УДК 512.57

О ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ИНТЕРПРЕТАЦИЙ МНОГООБРАЗИЙ

Мамедов Октай, Мехтиев Хиджран

Бакинский Государственный Университет

Аннотация

В данной работе рассматривается некоторая параметризация семейства локальных интерпретаций многообразий и одно обобщение почти-единодушных термов.

Abstract

Here we consider some parameterization of local interpretations of varieties and a generalization of near unanimity terms.

Многообразие есть класс однотипных алгебр, определяемый некоторым множеством тождеств; например, группы, кольца, модули над фиксированным кольцом, решётки, булевы алгебры. Многообразие можно охарактеризовать и как класс алгебр, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов, подалгебр и прямых произведений. Хорошо известно, что все алгебры в многообразии групп, колец, модулей обладают перестановочными конгруэнциями, т.е. реляционное произведение конгруэнций коммутативно. Ещё Дедекиндом было показано, что перестановочность влечет модулярность решеток конгруэнций. А.И.Мальцев доказал, что все алгебры многообразия имеют перестановочные конгруэнции тогда и только тогда, когда существует терм $p(x,y,z)$ удовлетворяющий тождествам $p(x,z,z)=x$ и $p(x,x,z)=z$. Этот терм называется термом Мальцева и условия такого типа (т.е. существование термов, удовлетворяющих некоторым тождествам или импликациям) называются мальцевскими. Мы будем рассматривать многообразия с хотя бы одной индивидной константой (при этом не требуется её вхождение в сигнатуру). Для сравнения взаимных «сил» многообразий удобным оказалось понятие (глобальной) интерпретации многообразий, введённое У.Нейманом. Возникающая при этом решётка (носителем которой является класс) $\mathcal{L}$ интерпретаций широко изучалась Гарсией и Тейлором [3]; мальцевские условия оказались фильтрами этой решётки. Локальная интерпретация, рассмотренная Я.Мыцельским, также привела к решётке (носителем которой является множество) эквациональных глав $\mathcal{LEC}$ [4]. Здесь мы связываем эти две интерпретации (решётки $\mathcal{L}$ и $\mathcal{LEC}$) некоторой параметризацией; что можно рассматривать как ответ на один вопрос Мыцельского ([3], стр.120). В конце работы рассмотрено некоторое обобщение широко известных почти единодушных термов и установлены ряд их свойств. Сведения по универсальной алгебре можно найти в [2].

Пусть $\mathcal{V}$ есть многообразие типа τ. Если типа τ' содержится в τ, $\tau' \subseteq \tau$, то можно образовать редукт $\mathcal{V}'$ (типа τ') многообразия $\mathcal{V}$ так: $\mathcal{V}' = var(\mathfrak{A}|_{\tau'} : \mathfrak{A} \in \mathcal{V})$.

Определение Для многообразий $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U}$ (возможно, разнотипных) и для неконечного кардинала k $\mathcal{U}$ *редукт*-k-*локально интерпретируемо в* $\mathcal{V}$ (это обозначаем так: $\mathcal{U} \trianglelefteq_{\mathrm{k}} \mathcal{V}$), если любой редукт $\mathcal{U}'$ с типом мощности $< \mathrm{k}$ интерпретируемо (в обычном, т.е. глобальном смысле) в $\mathcal{V}$.

Отношение $\trianglelefteq_{\mathrm{k}}$ является квазипорядком на классе всех многообразий. Так как пересечение любого квазипорядка со своим обращением является эквивалентностью, то $\trianglelefteq_{\mathrm{k}}$ определяет частичный порядок $\leq_{\mathrm{k}}$ на семействе всех классов эквивалентности. Таким образом, если положить $\mathcal{U} \bowtie_{\mathrm{k}} \mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{U} \trianglelefteq_{\mathrm{k}} \mathcal{V}$ & $\mathcal{V} \trianglelefteq_{\mathrm{k}} \mathcal{U}$, то $\bowtie_{\mathrm{k}}$ будет эквивалентностью на классе всех многообразий и $\leq_{\mathrm{k}}$ есть частичный порядок на классах $\bowtie_{\mathrm{k}}$-эквивалентности. Класс $\bowtie_{\mathrm{k}}$-эквивалентности, содержащий $\mathcal{U}$, обозначим $[\mathcal{U}]_{\bowtie_{\mathrm{k}}}$ и назовём его *эквациональной* k-*строфой* многообразия $\mathcal{U}$. Запись $[\mathcal{U}]_{\bowtie_{\mathrm{k}}} \leq_{\mathrm{k}} [\mathcal{V}]_{\bowtie_{\mathrm{k}}}$ означает в частности, что

$\mathcal{U} \trianglelefteq_{\mathrm{k}} \mathcal{V}$. Семейство всех этих классов $\bowtie_{\mathrm{k}}$-эквивалентности обозначим LEkV; итак, $\mathrm{LEkV} = \langle [\mathcal{U}]_{\bowtie_{\mathrm{k}}} : \mathcal{U}\text{ есть многообразие}\rangle$. Пусть α - произвольная k-строфа, задаваемая многообразием $\mathcal{U}$; т.е. $\alpha = [\mathcal{U}]_{\bowtie_{\mathrm{k}}}$. Рассмотрим семейство всех редуктов многообразия $\mathcal{U}$, мощности типов которых $< \mathrm{k}$. Это семейство однозначно определяет строфу α. Всякое многообразие этого семейства интерпретируемо в $\mathcal{U}$ и каждое такое многообразие имеет тип мощности $< \mathrm{k}$. При ОКГ различных таких многообразий $\leq \mathrm{k}$. Тогда дизъюнктное объединение этих многообразий имеет тип мощности $\leq 2^{\mathrm{k}}$ и оно редукт k-локально интерпретируемо в $\mathcal{U}$ и наоборот. Итак, эквациональная k-строфа многообразия $\mathcal{U}$ имеет представитель с типом мощности $\leq 2^{\mathrm{k}}$ и поэтому $|\mathrm{LEkV}| \leq 2^{2^{\mathrm{k}}}$. Легко понять, множество LEkV, частично упорядоченное отношением $\trianglelefteq_{\mathrm{k}}$, имеет нуль $\mathbf{0} = [x = x]_{\bowtie_{\mathrm{k}}}$ (эквациональная k-строфа многообразия всех множеств) и единицу $\mathbf{1} = [x = y]_{\bowtie_{\mathrm{k}}}$ (эквациональная k-строфа тривиального многообразия).

Теорема Для любого кардинала k частично упорядоченное множество

$$\mathcal{LEkV} = \langle \mathrm{LEkV}, \trianglelefteq_{\mathrm{k}} \rangle$$

является полной решёткой, в которой для сигнатурно разъединённых многообразий $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ типов τ и, соответственно, σ, пересечение определяется так: $[\mathcal{U}]_{\bowtie_{\mathrm{k}}} \wedge [\mathcal{V}]_{\bowtie_{\mathrm{k}}} = [\mathcal{W}]_{\bowtie_{\mathrm{k}}}$, где $\mathcal{W}$ имеет тип $\tau \cup \sigma \cup \{\cdot\}$ и задаётся тождествами (прямоугольная связка $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$):

1) $x \cdot x = x$,
2) $(x \cdot y) \cdot (u \cdot v) = x \cdot v$,
3) $f(x_1 \cdot y_1, \ldots, x_m \cdot y_m) = f(x_1, \ldots, x_m)$,
4) $g(x_1 \cdot y_1, \ldots, x_n \cdot y_n) = g(y_1, \ldots, y_n)$,
5) $\mathscr{s} \cdot y = \mathscr{t} \cdot y$,
6) $x \cdot \mathscr{u} = x \cdot \mathscr{v}$,

где $f \in \tau$, $g \in \sigma$, $\mathscr{s} = \mathscr{t}$ пробегает по всем тождествам $\mathcal{U}$ и $\mathscr{u} = \mathscr{v}$ пробегает по всем тождествам $\mathcal{V}$.

Доказательство. Пусть $\{\mathcal{V}_i : i \in I\}$ некоторое множество многообразий, причём каждое $\mathcal{V}_i$ имеет тип τ_i и систему тождеств Σ_i. Рассмотрим дизъюнктное разъединение типов τ_i^0 и соответствующие им системы тождеств Σ_i^0. Пусть $\coprod\{\mathcal{V}_i : i \in I\}$ есть многообразие типа $\bigcup\{\tau_i^0 : i \in I\}$ с системой тождеств $\bigcup\{\Sigma_i^0 : i \in I\}$. Тогда понятно, что эквациональная k-строфа многообразия $\coprod\{\mathcal{V}_i : i \in I\}$ есть $\bigvee\{[\mathcal{V}_i]_{\bowtie_{\mathrm{k}}} : i \in I\}$. Кроме того, как отмечено выше, в частично упорядоченном множестве $\langle \mathrm{LEkV}, \trianglelefteq_{\mathrm{k}} \rangle$ есть нуль и единица; это устанавливает полноту решётки $\mathcal{LEkV}$. Сначала докажем, что $\mathcal{W}$ редукт-k-локально интерпретируемо в $\mathcal{U}$ и в $\mathcal{V}$; затем покажем, что если некоторое многообразие $\mathcal{Z}$ редукт-k-локально интерпретируемо и в $\mathcal{U}$ и в $\mathcal{V}$, то $\mathcal{Z}$ редукт-k-локально интерпретируемо в $\mathcal{W}$.

Для доказательства первого утверждения достаточно проинтерпретировать операцию $\cdot$ как проекцию $\pi_2^0(x, y) = x$, все операции $g \in \sigma$ как одну и ту же константу многообразия $\mathcal{U}$, а все операции $f \in \tau$ как те же самые операции в $\mathcal{U}$. Отсюда видно, что $\mathcal{W}$ будет редукт-k-локально интерпретируемо в $\mathcal{U}$. Точно так же, беря вместо π_2^0 проекцию $\pi_2^1(x, y) = y$, получаем интерпретируемость $\mathcal{W}$ в $\mathcal{V}$.

Докажем второе утверждение. Рассмотрим редукт $\mathcal{Z}'$ многообразия $\mathcal{Z}$ такой, что $|\text{тип}(\mathcal{Z}')| < \mathrm{k}$. По условию, $\mathcal{Z}'$ интерпретируемо и в $\mathcal{U}$ и в $\mathcal{V}$. Пусть h есть некоторая операция многообразия $\mathcal{Z}'$. Положим $h_0 = h_{\mathcal{U}} \cdot h_{\mathcal{V}}$, где $h_{\mathcal{U}}$ и $h_{\mathcal{V}}$ есть интерпретация h в операциях, соответственно, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. Тогда семейство $\{h_0 : h\text{ есть операция }\mathcal{Z}'\}$ определяет интерпретацию $\mathcal{Z}'$ в $\mathcal{U}$. Надо проверить, что для любого терма t в языке $\mathcal{Z}'$ $t_0 = t_{\mathcal{U}} \cdot t_{\mathcal{V}}$.

Это показывается обычной индукцией по длине терма: если t переменная, то тождество 1) обеспечивает справедливость равенства $t_0 = t_{\mathcal{U}} \cdot t_{\mathcal{V}}$; если же $t = f(t^1, \dots, t^r)$, то

$$t_0 = f_0(t_0^1, \dots, t_0^r) = f_{\mathcal{U}}\left(t_{\mathcal{U}}^1 \cdot t_{\mathcal{V}}^1, \dots, t_{\mathcal{U}}^r \cdot t_{\mathcal{V}}^r\right) \cdot f_{\mathcal{V}}\left(t_{\mathcal{U}}^1 \cdot t_{\mathcal{V}}^1, \dots, t_{\mathcal{U}}^r \cdot t_{\mathcal{V}}^r\right) =$$
$$= f_{\mathcal{U}}\left(t_{\mathcal{U}}^1, \dots, t_{\mathcal{U}}^r\right) \cdot f_{\mathcal{V}}\left(t_{\mathcal{V}}^1, \dots, t_{\mathcal{V}}^r\right) = t_{\mathcal{U}} \cdot t_{\mathcal{V}}.$$

Предположим теперь, что $t = t'$ есть некоторое тождество многообразия $\mathcal{Z}'$. Так как $\mathcal{Z}'$ интерпретируемо и в $\mathcal{U}$ и в $\mathcal{V}$, то $t_{\mathcal{U}} = t'_{\mathcal{U}}$ является тождеством многообразия $\mathcal{U}$, а $t_{\mathcal{V}} = t'_{\mathcal{V}}$ является тождеством многообразия $\mathcal{V}$. Из тождеств 5) и 6) вытекает, что $t_{\mathcal{U}} \cdot y = t'_{\mathcal{U}} \cdot y$ и $x \cdot t_{\mathcal{V}} = x \cdot t'_{\mathcal{V}}$. Тогда $t_{\mathcal{U}} \cdot t_{\mathcal{V}} = (t_{\mathcal{U}} \cdot y) \cdot (x \cdot t_{\mathcal{V}}) = (t'_{\mathcal{U}} \cdot y) \cdot (x \cdot t'_{\mathcal{V}}) = t'_{\mathcal{U}} \cdot t'_{\mathcal{V}}$.

С другой стороны $t_{\mathcal{U}} \cdot t_{\mathcal{V}}$ равно t_0 (т.е. интерпретации терма t в $\mathcal{U}$), и $t'_{\mathcal{U}} \cdot t'_{\mathcal{V}} = t'_0$. Итак многообразии $\mathcal{W}$ удовлетворяет тождеству $t_0 = t'_0$ и теорема доказана.

Предложение Всякое конечнобазируемое многообразие конечного типа является компактным элементом решётки $\mathcal{LEkV}$.

Доказательство Пусть конечнобазируемое $\mathcal{V}$ имеет конечный тип и пусть

$$[\mathcal{V}]_{\bowtie_k} \le \bigvee\{[\mathcal{V}_i]_{\bowtie_k} : i \in I\}.$$

Так как $\bigvee\{[\mathcal{V}_i]_{\bowtie_k} : i \in I\} = [\coprod\{\mathcal{V}_i : i \in I\}]_{\bowtie_k}$, то конечный тип многообразия $\mathcal{V}$ можно проинтерпретировать в не более чем конечном числе многообразий $\mathcal{V}_i$. Теперь дизъюнктное объединение этого конечного числа многообразий даёт требуемое конечное подпокрытие для $[\mathcal{V}]_{\bowtie_k}$.

По теореме в сигнатуру пересечения добавляется лишь одна бинарная операция; поэтому верно

Предложение Пересечение компактных элементов решётки $\mathcal{LEkV}$ является компактным элементом.

Предложение В решётке $\mathcal{LEkV}$ есть скачки; в частности, на вершине есть скачок.

Доказательство Рассмотрим любую компактную эквациональную k-строфу α. Объединение некоторой максимальной цепи строф, строго меньших α, опять будет строго меньше α. Поскольку в дизъюнктном объединении многообразий всегда выполняется некоторое нетривиальное тождество, то и на вершине решетки $\mathcal{LEkV}$ есть скачок:

$$\bigvee\{\alpha \in \mathrm{LEkV} : \alpha <_{\mathrm{k}} \mathbf{1}\} <_{\mathrm{k}} \mathbf{1}.$$

Предложение В решётке $\mathcal{LEkV}$ для любых $\alpha, \beta >_{\mathrm{k}} \mathbf{0}$ имеем: $\alpha \wedge \beta >_{\mathrm{k}} \mathbf{0}$.

Доказательство. В противном случае новая бинарная операция $\{\cdot\}$ из условия теоремы 1 должна быть проинтерпретирована либо как проекция, либо же некоторой константой, что невозможно.

В ([3]), в решётке $\mathcal{L}$ интерпретационный тип многообразия всех алгебр с одной константой обозначено через $\mathbb{C}$.

Предложение Для любого k существует гомоморфизм из интервала $[\mathbb{C}, 1]$ решётки $\mathcal{L}$ на решётку $\mathcal{LEkV}$.

Доказательство Для доказательства сопоставим каждому многообразию $\mathcal{V}$ его эквациональную k-строфу $[\mathcal{V}]_{\bowtie_k}$. Это отображение сюръективно и сохраняет решёточные операции.

Заметим также, что в решётке $\mathcal{LEkV}$ семейство всех таких многообразий $\mathcal{V}$, что мощность типа $\mathcal{V}$ меньше k, является «обобщенно» компактным в том смысле, что если супремум некоторого семейства накрывает $\mathcal{V}$, то существует подсемейство мощности меньше k, которое также накрывает $\mathcal{V}$. Кроме того, эти «обобщенно» компактные элементы сами образуют подрешётку.

В завершении рассмотрим некоторое обобщение почти-единодушных термов, введённых в [1]. Пусть A произвольная алгебра и $n > 2\mathrm{k} > 0$. Терм $t(x_0, \dots, x_{n-1})$ назовём k-*почти-единодушным* для A, если A удовлетворяет следующим тождествам:

$$\{x = t(\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)) \mid \forall\varphi \in \{x, y\}^n \ \&\ 0 \leq |\varphi^{-1}(y)| \leq \mathrm{k}\};$$

таким образом, не более k аргументных мест заполнены *y*-ами, а все остальные места заполнены *x*-ами. При $\mathrm{k} = 1$ получаем обычный почти единодушный терм. Терм t есть k-почти-единодушный терм для многообразия $\mathcal{V}$, если он является k-почти-единодушным для каждой алгебры из $\mathcal{V}$. Пусть $\mathcal{E}_{n,\mathrm{k}}$ обозначает многобразие всех алгебр с одной-единственной *n*-арной операцией t, удовлетворяющей указанным тождествам. Очевидно, каждый *n*-арный k-почти-единодушный терм является $(\mathrm{k}-1)$-почти-единодушным термом; в частности каждый k-почти-единодушный терм является почти-единодушным термом. Следовательно $\mathcal{E}_{n,\mathrm{k}}$ является конгруэнц-дистрибутивным многообразием. Например, для многообразия решёток 5-арный терм

$$t(x,y,z,t,u) := (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee t) \wedge (x \vee y \vee u) \wedge (x \vee z \vee t) \wedge (x \vee z \vee u) \wedge (x \vee t \vee u) \wedge (y \vee z \vee t) \wedge (y \vee z \vee u) \wedge (y \vee t \vee u) \wedge (z \vee t \vee u)$$

является 2-почти-единодушным и потому $\mathcal{E}_{5,2}$ интерпретируемо в многобразии всех решёток.

Точно также как в [6], теорема 1.2, можно показать, что мальцевское семейство (идемпотентных) многообразий, обладающих k-почти-единодушный термом, является *робастным*, т.е. если $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ однотипные идемпотентные многообразия, обладающие k-почти-единодушными термами арностей n и, соответственно, m, то $\mathrm{H}(\mathcal{V} \circ \mathcal{W})$ (многообразие, порождённое мальцевским произведением) также обладает k-почти-единодушный термом (арности nm; более того, так же, как в [5], теорема 2.2, (легко проверить, что) арности $n + m - 1$). Согласно [7], в решётке интерпретаций $\mathcal{L}$ фильтр многообразий, обладающих почти-единодушным термом, является пересечением двух больших фильтров. Нетрудно проверить этот результат для многообразий, обладающих k-почти-единодущным термом. Таким образом, многообразие $\mathcal{V}$ имеет *n*-арный k-почти-единодушный терм тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}_{n,\mathrm{k}} \leq \mathcal{V}$. Так же, как в [7] легко показать, что $\mathcal{E}_{n+1,\mathrm{k}} < \mathcal{E}_{n,\mathrm{k}}$, т.е. фильтр $\mathcal{E}_{\omega,\mathrm{k}}$ всех многообразий, обладающих k-почти-единодушными термами не является главным фильтром в $\mathcal{L}$. Более того, $\mathcal{E}_{\omega,\mathrm{k}}$ является разложимым фильтром в $\mathcal{L}$ (конечно, $\mathcal{E}_{\omega,\mathrm{k}}$ содержится в фильтре всех конгруэнц-дистрибутивных многообразий). Сформулируем эти факты в виде теоремы.

Теорема. Мальцевское семейство всех многообразий, обладающих k-почти-единодушным термом является робастным. Кроме того, фильтр $\mathcal{E}_{\omega,\mathrm{k}}$ всех многообразий, обладающих k-почти-единодушными термами является разложимым (в пересечение) фильтром в $\mathcal{L}$.

Список использованных источников:

1. Baker K.A., Pixley A.F. Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems// Math. Z., 1975, 143, p. 165-174.

2. Bergman C. Universal Algebra. London: CRC Press, 2012, xii+306p.

3. Garcia O.C., Taylor W. The lattice of interpretability types of varieties. Memoirs of the Amer. Math. Soc., No 305, Providence, R.I., 1984, vi+125p.

4. Mycielski J., Taylor W. Remarks and problems on a lattice of equational chapters// Algebra Univers., 1986, 23, p. 24-31.

5. Campanella M., Conley S., Valeriote M. Preserving near unanimity terms under products// Algebra Univers. 2016, 76, p. 293-300.

6. Freese R., McKenzie R. Maltsev families of varieties closed under join or Maltsev product // Algebra Univers. 2017, 77, p. 29-50.

7. Sequeira L. Near-unanimity is decomposable// Algebra Univers. 2003, 50, p. 157-164.