УДК 681.31

О.В. Романюк, В.В. Войтко, О.П.Гончарук

ОДИН ІЗ ПІДХОДІВ ДО СПРОЩЕННЯ ПРОЦЕДУРИ ВИЗНАЧЕННЯ ВЕКТОРІВ НОРМАЛЕЙ

Постановка проблеми. Однією з найбільш трудомістких обчислювальних процедур формування реалістичних зображень є процедура знаходження векторів нормалей. Зображення розбивається на низькорівневі полігони, як правило, трикутники. Для того, щоб задати кривизну трикутника, для кожної його вершини задають вектор нормалі, а потім знаходяться вектори нормалей у кожній точці усередині цього трикутника. Шляхом лінійної інтерполяції спочатку знаходяться вектори нормалей у точках, що лежать на ребрах трикутника, а потім за їх значеннями шляхом лінійної інтерполяції знаходяться вектори нормалей у точках, що лежать уздовж рядків растеризації усередині трикутника. Така процедура потребує багато часу, що впливає на швидкість формування кінцевого зображення, тому актуальною задачею є зменшення обчислювальної складності визначення векторів нормалей.

Аналіз підходів до знаходження векторів нормалей. Існують різні підходи до визначення векторів нормалей.

У методі Фонга [1] пропонується розраховувати вектори нормалей шляхом лінійної інтерполяції. За такого підходу спочатку інтерполюються значення векторів нормалей уздовж ребер полігона, а потім усередині полігона уздовж рядків растеризації. Отримані значення векторів нормалей необхідно нормалізувати, що вимагає значних обчислювальних витрат.

К.Шумейк [2] запропонував у методі Фонга для розрахунку векторів нормалей використовувати кутову інтерполяцію. Перевагою даного методу є усунення процедури нормалізації векторів нормалей, однак виникає необхідність розрахунку трудомістких тригонометричних функцій $sin, arccos$, а також потребує виконання операції ділення.

У роботі [3] запропоновано метод визначення нормалізованих векторів шляхом послідовного поділу навпіл кута між векторами до початкової та кінцевої точок рядка растеризації трикутника. Даний метод доцільно використовувати для невеликих розмірів рядків растеризації трикутників (наприклад, для $m < 16$).

Метод квадратичної інтерполяції [4] векторів нормалей передбачає використання квадратичного рівняння для знаходження проміжних значень нормалізованих векторів нормалей у рядку растеризації трикутника за умови, що відомо одиничні вектори у початковій та кінцевій точках i-го рядка растеризації трикутника.

У роботі [5] описано метод сферично-кутової інтерполяції векторів нормалей, який зручно використовувати, якщо відоме значення кута між векторами нормалей до початкової та кінцевої точок рядка растеризації трикутника.

Перераховані методи мають велику обчислювальну складність, тому актуальною задачею є розробка нових підходів до спрощення процедури знаходження векторів нормалей.

Мета статті. Встановлення функціональних зв'язків між вхідними параметрами, що дозволяє спростити обчислювальні процедури знаходження векторів нормалей.

Спростити процедуру знаходження векторів нормалей можна за рахунок встановлення нових властивостей. Доведемо властивість про сталість приростів ортогональних координатних складових векторів нормалей усередині трикутного полігона.

Твердження. При лінійному інтерполюванні векторів нормалей уздовж рядків растеризації трикутника прирости ортогональних координатних складових векторів нормалей уздовж горизонтальних (вертикальних) рядків растеризації трикутника мають сталі значення.

Доведення. Нехай задано трикутник $A_1A_2A_3$, вершини якого мають координати $\left(X_{A_1}, Y_{A_1}\right)$, $\left(X_{A_2}, Y_{A_2}\right)$ та $\left(X_{A_3}, Y_{A_3}\right)$. До вершин трикутника задано вектори нормалей $\vec{N}_{A_1}$, $\vec{N}_{A_2}$ та $\vec{N}_{A_3}$. Через вершину A_2 проведемо відрізок A_2B (рис. 1), який паралельний осі абсцисс і ділить трикутник $A_1A_2A_3$ на два трикутники – A_1A_2B і BA_2A_3.

Знайдемо прирости ортогональних координатних складових векторів нормалей уздовж горизонтальних рядків растеризації CC_1 і DD_1

$$\Delta_{\Gamma}\vec{N}_{CC_1} = \frac{\vec{N}_C - \vec{N}_{C_1}}{CC_1}, \quad \Delta_{\Gamma}\vec{N}_{DD_1} = \frac{\vec{N}_D - \vec{N}_{D_1}}{DD_1} \tag{1}$$

Виразимо вектори нормалі в точках C і C_1 через вектори нормалі у вершинах A_1, A_2 і A_3

$$\vec{N}_C = \frac{\vec{N}_{A_3} - \vec{N}_{A_1}}{A_1A_3} \cdot A_1C + \vec{N}_{A_1}, \qquad \vec{N}_{C_1} = \frac{\vec{N}_{A_2} - \vec{N}_{A_1}}{A_1A_2} \cdot A_1C_1 + \vec{N}_{A_1} \tag{2}$$

Підставимо вираз (2) у формулу (1). Отримаємо

$$\Delta_{\Gamma}\vec{N}_{CC_1} = \frac{\vec{N}_{A_3} - \vec{N}_{A_1}}{A_1A_3} \cdot \frac{A_1C}{CC_1} - \frac{\vec{N}_{A_2} - \vec{N}_{A_1}}{A_1A_2} \cdot \frac{A_1C_1}{CC_1} \tag{3}$$

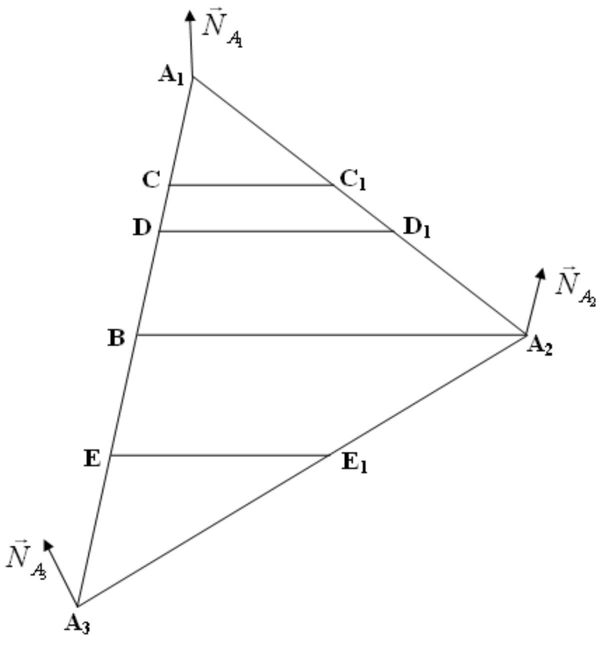

Рис. 1. Рядки растеризації трикутника $A_1A_2A_3$

Аналогічно для точок D і D_1 можна записати

$$\vec{N}_D = \frac{\vec{N}_{A_3} - \vec{N}_{A_1}}{A_1A_3} \cdot A_1D + \vec{N}_{A_1}, \qquad \vec{N}_{D_1} = \frac{\vec{N}_{A_2} - \vec{N}_{A_1}}{A_1A_2} \cdot A_1D_1 + \vec{N}_{A_1} \tag{4}$$

З урахуванням (4) приріст координатних складових векторів нормалей уздовж горизонтального рядка растеризації DD_1 запишеться так

$$\Delta_{\Gamma}\vec{N}_{DD_1}=\frac{\vec{N}_{A_3}-\vec{N}_{A_1}}{A_1A_3}\cdot\frac{A_1D}{DD_1}-\frac{\vec{N}_{A_2}-\vec{N}_{A_1}}{A_1A_2}\cdot\frac{A_1D_1}{DD_1} \qquad (5)$$

Оскільки відповідні кути трикутників A_1A_2B і BA_2A_3 рівні, то вони є подібні. З подібності трикутників випливає, що

$$\frac{A_1C}{CC_1}=\frac{A_1D}{DD_1}\ ,\quad \frac{A_1C_1}{CC_1}=\frac{A_1D_1}{DD_1} \qquad (6)$$

Ураховуючи співвідношення (6), можна стверджувати, що праві частини виразів (3) і (5) збігаються, тобто $\Delta_{\Gamma}\vec{N}_{CC_1}=\Delta_{\Gamma}\vec{N}_{DD_1}$.

Трикутники A_1CC_1 і A_1A_2B також є подібними, а тому $\Delta_{\Gamma}\vec{N}_{A_2B}=\Delta_{\Gamma}\vec{N}_{CC_1}$.

Оскільки трикутники A_1A_2B і BA_2A_3 мають спільний рядок A_2B, то й для рядка растеризації EE_1 трикутника BA_2A_3 $\Delta_{\Gamma}\vec{N}_{EE_1}=\Delta_{\Gamma}\vec{N}_{A_2B}$.

Таким чином, можна стверджувати, що для всіх горизонтальних рядків растеризації трикутника приріст ортогональних координатних складових векторів нормалей є сталим значенням. Аналогічно можна довести, що приріст ортогональних координатних складових векторів нормалей для всіх вертикальних рядків растеризації трикутника також є постійною величиною.

Доведена властивість дозволяє значно зменшити обсяги обчислень, пов'язані зі знаходженням векторів нормалей, оскільки достатньо один раз знайти прирости координатних складових векторів нормалей і використовувати їх для всього трикутника. Дану операцію можна виконати на підготовчому етапі.

Розглянемо розрахунок приростів ортогональних координатних складових векторів нормалей уздовж горизонтальних і вертикальних рядків растеризації.

Для знаходження виразів для розрахунку приростів ортогональних координатних складових векторів нормалей уздовж горизонтальних і вертикальних рядків растеризації складемо систему рівнянь

$$\begin{cases}\vec{N}_{A_2}=\vec{N}_{A_1}+\Delta_B\vec{N}\cdot\Delta Y_{A_1A_2}+\Delta_{\Gamma}\vec{N}\cdot\Delta X_{A_1A_2}\,,\\ \vec{N}_{A_3}=\vec{N}_{A_1}+\Delta_B\vec{N}\cdot\Delta Y_{A_1A_3}+\Delta_{\Gamma}\vec{N}\cdot\Delta X_{A_1A_3}\,,\end{cases} \qquad (7)$$

де $\Delta_{\Gamma}\vec{N}$ і $\Delta_B\vec{N}$ - прирости ортогональних координатних складових векторів нормалей уздовж горизонтальних та вертикальних рядків растеризації відповідно.

З першого рівняння системи рівнянь (7) виразимо $\Delta_B\vec{N}$

$$\Delta_B\vec{N}=\frac{\vec{N}_{A_2}-\vec{N}_{A_1}-\Delta_{\Gamma}\vec{N}\cdot\Delta X_{A_1A_2}}{\Delta Y_{A_1A_2}}\,. \qquad (8)$$

Підставивши (8) у друге рівняння (7), отримаємо

$$\Delta_{\Gamma}\vec{N}=\frac{(\vec{N}_{A_3}-\vec{N}_{A_1})\cdot\Delta Y_{A_1A_2}-(\vec{N}_{A_2}-\vec{N}_{A_1})\cdot\Delta Y_{A_1A_3}}{\Delta X_{A_1A_3}\cdot\Delta Y_{A_1A_2}-\Delta X_{A_1A_2}\cdot\Delta Y_{A_1A_3}}\,. \qquad (9)$$

Тоді рівняння (8) прийме вигляд

$$\Delta_B\vec{N}=\frac{(\vec{N}_{A_2}-\vec{N}_{A_1})\cdot\Delta X_{A_1A_3}-(\vec{N}_{A_3}-\vec{N}_{A_1})\cdot\Delta X_{A_1A_2}}{\Delta X_{A_1A_3}\cdot\Delta Y_{A_1A_2}-\Delta X_{A_1A_2}\cdot\Delta Y_{A_1A_3}} \qquad (10)$$

Ураховуючи, що діагональний крок еквівалентний одночасному виконанню горизонтального і вертикального кроків, то

$$\Delta_{Д}\vec{N}=\Delta_{В}\vec{N}+\Delta_{Г}\vec{N}=\frac{(\vec{N}_{A_3}-\vec{N}_{A_1})\cdot(\Delta Y_{A_1A_2}-\Delta X_{A_1A_2})+(\vec{N}_{A_2}-\vec{N}_{A_1})\cdot(\Delta X_{A_1A_3}-\Delta Y_{A_1A_3})}{\Delta X_{A_1A_3}\cdot\Delta Y_{A_1A_2}-\Delta X_{A_1A_2}\cdot\Delta Y_{A_1A_3}} \quad (11)$$

Розрахунок вектора нормалі у заданій точці проводиться шляхом додавання до вектора нормалі у попередній точці одного з приростів $\Delta_{Г}\vec{N}$, $\Delta_{В}\vec{N}$ або $\Delta_{Д}\vec{N}$ залежно від типу крокового приросту.

Розглянемо спрощення процедури нормалізації векторів нормалей.

Для подальшого використання векторів нормалей при формуванні шорстких реалістичних зображень необхідно виконати їх нормалізацію.

Нормалізація вектора нормалі виконується за формулою

$$\vec{N}_0=\frac{x_0}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}}\vec{i}+\frac{y_0}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}}\vec{j}+\frac{z_0}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}}\vec{k}. \quad (12)$$

Для знаходження підкореневого виразу потрібно виконати три операції множення та дві операції додавання. Властивість про сталість приростів дозволяє спростити розрахунок підкореневого виразу.

Для розрахунку вектора нормалі у наступній за початковою точкою рядка растеризації підкореневий вираз матиме вигляд

$$\begin{aligned}K_1&=(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2+(z_0+\Delta z)^2=\\&=(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2)+2\cdot(x_0\Delta x+y_0\Delta y+z_0\Delta z)+((\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2)\end{aligned} \quad (13)$$

Для вектора нормалі *n*-ої точки рядка растеризації підкореневий вираз прийме такий вигляд

$$\begin{aligned}K_n&=(x_0+n\Delta x)^2+(y_0+n\Delta y)^2+(z_0+n\Delta z)^2=\\&=(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2)+2n\cdot(x_0\Delta x+y_0\Delta y+z_0\Delta z)+n^2\cdot((\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2)\end{aligned} \quad (14)$$

Як видно з формул (13) і (14) вирази $(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2)$, $(x_0\Delta x+y_0\Delta y+z_0\Delta z)$ та $((\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2)$ є сталими. Позначимо їх через коефіцієнти *a, b* і *c* відповідно. Тоді формула (14) прийме вигляд

$$K_n=a+2nb+n^2c \quad (15)$$

Визначимо, як буде виглядати підкореневий вираз для n+1 точки рядка растеризації. Для цього для двох останніх членів формули (15) використаємо метод кінцевих різниць [6]:

$$\Delta_b=2\cdot(n+1)\cdot b-2nb=2nb+2b-2nb=2b,$$

$$\Delta_{c1}=(n+1)^2\cdot c-n^2c=n^2c+2nc+c-n^2c=2nc+c,$$

$$\Delta_{c2}=2(n+1)c+c-2nc-c=2c.$$

Тоді

$$K_{n+1}=K_n+2b+C_{n+1},\ \text{де}\ C_{n+1}=C_n+2c.\ C_1=c,\ C_0=1. \quad (16)$$

Коефіцієнти *a, b* і *c* можуть бути обчислені на підготовчому етапі, що значно спрощує розрахунки. Якщо коефіцієнти *a* і *b* розраховуються для кожного рядка растеризації, то коефіцієнт *c*, завдяки властивості про сталість приростів, обчислюється один раз для всього трикутника. Перевага отриманої формули (16) для розрахунку підкореневого виразу полягає у виключенні операцій множення.

Висновки. Доведена властивість про сталість приростів ортогональних координатних складових векторів нормалей уздовж горизонтальних (вертикальних) рядків растеризації трикутника дозволяє суттєво спростити процедуру визначення векторів нормалей до внутрішніх точок трикутника.

Отримані формули для визначення підкореневого виразу у процедурі нормалізації векторів нормалей не містять операцій множення, що суттєво зменшує обчислювальну складність процедури нормалізації в порівнянні з класичною реалізацією.

ЛІТЕРАТУРА:

[1] Phong B.T. Illumination for computer generated images // Comm. Of the ACM. – 18(6). – June 1975. – P. 311-317.

[2] Shoemake K. Animating rotation with quaternion curves // ACM SIGGRAPH. – Vol. 19. – July 1985. – P. 245-254.

[3] Романюк О. Н. Комбіноване використання бінарної та кодової лінійної інтерполяції для нормалізації векторів нормалей при зафарбовуванні тривимірних об'єктів // Вестник Херсонського национального технического университета. ─2006. ─№25. ─С. 408─411.

[4] Романюк О. Н. Використання квадратичної інтерполяції для зафарбовування тривимірних графічних об'єктів // Реєстрація, зберігання і обробка даних. ─2006. ─Т. 8. ─ № 4. ─ С.31─37.

[5] Романюк О. Н. Реалізація рендерингу Фонга з використанням сферично – кутової інтерполяції / О. Н. Романюк, А. В. Чорний // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2004. — № 3. — С. 66—71.

[6] Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1974. — 830 с.

РОМАНЮК Оксана Володимирівна – аспірант кафедри програмного забезпечення інституту інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії Вінницького національного технічного університету.

Наукові інтереси:

- Методи та засоби формування графічних зображень.

ВОЙТКО Вікторія Володимирівна – к.т.н., доцент кафедри програмного забезпечення Вінницького національного технічного університету.

Наукові інтереси:

- Методи та засоби формування графічних зображень.

ГОНЧАРУК Олександр Павлович – магістрант кафедри програмного забезпечення інституту інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії Вінницького національного технічного університету.

Наукові інтереси:

- Методи та засоби формування графічних зображень.