УДК 004.9

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СО МНОГИМИ СОСТОЯНИЯМИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

Рамаз Шамугия [1,2]

[1] Сухумский физико-технический институт им. И.Векуа
[2] Сухумский государственный университет

Аннотация

Целью настоящей работы является создание наиболее обобщенной по сравнению с известными в литературе, аналитической модели сложной технической обслуживающей системы, сотоящей из некоторого заранее определенного количества идентичных в надежностном понимании обслуживающих устройств, которые подвержены случайным отказам и восстановлениям, и в которую в случайные моменты времени поступают на обслуживание требования, времена обслуживания которых также являются случайными. Согласно намеченной цели, в предлагаемой работе разработана конкретная аналитическая модель многоканальной системы массового обслуживания с ненадежными обслуживаюшими устройствами, в которой потоки отказов обслуживающих устройств и потоки поступаюших трбований, подчинены пуассоновским, а потоки восстановлений отказавших устройст и потоки обслуживаний поступающих требований-экспоненциальным законам распределения вероятностей. Случайный процесс переходов системы при этом является Марковским процессом с непрерывным временем и дискретными состояниями. Получены соотношения связывающие основные параметры и выходные характеристики систем указанного типа.

Abstract

The work deals with the development of analytical model of multichannel technical queuing system with unreliable servers and input memory where server failure flows and incoming request flows comply with Poissonian laws, while the flows of failed facilities repairs and flows of incoming requests comply with exponential laws of probability distribution. Random process of system change-over is a Markovian process with continuous time and discrete states. Relations binding basic parameters and output characteristics of the system indicated are obtained as probabilities of system staying in the given moment in one of the possible states. The proposed model is the most generalized compared to some models known in literature which could be considered as special cases of the considered model.

Введение

Благодаря структурной, временной и функциональной избыточностям, сложные технологические системы обладают многими работоспособными состояниями. В отличие от систем обладающих лишь двумя возможными состояниями (работоспособными и неработоспособными), для таких систем (multi-state systems) практически невозможно определить общепринятое понятие отказа. Поэтому для систем со многими состояниями вместо надежности вводится понятие технической эффективности, оценка которого производится с помощю выбранных показателей эффективности, зависящих от случайнх факторов и учитывающих влияния их последствий на качество функционирования системы. Методологической основой существующих методов оценки и исследования эффективности функционирования сложных технологических систем со многими состояниями, служит концепция системного подхода. Эта концепция в данном случае проявляется в том, что показатель эффективности рассматривается как функционал от процесса функционирования системы.

В рамках указанного подхода, оценка эффективности функционирования сложных систем основывается на использовании модели процесса изменения работоспособности элементов системы. Ее сущность заключается в следующем: формально каждый элемент системы в любой момент времени может находиться в одном из возможных состояний, каждое из которых характеризуется определенным уровнем работоспособвности. Совокупность состояний элементов в произвольный момент времени однозначно определяет состояние системы. С течением времени, под влиянием внешних и внутренних случайных факторов, элементы системы переходят из одного состояния в другое. В результате происходит последовательная смена состояний системы в целом. Случайный многомерный процесс рассматривается как формализованный процесс изменения работоспособности элементов системы и описывает ее поведение во времени. Каждой реализации процесса соответствует определенная траектория в пространстве состояний системы.

Постановка задачи моделирования

Предлагаемая модель разработана с учетом следуюших предположений:

- переходы системы между различными состояниями осуществляются под совместным воздействием нескольких случайныч процессов-процессов поступления и обслуживания требований, а также процессов отказов и восстановлений обслуживающих устройств;
- техническая система массового обслуживания состоит из **n** одинаковых обслуживаюших устройств;
- обслуживаюшие устройства подвержены устойчивым отказам, которые подчинены пуассоновскому закону распределения верояатностей с параметром **α**;
- случайный процесс восстановления отказавших устройсв описывается экспоненциальным законом распределения вероятностей с параметром **μ;**
- в систему, на обслуживание поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью равной **λ**;
- обслуживание поступаюших требований происходит по экспоненциальному закону с параметром **β;**
- в системе предусмотрен входной накопитель для тех требований, которые поступают в течении промежутка времени, когда, все i исправные приборы заняты обслуживанием раннее поступивших заявок;
- длина очереди равна k- l, где k-общее количество требований находяшихся в системе в рассматриваемый момент времени, а l–количество обслуживаемых на данный момент времени требований ($l=\overline{0,i}$), где i - количество исправно работаюших к тому же моменту времени обслуживаюших приборов;

Для описания процесса функционирования системы во времени, введем специальные вероятностные функции $R_{i,n-i}^{l,k-l}(t)$ и $P_{i,n-i}^{l,k-l}(t)$ описываюшие процесс переходов системы в различные состояния, в зависимости от причин вызывающих эти переходы - отказы и восстановления обслуживающих устройств или поступление и обслуживание требований.

Введенные функции определяются следующим образом:

$R_{i,n-i}^{l,k-l}(t)$-вероятность события, при котором в момент времени t система будет находиться в состоянии с i исправными и n-i неисправными приборами, и при этом, общее количество требований находящихся в системе будет равно k, из которых количество находящихся на обслуживании требований будет равно l, а количество находящихся в очереди – (k-l). Данная вероятность описывает процесс изменения состояниий системы при фиксированных значениях верхних индексов, т.е. показателей поступления и обслуживания требований – l и (k-l).

$P_{i,n-i}^{l,k-l}(t)$ – вероятность события, при котором в момент времени t система будет находиться в состоянии с i исправными и n-i неисправными приборами, и при этом, общее количество требований находящихся в системе будет равно k, из которых количество находящихся на обслуживании требований будут равно l, а количество находящихся в очереди требований – (k-l). Данная вероятность описывает процесс изменения состояний системы при фиксированных значениях нижних индексов, т.е. надежностных показателей системы-отказов и восстановлений обслуживающих устройств l и n-i.

$H_{i,n-i}^{l,k-l}(t)$- вероятность события, при котором в момент времени t система будет находиться в состоянии с i исправными и n-i - неисправными приборами, и при этом, общее количество требований находящихся в системе будет равно k, из которых количество находящихся на обслуживании требований будут равно l , а количество находящихся в очереди требований–(k-l). Данная вероятность описывает процесс изменения состояний системы, при непрерывно меняющихся в процессе функционирования верхних и нижних индексах- i, l, k , n-i.

$$H_{i,n-i}^{l,k-l}(t) = R_{i,n-i}^{l,k-l}(t) * P_{i,n-i}^{l,k-l}(t); \quad k=\overline{0,\infty}, \quad n=\overline{0,\infty}, \quad i=\overline{0,n-1}, \quad l=\overline{0,k-1}$$

Рассматривая возможные изменения состояний системы в бесконечно малом интервале времени (t,t+Δt), на основе вероятностных рассуждений, записываются системы разностных уравнений, описывающих процесс функционирования системы во времени в предположении фиксированных значений, то верхних (i и n), то нижних (l и k) индексов соответствующих функций $R_{i,n-i}^{l,k-l}(t)$ и $P_{i,n-i}^{l,k-l}(t)$.

Из полученных уравнений путем преехода к пределу при $\Delta t \to 0$, получим реккурентные дифференциальные уравнения вида:

$$\frac{dR_{0,n}^{l,k-l}(t)}{dt} = a_{0,n}^{l,k-l} R_{0,n}^{l,k-l}(t) + a_{1,n-1}^{l,k-l} R_{1,n-1}^{l,k-l}(t) + Q_{0,n-1}^{l,k-l}(t); \text{ при } i=0; \tag{1}$$

$$\frac{dR_{i,n-i}^{l,k-l}(t)}{dt} = a_{i,n-i}^{l,k-l} R_{i,n-i}^{l,k-l}(t) + a_{i-1,n-(i-1)}^{l,k-l} R_{i-1,n-(i-1)}^{l,k-l}(t) + a_{i+1,n-(i+1)}^{l,k-l} R_{i+1,n-(i+1)}^{l,k-l}(t) + Q_{i,n-1}^{l,k-l}(t); \tag{2}$$

при $1 \le i \le n$

где $Q_{i,n-1}^{l,k-l}(t) = b_{i,n-i}^{l-1,k-(l-1)} P_{i,n-1}^{l-1,k-(l-1)} + b_{i,n-i}^{l+1,k-(l+1)} P_{i,n-1}^{l+1,k-(l+1)}(t);$ (3)

$$\frac{dP_{i,n-i}^{0,k}(t)}{dt} = b_{i,n-i}^{0,k} P_{i,n-i}^{0,k}(t) + b_{i,n-i}^{1,k-1} P_{i,n-1}^{1,k-1}(t), \text{ при } l=0; \tag{4}$$

$$\frac{dP_{i,n-i}^{l,k-l}(t)}{dt} = b_{i,n-i}^{l,k-l} P_{i,n-i}^{l,k-l}(t) + b_{i,n-i}^{l-1,k-(l-1)} P_{i,n-1}^{l-1,k-(l-1)}(t) + b_{i,n-i}^{l+1,k-(l+1)} P_{i,n-1}^{l+1,k-(l+1)}(t); \tag{5}$$

при $1 \le l \le k$

После несложных преобразований с использованием метода Лапласа-Стильтеса, уравнения (1) - (5) преобразуются в неоднородные системы алгебраических уравнений, которые довольно просто решаются с помошью формул Крамера относительно $R_{i,n-i}^{l,k-l}(s)$ и $P_{i,n-i}^{l,k-l}(s)$:

Ниже в качестве примереа приведено решение системы уравнений относительно $P_{i,n-i}^{l,k-l}(s)$ с помощью формул Крамера, которое имеет следующем вид:

$$P_{i,n-i}^{l,k-l}(s) = \Delta_{\delta}^{l,k-l}(s) / \Delta^{l,k-l}(s), \quad \text{при} \quad 1 \le i \le n, \text{ где} \tag{6}$$

$$\Delta^{l,k-l}(s) =$$

$$\begin{bmatrix} [s - b_{i,n-i}^{1,k-1}(s)] & b_{i,n-1}^{0,k-0}(s) \cdots & b_{i,n-i}^{2,k-2}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [s - b_{i,n-i}^{k-1,1}(s)] & b_{i,n-i}^{k-2,2}(s) \cdots & b_{i,n-i}^{k,0}(s) \end{bmatrix} \tag{7}$$

главный определитель соответствующей системы , а $\Delta^{l,k-l}_{\delta}$(s), определители получаемые подстановкой значений правой части (1/s) системы уравнений в δ – ый столбец матрицы. Здесь: δ=1-3 номера столбцов матрицы. Аналогичным образом записываются решения системы уравнений относительно $R^{l,k-l}_{i,n-i}$(s) .

С помощью найденных вероятностей состояний, можно определить различные показатели надежности и эффективности расмотренной системы.

Выводы

Результаты полученные в данной работе, представляют собой некоторое обобщение уже известных в литературе результатов. Они позволяют вычислять вероятности возможных состояний описанной выше системы, через которые монжо будет выразить другие важные показатели надежности и эффективности функционирования таких систем.

Результаты работы могут быть применены при анализе и синтезе таких сложных технических систем, какими являются системы передачи данных, системы сотовой связи, компьютерные и коммуникационные сети, гипкие производственные линии, автоматизированные системы управлени, а также другие сложные технические и технологические системы используемые как в гражданских, так и в военных целях. Они мгут быть использованы при оценке заданных, или обеспечении требуемых уровней надежности, производительности и эффективности функционирования сложных технических систем, как на этапе эксплуатации, так и на этапе проектирования.

Список использованных источников:

1.Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.

2.Барзилович Е.Ю., Беляаев Ю.К, Каштанов И.Н. и др. Вопросы математической теории надежности. М.: Радио и связь, 1983

3.Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. радио 1971.

4.Черкесов Г.Н. Надежность технических систем с временной избыточностью. М.: Сов радио, 1974.

5.Shamugia, R. (2014) On One Model of Multichannel Queuing System with Unreliable Repairable Servers and Input Memory. *Int'l J. of Communications, Network and System Sciences*, 7, 279-285. doi: 10.4236/ijcns.2014.78030.

6.Shamugia, R. (2014) On One Model of Complex Technical Queuing System with Unreliable Devices and with Time Redundancy. *Int'l J. of Communications, Network and System Sciences*, 7, 257-264. doi: 10.4236/ijcns.2014.78028.

7.Shamugia, R.R. (2015) On One Analytical Model of a Probability Estimation of Quality and Efficiencyof Functioning of Complex Technical Queuing Systems. *Int. J. Communications, Network and System Sciences*, **8**, 295-303. http://dx.doi.org/10.4236/ijcns.2015.88029