

Отже, точки локального екстремуму необхідно шукати тільки серед критичних точок функції. Але потрібен критерій, за яким можна стверджувати, що дана критична точка є точкою локального екстремуму. Такий критерій дають дві наведені нижче теореми.

Теорема 3.13 (*достатня умова екстремуму*). Якщо при переході значень аргументу x функції $f(x)$ через критичну точку x_0 її похідна змінює знак, то критична точка є точкою локального екстремуму, причому:

а) при зміні знака з „плюса” на „мінус” точка x_0 є точкою локального максимуму;

б) при зміні знака з „мінуса” на „плюс” – точкою локального мінімуму.

Доведення. а) Нехай функція диференційовна в деякому δ-околі критичної точки x_0 і нехай $f'(x)$ при переході через цю точку змінює знак з „+” на „–”. Розглянемо відрізок, що сполучає точки x_0 і x, де точка $x = x_0 + \Delta x$ належить δ-околу. За теоремою Лагранжа на цьому відрізку знайдеться точка c така, що:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0). \qquad (*)$$

Якщо $\Delta x < 0$, то точка x і, відповідно, точка c лежать зліва від x_0, тому за умовою $f'(c) > 0$. З рівності (*) маємо, що

$$f(x) - f(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) > f(x).$$

Якщо ж $\Delta x > 0$, то точка x і, відповідно, точка c лежать справа від x_0, тому за умовою $f'(c) < 0$. З рівності (*) випливає, що

$$f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0) > f(x).$$

Отже, всюди в δ-околі точки x_0 виконується умова: $f(x_0) > f(x)$, тобто точка x_0 є точкою локального максимуму (за означенням).

Аналогічно проводиться доведення у випадку б).

Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Розглянемо функцію $f(x)$, що є визначеною і неперервною на відрізку $[a;b]$. До цього часу ми займались відшуканням лише локальних максимумів і мінімумів. Поставимо тепер задачу про відшукання *глобального максимуму і глобального мінімуму* (global maximum and minimum), або, іншими словами, відшуканню найбільшого і найменшого значень $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Зазначимо, що неперервна функція, в силу другої теореми Веєрштрасса, обов’язково досягне в деякій точці відрізка $[a;b]$ свого найбільшого (найменшого) значення.

Найбільше (найменше) значення функція $f(x)$ може приймати або у внутрішній точці відрізка $[a;b]$ (тоді воно збігається з одним із локальних екстремумів функції $f(x)$), або на одному з кінців даного відрізка.

Звідси зрозуміло, що для знаходження найбільшого M і найменшого m значень неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ потрібно:

1) знайти критичні точки, які належать відрізку $[a;b]$;

2) обчислити значення функції в цих критичних точках і в точках a і b;

3) з усіх отриманих значень вибрати найбільше M і найменше m і відмітити точки, в яких ці значення досягаються.

Скорочено записують так: $M=\max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)=f(x_1)$. Читають – найбільше значення (глобальний максимум) функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ дорівнює M і досягається в точці x_1. Аналогічно $m=\min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)=f(x_2)$.

Відшукання найбільшого (найменшого) значення функції неперервної на інтервалі, півпрямій, прямій проводиться подібним до вищенаведеного способом.

Приклад 3.35. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)=x^5+5x^4+5x^3-1$ на відрізку $[-2;1]$.

Розв'язування. Знаходимо похідну:

$$f'(x)=5x^4+20x^3+15x^2.$$

Прирівнюємо її до нуля:

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 5x^4+20x^3+15x^2=0.$$

Розв'язавши це рівняння отримаємо критичні точки: $x_1=-3,\, x_2=-1,\, x_3=0$, причому $x_1=-3\notin[-2;1]$. Обчислимо значення функції в критичних точках x_2 і x_3, а також на кінцях відрізка $a=-2, b=1$.

$$f(x_2)=f(-1)=-2; \quad f(x_3)=f(0)=-1; \quad f(a)=f(-2)=7; \quad f(b)=f(1)=10.$$

Отже $\max\limits_{x\in[-2;\,1]} f(x)=f(1)=10$, $\min\limits_{x\in[-2;\,1]} f(x)=f(-1)=-2$.

Відмітимо, що у випадку, коли неперервна функція має на відрізку лише одну точку локального максимуму (мінімуму), то можна стверджувати, що це і є точка глобального максимуму (мінімуму).

Приклад 3.36. Число 36 розкласти на два невід'ємні множники так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

Розв'язання. Нехай перший множник x, тоді другий - $\frac{36}{x}$. Будемо шукати мінімум функції $S(x)=x^2+\left(\frac{36}{x}\right)^2$ за умови $x>0$ (випадок $x=0$, очевидно, мінімуму функції не дає). Знайдемо

$$S'(x) = 2x + 2\cdot 36^2 \cdot \frac{1}{x^3} = 2\cdot\frac{x^4 - 36^2}{x^3};\ S'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad (x > 0).$$

Дослідимо функцію в отриманій критичній точці $x = 6$ на локальний екстремум, отримаємо, що в точці $x = 6$ функція $S(x)$ має локальний мінімум (інших точок локального екстремуму немає). Отже, перший множник $x = 6$, другий $\frac{36}{x} = 6$.

Опуклість та вгнутість графіка функції. Точки перегину

Нехай функція $f(x)$ диференційовна на проміжку *X*. Тоді у будь-якій точці цього проміжку існує дотична до графіка функції $y = f(x)$, причому ця дотична не вертикальна.

Означення 3.8. Графік функції $f(x)$ на проміжку *X* називається *опуклим* [*угнутим*] (bump, convex [concave]), якщо він розміщений під дотичною (над дотичною) в усіх точках проміжку.

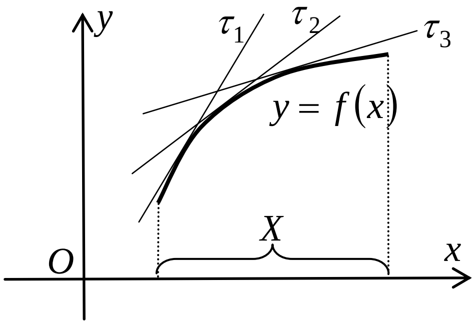


Рис. 3.11

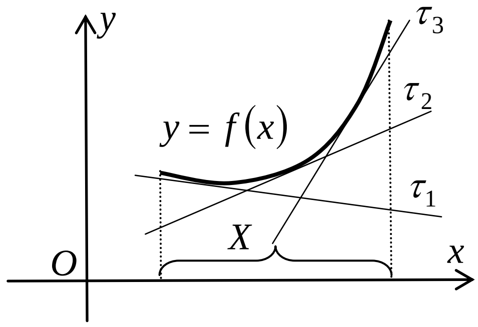


Рис. 3.12

На рис. 3.11 графік функції $f(x)$ на проміжку *X* – опуклий, а на рис. 3.12 – угнутий.

Достатня умова опуклості та вгнутості графіка на проміжку

Теорема 3.14. Якщо функція $f(x)$ має неперервну другу похідну на проміжку *X*, то за умови $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) $\forall x \in X$ графік – опуклий (угнутий).

Доведення. Візьмемо на графіку довільну точку $M_0(x_0; y_0)$.

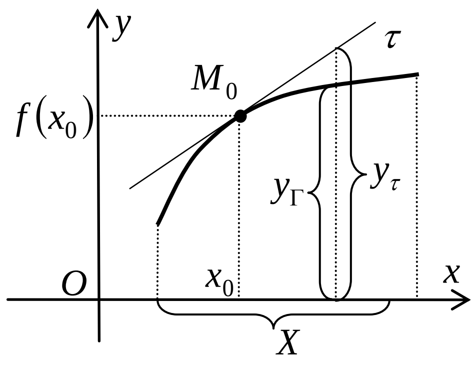


Рис. 3.13

Доведемо, що за умови $f''(x)<0$ всі точки графіка будуть розміщені під дотичною, тобто, що різниця $y_Г - y_\tau$ ординати графіка $y_Г$ і ординати дотичної y_τ на проміжку X буде від'ємною: $y_Г - y_\tau < 0$ (рис. 3.13).

Складемо рівняння дотичної τ в точці M_0:

$$y_\tau = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0).$$

Розглянемо різницю: $y_Г - y_\tau = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x-x_0)$. За теоремою Лагранжа для різниці $f(x)-f(x_0)$ матимемо:

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)\cdot(x-x_0), \quad x_0<c<x.$$

Тоді

$$y_Г - y_\tau = f'(c)\cdot(x-x_0) - f'(x_0)\cdot(x-x_0) = (x-x_0)\cdot(f'(c)-f'(x_0)), \quad x_0<c<x$$

Ще раз застосуємо теорему Лагранжа для різниці $f'(c)-f'(x_0)$, матимемо

$$f'(c)-f'(x_0)=f''(c_1)\cdot(c-x_0), \quad x_0<c_1<c.$$

Оскільки $c-x_0>0$ і $x-x_0>0$, а $f''(c_1)<0$, то $y_Г - y_\tau < 0$, тобто, точки графіка розміщені під дотичною.

Аналогічно доводиться достатня умова вгнутості графіка на проміжку.

Точки перегину

Означення 3.9. Точка, яка відокремлює опуклу частину неперервної кривої $f(x)$ від угнутої, називається *точкою перегину* (inflection point).

На рис. 3.14 точка M_0 є точкою перегину.

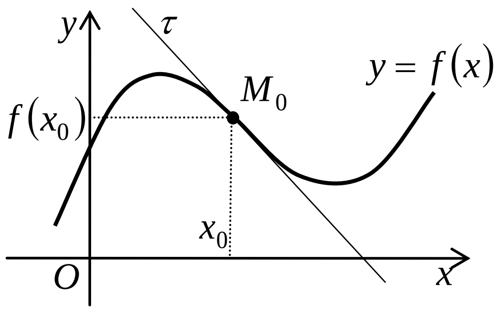


Рис. 3.14

Теорема 3.15 (*необхідна умова точки перегину*). Якщо точка $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ є точкою перегину графіка функції $f(x)$, то друга похідна функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ дорівнює нулю або не існує.

Доведення. Оскільки точка $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ є точкою перегину графіка функції, то зліва і справа від точки $x = x_0$ друга похідна має різні знаки. Отже, в самій цій точці друга похідна дорівнює нулю або не існує.

Означення 3.10. Внутрішні точки області визначення функції, в яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками другого роду*.

Попередня теорема дає всі підстави стверджувати, що точки перегину можуть знаходитись лише серед множини критичних точок.

Теорема 3.16 (*достатня умова точки перегину*). Нехай в точці x_0 друга похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю або не існує. Якщо при переході значень x через точку x_0 друга похідна змінює знак, то точка графіка з абсцисою x_0 є точкою перегину.

Доведення. Нехай при $x < x_0$: $f''(x) < 0$, а при $x > x_0$: $f''(x) > 0$, тоді зліва від точки x_0 крива – опукла, а справа – угнута. Це означає, що точка $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ є точкою перегину.

Схема дослідження функції на проміжки вгнутості та опуклості

1. З’ясовують область визначення заданої функції $y = f(x)$.
2. Шукають другу похідну функції $y = f(x)$.
3. Прирівнюють другу похідну до нуля і знаходять корені рівняння $f''(x) = 0$ та точки, в яких похідна не існує.
4. Наносять одержані розв’язки рівняння $f''(x) = 0$ (зафарбовані точки) та точки, в яких похідна не існує («виколоті» точки), на числову вісь. Ці точки розбивають числову вісь на числові проміжки.
5. Досліджують знак другої похідної на кожному числовому проміжку. З цією метою з кожного проміжку вибирають довільне значення (точку) та з’ясовують знак другої похідної в цій точці.
6. За одержаними результатами формуємо відповідь.

Приклад 3.37. Для графіка функції $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$ знайти точки перегину і проміжки опуклості та вгнутості.

Розв’язання.

1) Областю визначення функції є множина дійсних чисел.

2) Знаходимо другу похідну:

$$y' = 6x^2 - 6x, \quad y'' = 12x - 6.$$

3) Зрозуміло, що $y'' = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

4) Досліджуємо знаки другої похідної ліворуч і праворуч від точки $x = \frac{1}{2}$. Якщо $x < \frac{1}{2}$, то $y'' < 0$ і крива – опукла; якщо $x > \frac{1}{2}$, то $y'' > 0$ і крива – вгнута.

5) Отже, точка з абсцисою $x = \frac{1}{2}$ є точкою перегину, ордината точки перегину $y_0 = f(x_0) = \frac{3}{2}$, тобто $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ - точка перегину.

На проміжку $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ крива – опукла, а на проміжку $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ - угнута.

Асимптоти графіка функції (asymptote to graph of function curve)

Означення 3.11. Пряма $y = kx + b$ називається *похилою асимптотою* (sloping asymptote) графіка функції $y = f(x)$, якщо при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) справедлива рівність

$$f(x) = kx + b + o(x), \tag{3.23}$$

де $o(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Геометрично (рис. 3.15) рівність (3.23) означає, що графік $y = f(x)$ як завгодно близько наближається до графіка $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$)

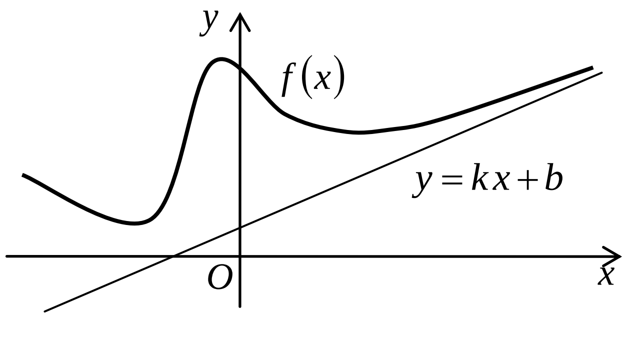


Рис. 3.15

З означення 3.11 (формула (3.23)) випливає, що невідомі коефіцієнти k і b в рівнянні $y = kx + b$ можна знайти так (розглянемо випадок $x \to +\infty$):

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{3.24}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right). \qquad (3.25)$$

Формули, аналогічні (3.24), (3.25), мають місце і у випадку $x\to-\infty$.

Приклад 3.38. Знайти похилу асимптоту для функції $y=\dfrac{2x^2+1}{x-2}$.

Розв'язання. Рівняння асимптоти шукатимемо у вигляді $y=kx+b$. Знаходимо невідомі коефіцієнти за формулами (3.24), (3.25)

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+1}{x\cdot(x-2)}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x-2}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+1}{x-2}=4.$$

Отже, пряма $y=2x+4$ є похилою асимптотою як при $x\to+\infty$, так і при $x\to-\infty$.

Означення 3.12. Пряма $x=a$ називається *вертикальною асимптотою* (vertical asymptote) графіка функції $y=f(x)$, якщо справедлива хоча б одна рівність

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\infty \text{ або } \lim_{x\to a-0}f(x)=\infty.$$

Відмітимо, що пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою для функції $y=f(x)$ тоді і тільки тоді, коли точка $x=a$ є точкою розриву другого роду (випадок, коли хоча б одна з односторонніх границь нескінченна) для функції $y=f(x)$.

Отже, задача знаходження вертикальних асимптот еквівалентна задачі відшукання точок розриву другого роду типу „*нескінченний стрибок*” (infinite discontinuity).

Приклад 3.39. Знайти вертикальні асимптоти функції $y=\dfrac{x^2+4}{x^2-1}$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є множина всіх дійсних чисел, за винятком точок $x=1$ і $x=-1$. Отже, точками розриву можуть бути лише ці дві точки. Досліджуючи на розрив, впевнюємось, що $x=1$ і $x=-1$ - точки розриву другого роду типу „нескінченний стрибок”. Отже прямі $x=1$ і $x=-1$ - вертикальні асимптоти.

Загальна схема дослідження функції

Наведемо схему, за якою доцільно досліджувати графік функції.

1) Знайти область визначення, перевірити функцію на парність, непарність, періодичність.

2) Визначити область неперервності та точки розриву.

3) Знайти асимптоти графіка функції.

4) Знайти критичні точки першого роду, визначити проміжки зростання і спадання функції, знайти точки локального екстремуму.

5) Знайти точки перегину, проміжки опуклості і вгнутості.

6) Знайти точки перетину графіка з віссю ординат; точки перетину з віссю абсцис (якщо це можливо); інші контрольні точки.

7) За одержаними результатами побудувати ескіз графіка функції.

3.8 Приклади розв'язування типових завдань з дослідження функцій, заданих явно

Приклад 3.40. Дослідити функцію $y=\dfrac{x^2-3}{x+1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1) Функція визначена для всіх $x\neq -1$. Функція загального виду, оскільки $f(-x)\neq \pm f(x)$. Функція не є періодичною.

2) В точці $x=-1$ функція має розрив.

Оскільки $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{x^2-3}{x+1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x^2-3}{x+1}=-\infty$, то точка $x=-1$ є точкою розриву другого роду типу „нескінченний стрибок”.

3,а) Враховуючи дослідження пункту 2), робимо висновок, що пряма $x=-1$ є вертикальною асимптотою.

3,б) Шукаємо похилі асимптоти у вигляді $y=k_{1,2}x+b_{1,2}$. Тут k_1, b_1 відповідають випадку $x\to-\infty$, а k_2, b_2 - випадку $x\to+\infty$. Знайдемо невідомі коефіцієнти $k_{1,2}$, $b_{1,2}$ за формулами (3.24), (3.25)

$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3}{x\cdot(x+1)}=1,$$

$$b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-3}{x+1}-1x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-3}{x+1}=-1.$$

Отже, $y = x - 4$ одна і та ж сама похила асимптота як при $x \to +\infty$, так і при $x \to -\infty$.

4) Для визначення інтервалів монотонності та локальних екстремумів обчислимо спочатку похідну

$$y' = \left(\frac{x^2 - 3}{x+1} \right)' = \frac{2x(x+1) - (x^2 - 3)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}.$$

Знайдемо проміжки знакосталості для y'.

Рівняння $y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$ дійсних коренів не має, причому $x^2 + 2x + 3 > 0$. Врахувавши те, що знаменник $(x+1)^2 \geq 0$, робимо висновок, що $y' > 0$ на кожному з проміжків неперервності. Отже дана функція зростає при $x \in (-\infty; -1)$ і при $x \in (-1; +\infty)$. Точок локального екстремуму немає.

5) Знайдемо проміжки опуклості (вгнутості).

Для цього обчислимо спочатку y'':

$$y'' = \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} \right)' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + 2x + 3)}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3}.$$

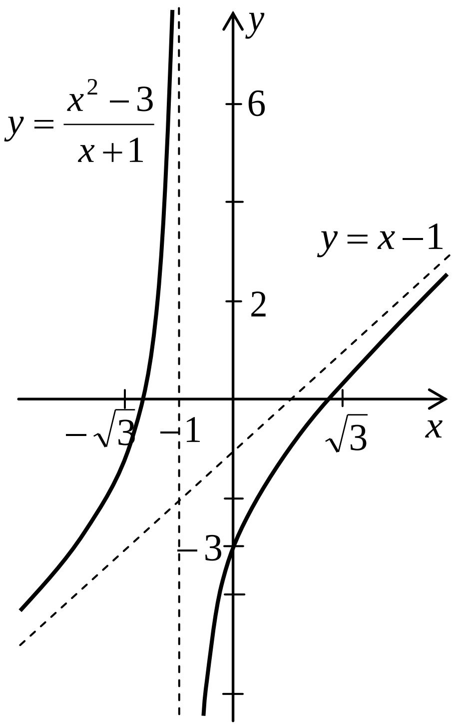


Рис. 3.15

Знайдемо проміжки знакосталості для y''. За методом інтервалів отримуємо, що $y'' > 0$ при $x \in (-\infty; -1)$ - тут графік функції вгнутий, та $y'' < 0$ при $x \in (-1; +\infty)$ - тут графік функції опуклий. В самій точці $x = -1$ функція невизначена, тому точки перегину немає.

6) Знайдемо точки перетину графіка з координатними осями.

Графік функції перетинає вісь абсцис, якщо $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$, отже, маємо точки: $(-\sqrt{3}; 0), (\sqrt{3}; 0)$. Графік перетинає вісь ординат, якщо $x = 0 \Rightarrow y = -3$, маємо точку $(0; -3)$.

7) У відповідності з проведеним дослідженням будуємо ескіз графіка даної функції (див. рис. 3.15).

Приклад 3.41. Дослідити функцію $y=(2x+1)\cdot e^{-2x}$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1) Функція визначена на всій числовій осі. Функція не є парною, оскільки $f(-x)\neq f(x)$; не є непарною, оскільки $f(-x)\neq -f(x)$. Функція не є періодичною.

2) Функція неперервна на всій числовій осі.

3,а) Оскільки функція є неперервною, вертикальних асимптот немає.

3,б) Шукаємо похилі асимптоти у вигляді $y=k_{1,2}x+b_{1,2}$. Тут k_1 , b_1 відповідають випадку $x\to-\infty$, а k_2 , b_2 - випадку $x\to+\infty$. Знайдемо невідомі коефіцієнти $k_{1,2}$, $b_{1,2}$ за формулами (3.24), (3.25).

$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+1)\cdot e^{-2x}}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}e^{-2x}=2\cdot(+\infty)=+\infty.$$

Отже, похилої асимптоти при $x\to-\infty$ (зліва) не існує.

$$k_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)\cdot e^{-2x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x\cdot e^{2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

за правилом Лопіталя:

$$k_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{2x}+2xe^{2x}}=0;$$

$$b_2=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left((2x+1)\cdot e^{-2x}-0\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{e^{2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

за правилом Лопіталя:

$$b_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2e^{2x}}=0.$$

Отже, $y=0$ – похила асимптота при $x\to+\infty$ (права горизонтальна асимптота).

4) Для визначення інтервалів монотонності та локальних екстремумів спочатку обчислимо похідну

$$y'=\left((2x+1)\cdot e^{-2x}\right)'=2e^{-2x}-2e^{-2x}\cdot(2x+1)=-4x\cdot e^{-2x}.$$

Знайдемо проміжки знакосталості для y'.

Рівняння $y' = 0 \Rightarrow -4x \cdot e^{-2x} = 0$ має єдиний корінь $x = 0$ (єдина критична точка). За методом інтервалів отримуємо, що $y' > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$ - на цьому інтервалі функція зростає і $y' < 0$ при $x \in (0; +\infty)$ - тут функція спадає. Оскільки при переході через точку $x = 0$ похідна змінює знак з „+” на „–”, то $x = 0$ є точкою локального максимуму, $y(0) = 1$.

5) Визначимо інтервали опуклості (вгнутості) і точки перегину.

Для цього обчислимо спочатку y'':

$$y'' = \left(-4x \cdot e^{-2x}\right)' = -4\left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) = 4(2x-1)e^{-2x}.$$

Знайдемо проміжки знакосталості для y''.

Рівняння $y'' = 0 \Rightarrow 4(2x-1) \cdot e^{-2x} = 0$ має єдиний корінь $x = \frac{1}{2}$. За методом інтервалів отримуємо, що при $x \in (-\infty; 1/2)$, $y'' < 0$ - тому на цьому інтервалі графік функції опуклий; при $x \in (1/2; +\infty)$, $y' > 0$ - графік угнутий.

Оскільки при переході через точку $x = \frac{1}{2}$ друга похідна змінює знак, то $x = \frac{1}{2}$ є точкою перегину; $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$. Перегин: $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{e}\right)$.

6) Знайдемо точки перетину графіка з координатними осями.

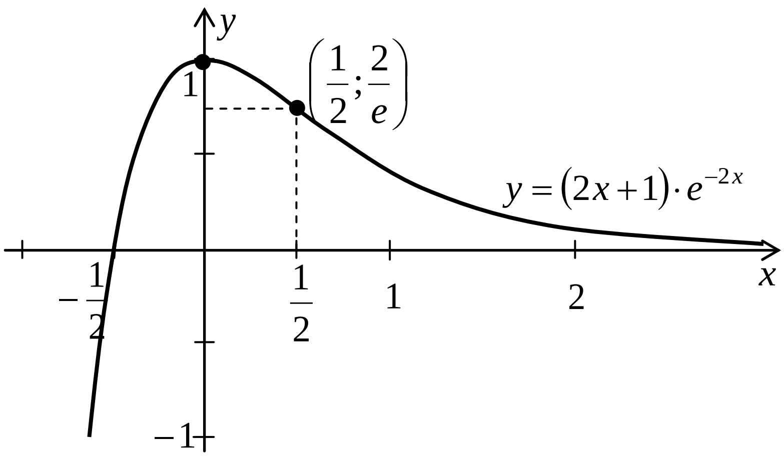


Рис. 3.16

Графік функції перетинає вісь абсцис, якщо

$$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2},$$

отже, маємо точку $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Графік перетинає вісь ординат, якщо $x = 0 \Rightarrow y = 1$, маємо точку $(0;1)$.

7) За результатами дослідження будуємо ескіз графіка даної функції (рис. 3.16).

Приклад 3.42. Дослідити функцію $y=\frac{-x^3}{2(x+2)^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1) Функція визначена для всіх $x\neq -2$. Функція не є парною, оскільки $f(-x)\neq f(x)$; не є непарною, оскільки $f(-x)\neq -f(x)$. Функція не є періодичною.

2) Функція неперервна на кожному з інтервалів $x\in(-\infty;-2)$, $x\in(-2;\infty)$. В точці $x=-2$ функція має розрив.

Оскільки

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{-x^3}{2(x+2)^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to -2+0}\frac{-x^3}{2(x+2)^2}=+\infty,$$

то точка $x=-1$ є точкою розриву другого роду типу „нескінченний стрибок".

3,а) Враховуючи пункт 2), робимо висновок, що пряма $x=-2$ є вертикальною асимптотою.

3,б) Шукаємо похилі асимптоти у вигляді $y=k_{1,2}x+b_{1,2}$. Тут k_1, b_1 відповідають випадку $x\to-\infty$, а k_2, b_2 - випадку $x\to+\infty$. Знайдемо невідомі коефіцієнти $k_{1,2}$, $b_{1,2}$ за формулами (3.24), (3.25).

$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^3}{2(x+2)^2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x+2)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2};$$

$$b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-x^3}{2(x+2)^2}+\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-x^3}{(x+2)^2}+x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^3+x(x+2)^2}{(x+2)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2+4x}{(x+2)^2}=\frac{4}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x}{(x+2)^2}=\left|\begin{array}{l}x^2+x\sim x^2\\(x+2)^2\sim x^2\end{array}\right|=2$$

.

Отже, пряма $y=-\frac{1}{2}x+2$ є похилою асимптотою як при $x\to+\infty$, так і при $x\to-\infty$.

Знайдемо точку перетину графіка (якщо це можливо) з похилою асимптотою:

$$-\frac{1}{2}x+2=\frac{-x^3}{2(x+2)^2}\Leftrightarrow\frac{3x+4}{(x+2)^2}=0\Rightarrow x=-\frac{4}{3},\ f\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}.$$

Маємо точку перетину $\left(-\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$.

4) Визначимо інтервали монотонності та точки локального екстремуму. Спочатку обчислимо похідну

$$y'=\left(\frac{-x^3}{2(x+2)^2}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2(x+2)^2-x^3\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2(x+6)}{(x+2)^3}.$$

Знайдемо проміжки знакосталості для y' за методом інтервалів.

Рівняння $y'=0\Rightarrow x^2(x+6)=0$ має корені $x=0$ та $x=-6$ (критичні точки першого роду). Похідна не існує в точці $x=-2$, але оскільки ця точка не належить області визначення, то вона не є критичною (у ній не може бути екстремуму).

За методом інтервалів складаємо таблицю зміни знаків похідної

x	$(-\infty;-6)$	-6	$(-6;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	–	0	+	не існує	–	0	–
y	$\searrow$	min 6,75	$\nearrow$	не існує	$\searrow$		$\searrow$

У точці $x=-6$ функція має локальний мінімум, оскільки при переході значень аргументу через неї похідна змінює знак з „–” на „+”, $y(-6)=6{,}75$.

У точці $x=0$ функція не має локального екстремуму.

5) Визначимо інтервали опуклості (вгнутості) і точки перегину.

Для цього обчислимо спочатку другу похідну y'':

$$y''=\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2(x+6)}{(x+2)^3}\right)'=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^3+6x^2}{(x+2)^3}\right)'=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(3x^2+12x)(x+2)^3-(x^3+6x^2)\cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3x\cdot 8}{(x+2)^4}=\frac{-12x}{(x+2)^4}.$$

Знайдемо проміжки знакосталості для y''.

Похідна дорівнює нулю при $x=0$ (критична точка другого роду) і не існує при $x=-2$ (проте $x=-2$ не є критичною точкою, тому що функція в ній не існує).

За методом інтервалів складаємо таблицю зміни знаків похідної

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;+\infty)$
y''	+	не існує	+	0	–
y	$\smile$	не існує	$\smile$	перегин	$\frown$

При $x\in(-\infty;-2)$, $x\in(-2;0)$ $y''>0$, тому на цих інтервалах графік функції вгнутий; при $x\in(0;+\infty)$ $y''<0$ графік опуклий.

Оскільки при переході значень аргументу через точку $x=0$ друга похідна змінює знак, то $x=0$ є точкою перегину; $y(0)=0$. Отже, перегин $(0;0)$.

6) Точка перетину графіка з віссю абсцис (ординат) $(0;0)$ вже знайдена.

7) За результатами дослідження будуємо ескіз графіка даної функції (рис. 3.17).

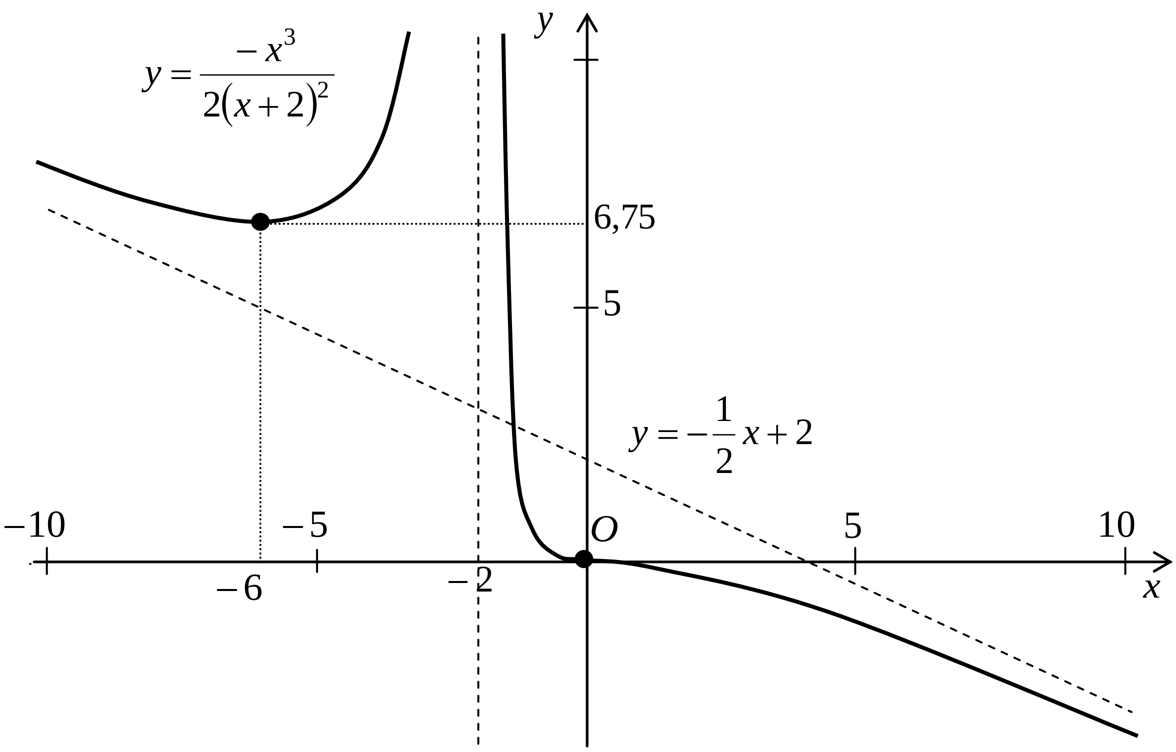


Рис. 3.17

3.9 Схема дослідження функцій, заданих параметрично

1. *Визначають область регулярності кривої* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ *та її особливі точки* (singular point, singularity).

Означення 3.12. Точка $M(x(t_0), y(t_0))$ називається *особливою точкою* кривої $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, якщо параметр t_0 є розв'язком системи $\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases}$.

Для з'ясування характеру особливої точки необхідно знайти порядок першої відмінної від нуля похідної функцій $x(t)$ та $y(t)$ при $t = t_0$.

Нехай $x'(t_0) = 0, \ldots, x^{(p-1)}(t_0) = 0$, $x^{(p)}(t_0) \neq 0$;

$$y'(t_0) = 0, \ldots, y^{(q-1)}(t_0) = 0, \; y^{(q)}(t_0) \neq 0.$$

Тоді можливі чотири випадки:

1) якщо p – непарне, а q – парне, то в околі точки $M(x(t_0), y(t_0))$ крива поводить себе так само, як і в околі регулярної точки;
2) якщо p та q – непарні, то $M(x(t_0), y(t_0))$ – точка перегину;
3) якщо p – парне, а q – непарне, то $M(x(t_0), y(t_0))$ – точка звороту першого роду (рис. 3.18,*а*);
4) якщо p та q – парні, то $M(x(t_0), y(t_0))$ – точка звороту другого роду (рис. 3.18,*б*).

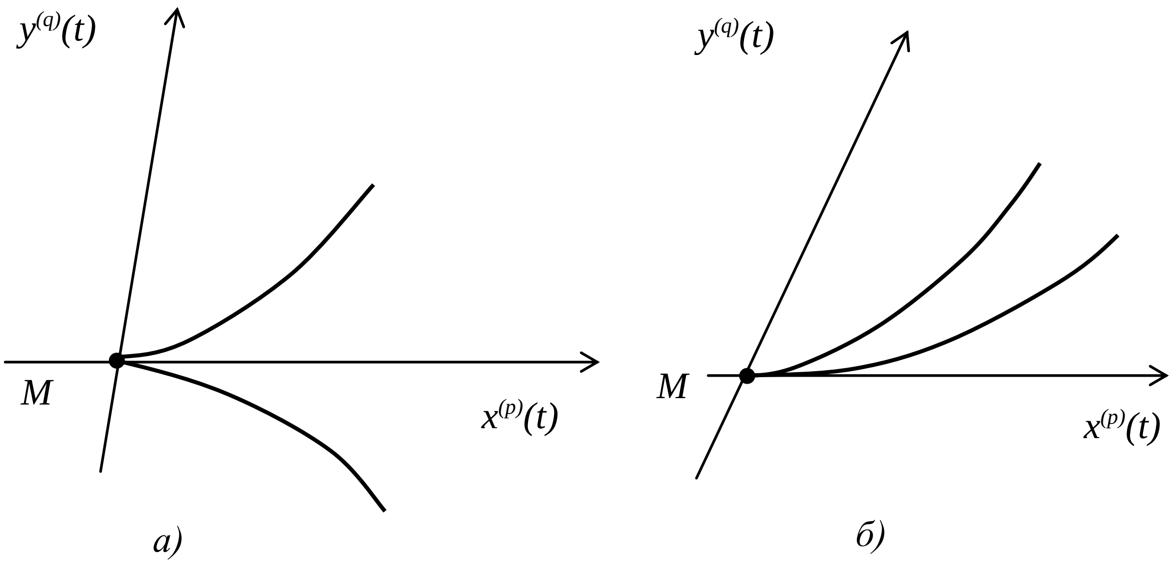


Рис. 3.18

2. *Знаходять точки самоперетину кривої.*

Означення 3.13. Точка $M(x(t), y(t))$ називається *точкою самоперетину* кривої (self-intersection point of curve), якщо цій точці відповідають різні значення параметра і крива функції $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ проходить через дану точку декілька разів. Параметри точки самоперетину є розв'язками системи: $\begin{cases} x(t) = x(t^*) \\ y(t) = y(t^*) \end{cases}$.

3. *Знаходять точки, в яких дотичні паралельні координатним осям.*

Оскільки $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, то:

1) дотична паралельна осі Ox, якщо $y'_x = 0 \Leftrightarrow y'_t = 0$;
2) дотична паралельна осі Oy, якщо $y'_x \to \infty \Leftrightarrow x'_t = 0$.

4. *Знаходять точки перегину та інтервали опуклості.*

Дослідження параметрично заданої функції на опуклість аналогічне дослідженню функції $y = f(x)$ з врахуванням формул

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}, \qquad x''_{yy} = \frac{y'_t x''_{tt} - y''_{tt} x'_t}{(y'_t)^3}.$$

5. *Визначають асимптоти*

Означення 3.14. Пряму $y = kx + b$ називають похилою асимптотою графіка функції $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, якщо $k = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$, $b = \lim\limits_{t \to t_0} \left(y(t) - kx(t)\right)$.

Означення 3.15. $x = a$ називається вертикальною асимптою, якщо $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a$, при цьому $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \infty$.

Означення 3.16. $y = b$ називається горизонтальною асимптотою, якщо $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = b$, при цьому $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \infty$.

6. *Відмічають деякі загальні властивості кривої (наприклад, симетрію відносно будь-якої осі). Для полегшення побудови кривої знаходять декілька опорних точок (наприклад, точки перетину з осями координат).*

3.10 Приклади розв'язування типових завдань з дослідження функцій, заданих параметрично

Приклад 3.43. Дослідити функцію $x = t^2$, $y = \frac{2}{3}t(3 - t^2)$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Функції $x(t)$ та $y(t)$ визначені для всіх значень параметра t та диференційовні в усіх точках. Оскільки похідні $x'_t = 2t$ та $y'_t = 2 - 2t^2$ не перетворюються на нуль одночасно, то крива не має особливих точок.

2. З'ясуємо, чи має крива точки самоперетину. Маємо:

$$\begin{cases} t^2 = (t^*)^2 \\ t(3 - \mathrm{t}^2) = t^*(3 - (t^*)^2) \end{cases},$$

оскільки передбачається, що t та t^* різні, то з першого рівняння випливає $t^* = -t$. Підставляючи це значення в друге рівняння, одержуємо

$$t(3 - \mathrm{t}^2) = 0.$$

Якщо $t = 0$, то $t^* = 0$ і ми одержали два однакових параметра, що неможливо. Залишається єдино можливий варіант: $t = \sqrt{3}$, $t^* = -\sqrt{3}$. Цим значенням відповідає одна точка $M_1(3, 0)$. З'ясуємо значення кутових коефіцієнтів дотичних для t та t^*:

$$y'_x\big|_{t=\sqrt{3}} = \left.\frac{1 - t^2}{t}\right|_{t=\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}},\ y'_x\big|_{t=-\sqrt{3}} = \left.\frac{1 - t^2}{t}\right|_{t=-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Оскільки кутові коефіцієнти відрізняються, то через точку $M_1(3, 0)$ крива проходить двічі, тобто це є точка самоперетину.

3. Маємо значення кутового коефіцієнта дотичної $\mathrm{y}'_\mathrm{x} = \frac{1 - t^2}{t}$. Оскільки $y'_x = 0$ при $t = \pm 1$, то дотична паралельна осі абсцис в точках $M_2\left(1, \frac{4}{3}\right)$ та

$M_3\left(1, -\dfrac{4}{3}\right)$. $y'_x \to \infty$ при $t = 0$, тому в точці $M_4(0, 0)$ дотична паралельна осі ординат.

4. Оскільки $x''_{tt} = 2$, $y''_{tt} = -4t$, маємо

$$y''_{xx} = \frac{2t(-4t) - 2(2 - 2t^2)}{8\mathrm{t}^3} = -\frac{1 + t^2}{2t^3}, \; x''_{yy} = \frac{1 + t^2}{2(1 - t^2)^3}.$$

Якщо $\mathrm{t} > 0$, то опуклість кривої спрямована в додатну сторону осі ординат. При $t = 0$ крива змінює характер опуклості, але тут немає перегину, оскільки в цій точці дотична паралельна осі ординат і ми повинні розглядати рівняння виду $x = \varphi(y)$. Оскільки $x''_{yy}\Big|_{t=0} = \dfrac{1 + t^2}{2(1 - t^2)^3}\Bigg|_{t=0} = \dfrac{1}{2} > 0$, то опуклість кривої спрямована у від'ємну сторону осі абсцис.

5. Асимптот крива не має.

- З рівняння кривої видно, що вона симетрична відносно осі абсцис: при зміні знака параметра *t* змінюється лише знак ординати та зберігається знак абсциси ($x(-t) = x(t), \; y(-t) = -y(t)$). Це означає, що достатньо побудувати криву тільки для додатних значень параметра *t*. Складемо допоміжну таблицю значень опорних точок:

t	x	y	*Точка та її особливості*
0	0	0	*M₄* (дотична паралельна осі ординат, опуклість спрямована у від'ємну сторону осі абсцис
1	1	$4/3$	M_2 (дотична паралельна осі абсцис)
$\sqrt{3}$	3	0	*M_1(точка самоперетину)*
2	4	$-4/3$	M_5

Крива зображена на рис. 3.19.

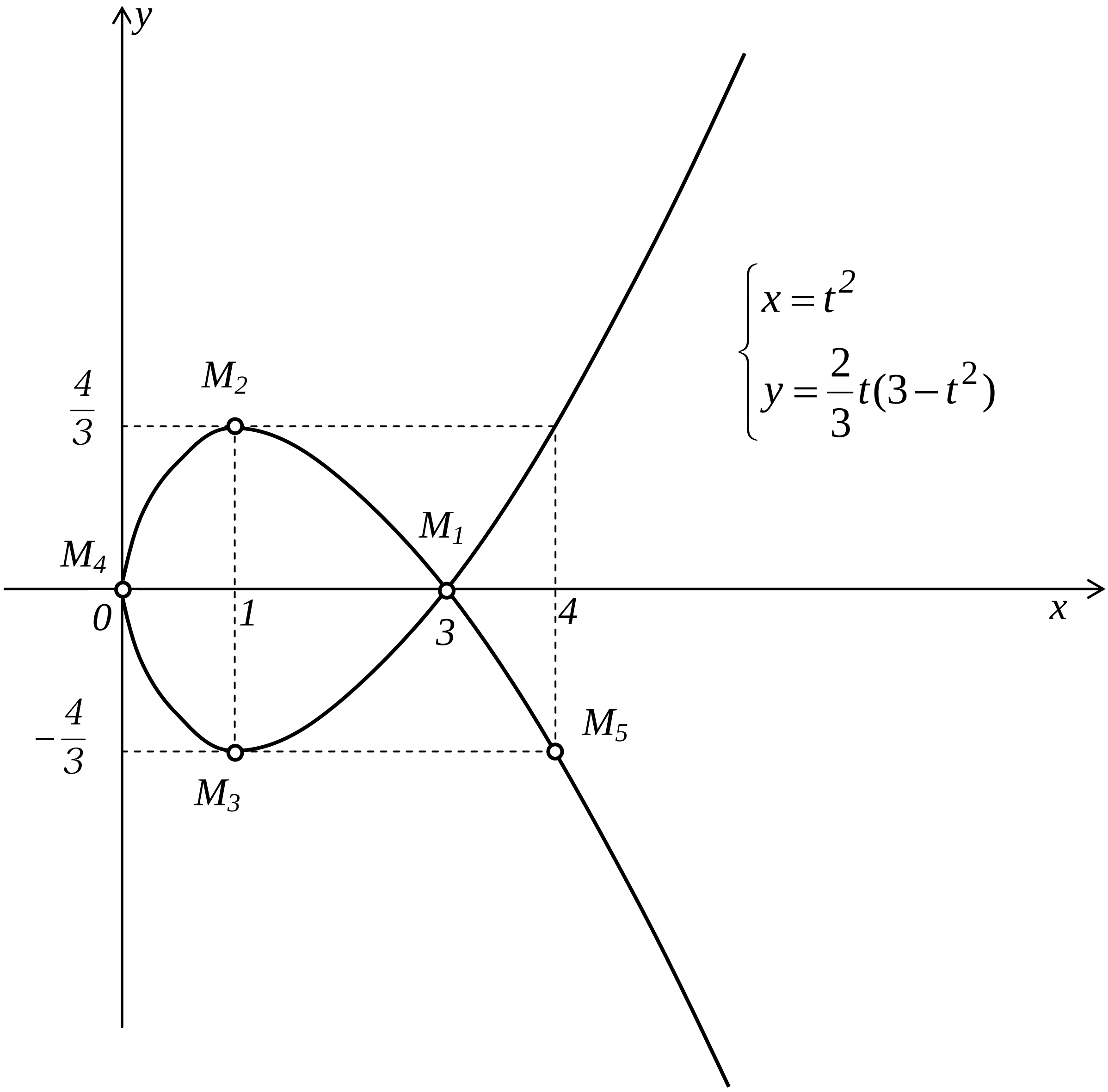


Рис. 3.19

Приклад 3.44. Дослідити функцію $x = t^4$, $y = t^2 - t^5$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Функції $x(t)$ та $y(t)$ визначені для всіх значень параметра t та диференційовні в усіх точках. Оскільки $x_t' = 4t^3$, $y_t' = 2t - 5t^4$, то система $\begin{cases} 4t^3 = 0 \\ 2t - 5t^4 = 0 \end{cases}$ сумісна при $t = 0$. Отже, точка $M_1(0,0)$ буде особливою точкою. З'ясуємо її характер.

$x''\big|_{t=0} = 12t^2\Big|_{t=0} = 0$, $x'''\big|_{t=0} = 24t\big|_{t=0} = 0$, $x^{IV}\Big|_{t=0} = 24\big|_{t=0} = 24 \neq 0$, отже $p = 4$. Тоді $y''\big|_{t=0} = 2 - 20t^3\Big|_{t=0} = 2 \neq 0$ і $q = 2$. Таким чином, точка $M_1(0, 0)$ є точкою звороту другого роду.

2. Точок самоперетину немає, оскільки система $\begin{cases} t^4 = (t^*)^4 \\ t^2 - t^5 = (t^*)^2 - (t^*)^5 \end{cases}$ несумісна.

3. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної $y'_x = \dfrac{2 - 5t^3}{4t^2}$, то дотична паралельна осі ординат при $t = 0$ (в точці звороту). Дотична паралельна осі абсцис при $t = \sqrt[3]{2/5}$, тобто в точці $M_2(0{,}2947;\,0{,}3257)$.

4. Знаходимо $y''_{xx} = -\dfrac{5\mathrm{t}^3 + 4}{16\mathrm{t}^6}$. В околі нуля $y''_{xx} < 0$, тобто крива опукла вверх. Оскільки $y''_{xx} = 0$ при $t = -\sqrt[3]{4/5} \approx -0{,}92831$ і при $t > -\sqrt[3]{4/5}$ маємо $y''_{xx} < 0$, то крива опукла вверх; при $t < -\sqrt[3]{4/5}$ маємо $y''_{xx} > 0$ – крива опукла вниз (угнута). Таким чином, точка $M_3(0{,}7426;1{,}55)$ – точка перегину кривої.

5. Крива асимптот немає.

6. Характерних особливостей крива не має. Складемо допоміжну таблицю значень опорних точок:

t	x	y	*Точка та її особливості*
0	0	0	*M_1 (точка звороту другого роду)*
$\sqrt[3]{2/5}$	0,2947	0,3257	*M_2 (дотична, паралельна осі абсцис)*
$-\sqrt[3]{4/5}$	0,7426	1,55	*M_3 (точка перегину кривої)*
1	1	0	*M_4*
-1	1	2	*M_5*
2	16	-28	*M_6*

Крива зображена на рисунку 3.20.

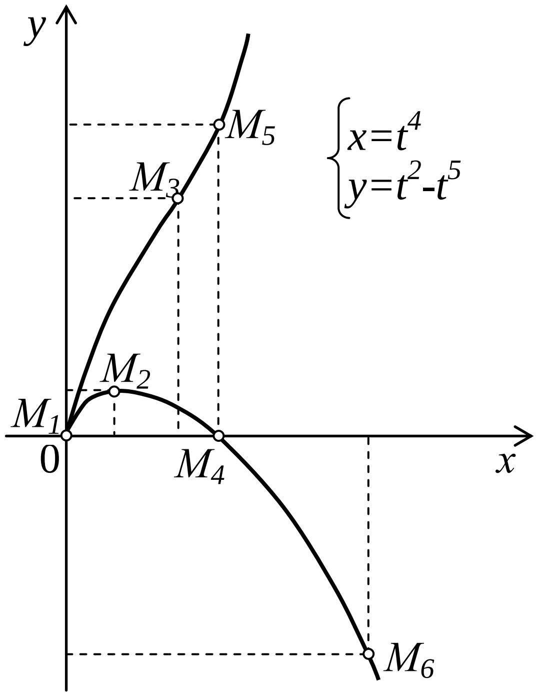
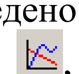


Рис. 3.20

3.11 Перевірка результатів аналітичного дослідження функцій за допомогою програмного пакета *MathCad*

Перевірку результатів аналітичного дослідження функцій зручно виконати за допомогою програмного пакета **MathCad**. Для цього необхідно скористатись панеллю «**График**». З її допомогою можна створювати різні дво- та тривимірні графіки, діаграми, подавати функцію двох змінних $z = f(x, y)$ у вигляді поверхні тривимірного простору.

Окрім того, дана панель також дозволяє побудувати графік функції, заданий в полярних координатах, проглянути ділянки двовимірного графіка та прослідкувати еволюцію двовимірної кривої.

На рисунку 3.21 наведено стандартне поле графіка, яке з’являється при натисканні на кнопки , розташованої на панелі «**График**». Далі необхідно заповнити комірки для функції та її аргументу. Функція відкладається вздовж осі ординат (вертикальна вісь), а її аргумент – вздовж осі абсцис.

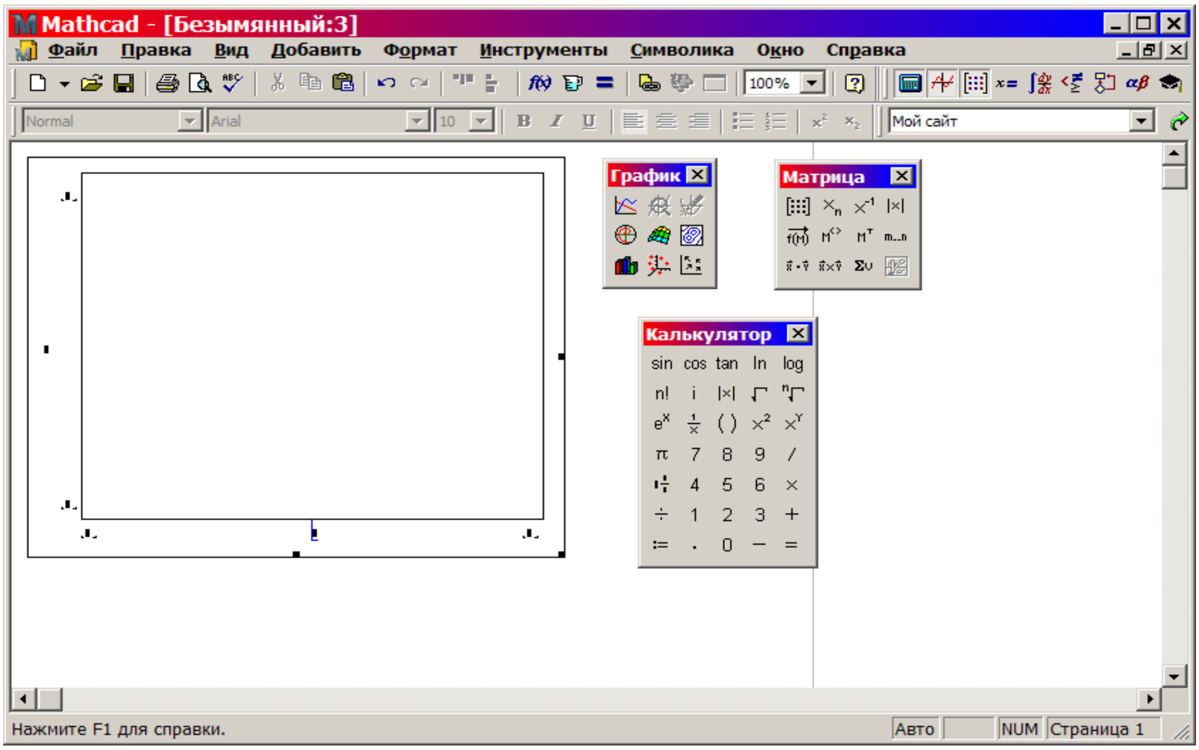


Рис. 3.21

Заповнивши центральну комірку « ▮ » , що належить осі ординат, довільною функцією, і клацнувши мишкою в точці, яка розташована за межами поля графіка, можна миттєво отримати результат (рис. 3.22).

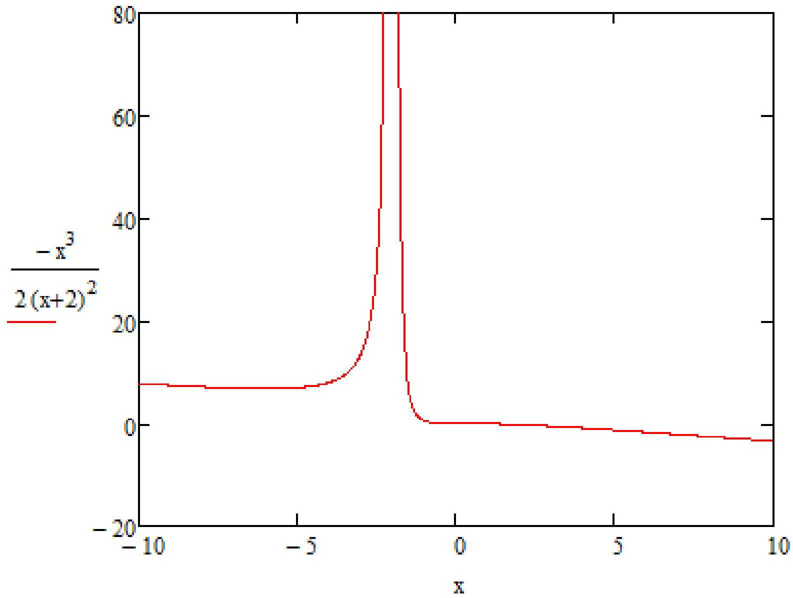


Рис. 3.22

За замовчуванням система автоматично встановлює межі зміни абсциси і ординати. Абсциса в даному випадку змінюється від -10 до +10, в той час як ордината – від найбільшого до найменшого значення функції на вказаному інтервалі.

При необхідності можна самому встановлювати бажані межі змін абсциси та/або ординати. Для цього необхідно заповнити потрібними значеннями відповідні комірки, що позначені в полі графіка символом « ▮ ». Форматування графіка виконується з діалогового вікна, що викликається правою кнопкою миші і не потребує особливих пояснень.

Приклад 3.45. Побудувати графік за допомогою *MathCad* $y = \dfrac{-x^3}{2(x+2)^2}$.

Визначення функції f(x):

$$y(x) := \frac{-x^3}{2(x+2)^2}$$

Використані масштаби: XL := 15 XR := 10 YH := 20 YL := 5

Увага: в даному прикладі графік будується в прямокутнику $-XL \le x \ge XR$ $-YL \le y \ge YH$

Число точок розбиття по осі x: n := 100

$$x := -XL, -XL + \frac{XL}{n} .. XR$$

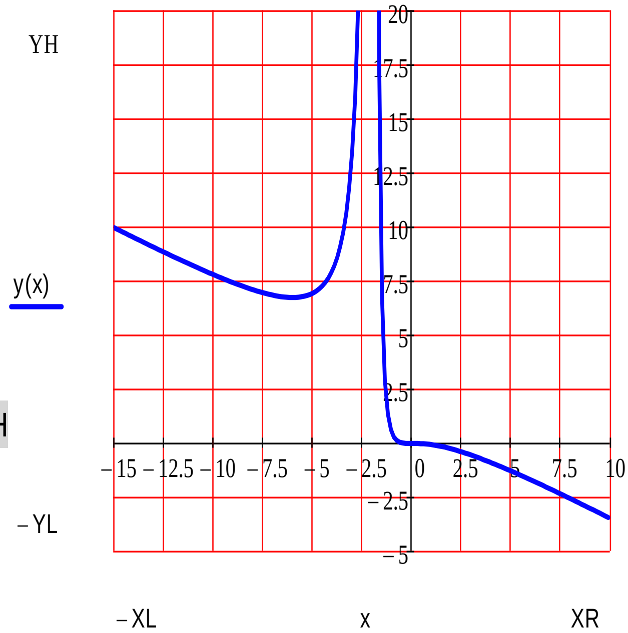


Рис. 3.23

Процес побудови графіка відображено на рис. 3.23.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте і доведіть теорему Ролля.
2. У чому полягає геометричний зміст теореми Ролля?
3. Яка з вимог теореми Ролля не виконується для функції $y = |x|$, $x \in [-1, 1]$?
4. Сформулюйте і доведіть теорему Лагранжа.
5. У чому полягає геометричний зміст теореми Лагранжа?
6. Використовуючи формулу Лагранжа, доведіть нерівність: $(a-b)/a \le \ln(a/b) \le (a-b)/b$, при $0 < b \le a$.
7. Сформулюйте і доведіть теорему Коші.

8. Сформулюйте і доведіть правило Лопіталя розкриття невизначеностей.

9. В яких інших випадках можна застосовувати правило Лопіталя?

10. Як можна розкривати за допомогою правила Лопіталя невизначеності $[0\cdot\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$, $[\infty-\infty]$?

11. Яка функція називається монотонною на проміжку X?

12. Що називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції?

13. Сформулюйте і доведіть теорему про необхідну і достатню ознаки зростання (спадання) функції на проміжку *X*.

14. Сформулюйте і виведіть необхідну умову існування екстремуму?

15. Які точки називаються критичними точками першого роду функції?

16. Сформулюйте і доведіть першу достатню умову існування екстремуму функції.

17. Сформулюйте і доведіть другу достатню умову існування екстремуму функції.

18. Як відшукати інтервали монотонності і екстремуми функції?

19. Як знайти найбільше і найменше значення функції, що неперервна на заданому відрізку?

20. Чи може функція, що має найбільше і найменше значення, не мати точок локального екстремуму? Наведіть приклади.

21. Чи може функція, що має точки локального екстремуму, не мати точок глобального екстремуму? Наведіть приклади.

22. Графік якої функції називається опуклим (вгнутим) на проміжку?

23. Яка точка на графіку функції називається точкою перегину?

24. Сформулюйте і виведіть достатню умову опуклості графіка функції на проміжку *X*.

25. Що називається похилою асимптотою графіка функції? Як відшукати похилі асимптоти?

26. Дати означення вертикальної асимптоти графіка функції.

27. Яка загальна схема дослідження функції?

Завдання для самостійної роботи

Завдання 3.2. Провести повне дослідження функцій і накреслити їх графіки.

1. $y=\dfrac{x+1}{x^3}$; $\quad y=xe^{-x}+1$; $\quad x=3t^2,\ y=3t-t^3$.

2. $y=\dfrac{x^2}{x-1};$ $y=(2+x)e^x-1;$ $x=\dfrac{t}{t-1};\ y=\dfrac{t}{t+1}.$

3. $y=\dfrac{x^3}{x^3-2};$ $y=(x-1)e^{-2x}+2;$ $x=\dfrac{1}{3}t^3,\ y=4-\dfrac{1}{2}t^2.$

4. $y=\dfrac{-x}{x^3-1};$ $y=(3x-1)e^{2x}-3;$ $x=\dfrac{t-1}{t},\ y=\dfrac{t+1}{t-1}.$

5. $y=\left(\dfrac{2x+3}{x-1}\right)^2;$ $y=(2x+1)e^{2x}+1;$ $x=2t-t^3,\ y=2t^2-3.$

6. $y=\dfrac{3x^3}{x^3+6};$ $y=2xe^x-1;$ $x=\dfrac{t-1}{t+1},\ y=\dfrac{t}{t-1}.$

7. $y=\dfrac{x^2+1}{2x+3};$ $y=(3-x)e^{-x}+3;$ $x=t^2-1,\ y=t^3-t.$

8. $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3};$ $y=(3x+1)e^{-x}+2;$ $x=\dfrac{t+1}{t},\ y=\dfrac{t-1}{t+1}.$

9. $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)};$ $y=(1-x)e^{-x}+1;$ $x=\dfrac{1}{3}t\left(3-t^2\right),\ y=t^2.$

10. $y=\dfrac{x^2+1}{x-1};$ $y=(2x+1)e^x-1;$ $x=\dfrac{t}{t-1},\ y=\dfrac{t-1}{t+1}.$

11. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1};$ $y=(6-3x)e^{2x}+2;$ $x=t^2+1,\ y=t^3-3t.$

12. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1};$ $y=3xe^{-x}+1;$ $x=\dfrac{2t}{t+1},\ y=\dfrac{t}{t-1}.$

13. $y=\dfrac{-x^2}{(x-2)^2};$ $y=(5x-2)e^{-x}+3;$ $x=\dfrac{1}{6}t^6,\ y=2-\dfrac{1}{4}t^4.$

14. $y=\dfrac{x}{x^3-2};$ $y=(2x-1)e^{2x}+3;$ $x=\dfrac{t}{t+1},\ y=\dfrac{2t}{t-1}.$

15. $y=\dfrac{4x^3}{x^3-1};$ $y=(4-2x)e^x-2;$ $x=t^2,\ y=t-\dfrac{1}{3}t^3.$

16. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x};$ $y=(x+3)e^{-2x}+1;$ $x=\dfrac{2t}{t-1},\ y=\dfrac{t}{t+1}.$

17. $y=\dfrac{x+3}{x^3};$ $y=-xe^x+2;$ $x=\dfrac{1}{3}t^3-t,\ y=t^2+2.$

18. $y=\dfrac{4x^3+5}{x};$ $y=(2x+5)e^{2x}+1;$ $x=\dfrac{t}{t-2},\ y=\dfrac{t}{t+2}.$

19. $y=\dfrac{x^2}{x^3+1};$ $y=(1-x)e^x+1;$ $x=\sqrt{3}\cdot t^2,\ y=t^3-t.$

20. $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$; $y=(x+1)e^{-x}+3$; $x=\dfrac{t}{t+2}$, $y=\dfrac{t}{t-1}$.

21. $y=\dfrac{x}{2-x^3}$; $y=(2x+3)e^{x}+2$; $x=t^3$, $y=t^2-2$.

22. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$; $y=(x-3)e^{-2x}+4$; $x=\dfrac{t-2}{t}$, $y=\dfrac{t}{t+1}$.

23. $y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$; $y=2xe^{-x}-1$; $x=3t-t^3$, $y=t^2-1$.

24. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$; $y=(2x-1)e^{-x}-2$; $x=\dfrac{t}{t+2}$, $y=\dfrac{t}{t+1}$.

25. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; $y=(x-2)e^{2x}-3$; $x=t^2-1$, $y=\dfrac{t}{3}\left(t^2-3\right)$.

26. $y=\dfrac{-x}{x^3+3}$; $y=(2x-3)e^{-3x}+1$; $x=\dfrac{t+2}{t}$, $y=\dfrac{t}{t-1}$.

27. $y=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2$; $y=-xe^{2x}+2$; $x=8t^3$, $y=3(2t^2-t^4)$.

28. $y=\dfrac{x}{x^3-4}$; $y=(5-2x)e^{-x}+3$; $x=\dfrac{t-1}{t+1}$, $y=\dfrac{t+1}{t}$.

29. $y=\dfrac{x-2}{(x+1)^2}$; $y=(2x+4)e^{x}-1$; $x=t^2$, $y=t^4+t^5$.

30. $y=\dfrac{x}{x^2-4x+3}$; $y=(2x-3)e^{x}-1$; $x=\dfrac{t-1}{t}$, $y=\dfrac{t+1}{t-1}$.

31. $y=\dfrac{3x}{3+x^2}$; $y=(x+2)e^{3x}+2$; $x=2\left(t^2+1\right)$, $y=t^3-3t$.

32. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; $y=2xe^{x}-1$; $x=\dfrac{t+1}{t-1}$, $y=\dfrac{t-1}{t}$.

33. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; $y=(1-2x)e^{x}+2$; $x=t^2$, $y=t\left(\dfrac{1}{3}-t^2\right)$.

34. $y=\dfrac{x^3}{x^2+9}$; $y=(x-2)e^{-3x}-2$; $x=\dfrac{t}{t-1}$, $y=\dfrac{t-1}{t+1}$.

35. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$; $y=(5x+2)e^{2x}-1$; $x=\dfrac{2}{3}(t^3-3t)$, $y=2(t^2+1)$.

36. $y=\dfrac{2x^3}{x^3+1}$; $y=(3x+1)e^{-x}-2$; $x=\dfrac{t+2}{t-1}$, $y=\dfrac{t}{t+1}$.

37. $y=\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^2$; $y=(x+2)e^{2x}+3$; $x=2t-t^2$, $y=4t-t^3$.

38. $y=\dfrac{-2x^3}{x^2+3}$; $y=(2x-1)e^{-2x}+1$; $x=\dfrac{t+1}{t}$, $y=\dfrac{t-1}{t+2}$.

39. $y=\dfrac{-x}{x^3+2}$; $y=-xe^x+2$; $x=3t^2$, $y=t+t^3$.

40. $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$; $y=(x-2)e^x+2$; $x=2t^3$, $y=2t^2-t^4$.

41. $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}$; $y=xe^{-3x}+4$; $x=\dfrac{t-2}{t+1}$, $y=\dfrac{t}{t-2}$.

42. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; $y=(5x-2)e^x+1$; $x=t^2-24$, $y=t^3-3t$.

43. $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$; $y=(2x+3)e^{-3x}+2$; $x=\dfrac{t+2}{t}$, $y=\dfrac{t-1}{t+2}$.

44. $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$; $y=(3x-2)e^{-x}+1$; $x=t^2$, $y=t-t^3$.

45. $y=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$; $y=(2-x)e^{3x}+1$; $x=\dfrac{t+1}{t-2}$, $y=\dfrac{t}{t+1}$.

46. $y=\dfrac{x^3}{3(x-2)^2}$; $y=(3x-1)e^{-2x}+2$; $x=t^3-3t$, $y=2t^2$.

47. $y=\dfrac{3x^3}{x^3+8}$; $y=3xe^x-1$; $x=\dfrac{t}{t-1}$, $y=\dfrac{t+1}{t+2}$.

48. $y=\dfrac{2x-1}{x^3}$; $y=(2x+1)e^{-x}+2$; $x=2t^2-t^3$, $y=t^2$.

49. $y=\dfrac{2x^2}{x+2}$; $y=(5x+2)e^{-x}+3$; $x=\dfrac{t}{t+1}$, $y=\dfrac{t-1}{t+2}$.

50. $y=\dfrac{x^3}{(2x+1)^2}$; $y=(2x-1)e^x-1$; $x=2-t^2$, $y=t^3$.

Словник основних математичних термінів, що зустрічаються в тексті

А*ргумент* - Independent argument, Predictor; Argument, 5
Асимптота до кривої - Asymptote to curve, 126
____________ *вертикальна* - Vertical asymptote, 126
____________ *графіка функції* - Asymptote to graph of function curve, 126
____________ *похила* - Sloping asymptote, 126

Г*еометричний зміст похідної* - Geometric sense of derivative, 78
______________________ *диференціала* - Geometric sense of differential, 90
Глобальний максимум (*мінімум*) - Global maximum (minimum), 121
____________ *екстремум* - Global extremum, 121
Границя - Limit, 23
________ *одностороння* - One-sided limit, 26
________ *послідовності* - Limit of sequence, 23
________ *функції* - Limit of function, Two-sided limit of function, 24
_________________ *справа* - Limit from above, Right-handed limit, 26
_________________ *зліва* - Limit from below, Left-handed limit, 26
Графік функції - Function graph, Graph of function, Plot of function, 6
plot - *a single line, or trace, in a graph region*
graph - *a set of axes with a scale into which plots may be placed*

Д*иференціал* - Differential, 88
_________ *вищого порядку* - Higher-order differential, 93, 96
_________*другого порядку* - Second differential, Second-order differential,96
Дотична - Tangent line, 78
Дробово-раціональна функція - Rational function, Fractional rational function, Quotient of polynomials, 40

Е*квівалентні нескінченно малі* - Equivalent infinitesimal, 35
____________ *функції* - Equivalent functions, 35
Екстремум глобальний - Global extremum, 121
___________ *локальний* - Local extremum, 119

І*рраціональне число* - Irrational number, 30

Л*окальний максимум* (*мінімум*) - Local maximum (minimum), 119

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. / За ред. Г. Л. Кулініча – К., 1992.
2. Дубовик В. П., Юрик І.І. Виша математика: Навчальний посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.
3. Дубовик В. П. Вища математика : збірник задач. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2003.
4. Збірник задач з вищої математики / За ред. Ф. С. Гудименка. – К. : Вид-во Київ. ун-ту, 1967. – 352 с.
5. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. / Кудрявцев Л. Д. – М. : Наука, 1989.
6. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике /типовые расчеты/ / Кузнецов Л. А. – М. : Высш. шк., 1983.
7. Математичний аналіз у задачах і прикладах. У 2 ч. : навч. посібник / Дюженкова Л. І., Лященко М. Я. та ін. – К. : Вища школа, 2003. – Ч.1.
8. Овчинников П. Ф. Высшая математика. / Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В.М. – К. : Вища школа, 1987.
9. Пак В. В. Вища математика. / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – К. : Либідь, 1996.
10. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Ч. 1. / Пискунов Н. С. – М. : Наука, 1985.
11. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. / Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1986.
12. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. / Под ред. А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйш. шк., 1990.

Навчальне видання

Ігор Васильович Абрамчук
Наталія Василівна Сачанюк-Кавецька
Лідія Іванівна Педорченко

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Редактор В. О. Дружиніна

Оригінал-макет підготовлено І. В. Абрамчуком

Підписано до друку
Формат 29.7 $\times$ 42 $1/4$. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк.
Наклад прим. Зам. №

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-81-59.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.