УДК 517.968(045)

Зелінська Д.О.

МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ МЕЖ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ТА ЇХ ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У статті досліджуються методи визначення меж потрійних інтегралів та розглядаються практичні задачі, в яких ці методи застосовані.

Ключові слова: *потрійний інтеграл, сума Рімана, методи, графік, тіньовий метод визначення меж інтегралу, метод перерізу визначення меж інтегралу, графічне відображення області інтегрування.*

Abstract

The article deals with the methods of determining the boundaries of triple integrals and examines some practical problems where these methods are applied.

Keywords: *triple integral, Rihman's sum, the shadow method for determining triple integral bounds, the cross section method for determining triple integral bounds, graphical display of the area of integration.*

Вступ

Потрійний інтеграл посідає важливе місце не лише як окрема тема у вищій математиці, але і як потужний інструмент вирішення багатьох прикладних задач. Як відомо, за допомогою потрійного інтегралу можна дізнатися величини таких найпоширеніших параметрів уявного чи реального тіла, як об'єм, маса, моменти інерції, статичні моменти або центр маси. Такі питання потребують вирішення у найрізноманітніших сферах –від сучасного проектування та архітектури до візуалізації графічних об'єктів у ігрових програмах. Проте, під час пошуку розв'язку часто постає проблема швидкого та правильного визначення меж потрійного інтегралу.

Метою роботи є дослідження методів визначення меж потрійних інтегралів на основі розроблених практичних задач.

Результати дослідження

Означення за сумою Рімана

Нехай, $f(x,y,z)$ –густина трьохвимірної області W, існує точка $(x,y,z) \in W$. Необхідно визначити потрійний інтеграл з f по W, щоб знайти масу W. Поділимо область W на невеликі області з розмірами Δx, Δy, Δz. Для простоти і наочності уявімо, що W – куб.

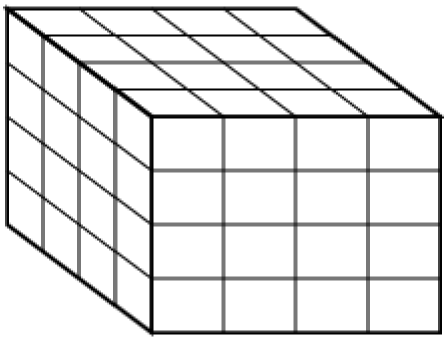

Рис. 1 Розділена трьохвимірна область W у вигляді куба

Тоді об'єм кожного маленького куба становитиме $\Delta V = \Delta x\ \Delta y\ \Delta z$. На рисунку чітко видно, що кожен маленький куб має власну позицію в декартовій трьохвимірній координатній системі за висотою, шириною і довжиною. Наприклад, куб з координатами (i;j;k) лежить відповідно на позначці i на осі абсцисс, j – на осі ординат, k – на осі аплікат.

Потрібно обрати будь-яку точку, що належить маленькому кубу, наприклад для куба ijk оберемо точку $(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$. Припустимо, що густина у кубі ijk є сталою, звідси випливає, що густина дорівнює $f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$. Маса куба ijk дорівнюватиме його густині, помноженій на об'єм - $f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\ \Delta V$. Підсумуємо приблизні маси усіх маленьких кубів, щоб знайти масу великого куба W. Отримаємо суму Рімана, $\boldsymbol{\sum_{ijk} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \Delta V}$.

Нехай, $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, а число маленьких кубів прямує до безмежності. Тоді сума Рімана наближатиметься до потрійного інтеграла в області W,

$$\iiint_W f\, dV = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \sum_{ijk} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \Delta V$$ причому f – неперервна.

Отриманий потрійний інтеграл буде масою куба W.

Розбиття потрійного інтегралу на декілька простих

Нехай, куб W визначений межами $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, $p \le z \le q$, тоді потрійний інтеграл можна записати у вигляді декількох звичайних інтегралів. Для зручності спочатку можна інтегрувати x з a до b, тоді y з c до d та z з p до q, отримаємо

$$\iiint_W f\, dV = \int_p^q \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z) dx \right) dy \right) dz.$$

Даний порядок інтеграції способу впорядкування координат у сумі Рімана: спочатку ми підсумовуємо по осі ii, потім по jj і нарешті по kk. Звичайно, допускаються й інші варіанти інтегрування – наприклад, спочатку можна проінтегрувати по z, потім по x, потім по y:

$$\iiint_W f\, dV = \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_p^q f(x,y,z) dz \right) dx \right) dy$$

Процес інтеграції завжди відбувається зсередини назовні, а порядок інтегрування збігається з порядком розміщення диференціалів, і саме так його можна визначити. В попередньому інтегруванні диференціали розміщені як dz dx dy. Дужки у виразі стають необов'язковими і можна отримати такий запис:

$$\iiint_W f\,dV = \int_c^d \int_a^b \int_p^q f(x,y,z)dz\,dx\,dy.$$

Визначити межі повторюваного інтегралу просто, коли тіло W – куб або паралелепіпед. Для більш складних форм, пошук меж інтегралу відповідно ускладнюється. Для цього потрібно знати такі базові правила:

1. Зовнішні межі повинні бути сталими і не повинні залежати від будь-яких змінних.

2. Середні межі можуть залежати лише від змінної зовнішнього інтегралу, а від змінної внутрішнього – не можуть.

3. Внутрішні межі можуть залежати від змінних зовнішнього і середнього інтегралів.

Наприклад, може існувати наступний інтеграл:

$$\iiint_W f\,dV = \int_2^3 \int_{1-z}^0 \int_{-y^2-z^2}^{y^2+z^2} f(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

Даний інтеграл визначений межами $2 \le z \le 3$, $1\text{-}z \le y \le 0$, $-y^2-z^2 \le x \le y^2+z^2$. Наступний інтеграл не матиме сенсу:

$$\iiint_W f\,dV = \xcancel{\int_y^x \int_1^{2x} \int_0^1 f(x,y,z)dx\,dy\,dz.}$$

В цьому прикладі зовнішні межі інтегралу залежать і від x, і від y, але при цьому y не визначений доки не відбудеться перехід до середнього інтегралу, а x не визначений доки не буде переходу до внутрішнього інтегралу. Також межі середнього інтегралу залежать від x, а це ще одна помилка.

Таким чином, головною задачею при вирішенні потрійних інтегралів є правильне визначення меж інтегрування. Існує 2 методи для визначення меж: «тіньовий» метод і метод перерізу.

Поняття «тіньового» методу для визначення меж у потрійних інтегралах

Хоча для визначення потрійного інтегралу використовується сума Рімана, як видно з попереднього прикладу, обчислення потрійних інтегралів виконується за допомогою розбиття їх на декілька одномірних інтегралів. Розбиття і обчислення подвійних інтегралів є значно простішим, оскільки їх завжди можна без проблем візуалізувати, на відміну від потрійних.

І «тіньовий» метод, і метод перерізу подають потрійний інтеграл у вигляді подвійного у комбінації з одномірним. В «тіньовому» методі необхідно уявити джерело світла, наприклад сонце, що розташоване вздовж однієї з координатних осей (наприклад, Oz) та уявна вісь є вертикальною. Освітлюючи трьохвимірну область W, сонце проектує тінь на площину, що перпендикулярна до осі, на якій розміщене сонце. Ця тінь є двовимірною областю, і її можна описати за допомогою подвійного інтегралу. Включимо одномірний інтеграл, що описує третю вертикальну змінну, її межами будуть відповідно нижня і верхня частина області на осі. При виборі Oz як «вертикальної» змінної «тіньовий» метод інтегрування матиме такий вигляд:

$$\iiint_W f(x,y,z)dV =$$
$$\iint_{\text{shadow}} \left(\int_{\text{bottom}(x,y)}^{\text{top}(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dx\, dy.$$

«Вертикальною» можна зробити будь-яку вісь координат, потрібно відштовхуватись від того, що буде зручніше і наочніше, в залежності від форми трьохвимірної області W.

Приклад вирішення задач на потрійний інтеграл за допомогою «тіньового» методу

Нехай, W – трьохвимірна область, обмежена площинами x=0, y=1, x=y, z=2+x-y, z=x-y. f(x,y,z)=xy, необхідно обчислити інтеграл з f по W.

Розв’язання. Враховуючи, що перші 3 площини паралельні осі Oz, оберемо її як «вертикальну». Будемо вважати, що сонце розташоване на осі Oz і відкидає тінь на площину xy. Побудуємо графік функції f, що обмежений областю W:

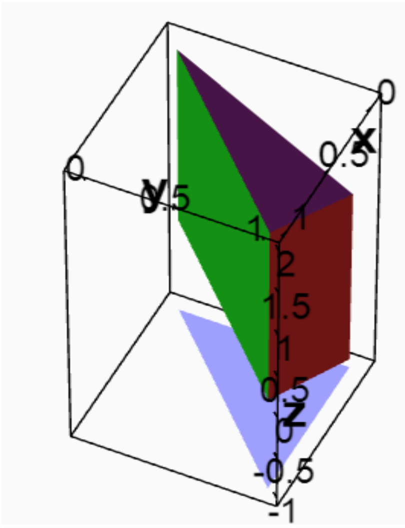

Рис. 2 Графік функції f, що обмежена областю W

За «тіньовим» методом, необхідно інтегрувати x та y в межах цієї області. Тоді, для кожної точки (x;y) в тіні, необхідно інтегрувати z з нижньої до верхньої точки області W. Ці точки утворені кутовими площинами, тому вони лежать у межах x-y<z<2+x-y. Знаходимо внутрішній інтеграл:

$$\int_{\text{bottom}(x,y)}^{\text{top}(x,y)} f(x,y,z)dz = \int_{x-y}^{2+x-y} f(x,y,z)dz.$$

Таким чином, зовнішній подвійний інтеграл потрібно шукати по області «тіні». «Тінь» є максимальним продовженням області W у напрямках x та y. В даному прикладі, визначити «тінь» досить просто, оскільки область W описана трьома вертикальними площинами. Звідси видно, що «тінь» - це трикутник, обмежений лініями x=0, y=1 та x=y.

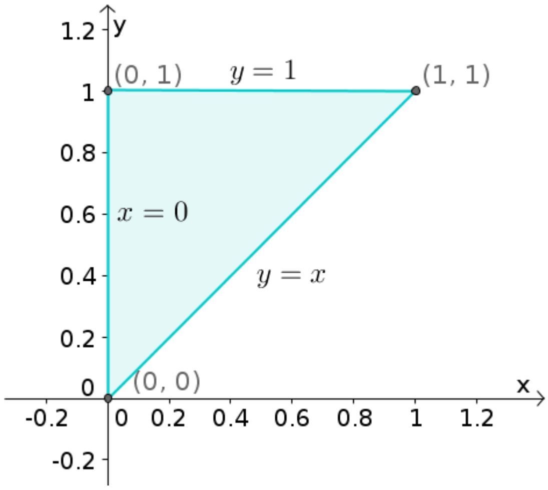

Рис. 3 Зображення області «тіні» на площині

Знайдемо межі подвійного інтеграла, нехай функція по x буде внутрішнім інтегралом, x змінюватиметься з x=0 до x=y і межі будуть 0<x<y, відповідно для y – 0<y<1. Подвійний інтеграл по області «тінь» матиме вигляд:

$$\iint_{\text{shadow}} \cdots dx\, dy = \int_0^1 \int_0^y \cdots dx\, dy.$$

Підставивши всі межі разом і записавши підінтегральну функцію f(x,y,z)=xy, обчислимо інтеграл:

$$\begin{aligned}
\iiint_W f(x,y,z)dV &= \int_0^1 \int_0^y \int_{x-y}^{2+x-y} xy\, dz\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \int_0^y xyz\Big|_{z=x-y}^{z=2+x-y} dx\, dy \\
&= \int_0^1 \int_0^y 2xydx\, dy \\
&= \int_0^1 x^2 y\Big|_{x=0}^{x=y} dy \\
&= \int_0^1 y^3 dy = \frac{y^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Поняття методу перерізу для визначення меж у потрійних інтегралах

Щоб уявити на практиці метод перерізу, можна знову уявити трьохвимірну область W – проте в даному випадку вона буде поділена на підобласті, що перпендикулярні до однієї з координатних осей. Розглянемо вісь, перпендикулярну до підобластей, як вертикальну. Помітно, що область W складається з багатьох поперечних перерізів, що накладаються. В даному прикладі вісь Ox буде вертикальною.

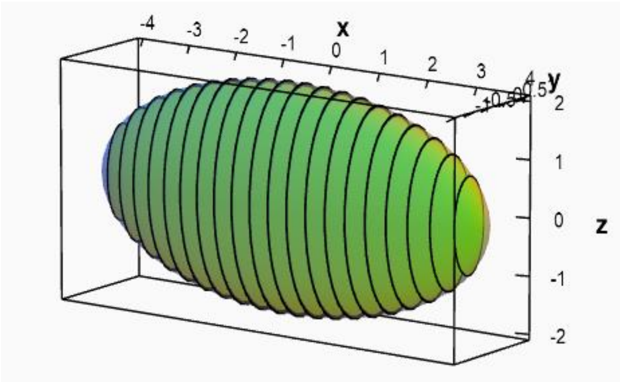

Рис. 4 Область W, поділена перерізами, що перпендикулярні Ox

Розмір і форма перерізу буде змінюватися в залежності від розташування вздовж «вертикальної» координатної осі. Інтеграл по W буде відповідати подвійним інтегралам по всім цим перерізам. Прийнявши Oz за «вертикальну» вісь, запишемо інтеграл від функції f(x,y,z) по W:

$$\iiint_W f(x,y,z)dV =$$
$$\int_{\text{bottom}}^{\text{top}} \left(\iint_{\text{cross section}(z)} f(x,y,z)dx\,dy \right) dz.$$

Як бачимо, різниця між «тіньовим» методом і методом перерізу полягає у розташуванні подвійного та одномірного інтегралів: в першому випадку зовнішнім є подвійний інтеграл, а в другому – одномірний.

Приклад вирішення задач на потрійний інтеграл за допомогою методу перерізу

Нехай, W – піраміда, обмежена площинами z=0, z=4-2x, z=2-y, z=2x, z=2+y. Густина піраміди в точці (x,y,z) дорівнює f(x,y,z)=xz. Необхідно знайти масу піраміди.

Розв'язання. Маса піраміди є інтегралом від її густини:

$\text{mass of pyramid} = \iiint_W f(x,y,z)dV,$ де W – піраміда. Основною задачею є визначення меж інтегрування по W. Побудуємо графік і оберемо вісь Oz як «вертикальну»:

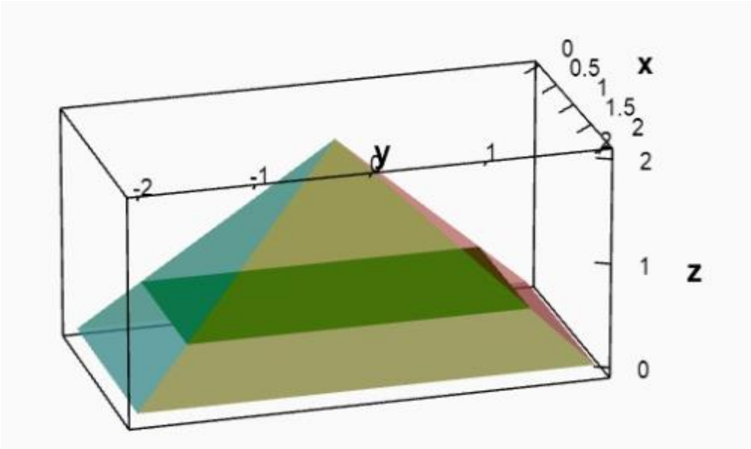

Рис. 5 Графік поверхні, що обмежує область W

Для заданого значення z, межі прямокутних перерізів будуть визначатись рівняннями площин z=4-2x, z=2-y, z=2x, z=2+y. Перепишемо ці рівняння для x та y: x=2−z/2, y=2−z, x= z/2, та y=z−2. Отримаємо такі межі x та y в прямокутнику: z/2 ≤ x ≤ 2−z/2, z-2 ≤ y ≤ 2-z. Розставимо межі інтегрування для даного перерізу:

$$\iint_{\text{cross section}(z)} f(x,y,z)dy\,dx = \int_{z/2}^{2-z/2}\int_{z-2}^{2-z} f(x,y,z)dy\,dx.$$

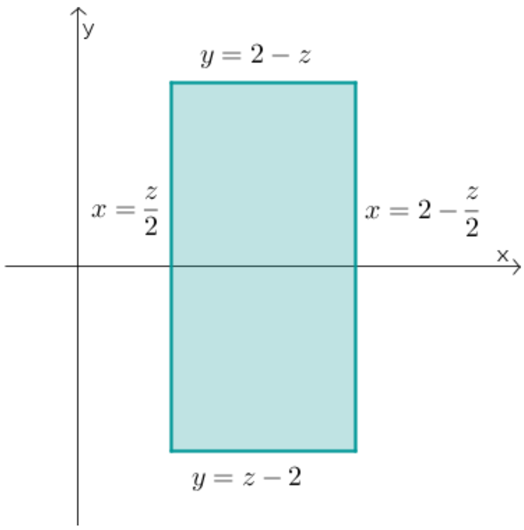

Рис. 6 Зображення прямокутного перерізу площини

Нижньою межею піраміди буде точка z=0, а верхньою - z=2. Межі інтегрування матимуть вигляд:

$$\int_{\text{bottom}}^{\text{top}} \cdots dz = \int_0^2 \cdots dz.$$

Розставивши межі по вертикальній осі та межі інтегрування по перерізу, обчислимо масу піраміди:

mass of piramid=$\iiint_W f(x,y,z)\,dV = \int_{bottom}^{top}(\iint_{cross\ section(z)} f(x,y,z)dxdy)dz =$
$\int_0^2\int_{z/2}^{2-z/2}\int_{z-2}^{2-z} xzdydxdz = \int_0^2\int_{z/2}^{2-z/2} xyz|_{y=z-2}^{y=2-z}\,dxdz = \int_0^2\int_{z/2}^{2-z/2} 2xz(2-z)dxdz =$
$\int_0^2 x^2z(2-z)|_{x=\frac{z}{2}}^{x=2-\frac{z}{2}}dz = \int_0^2 2z(2-z)^2\,dz = 2(2z^2-\frac{4}{3}z^3+\frac{z^4}{4})|_0^2$=2(8-32/3+4)=8/3

Масу піраміди можна було б обчислити і «тіньовим» методом, причому «тінь» була б прямокутником у межах $0 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$. Проте, виникли б значні труднощі при обчисленні, оскільки функція top (x,y) була чотирма трикутними областями. Необхідно було б розбивати інтеграл на 4 частини, з цеї причини метод перерізу легший для даного прикладу.

Висновки

На прикладі розв’язання окремих задач показано важливість використання спеціальних методів для визначення меж потрійних інтегралів. Доведено ефективність використання двох основних методів – «тіньового» методу та методу перерізу. Зроблено порівняльний аналіз методів та розглянуто різні випадки застосування кожного з них, що є необхідним для вирішення багатьох прикладних задач із застосуванням потрійного інтегралу у різних сферах діяльності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. https://www.whitman.edu/mathematics/calculus_online/section15.05.html

2. https://mathinsight.org

Зелінська Дарія Олегівна – студент групи 2КН - 16б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: dariia050500@gmail.com

Науковий керівник: **Абрамчук Ігор Васильович**— старший викладач кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Zelinska Dariia - Department of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: dariia050500@gmail.com

Supervisor: **Abramchuk Igor** - Senior Lecturer at the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia