УДК 373.31:51(091)

ОСНОВНІ ЕТАПИ РОЗВИТКУ ПОНЯТТЯ «ІНТЕГРАЛ»

В. В. Хом'юк, Л. О. Мамашвілі

Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця
e-mail: mamashvili.leonid@gmail.com

Постановка проблеми. Досить часто і в повсякденній практиці використовуються математичні знання. І це не тільки прості математичні розрахунки, а й елементи вищої математики, теорії ймовірності. Таким чином, все більш широкий спектр математичних знань стає сьогодні обов'язковим елементом загальної культури сучасної людини. Поняття інтеграла пронизує всю сучасну математику. І не тільки в науках фізичного і технічного циклів знаходять застосування різні варіації інтеграла. Більш того, останнім часом увійшли до ужитку такі терміни, як, наприклад, «інтегральна схема», «економічна інтеграція», які прямого відношення до інтеграла не мають, але смислове навантаження зберігають і знаходять широке застосування.

Аналіз останніх досліджень. Питання вивчення історії математики досліджували В.Г. Бевз, Г.О.Михалін, А.О.Розуменко, М.В. Шмигевський та інші. Знайомство з життям і науковими досягненнями вчених математиків допоможе студентам зрозуміти як відкриваються нові горизонти науки.

Мета дослідження – розглянути основні етапи розвитку поняття «інтеграл» та визначити вирішальні умови його виникнення та розвитку.

Викладення основного матеріалу дослідження. Поняття інтеграла та інтегральне числення виникли з потреби обчислювати площі будь-яких фігур, поверхонь і об'єми довільних тіл. Інтегрування простежується ще в давньому Єгипті, приблизно в 1800 році до н. е., Московський математичний папірус демонструє знання формули об'єму зрізаної піраміди. За 2000 років до н.е. жителі Єгипту і Вавилона вже вміли визначати наближено площу кола і знаходити правило об'єм зрізаної піраміди.

Першим відомим методом для розрахунку інтегралів є метод вичерпання Евдокса (приблизно 370 до н. э.), який намагався знайти площі і об'єми, розриваючи їх на нескінченну безліч частин, для яких площа або об'єм вже відомі. Цей метод був підхоплений і розвинений Архімедом та використовувався для розрахунку площ парабол і наближеного розрахунку площі кола. Аналогічні методи були розроблені незалежно в Китаї в 3-му столітті н.е. Лю Хуейем, який використовував їх для знаходження площі кола. Цей метод був згодом використаний Дзю Чонгши для знаходження об’єму кулі.

Дуже важливим для становлення інтегрального числення було удосконалення Архімедом ідеї Демокріта про розбиття плоских фігур на елементарні полоски, що «заповнюють» фігури, і тіла на шари, що заповнюють їх. Таких елементарних частин могло бути нескінченна множина або скінченне число. Цими діями Архімед передував ідеям Кеплера і Кавальєрі у визначенні числових характеристик різних геометричних об’єктів. У Кавальєрі навіть деякі вирази співпадають з тими, які вживав Архімед: обидва говорили про всі лінії, що заповнюють плоску фігуру і про всі плоскі перетини, що заповнюють об’єм [1].

У XVII ст. велика група математиків займалася наступними основними завданнями: проведенням дотичної до кривої, що привело до виникнення диференціального числення і обчисленням квадратури, що спричинило виникнення інтегрального числення.

У «Методі флюксій» Ньютон помістив дві таблиці невизначених інтегралів; у одній з них містяться інтеграли, що алгебраїчно виражаються в кінцевому вигляді, в іншій – інтеграли, що виражаються через відомі.

Необхідно відзначити, що ні у Ньютона, ні у Лейбніца не було формули:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), F'(x) = f(x) \tag{1}$$

званою зараз формулою Ньютона – Лейбніца. Але це правило вони знали. Ньютон писав: «...для отримання належного значення площі, прилеглої до деякої частини абсциси, цю площу завжди слід брати рівній різниці значень z, відповідних частинам абсцис, обмеженим початком і кінцем площі» [3]. Викликає інтерес розробка Лейбніцем символіки диференціального та інтегрального числень. Її можна прослідкувати за рукописами. Так, 26 жовтня 1675 року Лейбніц виражав квадратуру у дусі Паскаля словами $omn.\ w$ (всі ординати); 29 жовтня відмітив, що зручніше писати замість $omn.\ l$ вираз $\int l$ (сума ліній, знак $\int$ походить від першої букви слова summa), і вказав, що тут виникає новий рід числення. Інший рід числення з’являється, по словах Лейбніца, коли з виразу $\int l = a$ слідує $l = ya/d$. Знак $\int$ збільшував число вимірювань, а d – зменшував (d – перша буква слова differentia – різниця). Вже в рукописі 11 жовтня символи x/d і y/d замінені на dx та dy. Інтеграл Лейбніц розумів як суму нескінченного числа доданків – визначений інтеграл. У одному з рукописів є запис $dx = x$. Це означає, що взаємна оберненість дій диференціювання і інтегрування у Лейбніца виступали на оперативному рівні. Лейбніц замість слова «інтеграл» вживав «сума»; термін «інтеграл» ввів у 1696 р. Іоганн Бернуллі (від лат. Integer – цілий, тобто ціла, вся – площа) [3].

Восени 1675 року Лейбніц сформулював основні понятті диференціального і інтегрального числення. Він дав загальні правила розв'язування завдань на квадратуру і дотичні, встановив зв'язок між завданнями диференціювання і інтегрування, ввів символіку обох операцій, що збереглася понині. Дві роботи (1701 і 1703 рр.) Лейбніц присвятив інтегруванню раціональних дробів. Для інтегрування раціонального дробу він виділяв з нього цілу частину, після чого правильний раціональний дріб представляв у вигляді суми простіших. У зв'язку з інтегруванням раціональних дробів в аналіз увійшли комплексні числа. Після знаменного часу Ньютона і Лейбніца розвиток ідеї інтеграла пішов в двох напрямах: інтеграл, що трактувався як межа деякої суми, певний інтеграл, знаходив все більше і більше застосування в механіці, фізиці, проник в технічні науки і став інструментом у всіх галузях природничих наук; інтеграл як сімейство первісних, невизначений інтеграл, своїм розвитком викликав виникнення абсолютно нового розділу аналізу – методів інтегрування функцій, а це у свою чергу було пов'язано з появою функцій, не відомих раніше – клас інтегрованих функцій весь час поповнювався. Для подальших узагальнень інтеграла усередині самої математики повинні були дозріти умови, що допускають це. Такі умови створила розроблена в кінці XIX ст. і початку XX ст. теорія множин, з найважливішим поняттям міри множини [2]. Виникло нове поняття – інтеграл Лебега, узагальнений інтеграл Рімана. Лебег ввів дескриптивне визначення інтеграла: сформулював його властивості, що не містять вказівок на побудову. Він дав також конструктивне визначення інтеграла – аналітичне і геометричне. У 1930 р. А.І. Колмогоров (р. 1903) опублікував роботу, в якій охоплені всі інтеграли як межі різних інтегральних сум. Інтеграл Колмогорова знайшов застосування в математичній фізиці, при математичному обґрунтуванні квантової механіки.

Висновок. Інтеграл був, є і буде стрижньовим поняттям в математиці. Не випадково символом Міжнародного математичного конгресу в 1966 р. був знак інтеграла. Найважливіше застосування невизначеного інтеграла відноситься до інтегрування диференціальних рівнянь, складових могутнього апарату багатьох наук.

Література

1. Архимед. Сочинения // Нор., ст. и коммент. И. Н. Веселевского. – М. : Физматгиз, 1962, – С.213.
2. Бевз В.Г. Історія математики / В. Г. Бевз. – К., 2007. – С. 135–137.
3. Никифоровский В. А. Путь к интегралу / В. А.Никифоровский. – М.: «Наука», 1985. – 192 с.