УДК 681.31

Денисюк В.О.

Вінницький національний аграрний університет

ПОХИБКА ДВОВИМІРНОЇ ЛІНІЙНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ЗА МЕТОДОМ ЦИФРОВОГО ДИФЕРЕНЦІЙНОГО АНАЛІЗАТОРА

Вступ

Комп'ютерна графіка дає найбільш наочне представлення інформації у графічному вигляді у різних галузях людської діяльності. Досить актуальною є задача вибору засобів комп'ютерної графіки, а саме пристроїв відтворення графічної інформації, які забезпечують необхідну якість та швидкодію формуванні достовірних графічних зображень без збільшення апаратних витрат. Найпоширенішими елементами двовимірних (2D) та тривимірних (3D) графічних сцен є пласкі полігони, трикутники та відрізків прямих ліній [3, 9, 10, 12]. Оскільки завдання відтворення полігонів і трикутників (як заповнених кольором, так і контурних [7, 12]) можна розбити на ряд завдань по відтворенню відрізків прямих ліній, то основним елементом зображень можна вважати відрізок прямої лінії [9].

Постановка задачі

Серед методів лінійної інтерполяції (ЛІ) по відтворенню відрізків прямих ліній найбільше поширення одержали методи, засновані на використанні цифрових інтеграторів послідовного переносу (ЦІППП), і методи, що засновані на використанні цифрових інтеграторів паралельного переносу або з обчисленням оціночної функції (ОФ) [3, 9, 10].

Пристрої ЛІ, засновані на розв'язанні системи диференціальних рівнянь прямої у параметричному вигляді з використанням цифрових інтеграторів паралельного переносу, містять два регістра приростів і два накопичувальних суматори. Модуль перерахування суматорів дорівнює 2^n, де n-розрядність

суматорів. Як одиничні прирости по координатах виступають сигнали переповнення накопичувальних суматорів. Лінійний інтерполятор, заснований на рішенні системи диференціальних рівнянь прямої у параметричному вигляді із застосуванням цифрових інтеграторів послідовного переносу, містить два регістра приростів, дві логічні схеми множника (ЛСМ) і загальний для обох інтеграторів лічильник. Сигнали виходів схем множників є сигналами одиничних приростів по координатах. Застосування інтеграторів послідовного переносу вносить додаткову похибку через нерівномірність проходження імпульсів на виході інтегратора, яку можна зменшити, наприклад, використовуючи комбіновані цифрові інтегратори. Вищенаведені методи інтерполюють довільний відрізок прямої за 2^n тактів, де n-розрядність пристрою. Щоб збільшити швидкодію лінійної інтерполяції, змінюють ємність лічильника двійкового множника залежно від величин координатних приростів або здійснюють спільне збільшення координатних приростів до нормалізації одного з них (здійснюють зсув обох координатних приростів убік старших розрядів, щоб старший розряд одного з координатних приростів збігся зі старшим розрядом пристрою). Особливістю методу лінійної інтерполяції з оціночною функцією є виключення операції множення у виразі функціональної залежності X і Y за рахунок використання покрокових алгоритмів, що заміняють, операцію множення у функції $y=f(x)$ на покрокові операції додавання або обчислення. Інтерполяція по цьому методі дає ординатну похибку, що не перевищує кроку дискретизації. Відомі методи з оціночною функцією, що реалізують як тільки координатні кроки, так і діагональні кроки. Також існують методи з початковою установкою оціночної функції, що дають мінімальну ординатну похибку інтерполяції (не більше 0.5 кроку дискретизації). Знайшов застосування метод з обчисленням двох оціночних функцій і кроком у бік меншої. Відомі також методи, що реалізують два координатних кроки.

Актуальність дослідження обумовлена стрімким розвитком засобів комп’ютерної графіки для відтворення складних картин та сцен з великою

динамікою зображення [4], в яких широко використовуються різноманітні високопродуктивні алгоритми відтворення елементів зображень з метою збільшення продуктивності та зменшення апаратних витрат уцілому [3, 9, 10].

Особливості роботи цифрового диференційного аналізатора

Цифровий інтегратор послідовного переносу (ЦІПП) відомий, як двійковий перемножувач (ДП) [9, 10, 14] а також, як цифровий диференійний аналізатор (ЦДА).

У цифрових інтеграторах взагалі та у ЦІПП зокрема використовується заміна операції інтегрування функції $x = f(t)$ на операцію підсумовування послідовних значень функцій $x_k(t_k)$, заданих у дискретних точках t_k, причому $t_{k+1}-t_k=\Delta t$ є постійною величиною (не залежною від t_k) і відповідає одиничним імпульсам, тобто ціна імпульсів, що поступають на вхід інтегратора дорівнює "1" [1].

Під похибкою ЦІПП розуміють різницю між значенням вихідної величини x при ідеальному виконанні заданої операції відтворення та величиною x_0, отриманої із сигналів, що видаються інтегратором [1]. Оскільки цифровий інтегратор видає значення для обчислення ординат функцій у дискретних точках, то і розглядається похибка тільки в цих же точках при цілочисельних значеннях аргументу, який вимірюється числом імпульсів [1]. Початковий стан лічильника ЦІПП (СТ) дорівнює 0. У регістр керуючого коду ЦІПП (RG) уведене число:

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i+1} a_{n-i+1} , \qquad (1)$$

де a_i - i-й розряд регістра керуючого коду RG.

Число імпульсів, вироблених i-тою схемою збігу по надходженню t імпульсів на вхід ЦІПП, дорівнює:

$$t_i = ent\left(\frac{t + 2^{i-1}}{2^i} \right), \qquad (2)$$

Відповідно число імпульсів на виході ЦІПП дорівнює:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} t_i a_{n-i+1} \,. \tag{3}$$

По надходженню $t=2^n$ імпульсів ЦІПП переходить у початковий стан. Рівняння прямої, що проходить через точки *(0, 0)* та $(2^n, \Delta x)$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i+1} a_{n-i+1} \cdot t / 2^n \,. \tag{4}$$

Таким чином, похибка інтегрування ЦІПП дорівнює $\delta_p = x - x_0$ та має вигляд:

$$\delta_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} 2^{n-i+1} a_{n-i+1}}{2^n} \cdot t - \sum_{i=1}^{n} t_i a_{n-i+1} \,. \tag{5}$$

Оцінці похибки δ_p інтегрування ЦІПП (ЦДА або ДП) присвячено ряд робіт [1, 2, 5, 6, 8-11, 13]. У таблиці 1 наведено дані про абсолютну максимальну похибку ЦІПП. На перший погляд здається, що така велика похибка, у порівнянні з похибкою методів та алгоритмів з оціночною функцією [9, 10], зменшує можливості використання ЦІПП. Але максимальна похибка для кожної розрядності виникає лише два рази за цикл роботи при відповідній комбінації керуючого кода та кількості імпульсів на вході ЦІПП (n>2) (табл.1).

Особливості двовимірного лінійного інтерполятора за методом цифрового диференційного аналізатора

Розглянемо 2D-інтерполяцію лінійної функції *y=f (x)* на пристрої, що містить два ЦІПП із загальним лічильником [3, 5, 9, 10]. За абсцису візьмемо *X*, а за ординату - *Y*.

У регістри керування ЦІПП інтерполятора записані коди відповідних координатних приростів: Δx - координатний приріст по осі *x* - в RG^x, Δy - по осі y - в RG^y (6):

Таблиця 1. Абсолютна максимальна похибка цифрового інтегратора послідовного переносу

Розрядність ЦІПП, n	Керуючий код β_1^1 чи β_1^2																Імпульсів x_1^1 та x_1^2 на вході	Похибка ЦІПП, δ_p
	Двійкова форма															Десяткова форма		
	старші ——— молодші																	
1															1	1	1	0.5
2														1	1	3	3	0.75
3													1 1	0 1	1 1	5 7	5 7	0.875
4												1 1	0 1	1 0	1 1	11 13	13 11	1.0625
5											1 1	0 1	1 0	0 1	1 1	21 27	21 27	1.21875
6										1 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 1	53 43	43 53	1.39063
7									1 1	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 1	85 107	85 107	1.55469
8								1 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 1	213 171	171 213	1.72266
9							1 1	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 1	341 427	341 427	1.88867
10						1 0	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 1	853 683	683 853	2.05566
11					1 1	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 1	1365 1707	1365 1707	2.22217
12				1 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 1	3413 2731	2731 3413	2.38892
13				1 1	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	1 1	5461 6827	5461 6827	2.55554
14			1 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	1 1	13653 10923	10923 13653	2.72223
15		1 1	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	1 1	21845 27307	21845 27307	2.88889
16	1 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	0 1	1 0	1 1	54613 43691	43691 54613	3.05556

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i+1} a_{n-i+1} \; ; \;\; \Delta y = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i+1} b_{n-i+1} \;\; , \tag{6}$$

де a_i та b_i - i-й розряд RG^{x} чи RG^{y} відповідно.

Припустимо, що $\Delta x \geq \Delta y$ та Δx містить у старшому розряді "1", тобто є нормованою величиною. Вихідні частотні послідовності координатних двійкових перемножувачів F_m^x та F_m^y є функціями x_0 і y_0 вхідної імпульсної частоти F_0 на вході спільного лічильника. Іншими словами, кількість імпульсів x_0 та y_0 на виході інтерполятора після надходження на вхід лічильника t імпульсів частоти F_0 дорівнює:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} t_i a_{n-i+1} \; ; \;\; y_0 = \sum_{i=1}^{n} t_i b_{n-i+1} \;\; . \tag{7}$$

У результаті отримуємо в параметричному вигляді функцію $y_0 = f(x_0)$, яка виконує апроксимацію прямої $y_t = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cdot t$ в дискретному координатному просторі *(xyt)*. За похибку 2D лінійної інтерполяції приймається різниця між значенням функції $y_t = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cdot t$ та $y_0 = f(x_0)$ [1]. При прямокутній проекції y_t на площину *(xOy)* прямій y_t відповідає параметрична пряма $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cdot x$, а шукана похибка відповідає величині δ_0:

$$\delta_0 = y - y_0 \;\; . \tag{8}$$

З урахуванням (7) та того, що в ДКПВ розглядається похибка тільки при цілочисельних значеннях аргументу, який обчислюється у кількості кроків по координаті x [1, 12], для δ_0 можливо записати (9):

$$\delta_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot x_0 - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i a_{n-i+1} - \sum_{i=1}^{n} t_i b_{n-i+1} \;\; . \tag{9}$$

Для інших значень n існує тільки по одні парі Δx і Δy, які відповідають максимальній похибці.

Як і очікувалося [1], максимальна похибка при побудові прямої лінійним інтерполятором на ЦППП виникає два рази, один раз зі знаком “мінус“: $-\delta_0 = \delta_0^1$; другий раз зі знаком “плюс”: $+\delta_0 = \delta_0^2$.

За виразом (9) отримані значення похибки δ_0 для $n = \overline{1,5}$. З використанням принципу математичної індукції побудовано ітераційний алгоритм отримання значень Δx_i, $\Delta y_i, C_i^{1,2}$ та відповідних до них значень максимальної похибки $(\delta_0^1 \text{та} \delta_0^2)$ 2D-лінійного інтерполятора на ЦППП для різних значень розрядностей i $(i = \overline{1,n})$ ($C_i^{1,2}$- число імпульсів на вході лічильника частоти СТ, C_i^1 відповідає “$-\delta_0$”, а C_i^2 відповідає “$+\delta_0$”, $x_0(C_i^{1,2})$ та $y_0(C_i^{1,2})$- відповідно значення x_0 і y_0 за рівнянням (7) для числа вхідних імпульсів $t = C_i^1$ та $t = C_i^2$, а i – розрядність інтерполятора).

Ітеративний алгоритм визначення значень Δx, Δy, $C_i^{1,2}$ і максимальної похибки $(\delta_0^1 \text{та} \delta_0^2)$ 2D-лінійного інтерполятора на ЦППП працює наступним чином:

1) встановити початкове значення *i=5*;
2) встановити у відомий початковий стан Δx_i, Δy_i $(\Delta x_i \geq \Delta y_i)$ значення *x* та *y* коду керування, а C_i^1 і C_i^2- відповідні значення кількості імпульсів на вході лічильника, при яких виникає максимальна похибка представлення реальної прямої у дискретному *i*-розрядному координатному просторі;
3) виконати приріст *i* на “1”;
4) якщо *i* – парне, тоді $\Delta x_i = 2 \cdot \Delta x_{i-1}$, $\Delta y_i = 2 \cdot \Delta y_{i-1} + 1$, $C_i^1 = C_{i-1}^1$, $C_i^2 = C_{i-1}^2 \cdot 4 - 2$; якщо *i* – непарне, тоді $\Delta x_i = 2 \cdot \Delta x_{i-1} + 1$, $\Delta y_i = 2 \cdot \Delta y_{i-1}$, $C_i^1 = C_{i-1}^1 \cdot 4 + 5$, $C_i^2 = C_{i-1}^2$;
5) обчислити $\delta_0^1 \text{та} \delta_0^2$ за (9);
6) якщо продовжувати обчислення, то на п.3, інакше – кінець.

На основі алгоритму були визначені величини Δx_i, Δy_i, $C_i^{1,2}$, а також значення абсолютної максимальної похибки δ_0 (9) 2D-лінійного інтерполятора на двійкових пережножувачах для $i = \overline{2,32}$. Отримані результати наведено у таблиці 2 та таблиці 3.

Результати оцінки похибки 2D лінійного інтерполятора співвідносяться з відомою оцінкою [1, 13], за якою максимальна похибка інтерполятора на двох ЦІПП $|\theta_{\max}|$ задовільняє виразу:

$$\frac{n}{4} < |\theta_{\max}| \le \frac{n}{3}\ , \tag{10}$$

де n – кількість розрядів інтерполятора.

За допомогою запропонованого алгоритму отримано дані про абсолютну максимальну похибку 2D-лінійного інтерполятора на двох ЦІПП [5, 9, 10]

Висновки

Проведені дослідження дозволили точно визначити похибки цифрового диференційного аналізатора та 2D-лінійної інтерполяції за методом ЦДА. В залежності від області застосування різноманітних пристроїв інтерполяції у засобах машинної графіки можна прийняти аргументовані рішення про можливість використання методу ЦДА у 2D-лінійній інтерполяції з відповідними апаратними витратами та швидкодією [9, 10]. Апаратна складність суматорів значно перевищує апаратну складність ЦІПП. Таким чином, методи з використанням суматорів не задовільняють вимогам динаміки складних зображень при мінімумі апаратних витрат [3, 9, 10]. Це доводить необхідність використання інших методів, а саме методів із ЦДА, де швидкодія визначається мікрооперацією рахунку в молодшому розряді лічильника, причому, з орієнтацією на реалізацію ЛІ у вигляді спеціалізованих великих інтегральних схем (ВІС) або надвеликих інтегральних схем (НВІС) [3, 9, 10].

Таблиця 2. Похибка 2D-лінійного інтерполятора на ЦІПП (n=2÷16)

Розрядність, n	Значення Δx, Δy		Число імпульсів C_i^1, C_i^2		Похибка δ_0
	Двійкове	Десяткове	Двійкове	Десяткове	
	старші - молодші		старші - молодші		
2	10 01	2 1	1 10	1 2	0.5
3	100 011	4 3	001 110	1 6	0.75
4	1001 0110	9 6	1001 0110	9 6	1.0
	1010 0101	10 5	0101 1010	5 10	1.0
5	10010 01101	18 13	01001 10110	9 22	1.3333
6	100101 011010	37 26	101001 010110	41 22	1.5676
7	1001010 0110101	74 53	0101001 1010110	41 86	1.9054
8	10010101 01101010	149 106	10101001 01010110	169 86	2.1409
9	100101010 011010101	298 213	010101001 101010110	169 342	2.4765
10	1001010101 0110101010	597 426	1010101001 0101010110	681 342	2.7136
11	10010101010 01101010101	1194 853	01010101001 10101010110	681 1366	3.0477
12	100101010101 011010101010	2389 1706	101010101001 010101010110	2729 1366	3.2855
13	1001010101010 0110101010101	4778 3413	0101010101001 1010101010110	2729 5462	3.6191
14	10010101010101 01101010101010	9557 6826	10101010101001 01010101010110	10921 5462	3.8571
15	100101010101010 011010101010101	19114 13653	010101010101001 101010101010110	10921 21846	4.1905
16	1001010101010101 0110101010101010	38229 27306	1010101010101001 0101010101010110	43689 21846	4.4285

Таблиця 3. Похибка 2D-лінійного інтерполятора на ЦІПП (n=17÷32)

Розрядність інтерполятора, n	Координатні прирости		Число імпульсів на вході лічильника		Похибка інтерполя-тора, δ_0
	Δx	Δy	C_i^1	C_i^2	
17	76458	54613	43689	87382	4.7619
18	152917	109226	174761	87382	5.0000
19	305834	218453	174761	349526	5.3333
20	611669	436906	699049	349526	5.5714
21	1223338	873813	699049	1398102	5.9048
22	2446677	1747626	2796201	1398102	6.1429
23	4893354	3495253	2796201	5592406	6.4762
24	9786709	6990506	11184809	5592406	6.7143
25	19573418	13981013	11184809	22369622	7.0476
26	39146837	27962026	44739241	22369622	7.2857
27	78293674	55924053	44739241	89478486	7.6190
28	156587349	111848106	178956969	89478486	7.8572
29	313174698	223696213	178956969	357913942	8.1904
30	626349397	447392426	715827881	357913942	8.4287
31	1252698794	894784853	715827881	1431655766	8.7622
32	2505397589	1789569706	2863311524	1431655766	9.0005

Література

1. Воронов А.А. Цифровые аналоги для систем автоматического управления / Воронов А.А. - М.-Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1960.-196 с.
2. Данчеев В.П. Цифро-частотные вычислительные устройства / Данчеев В.П. - М.: Энергия, 1976.- 175 с.
3. Денисюк В.А. Исследование и разработка цифровых функциональных генераторов графических примитивов для устройств отображения информации: дис. … канд. техн. наук: 05.13.08 / Денисюк Валерий Александрович.- Винница.-1996.-202 с.
4. Денисюк В.О. Дослідження вимог до пристроїв відображення графічної інформації з погляду людино-машинного інтерфейсу / Денисюк В.О., Денисюк А.В., Терешко В.О. // Міжнародний науково-технічний журнал “Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах”.- Хмельницький, 2008. - № 2 - С. 116-121.

5. Денисюк В.О. Аналіз похибки двовимірної лінійної інтерполяції за методом цифрового диференційного аналізатора/ Денисюк В.О., Осадчий Є.А., Якубець П.В., Чуприна Д.І., Маленицький М.Л., Мельник Ю.П. Міжнародний науково-технічний журнал “Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах”.- Хмельницький, 2009. - № 1 - С. 99-107.

6.ДоронинаО.М. Графический метод определения максимальных погрешностей цифровых интеграторов последовательного переноса/ Доронина О.М., Карпинец И.В., Петух А.М. //Автометрия.- 1975.- № 2.- С. 91-101.

7. Никулин Е. А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики/ Никулин Е. А.- СПб : БХВ-Петербург, 2005.- 560 с.- ISBN 5-94157-264-6.

8. Петух А.М. Исследование дискретно-фазовых импульсных потоков в информационно-измерительных системах.: дис... доктора техн. наук: 05.11.16 / Петух Анатолий Михайлович.- Винница, 1994.- 211 с.

9. Пєтух А.М. Інтерполяція в задачах контурного формоутворення: монографія/ Пєтух А.М., Обідник Д.Т., Романюк О.Н. - Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2007.- 103 с.- ISBN 978-966-641-223-5.

10. Пєтух А. М. Швидкодійні цифрові функціональні генератори графічних примітивів : монографія / А. М. Пєтух, В. О. Денисюк, Д. Т. Обідник. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 148 с. ISBN 978-966-641-343-0.

11. Сігов Б.0. Підвищення точності роботи цифрового інтегратора, побудованного на основі дільника частоти / Сігов Б.0. // Автоматика.- Київ.- 1963.- № 1 - С. 39-54.

12. Херн Д. Компьютерная графика и стандарт OpenGL / Д. Херн , М. Бейкер; пер. с англ. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. — 1168 с. - ISBN 5-8459-0772-1.

13. Ян-Си-Зен. Определение максимальной погрешности двоичного умножителя / Ян-Си-Зен. // Автоматика и телемеханика.- I960.- № 7- С.1007-1014.

14. Meyer M.A., Gordon B.M. Pulse-Rate Multipler. Patent 2910237 USA, Filled Dec. 5, 1952, Patented Oct.27, 1959.