

БІНОМІАЛЬНИЙ ЗАКОН ВІДОБРАЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ, ВИЗНАЧЕНИХ НАД ПОЛЯМИ ДІЙСНИХ ТА КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі розкрито математичний закон відображення визначених над полями дійсних та комплексних чисел коефіцієнтів узагальненої фундаментальної задачі Коші, сформульованої для фізичних і технічних динамічних систем з континуальною формою руху. Отриманий результат роботи виявив себе як базисний елемент в розробці нових методів розрахунку перехідних процесів в лінійних динамічних системах довільної фізичної природи, зокрема електротехнічного походження, які задано в ермітовому просторі над полем комплексних чисел.

Ключові слова: динамічна система, задача Коші, диференціальне рівняння, початкові умови, число ступенів вільності, перехідний процес, електричне коло, теоретичні основи електротехніки

Abstract

In this paper, the mathematical law of the mapping of the generalized fundamental Cauchy problem given over fields of real and complex numbers, which is formulated with respect to physical and technical dynamical systems with a continuous form of motion, is disclosed. The result of the work was the development of the theoretical basis as the basis for creating new methods for analyzing transient processes in linear dynamical systems, in particular electrotechnical origin, defined in the Hermitian space over the field of complex numbers.

Keywords: dynamic system, Cauchy problem, differential equation, initial conditions, number of degrees of freedom, transient process, electric circuit, theory of electrical engineering

Задача аналізу перехідних процесів в фізичних та технічних (себто штучних) динамічних системах з континуальною формою руху надзвичайно важлива і потребує особливої уваги [1-6].

Як відомо, математичною інтерпретацією цієї задачі є *задача Коші*. Її формування передбачає побудову диференціального рівняння руху динамічної системи та визначення сукупності початкових умов з наступним пошуком окремого розв'язку.

Для вихідного базису загальної теорії перехідних процесів затребуваними є узагальнені, або точніше – дедуктивні, форми задачі Коші [3], які здатні формалізувати процес складання диференціального рівняння руху динамічної системи в кожному конкретному випадку і за конкретних умов.

Пошук та побудова таких узагальнених форм задачі Коші, дослідження їх властивостей, виявлення кореляційних зв'язків між ними, в свою чергу, є окремими науковими задачами. Багато з них в своїй основі на сьогодні розв'язано. Водночас наявний теоретичний матеріал може бути доповнений навіть, наприклад, і для добре досліджених на сьогодні лінійних динамічних систем [3, 7, 8].

Отже, розглянемо лінійне електричне коло [4, 5] з довільним числом ступенів вільності [9-12] та одним зовнішнім джерелом енергії, напруга на якому є періодичною.

Відповідно до принципу накладання, притаманного лінійним системам, узагальнена за ознаками зовнішньої силової дії і числа ступенів вільності електричного кола задача Коші може бути сформульована для кожної k -ої реакції на кожну k -ту зовнішню дію відповідної гармоніки напруги ряду Фур'є у вигляді лінійного звичайного диференціального рівняння n -го порядку з n початковими умовами: $i_k(0_+)$, $i_k'(0_+)$, $i_k''(0_+)$, ... :

$$\sum_{r=0}^n a_{kr} \frac{d^r i_k}{dt^r} = \sum_{s=0}^w b_{ks} \frac{d^s u_k}{dt^s}. \quad (1)$$

Відповідно до положень символічно-класичного методу [2, 10, 11], для цього ж кола узагальнену за вказаними ознаками задачу Коші можна сформулювати і відносно комплексних зображень k -их реакцій у вигляді рівняння

$$\sum_{r=0}^n \underline{A}_{k_r} \frac{d^r \underline{I}_{m_k}}{d t^r} = \underline{B}_k \underline{U}_{m_k} \quad (2)$$

та n початкових умов $\underline{I}_{m_k}(0_+)$, $\underline{I}'_{m_k}(0_+)$, $\underline{I}''_{m_k}(0_+)$, ..., де

$$\underline{I}_{m_k} = I_{m_k} e^{j\omega t}.$$

Дослідивши послідовність перетворень виду:

$$i_k \rightarrow \underline{I}_{m_k}, \quad \frac{d i_k}{d t} \rightarrow \left(\frac{d \underline{I}_{m_k}}{d t} + j\omega \underline{I}_{m_k} \right), \dots,$$

неважко помітити [2], що в їх основі лежить *біном Ньютона*

$$\begin{aligned} \frac{d^r i_k}{d t^r} &\rightarrow \left(j\omega + \frac{d}{d t} \right)^r \cdot \underline{I}_{m_k} = \\ &= \sum_{p=0}^r \left(C_r^p \cdot (j\omega)^p \cdot \frac{d^{r-p} \underline{I}_{m_k}}{d t^{r-p}} \right) = \sum_{p=0}^r \left(\frac{r!}{p!(r-p)!} \cdot (j\omega)^p \cdot \frac{d^{r-p} \underline{I}_{m_k}}{d t^{r-p}} \right) \end{aligned}$$

з біноміальними коефіцієнтами $C_r^p = \frac{r!}{p!(r-p)!}$, на підставі якого можна записати:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^n a_{k_r} \frac{d^r i_k}{d t^r} &= \mathbf{Im} \left\{ \sum_{r=0}^n \left[a_{k_r} \cdot \sum_{p=0}^r \left(\frac{r!}{p!(r-p)!} \cdot (j\omega)^p \cdot \frac{d^{r-p} \underline{I}_{m_k}}{d t^{r-p}} \right) \right] \cdot e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \mathbf{Im} \left\{ \sum_{r=0}^n \left[\sum_{p=0}^{n-r} \left(\frac{(r+p)!}{r! p!} \cdot (j\omega)^p \cdot a_{k_{r+p}} \right) \cdot \frac{d^r \underline{I}_{m_k}}{d t^r} \right] \cdot e^{j\omega t} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Відтак відповідно до співвідношень (1) - (3) для коефіцієнтів рівнянь (1) і (2) отримуємо закон

$$\mathbf{W} : \{a_{k_0}, a_{k_1}, \dots, a_{k_n}; b_{k_0}, b_{k_1}, \dots, b_{k_w}\} \rightarrow \{\underline{A}_{k_0}, \underline{A}_{k_1}, \dots, \underline{A}_{k_n}; \underline{B}_k\}$$

їх відображення з множини, визначеної над полем дійсних чисел \mathbf{R} , в множини комплекснозначних чисел \mathbf{C} [2]:

$$\underline{A}_{k_r} = \sum_{p=0}^{n-r} \left[\frac{(r+p)!}{r! p!} \cdot (j\omega)^p \cdot a_{k_{r+p}} \right]; \quad (4)$$

$$\underline{B}_k = \sum_{s=0}^w \left[(j\omega)^s \cdot b_{k_s} \right]. \quad (5)$$

Закон зворотного відображення

$$\mathbf{W}^{-1} : \{\underline{A}_{k_0}, \underline{A}_{k_1}, \dots, \underline{A}_{k_n}; \underline{B}_k\} \rightarrow \{a_{k_0}, a_{k_1}, \dots, a_{k_n}; b_{k_0}, b_{k_1}, \dots, b_{k_w}\}$$

для коефіцієнтів $\{a_{k_r}\}$ та $\{\underline{A}_{k_r}\}$ можна отримати за допомогою прямого закону на підставі формули (4), яка дозволяє скласти *систему лінійних алгебраїчних рівнянь* в комплексній формі відносно невідомих коефіцієнтів $\{a_{k_r}\}$ рівняння (1), де вільними членами слугуватимуть комплексні коефіцієнти $\{\underline{A}_{k_r}\}$ рівняння (2).

Стосовно коефіцієнтів $\{b_{k_s}\}$ та \underline{B}_k , то зворотний закон відображення внаслідок наявної невизначеності їх зворотного відображення є виродженим.

Наприкінці варто додати, що за схожих умов отриманий у вигляді співвідношень (4) і (5) закон \mathbf{W} відображення коефіцієнтів узагальненої задачі Коші над полями дійсних та комплексних чисел залишатиметься чинним і для динамічних систем будь-якої іншої фізичної природи.

Висновки

В роботі розкрито математичний закон відображення визначених над полями дійсних та комплексних чисел коефіцієнтів узагальноної фундаментальної задачі Коші, сформульованої для фізичних і технічних динамічних систем з континуальною формою руху. Отриманий результат роботи виявив себе як базисний елемент в розробці нових методів розрахунку перехідних процесів в лінійних динамічних системах довільної фізичної природи, зокрема електротехнічного походження, які задано в ермітовому просторі над полем комплексних чисел.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Рютенберг Р. Переходные процессы в электроэнергетических системах / Р. Рютенберг. — М. : Изд. иностр. литер., 1955. — 716 с.
2. Gardner M. F. Transients in linear systems / M. F. Gardner, J. L. Barnes. — New York: John Wiley & Sons, Inc., 1942. — 552 p.
3. Ведміцький Ю. Г. Біноміальні перетворення в формуванні узагальноної задачі Коші / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — №3(120). — Вінниця. — 2015. — С. 91-95.
4. Теоретичні основи електротехніки. Методи розрахунку нелінійних електричних і магнітних кіл в прикладах та задачах : навчальний посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. — Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. — 262 с. — (Рекомендовано Міністерством освіти і науки України, лист №1/11-16647 від 30.12.2016 р.).
5. Теоретичні основи електротехніки. Задачі та приклади розрахунку лінійних електричних кіл : навчальний посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук та ін. — 2-ге видання, Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2016. — 346 с. — (Рекомендовано Міністерством освіти і науки України, лист №1/11-20788 від 31.12.2013 р.).
6. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола : підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив. — Вінниця: ВНТУ, 2011. — 530 с. — (Рекомендовано Міністерством освіти і науки України, лист №1/11-10710 від 23.11.2010 р.).
7. Ведміцький Ю. Г. Символьно-класичний метод аналізу перехідних процесів в електричних колах / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2014. — Випуск 2. — С. 42 – 48.
8. Ведміцький Ю. Г. Перехідні комплексні схеми, закони Кірхгофа та компонентні співвідношення в комплексно-часовій формі відображення / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. — 2015. — №1. — Режим доступу : <http://praci.vntu.edu.ua/artice/view/3974>.
9. Ведміцький Ю. Г. Узагальнене електричне коло з урахуванням фізичного явища гіпервалентної взаємодії / Ю. Г. Ведміцький // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — Хмельницький. — №2(58). — 2017. — С. 29-36.
10. Ведміцький Ю. Г. Узагальнене електричне коло і фізичне явище гіпервалентної взаємодії / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2016. — Випуск 4. — С. 207-213.
11. Ведміцький Ю. Г. Узагальнені електричні схеми-аналоги неперервних динамічних систем довільного порядку / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2010. — Випуск 2. — С. 63-69.
12. Ведміцький Ю. Г. Контроль моменту інерції на основі удосконаленої теорії електродинамічних аналогій : монографія / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. — Вінниця : ВНТУ, 2015. — 196 с.

Юрій Григорович Ведміцький — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри теоретичної електротехніки та електричних вимірювань, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, wjg@ukr.net

Yurii G. Vedmitskyi — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurements, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg@ukr.net