

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В КОНТЕКСТІ ЗДІЙСНЕННЯ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ У ВНЗ

*У статті проаналізовано концептуальні ідеї методу математичного моделювання у контексті здійснення міжпредметних зв'язків курсу вищої математики у вищій школі. Визначено, що з точки зору компетентнісного орієнтованого підходу до організації навчально-виховного процесу у технічних ВНЗ необхідно більше уваги приділяти міжпредметним зв'язкам курсу вищої математики із спеціальними дисциплінами та дисциплінами природничо-математичного циклу. Реалізувати міжпредметні зв'язки під час вивчення курсу вищої математики пропонується насамперед створенням запасу математичних моделей, які описують явища і процеси, що вивчаються в різних предметах. Основні аналітичні методи дослідження математичних моделей вивчаються у курсі вищої математики, зокрема у таких його розділах, як математичний аналіз, лінійна алгебра, диференціальні рівняння й теорія імовірності. Серед них можна назвати методи диференціювання, інтегрування й дослідження функцій, методи Гауса та Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, аналітичні методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь та їх систем тощо. Автором запропоновано приклади задач з вищої математики, які розв'язуються методом математичного моделювання, яке в свою чергу забезпечує міжпредметні зв'язки вищої математики із фізикою, хімією та економікою. Встановлено, що математичне моделювання в процесі навчання є важливим інструментом: формування нових знань і творчих здібностей студентів; ефективного засвоєння нового матеріалу, систематизації та наочного втілення знань; усвідомлення і фіксації істотних властивостей і зв'язків досліджуваних об'єктів і явищ; формування професійних умінь; розвитку самостійної діяльності студентів.*

**Ключові слова:** вища математика, математичне моделювання, модель, міжпредметні зв'язки, майбутній інженер, прикладні завдання.

**Постановка проблеми.** Сьогодні складно знайти таку галузь людської діяльності, в якій в тій чи іншій мірі не використовувались знання курсу вищої математики. Без залучення точних математичних знань в процесі професійної діяльності неможливо розраховувати на одержання потрібної високотехнологічної та конкурентоспроможної «продукції» [2]. Саме тому, в процесі вивчення курсу вищої математики у технічних ВНЗ

необхідно більше уваги приділяти міжпредметним зв'язкам курсу із спеціальними дисциплінами та дисциплінами природничо-математичного циклу. На жаль, сьогодні система вищої освіти потребує узгодженості між фундаментальними та спеціальними дисциплінами, тому питання використання математичного моделювання, як одного із засобів, що забезпечує встановлення інтеграційних зв'язків є актуальною.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій** засвідчує, що проблемою міжпредметних зв'язків та їх реалізацією у навчальному процесі в технічних ВНЗ займається багато дослідників. Розвиток поняття міжпредметних зв'язків було закладено на початку 20 століття Я. Каменським та К. Ушинським. Основні дослідження з даного напрямку припадають на 70-80-ті роки. Активними дослідниками даного питання були О. Усова, В. Федорова, Д. Кірюшкін, Г. Вергелес, І. Зверев, Н. Лошкарьова та ін. У трактуванні поняття «міжпредметні зв'язки» існує два основних підходи: як дидактична умова, та як змістова частина (потреба, умова, прояв) принципу систематичності. Слід зазначити, що проблемі реалізації міжпредметних зв'язків в технічних ВНЗ присвячено дослідження Г. Дутки, Т.Крилової, Л. Романишиної, З. Слєпкань та ін. Проблема моделювання як вивчення різноманітних явищ і процесів знайшла своє відображення в працях А.Кочергіна, В.Венікова, М.Вартофського, І.Домашенка, О.Зинов'єва, В.Штоффа та ін.

**Мета статті** – розглянути здійснення міжпредметних зв'язків курсу вищої математики у ВНЗ засобом математичного моделювання.

**Викладення основного матеріалу дослідження.** На сьогоднішній день особливого поширення та попиту набули математичні моделі та стандарти, що дозволяють спроектувати будь-який об'єкт дослідження.

М. Ярмаченко [1, с. 323] вважає, що метод моделювання лежить в основі будь-якого методу наукового дослідження – як теоретичного, при якому використовуються різноманітні знакові, абстрактні моделі, так і

експериментального, де використовуються предметні моделі. Метод моделювання є інтегративним, він дозволяє об'єднати теоретичне і емпіричне в дослідженні, дозволяє досліджувати об'єкти у взаємозв'язку і проектувати логічні конструкції, що відображають явище в розвитку [6, 48].

Отже, можна стверджувати, що математичне моделювання забезпечує достовірність обробки отриманих результатів, а результатом моделювання є модель, що описує досліджуваний нами процес.

Л. Пустовіт «модель», як термін іншомовного походження, трактує як «зразок, примірник чого-небудь, схема для пояснення якогось явища або процесу» [4, 433]; як штучно створений об'єкт у вигляді схеми, фізичних конструкцій, знакових форм або формул, який відображає і відтворює в найпростішому вигляді структуру, властивості, взаємозв'язки і відношення між елементами цього об'єкта [4]. Як зазначає В. Ягупов [6, . 227], наукова категорія «модель» має еталонне значення, яке «визначає цілі, основи організації та проведення навчального процесу». У свою чергу, В. Штофф під моделлю розуміє подумки подану або матеріально реалізовану систему, яка, відображаючи або відтворюючи об'єкт дослідження, здатна заміщати його так, що її вивчення дає нам нову інформацію про об'єкт [5]. Якщо об'єкт дослідження є не надто складним, достатньо вивченим, а його властивості й характеристики можна виявити на основі теоретичних уявлень і наявних у літературі даних, доцільно як метод дослідження обрати побудову математичної моделі. У цьому разі процеси функціонування елементів системи подають як певні функціональні співвідношення (алгебраїчні, диференціальні, скінченно-різницеві тощо) або за допомогою логічних мов. Під математичною моделлю реальної системи (процесу) розуміють сукупність співвідношень (формул, рівнянь, нерівностей, логічних умов, операторів тощо), які

визначають характеристики станів системи залежно від її параметрів, зовнішніх умов (вхідних сигналів, впливів), початкових умов та часу [3].

Загалом за визначенням В. Глушкова математична модель – це множина символічних математичних об'єктів і співвідношень між ними. За М. Амосовим, математична модель – це система, що відображає іншу систему [3, 15].

Математичні моделі можна досліджувати такими методами:

а) аналітичними, що дають змогу отримати у загальному вигляді явні залежності для досліджуваних характеристик;

б) чисельними, що дають можливість одержати числові значення шуканих параметрів при конкретних початкових і межових умовах;

в) якісними, за допомогою яких можна визначити певні властивості розв'язку (стійкість, монотонність, характер змінювання, асимптотика тощо) без отримання його в явному вигляді;

г) аналоговими, що дають змогу вивчати властивості досліджуваної системи за допомогою певного реального об'єкта, наприклад електричної схеми, яку можна подавати за допомогою тієї самої математичної моделі.

Основні аналітичні методи дослідження математичних моделей вивчаються у курсі вищої математики, зокрема у таких його розділах, як математичний аналіз, лінійна алгебра, диференціальні рівняння й теорія імовірності. Серед них можна назвати методи диференціювання, інтегрування й дослідження функцій, методи Гауса та Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, аналітичні методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь та їх систем тощо.

Отже, реалізувати міжпредметні зв'язки під час вивчення курсу вищої математики означає насамперед створити запас математичних моделей, які описують явища і процеси, що вивчаються в різних предметах. Такими моделями є основні поняття математики: величина, число, функція, фігура, рівняння, похідна, інтеграл, диференціальне

рівняння, ймовірність тощо. Наприклад, похідна – це математична модель різних фізичних, хімічних, біологічних понять: швидкості прямолінійного нерівномірного руху, швидкості реакції в хімії, електрорушійної сили, індукції як швидкості зміни магнітного потоку, швидкості розмноження бактерій та ін. До математичних моделей прикладних задач можна віднести такі важливі математичні задачі: знайти розв'язок алгебраїчного рівняння, знайти найбільше і найменше значення функції, знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє деякій початковій умові, знайти закон розподілу деяких випадкових величин.

Видатний математик 20 століття Л.Д.Кудрявцев вказує, що «навчання умінню складати математичні моделі реальних явищ є однією з першочергових задач в процесі освіти спеціалістів відповідного профілю, а тому цій задачі має надаватися набагато більше часу й уваги, ніж це часто робиться» [3, 10].

Розглянемо приклади задач з вищої математики, які розв'язуються методом математичного моделювання, яке в свою чергу забезпечує міжпредметні зв'язки.

**Фізика і вища математика.** Математичне моделювання, як елемент навчальної технології, реалізується у змісті курсу фізики, в унаочненні фізичних теорій, законів, у взаємозв'язках між параметрами фізичних теорій. На предметному рівні математичне моделювання виступає методом або засобом дослідження фізичного процесу. На дидактичному рівні математичне моделювання є складовою цілісної педагогічної технології як загальнонауковий метод дослідження.

Міжпредметні зв'язки фізики і вищої математики прослідковуються в процесі розв'язування фізичних задач, де створюється спочатку фізична модель задачі, яка інтерпретується в математичну, досліджуючи яку формулюють висновки і отримують результати вже на мові фізики.

Так, вивчаючи тему «Розв’язування систем лінійних рівнянь» ми показуємо зв’язок з електротехнікою, де для визначення необхідної кількості певних елементів, пов’язаних кількісним співвідношенням, використовується табличний метод, який полягає в знаходженні коефіцієнтів для кожного елемента.

*Завдання 1.* Нехай дана таблиця 1 кількісних співвідношень:

Таблиця 1

Кількісні співвідношення для категорій блоків

Блок I	$2x_1$	$4x_2$	$3x_3$	19
Блок II	$3x_1$	$4x_2$	$x_3$	14
Блок III	$2x_1$	$x_2$	$5x_3$	19
	R	C	VD	ШТ

Необхідно знайти кількість елементів для кожного блоку.

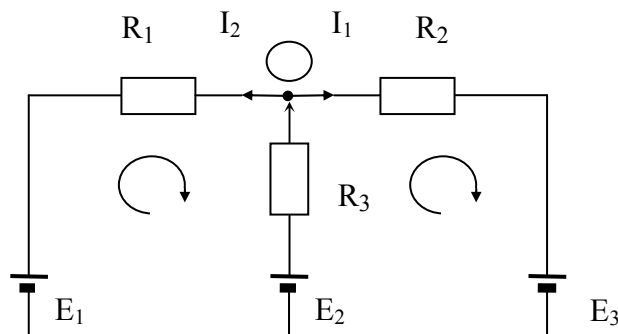
Для розв’язку поставленої задачі група складає відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 19, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 19. \end{cases}$$

Як бачимо, систему можна розв’язати трьома способами: методом Крамера, методом Гауса, матричним методом.

Оскільки розв’язання системи рівнянь використовується також і для розрахунку складних електричних схем методом правил Кірхгофа, то друге завдання може мати вигляд:

*Завдання 2.* Дано електричну схему



Дано:  $E_1 = 2\text{В}$ ,  $R_1 = 4\text{ Ом}$ ;  $E_2 = 4\text{В}$ ,  $R_2 = 6\text{ Ом}$ ;  $E_3 = 6\text{В}$ ,  $R_3 = 8\text{ Ом}$ .

Знайти:  $I_1$  - ?,  $I_2$  - ?,  $I_3$  - ?

Для розв'язання задачі потрібно: 1) визначити кількість вузлів  $N$  і скласти  $(N - 1)$  рівнянь на перше правило; 2) у вузлі обрати напрям струму і напрям обходу.

У результаті отримують систему:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ E_1 - R_1 \cdot I_2 - R_2 \cdot I_3 = 0, \\ I_1 \cdot R_3 - E_3 + E_2 + R_2 \cdot I_3 = 0. \end{cases}$$

**Завдання 3.** Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і повітря ( $T_{пов} = 20^\circ$ ). Відомо, що протягом 20 хвилин тіло охоллоло від  $100^\circ$  до  $60^\circ$ . Знайти закон зміни температури тіла від часу.

**Розв'язування:**  $T(t)$  - ?, за умовою задачі маємо математичну модель фізичної задачі:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - 20^\circ), \quad \text{де } K - \text{коефіцієнт пропорційності.}$$

$$\int \frac{dT}{T - 20^\circ} = \int K dt; \ln|T - 20^\circ| = Kt + \ln|C|; \frac{T - 20^\circ}{C} = e^{Kt} \Rightarrow T - 20^\circ = C e^{Kt};$$

$$T = C e^{Kt} + 20^\circ;$$

$$K = ?, C = ?; T = 100^\circ \text{ коли } t = 0, T = 60^\circ \text{ коли } t = 20^\circ$$

$$\begin{cases} 100^\circ = 20^\circ + C; \\ 60^\circ = 20^\circ + C e^{20K}. \end{cases} \quad C = 80^\circ; e^{20K} = \frac{1}{2}; e^K = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

$$\text{Отже: } T = 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}t} + 20.$$

Таким чином, практична спрямованість дозволяє виробити систему знань, розвиває здібності до їх переносу в інші галузі, сприяє формуванню цілісного світогляду студента.

**Хімія і вища математика.** Математика для хіміків – це, в першу чергу, корисний інструмент розв'язання багатьох хімічних задач. Дуже важко знайти будь-якої розділ математики, який зовсім не

використовується в хімії. Функціональний аналіз і теорія груп широко застосовуються в квантовій хімії, теорія ймовірностей становить основу статистичної термодинаміки, теорія графів використовується в органічній хімії для передбачення властивостей складних органічних молекул, диференціальні рівняння – основний інструмент хімічної кінетики, методи топології і диференціальної геометрії застосовуються в хімічній термодинаміці. Вираз «математична хімія» міцно увійшов в лексику хіміків. Багато статей в серйозних хімічних журналах не містять жодної хімічної формули, зате рясніють математичними рівняннями.

*Завдання 1.* Для прикладу наводять завдання виду: в резервуар, який містить 10 кг солі на 100 л. суміші, кожну хвилину додається 30 л. води і витікає 20 л. суміші. Знайти яка кількість солі залишиться в резервуарі через  $t$  хвилин, якщо суміш миттєво змішується.

*Розв'язування:* нехай  $x$  – кількість солі в резервуарі в момент часу  $t$ , а  $(x + dx)$  – в  $(t + dt)$ . Оскільки суміш витікає, то кількість солі  $x$  зменшуватиметься з часом  $\Rightarrow dx < 0$  при  $dt > 0$ . Об'єм суміші в резервуарі:  $V = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t$ , тому концентрація солі в час  $t$  буде  $\frac{x}{100 + 10t}$  – зміна кількості солі –  $dx$  за нескінченно малий проміжок  $[t; t + dt]$ . Ми отримаємо, якщо об'єм суміші, що витікала за цей час  $20dt$ , помножимо на концентрацію солі:  $\frac{x}{100 + 10t} \cdot 20dt = -dx$  – математичну модель задачі.

$$\frac{x}{100 + 10t} \cdot 20dt = -dx \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2}{10 + t} dt; \ln|x| = -2 \ln|10 + t| + \ln|C|;$$

$$x = \frac{C}{(10 + t)^2}; t = 0; 10 = \frac{C}{100}; C = 1000; x = \frac{1000}{(10 + t)^2}.$$

Цей вираз дає можливість знайти час, який пройшов від початку процесу утворення суміші. За цим принципом обчислюється вік морів та океанів.



**Економіка і вища математика.** Опрацювавши довідкову літературу, підручники, ми познайомилися із задачами, які зустрічаються в економіці.

Серед них найбільш характерні: 1) визначення оптимізації ставки податку; 2) визначення попиту і пропозиції; 3) визначення ефективності реклами.

Попит і пропозиція – економічні категорії товарного виробництва. Попит представлений на ринку потребою в товарах, пропозиція – продукт, який є на ринку чи може бути доставлений на нього.

Нехай  $p(t)$  – ціна, наприклад, на фрукти,  $\frac{dp}{dt}$  – тенденція формування ціни. Тоді, як попит так і пропозиція будуть функціями введених величин. Як показує практика, ці функції можуть бути різними. Часто попит  $q$  і пропозиція  $S$  задаються лінійними залежностями, наприклад

$$q = 4p' - 2p + 39, S = 44p' + 2p - 1$$

залежностями. Для того, щоб попит відповідав пропозиції необхідно ( $q = S$ ), а тому  $4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1$ .

Звідки

$$40p' + 4p - 40 = 0,$$

$$4dp = -4(p - 10),$$

$$\frac{10dp}{p - 10} = -dt, p = ce^{-\frac{1}{10}t} + 10.$$

Припустимо, що в момент  $t = 0$  1кг фруктів коштував  $p(0) = 1$  грн. Тоді

$1 = c - 10$ ,  $c = -9$ . Отже,  $p = -9e^{-\frac{1}{10}t} + 10$ . Це закон зміни ціни, щоб між попитом і пропозицією була рівновага.

Використання диференціальних рівнянь в економіці допомагає виділити і описати за допомогою формул найбільш важливі зв'язки між економічними змінними та об'єктами.

Отже, формування вмінь математичного моделювання через цикли прикладних задач може відбуватись у процесі навчання не тільки вищої математики, а й кожного з природничо-математичних предметів. Це сприяє міжпредметному узагальненню набутих студентами знань і вмінь, формуванню в них уявлень про універсальний характер математичних методів дослідження, зокрема методу математичного моделювання, можливості їхнього ефективного застосовуються для вивчення різних за своєю природою об'єктів, явищ і процесів. Зв'язки між елементами знань і умінь з різних навчальних предметів сприяють формуванню всебічно розвиненої творчої особистості, яка озброєна системними знаннями, загальнонауковими вміннями та навичками і вміє здійснювати міжпредметне перенесення знань и умінь у разі розв'язування нових пізнавальних задач. Міжпредметні зв'язки мають вирішальне значення під час розв'язування проблеми інтеграції і координації навчання.

**Висновки.** Налагодження тісних міжпредметних зв'язків між математичними та базовими дисциплінами сприяє, в першу чергу, поліпшенню фундаментальної підготовки фахівців, яка значною мірою визначає кваліфікаційний рівень спеціаліста і його здатність самовдосконалюватися.

Таким чином, дієві міжпредметні зв'язки у вищих технічних навчальних закладах в навчанні є конкретним проявом інтеграційних процесів, які відіграють важливу роль у підвищенні практичної та науково-теоретичної підготовки студентів.

В свою чергу, математичне моделювання в процесі навчання є важливим інструментом: 1) формування нових знань і творчих здібностей студентів; 2) ефективного засвоєння нового матеріалу, систематизації та наочного втілення знань; 3) усвідомлення і фіксації істотних властивостей і зв'язків досліджуваних об'єктів і явищ; 4) формування професійних умінь; 5) розвитку самостійної діяльності студентів.

**Перспективи подальших досліджень** вбачаємо у створенні єдиного інтегрованого курсу математики для майбутніх інженерів.

### **Література:**

1. Педагогічний словник / [ ред . М. Д. Ярмаченко]. – К. : Пед. Думка, 2001. – 363 с.
2. Самарский А. А. Методологические основы моделирования социальных процессов : пределы возможного [Электронный ресурс] / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – Режим доступа : <http://lib.socio.msu.ru/l/library>.
3. Семенова І.Ю. Математичні моделі МСС : навчальний посібник / І.Ю.Семенова. – К. : Київський нац.ун-т ім.Т.Г.Шевченка, 2014. – 82с.
4. Словник іншомовних слів: 23000 слів та термінологічних словосполучень/ Л.О. Пустовіт(уклад.). – К. : Довіра, 2000. – 1017с.
5. Хом'юк В. В. Структурна модель формування математичної компетентності майбутніх інженерів / В. В. Хом'юк // Науковий вісник Кременецької обласної гуманітарно-педагогічної академії ім. Тараса Шевченка. Серія: Педагогіка // За заг. ред. Ломаковича А.М., Бенери В.Є. – Кременець : ВЦ КОГПА ім. Тараса Шевченка, 2015. – Вип. 5. – С.160–168.
6. Ягупов В. В. Педагогіка : навчальний посібник / В. В. Ягупов. – К. : Либідь, 2003. – 560с.

**И.В. Хомюк, В.В.Хомюк. Математическое моделирование в контексте осуществления межпредметных связей курса высшей математики в вузах.**

*В статье проанализированы концептуальные идеи метода математического моделирования в контексте осуществления межпредметных связей курса высшей математики в высшей школе. Определено, что с точки зрения компетентностного ориентированного подхода к организации учебно-воспитательного процесса в технических вузах необходимо больше внимания уделять межпредметным связям курса высшей математики со специальными дисциплинами и дисциплинами естественно-математического цикла. Реализовать межпредметные связи при изучении курса высшей математики предлагается, прежде всего, созданием запаса математических моделей, описывающих явления и процессы, изучаемые в различных предметах. Основные аналитические методы исследования математических моделей изучаются в курсе высшей математики, в частности, в таких его разделах, как математический анализ, линейная алгебра, дифференциальные уравнения и теория вероятности. Среди них можно назвать методы дифференцирования, интегрирования и исследования функций, методы Гаусса и Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений, аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем и тому подобное. Автором предложено примеры задач по высшей математике, которые решаются методом математического моделирования, которое в свою очередь обеспечивает межпредметные связи высшей математики с физикой, химией и экономикой. Установлено, что математическое моделирование в процессе обучения является важным инструментом: формирования новых знаний и творческих способностей студентов; эффективного усвоения нового материала, систематизации и наглядного*

воплощения знаний; осознания и фиксации существенных свойств и связей изучаемых объектов и явлений, формирования профессиональных умений, развития самостоятельной деятельности студентов.

*Ключевые слова:* высшая математика, математическое моделирование, модель, межпредметные связи, будущий инженер, прикладные задачи.

#### **I.V. Khomyuk, V.V. Khomyuk. Mathematical modeling in the context of the implementation of inter-subject relationships in the higher mathematics course in higher education**

*The article analyzes the conceptual ideas of the method of mathematical modeling in the context of the implementation of interdisciplinary connections of the higher mathematics course in higher education. It is determined that from the point of view of the competence-oriented approach to the organization of the educational process in technical universities it is necessary to pay more attention to the interdisciplinary connections of the course of higher mathematics with special disciplines and disciplines of the natural-mathematical cycle. The implementation of interdisciplinary connections during the study of higher mathematics is proposed primarily by creating a stock of mathematical models that describe the phenomena and processes studied in various subjects. The main analytical methods for studying mathematical models were studied in the course of higher mathematics, in particular in such sections as mathematical analysis, linear algebra, differential equations, and probability theory. Among them are the methods of differentiation, integration and study of functions, methods of Gauss and Kramer solving systems of linear algebraic equations, analytical methods of solving and qualitative methods for the analysis of ordinary differential equations and their systems, etc. The author proposes examples of higher mathematical problems, which are solved by the method of mathematical modeling, which in turn provides interdisciplinary connections of higher mathematics with physics, chemistry and economics. It is established that mathematical modeling in the process of learning is an important tool: formation of new knowledge and creative abilities of students; effective assimilation of new material, systematization and visualization of knowledge, awareness and fixing of the essential properties and connections of investigated objects and phenomena, the formation of professional skills, the development of independent student activity.*

*Key words:* higher mathematics, mathematical modeling, model, interdisciplinary connections, future engineer, applied tasks.

