УДК 539.3

В. М. Михалевич
В. О. Краєвський
В. В. Василишен
В. В. Шевченко

СПОСОБИ ЗНАХОДЖЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ВІДСТАНІ ВІД ТОЧКИ ДО КРИВОЇ

Вінницький національний технічний університет;

Анотація

Відстань від початку координат до кривої запропоновано, як показник для ранжування певної сім'ї функцій, що може бути використаний у теорії підсумовування пошкоджень. Зазначено різні способи знаходження вказаної відстані для двопараметричної функції.

Ключові слова: теорія підсумовування пошкоджень, відстань від точки до кривої, нормаль та дотична до кривої, умовний екстремум, метод множників Лагранжа, Maple.

Abstract

The distance from the origin to the curve is proposed as an index for the ranking a certain family of functions that can be used in the theory of damage summation. Various ways of determining the specified distance for a two-parameter function are indicated.

Keywords: theory of damage summation, distance from the origin to the curve, normal and tangent to curve, constrained extremum, Lagrange method of multipliers.

Вступ

У працях [1, 2, 3, 4, 5, 6] розроблено та досліджено моделі підсумовування пошкоджень спадкового типу. Ці дослідження показали, що подібні моделі описують широке коло процесів з різних галузей. Численні перевірки адекватності побудованих моделей здійснено відносно процесів повзучості та високотемпературного пластичного деформування матеріалів за різних режимів зміни швидкості деформацій або інтенсивності напружень і виду напруженого стану [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Виявлено, що аналогічні закономірності притамані і процесам накопичення втоми спортсмена, що долає певну дистанцію [8, 9].

У працях [10, 11, 12, 13, 14] вперше здійснено постановку та розв'язання оптимізаційних задач в теорії підсумовування пошкоджень спадкового типу. З використанням термінологічної лексики задачі про накопичення втоми спортсмена сутність постановки оптимізаційної задачі полягає у формулюванні запитання: за яким законом спортсмену необхідно змінювати швидкість свого пересування вздовж дистанції, щоб подолати задану відстань за мінімальний час, або за заданий час подолати максимальну відстань.

У працях [10, 11] доведено, що зазначена варіаційна задача ізопериметричного типу у класичній постановці розв'язку не має.

Показано, що відносно класу кусково-сталих функцій варіаційна задача може бути зведена до задачі нелінійного програмування. Такі задачі розв'язано для 2-х, 3-х, …та 6-и ступеневої зміни швидкості деформації. Сформульовано і програмно реалізовано випадок k-ступеневого деформування [13].

Застосування моделювання закономірностей підсумовування пошкоджень в матеріалах під час високотемпературного деформування для отримання виробів методами СВС-баротермії наведено у [15].

У праці [16] запропоновано наближений метод розв'язання задачі нелінійного програмування. У [17] в результаті пошуку взаємозв'язку спадкової теорії підсумовування пошкоджень із задачею про таутохрону встановлено закон зміни швидкості деформацій, при якому рівень пошкоджень залишається незмінним під час необмеженого зростання пластичної деформації. Іншими словами виявлено умови, за яких матеріал виявляє властивості надпластичності.

Під час дослідження та аналізу властивостей моделей підсумовування пошкоджень, що породжуються додатними монотонно спадними опуклими донизу функціями виникає необхідність пошуку показника, за яким можна б було ранжувати ці функції. За такий показник пропонується вибрати відстань від початку координат до заданої кривої.

Метою роботи є розробка способів визначення відстані від початку координат до зазначеного типу кривих та дослідження і аналіз отриманих результатів.

Результати дослідження

Постановка задачі

У праці [17] виявлено унікальні властивості моделі підсумовування пошкоджень для швидкостей деформацій, що представлені співвідношенням

$$y(t) = \frac{k}{\sqrt{t}}, \quad (1)$$

де $k > 0$ - деяка стала.

Надалі розглядатимемо більш загальну функцію

$$y(t) = \frac{k}{t^{\alpha}}, k, \alpha, t > 0. \quad (2)$$

На рис.1 представлена сім’я кривих, що відповідають різним значенням параметрів цієї функції. Звичайно, під час дослідження можуть виникати й інші функції з деякими властивостями, що подібні функції (2).

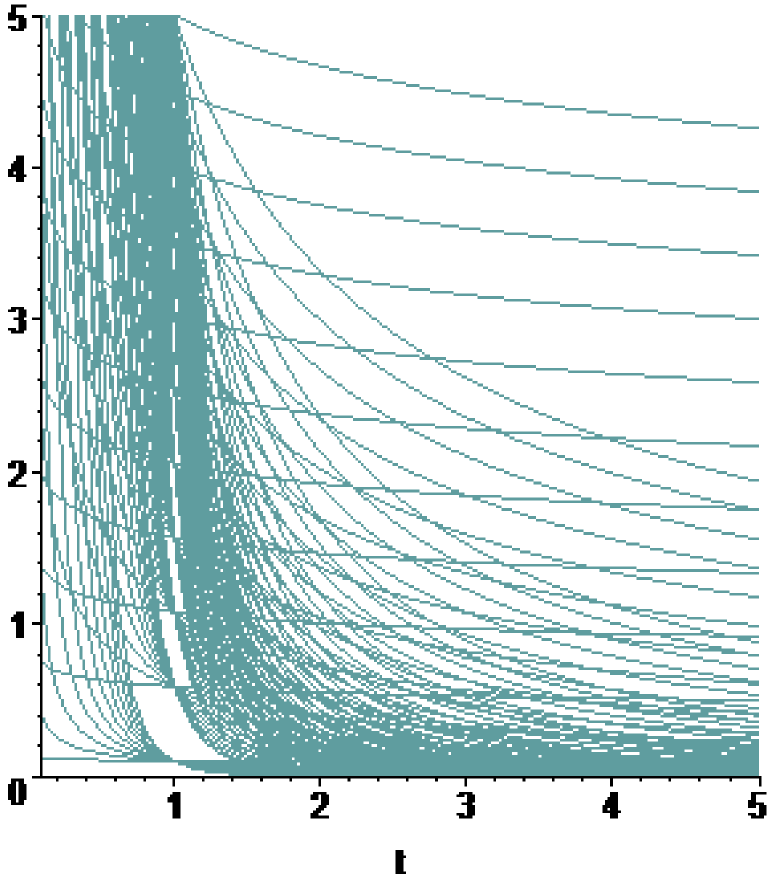


Рис. 1 Сім’я кривих двопараметричної функції: розрахунок за (2), $k, \alpha \in [0,1; 5]$.

Необхідно знайти відстань від початку координат до функції, що задана рівнянням (2) (див. рис.2).

Існує декілька способів розв’язання поставленої задачі. Ці способи базуються на двох властивостях відрізка *OA*, довжина якого дорівнює шуканій відстані: 1) цей відрізок співпадає з напрямом нормального вектора до кривої (2), що проведений з початку координат; 2) довжина відрізка OA є найменшою серед інших відрізків OM, де $M\left(t, \frac{k}{t^{\alpha}}\right)$ - поточна точка кривої.

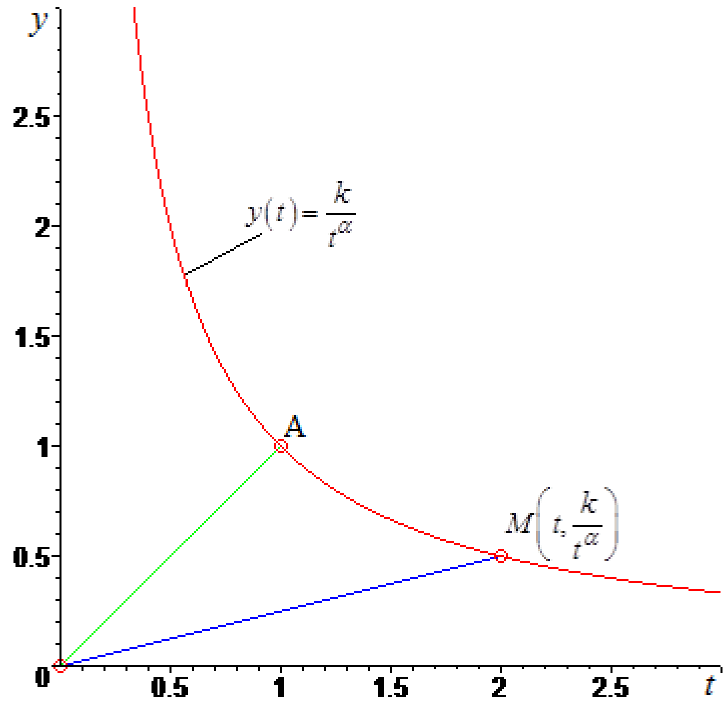


Рис. 2. Відстань від початку координат до кривої.

Спосіб 1. Використання рівняння нормалі до кривої на площині

Нехай нормаль до кривої проходить через т. A, тоді її загальне рівняння матиме вигляд

$$Y(T)=y(t_A)-\frac{1}{y'(t_A)}\cdot(T-t_A), \tag{3}$$

і з урахуванням (2)

$$Y(T)=\frac{k}{t_A{}^{\alpha}}+\frac{1}{k\cdot\alpha}\cdot t_A{}^{\alpha+1}\cdot(T-t_A). \tag{4}$$

За умовою пряма (4) проходить через початок координат. З урахуванням цієї умови з (4) отримаємо

$$t_A=e^{\frac{\ln(k^2\alpha)}{2\cdot(\alpha+1)}}. \tag{5}$$

Шукана відстань дорівнює

$$OA=z(k,\alpha)=k\cdot e^{-\frac{\alpha\cdot\ln(k^2\alpha)}{2\cdot(1+\alpha)}}\cdot\sqrt{1+\alpha}. \tag{6}$$

Інші способи

Вказану відстань також шукали методом множників Лагранжа та способом, що базується на пошуку екстремуму функції однієї змінної. Отримано одні й ті самі результати.

Дослідження формули для відстані

Визначимо частинні похідні функції $z(k,\alpha)$ та дослідимо їх. Всі обчислення виконаємо в середовищі СКМ Maple.

```
Diff(z(k,alpha),alpha)=diff(OAd(k,alpha),alpha);
```

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(k\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{\alpha\ln(k^2\alpha)}{2+2\alpha}\right)}\sqrt{\alpha+1}\right)= k\left(-\frac{\ln(k^2\alpha)}{2+2\alpha}-\frac{1}{2+2\alpha}+\frac{2\alpha\ln(k^2\alpha)}{(2+2\alpha)^2}\right)\mathbf{e}^{\left(-\frac{\alpha\ln(k^2\alpha)}{2+2\alpha}\right)}\sqrt{\alpha+1}+\frac{1}{2}\frac{k\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{\alpha\ln(k^2\alpha)}{2+2\alpha}\right)}}{\sqrt{\alpha+1}}$$

```
lhs(%)=algsubs(exp(-alpha*ln(k^2*alpha)/(2+2*alpha))=EXP,rhs(%));
```

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(k\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{\alpha\ln(k^2\alpha)}{2+2\alpha}\right)}\sqrt{\alpha+1}\right)= \frac{1}{2}\frac{k\,EXP\,(\alpha^2+\alpha-(\alpha+1)\ln(k^2\alpha)-(\alpha+1)\alpha)}{(\alpha+1)^{(5/2)}}$$

```
normal(%);
```

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(k\,\mathbf{e}^{\left(-1/2\,\frac{\alpha\ln(k^2\alpha)}{\alpha+1}\right)}\sqrt{\alpha+1}\right)=-\frac{1}{2}\frac{k\,EXP\ln(k^2\alpha)}{(\alpha+1)^{(3/2)}}.$$

Аналогічним чином знаходимо частинну похідну за параметром k

```
Diff(OAd(k,alpha),k)=diff(OAd(k,alpha),k);
```

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(k\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{\alpha\ln(k^2\alpha)}{2+2\alpha}\right)}\sqrt{\alpha+1}\right)= \mathbf{e}^{\left(-\frac{\alpha\ln(k^2\alpha)}{2+2\alpha}\right)}\sqrt{\alpha+1}-\frac{2\alpha\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{\alpha\ln(k^2\alpha)}{2+2\alpha}\right)}\sqrt{\alpha+1}}{2+2\alpha}$$

```
lhs(%)=algsubs(exp(-alpha*ln(k^2*alpha)/(2+2*alpha))=EXP,rhs(%));
```

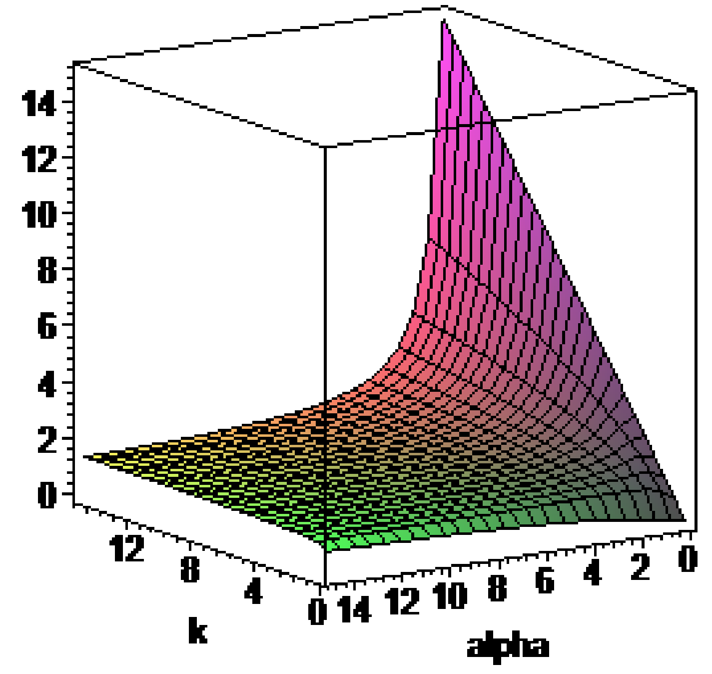
$$\frac{\partial}{\partial k}\left(k\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{\alpha\ln(k^2\alpha)}{2+2\alpha}\right)}\sqrt{\alpha+1}\right)=\frac{EXP}{\sqrt{\alpha+1}}.$$

Графіки поверхні (6) наведено на рис. 3.

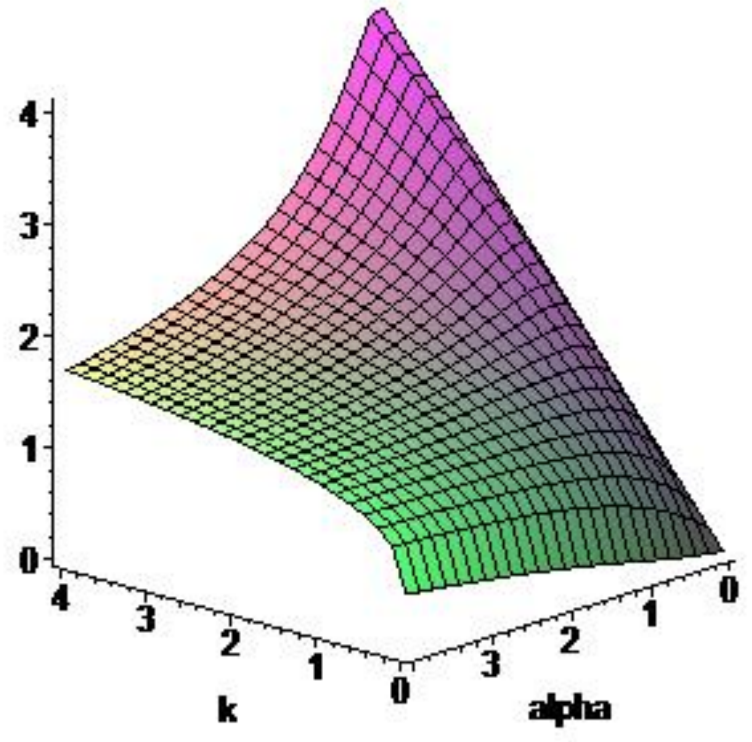
На рис. 4 зображені сім'я кривих (2) при $k=1$ і різних значеннях параметра α, нормалі до цих кривих, що проведені з точки початку координат, точки перетину вказаних нормалей та кривих і дотичні до кривих у цих точках.

Висновки

Запропонований показник ранжування певної сім'ї функцій, математичні способи та інформаційні Maple- технології його визначення і дослідження, а також отримані співвідношення можуть бути використані під час розв'язання задач теорії підсумовування пошкоджень.



а)



а)

Рис. 3. Залежність відстані від початку координат до кривої (2) від параметрів функції (розрахунок за (6)); *а*, *б* – різні діапазони зміни аргументів.

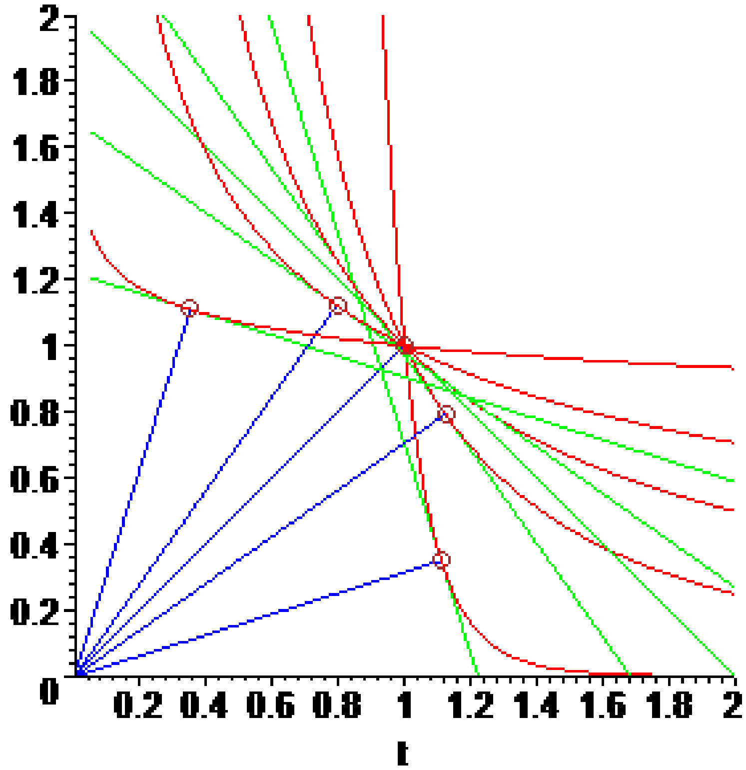


Рис. 4. Сім’я кривих, нормалей, дотичних та точок перетину: червоні лінії – розрахунок за (2) при $k=1$; блакитні лінії – нормалі, розрахунок за (4), (5); зелені лінії – дотичні прямі; ○ – точки перетину нормалей з кривими..

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ильюшин А. А. Об одной теории длительной прочности / А. А. Ильюшин // Механика твердого тела. — 1967. — №13. – С. 21—25.

2. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкой упругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. - М.: Наука, 1970 - 280 с.

3. Москвитин В. В. Сопротивление вязко-упругих материалов / В. В. Москвитин. — М. : Наука, 1972. — 327 с.

4. Mikhalevich V. M. The model of ultimate strains during hot deformation / V. M. Mikhalevich // Izvestia Akademii nauk SSSR. Metally (5) . - 1991, pp. 89-95.

5. Mikhalevich V. M. Plasticity with cyclic hot working / V. M. Mikhalevich // Strength of Materials. - 1994, 26 (6) , pp. 407-412.

6. Mikhalevich V. M. Isothermal blades rolling / V. M. Mikhalevich, V.A. Matvijchuk, V.P. Egorov, I.F. Kornet // Kuznechno-Shtampovochnoe Proizvodstvo. – 1994. – № 3. – С. 6–9.

7. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В. М. Михалевич / Вінниця: "УНІВЕРСУМ- Вінниця", 1998 - 195 с.

8. Михалевич В.М. Моделирование израсходования ресурса спортсмена на дистанции / В. М. Михалевич, В. А.Краевский, К. Ф. Козлова // Збір. наук. праць «Фізична культура, спорт та здоров’я нації». – Вінниця, 2009. – Випуск 8, Том 2. – С. 103-109.

9. Михалевич В.М. Определение оптимальной схемы изменения скорости бега спортсмена на длинной дистанції / В. М. Михалевич, В. А.Краевский, К. Ф. Козлова // Збір. наук. праць «Фізична культура, спорт та здоров’я нації». – Вінниця, 2011. – Випуск 12, Том 2. – С. 155-162.

10. Mikhalevich V. M. Variational problems for damage accumulation models heritable type [Text] / V. M. Mikhalevich, V. O. Kraevskiy // The nonlinear analysis and application 2009 : materials of the international scientific conference, Kyiv, April 02-04th 2009. – Kyiv : NTUU "KPI", 2009. – P. 109-110.

11. Михалевич В. М. Постановка и решение оптимизационных задач в теории деформируемости [Текст] / В. М. Михалевич, В. О. Краєвський // Вісник національного технічного університету

України "Київський політехнічний інститут". Серія "Машинобудування". - Київ : НТУУ "КПІ", 2010. - С. 142-145.
12. Михалевич В. М. Оптимізація гарячого циклічного деформування із паузами / В. М. Михалевич, В. О. Краєвський // Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2011. – № 46. – С. 103–106.
13. Михалевич В. М., Краєвський В. О. Определение оптимальных параметров многоступенчатой схемы изменения скорости деформаций // Обработка материалов давлением, 2011. – №2(27) – с. 10-13.
14. Краєвський В. А. Вариационные задачи в теории деформируемости // В. А. Краєвський, В. М. Михалевич / Надійність і довговічність машин і споруд: Міжнар. наук.-техн. зб. – К.: ІПМіцн. ім. Г.С.Писаренка НАНУ, 2013. – Вип. 37. – С. 90-97.
15. Vaitsekhovich S. M. Theory and technology of barothermal self-propagating high-temperature synthesis based on damage accumulation modeling [Text] / S. M. Vaitsekhovich, V. M. Mikhalevich, V. A. Kraevskii // Powder Metallurgy and Metal Ceramics. - 2013. - Vol. 52, Issue 1. - P. 1-6.
16. Краєвський В.О. Оптимізація швидкісного режиму багатоступеневого гарячого деформування при однаковій тривалості ступенів/ В.О. Краєвський, В. М. Михалевич // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2015. — № 1-2. — С. 46–52.
17. Краєвський В.О. Взаємозв’язок теорії підсумовування пошкоджень із задачею про таутохрону В. О. Краєвський, В. М. Михалевич // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2016. — № 5. — С. 152–158.

Володимир Олександрович Краєвський — доцент каф. вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: kraila@ukr.net;
Вадим Васильович Василишен — студент групи 1ПМ-17б, факультет машинобудування та транспорту, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail:
Василь Васильович Шевченко — студент групи 1ГМ-17б, факультет машинобудування та транспорту, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail:

Науковий керівник: ***Володимир Маркусович Михалевич*** — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: vmykhal@gmail.com

Kraievskyi Volodymyr O. *- Ph.D., Associate Professor, Department of Mathematics Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail:* kraila@ukr.net.
Vasylyshen Vadym V. *— Student of the Faculty of Mechanical Engineering and Transport, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia*.
Shevchenko Vasyl V. *— Student of the Faculty of Mechanical Engineering and Transport, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia*.

Supervisor: ***Mykhalevych Volodymyr M.*** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair for Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, vmykhal@gmail.com.