УДК 62-97/-98

Ярослав Іванчук

МАТЕМАТИЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ СТІЙКОСТІ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНЬОГО ВІБРАЦІЙНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Актуальність теми дослідження. *Застосування вібраційної технології вимагає поглибленого вивчення фізичних явищ, які виникають у різних коливальних системах з метою визначення оптимальних параметрів вібраційного обладнання для підвищення ефективності технологічних процесів.*

Постановка проблеми. *Дія вібрації в нелінійних механічних системах призводить до появи фізичних явищ, які можуть мати, як корисний, так і небезпечний характер. Необхідність пояснення і математичного опису ряду своєрідних фізичних явищ, пов'язаних із дією вібрацій на механічні системи, дозволяє розробляти перспективні математичні методи розрахунку складних коливальних систем.*

Аналіз останніх досліджень і публікацій. *У більшості праць на базі розроблених окремих математичних моделей було розглянуто вплив вібрацій на механічні системи, які дозволили теоретично дослідити процес синхронізації і області стійкості коливальних систем.*

Виділення недосліджених раніше частин загальної проблеми. *У наукових працях відсутній єдиний універсальний математичний метод, який дозволяє теоретично досліджувати коливальні системи на умову стійкості і рівноваги.*

Постановка завдання. *Метою статті є розробка універсального математичного методу для визначення умови стійкості і положень рівноваги коливальних систем під дією зовнішнього вібраційного навантаження.*

Виклад основного матеріалу. *За інтегральною умовою Пуанкаре-Ляпунова на базі диференціальних рівнянь руху і відомих критеріїв оптимальності квазіконсервативних систем були визначені положення квазірівноваги коливальних систем.*

Висновки відповідно до статті. *Для коливальної системи у вигляді фізичного маятника з вібруючою віссю, математично описано фізичне явище «відведення», що характеризується зміщенням елементів коливальної системи від аналогічних положень рівноваги без накладання зовнішніх вібрацій. Досліджено ефект самосинхронізації для коливальної системи, що представлена у вигляді незрівноважених роторів на вібруючій основі.*

Ключові слова: *вібрації; коливальна система; стійкість; екстремум; рівновага; оптимальність; синхронізація.*

Рис.: 2. Бібл. 12.

Актуальність теми дослідження. Вібраційна техніка і технологія, яка представлена у вигляді коливальних систем, з кожним роком розширює область свого застосування і займає усе більш міцні позиції в різних галузях промисловості, будівництва, транспорту і сільського господарства [1]. Застосування вібраційної техніки дозволяє корінним чином удосконалити традиційні технологічні процеси [2]. Зростаючі вимоги до ефективності вібраційної техніки вимагають поглибленого вивчення фізичних закономірностей впливу вібрації на хід технологічних процесів і подальшого розвитку питань вібраційної технології.

Постановка проблеми. Незважаючи на те, що фізичні коливальні системи нелінійні, ряд задач теоретичного дослідження коливань механічних систем може бути успішно розглянуто в лінійній постановці, тобто без урахування нелінійних факторів [2]. Дія вібрації в нелінійних механічних системах призводить до своєрідних, часто несподіваним явищам [1]. Ці явища, з однієї сторони, можуть бути використані в технології і лежать в основі принципів дії ряду високоефективних машин; з другого боку, ті ж явища можуть бути причиною небажаних і небезпечних ситуацій [1]. Вимоги розвитку і вдосконалення вібраційної техніки вимагає необхідність пояснення і математичного опису ряду своєрідних фізичних явищ, зв'язаних із дією вібрацій на механічні системи, що представлені у вигляді коливальних систем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У статті [3] для вивчення характеристик синхронізації коливальної системи застосовано метод усереднення малих параметрів, який дозволив отримати рівняння балансу та критерій стійкості системи.

У роботі [4] на базі диференціальних рівнянь руху механічної системи сформульована узагальнена задача вібраційної нелінійної механіки в розв'язку неврівноважених твердих тіл. Розглянуто окремий випадки: ефект Зоммерфельда, явище стійкості верхнього положення маятника на вібруючій основі, ефект «застрягання» маятників на резонансних частотах, явища автоматичного балансування роторів.

Виділення недосліджених частин загальної проблеми. Окремою частиною у теорії вібраційних процесів і машин [5] є теоретичне дослідження явищ, що виникають при дії вібрації у нелінійних коливальних системах. До даних явищ відносяться зникнення колишніх і поява нових положень рівноваги і видів руху коливальної системи, зміна характеру положень рівноваги (тобто їх стійкості або нестійкості) [4, 5]. Також можна ще відмітити явище вібраційного зв’язку, зокрема, самосинхронізацію неврівноважених роторів [3, 5].

Постановка завдання. Метою статті є розробка математичного методу теоретичного дослідження поведінки коливальних систем, які представлені у вигляді фізичного маятника і незрівноважених роторів для виявлення умови стійкості і рівноваги даних механічних систем.

Виклад основного матеріалу. Для з’ясування ефекту впливу на коливальні системи і механізми під дією вібраційного навантаження, розглянемо поведінку фізичного маятника з віссю, вібруючої в двох взаємоперпендикулярних напрямках по гармонійному закону із деякою частотою ω (рис. 1). Нехай вісь підвісу маятника здійснює коливання по закону:

$$x(t) = H\sin(\omega t), \quad y(t) = G\cos(\omega t + \theta), \tag{1}$$

де G і H – амплітуди коливань відповідно у вертикальному і горизонтальному напрямках, θ – зсув фаз коливання.

Тоді рух фізичного маятника описується диференційним рівнянням:

$$I\ddot{\varphi} + \eta\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi + ml\omega^2\Big[H\cos(\varphi)\sin(\omega t) - G\sin\big(\varphi\big)\cos(\omega t + \theta)\Big] = 0, \tag{2}$$

де φ – кут відхилення маятника від нижнього вертикального положення; I – момент інерції фізичного маятника; m – маса фізичного маятника; l – відстань від центра мас фізичного маятника; g – прискорення вільного падіння; η – коефіцієнт в’язкого опору.

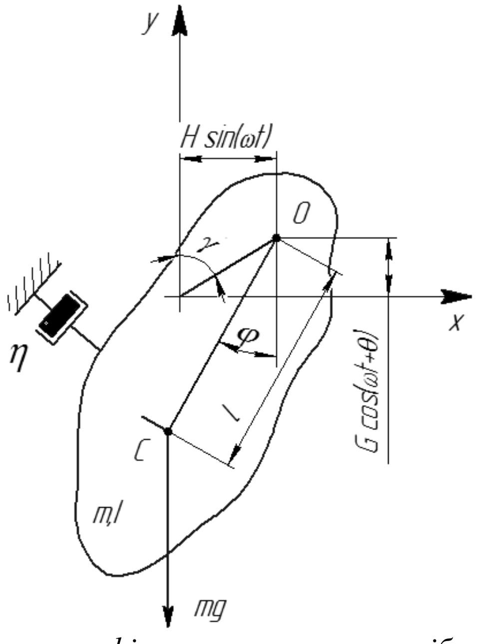

Рис. 1. Розрахункова схема фізичного маятника з вібруючою віссю обертання

Розв’яжемо дану задачу методом Пуанкаре-Ляпунова [5, 6]. Складемо вираз для кінетичної і потенціальної енергії системи:

$$E_K = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2), \quad E_{\Pi} = mgy_C, \tag{3}$$

де $x_C = x - l\sin\varphi,\ \ y_C = y - l\cos\varphi$ – координати центра ваги маятника C, I – момент інерції відносно центра ваги, а координати вісі підвісу $x(t)$ і $y(t)$ визначаються формулами (1). Із рівнянь (3) визначаємо Лагранжіан [6, 7]:

$$L = E_K - E_\Pi = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2l\dot{\varphi}(\dot{x}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi)\right] - mg\left(y - l\cos\varphi\right), \qquad (4)$$

де $I = I_0 + ml^2$ - момент інерції маятника відносно вісі підвісу.

По умові Пуанкаре-Ляпунова [6–8] стійким у першому наближенні рухам будуть відповідати екстремальні точки функції L. Тоді нам необхідно знайти таку функцію, щоб $L(\dot{\varphi}^*) = \min\limits_{\dot{\varphi}\in\Gamma} L(\dot{\varphi})$, де $\Gamma = \varnothing$ і $\Gamma \in R^n$. Для цього знаходимо:

$$\frac{\partial L(\dot{\varphi})}{\partial\dot{\varphi}} = I\dot{\varphi} - lm(\dot{x}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi) = 0, \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \left(lm(\dot{x}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi)\right)/I\ .$$

Тоді

$$\min_{\dot{\varphi}\in\Gamma} L(\dot{\varphi}) = -\frac{m^2l^2(\dot{x}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi)^2}{2I} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy + mgl\cos\varphi. \qquad (5)$$

Рівняння (1) підставляємо у функцію (5):

$$\begin{aligned}\min_{\dot{\varphi}\in\Gamma} L(\dot{\varphi}) = &-\frac{m^2l^2}{2I}(H\omega\cos\left(\omega t\right)\cos\varphi + G\omega\sin(\omega t + \theta)\sin\varphi)^2 + \\ &+\frac{m}{2}\left(H^2\omega^2\cos^2\left(\omega t\right) + G^2\omega^2\sin^2(\omega t + \theta)\right) - mgy + mgl\cos\varphi.\end{aligned} \qquad (6)$$

Згідно інтегральної ознаки стійкості Пуанкаре-Ляпунова [6, 9] для системи слабо зв'язаних квазіконсервативних об'єктів, якщо функція $\Lambda(\dot{\varphi})$, що представляє собою середнє значення Лагранжіана $\min\limits_{\dot{\varphi}\in\Gamma} L(\dot{\varphi})$ має в точці $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_1^0, ..., \dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}_n^0$ мінімум чи максимум, тоді така точка визначає стійке по першому наближенню періодичний розв'язок, інші стаціонарні точки функції $\Lambda(\dot{\varphi})$ вимагають спеціального розгляду.

Тоді із рівняння (6):

$$\begin{aligned}\Lambda\left(\dot{\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\min_{\dot{\varphi}\in\Gamma} L(\dot{\varphi})dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Bigg[&-\frac{m^2l^2}{2I}(H\omega\cos\left(\omega t\right)\cos\varphi + G\omega\sin(\omega t + \theta)\sin\varphi)^2 + \\ &+\frac{m}{2}\left(H^2\omega^2\cos^2\left(\omega t\right) + G^2\omega^2\sin^2(\omega t + \theta)\right) - mgy + mgl\cos\varphi\Bigg]dt\ .\end{aligned}$$

Враховуючи, що:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\omega t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t)dt = 0; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right)dt = 0,\ \text{а}$$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(\omega t)dt = \frac{1}{2}$ тоді отримуємо:

$$\begin{aligned}\Lambda\left(\dot{\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\min_{\dot{\varphi}\in\Gamma} L(\dot{\varphi})dt = \frac{m^2l^2\omega^2}{8I}\left[\left(G^2 - H^2\right)\cos 2\varphi + 2HG\sin 2\varphi\sin\theta\right] + \\ +mgl\cos\varphi + C,\end{aligned}$$

де $C = m\omega^2\left(G^2 + H^2\right)\left[\frac{1}{4} - \frac{ml^2}{8I}\right] - mgy$ – деяка стала, що не залежить від кута φ і яка не суттєва для подальшого дослідження.

Приймемо наступні позначення: γ – кут зовнішніх амплітуд коливання вісі обертання фізичного маятника, $\frac{G}{\sqrt{G^2+H^2}} = \cos\gamma$, $\frac{H}{\sqrt{G^2+H^2}} = \sin\gamma$, $V_0 = -\frac{(ml\omega)^2}{4I}(G^2 + H^2)$.

Узагальнюючи вище наведені енергетичні залежності, можна ввести потенціальну функцію:

$$D = \Lambda\left(\dot{\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \min_{\dot{\varphi}\in\Gamma} L(\dot{\varphi})dt = -\frac{1}{2}V_0\left[\cos 2\varphi\cos 2\gamma + \sin 2\varphi\sin 2\gamma\sin\theta\right] - mgl\cos\varphi, \qquad (7)$$

По оптимальній ознаці стійкості, запропонованій Т. Г. Стрижаком [6, 10], для систем із динамічним збудженням якщо в деякій точці $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_1^0, ..., \dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}_n^0$ функція $D = \Lambda\left(\dot{\varphi}\right)$ має грубий мінімум, тоді цій точці при достатньо малих значеннях $\dot{\varphi}_1$ відповідає стійка квазірівновага системи. Тоді із рівняння (7) при $\theta = \frac{1}{2}\pi$:

$$\left.\frac{\partial D}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi^*} = \left.\frac{\partial\left(-\frac{1}{2}V_0\left[\cos\left(\varphi-\gamma\right)\right] - mgl\cos\varphi\right)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi^*} = \qquad (8)$$

$$= -\frac{1}{2}V_0\sin\left(2\left(\varphi-\gamma\right)\right) + mgl\sin\varphi = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 D}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi^*} = \left.\frac{\partial^2\left(-\frac{1}{2}V_0\left[\cos\left(\varphi-\gamma\right)\right] - mgl\cos\varphi\right)}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi^*} = \qquad (9)$$

$$= \frac{1}{2}V_0\cos\left(2\left(\varphi-\gamma\right)\right) + mgl\cos\varphi > 0.$$

Для початку давайте розглянемо випадок коли прискорення вільного падіння g настільки мала в порівнянні із прискоренням вібрації $A\omega^2$, що нею можна знехтувати. Положення квазірівноваги із рівняння (8):

$$\sin 2(\varphi^* - \gamma) = 0, \qquad (10)$$

а умова стійкості із рівняння (9):

$$\cos 2(\varphi^* - \gamma) > 0. \qquad (11)$$

Таким чином із рівняння (10) ми отримали два положення рівноваги:

$$\varphi_1^* = \gamma, \quad \varphi_2^* = \gamma + \pi. \qquad (12)$$

Із рівняння (11) отримуємо умову рівноваги для кутів φ^*:

$$\varphi^* > \gamma \pm \frac{\pi}{2}.$$

Якщо вібрація вісі обертання фізичного маятника буде рівна нулю (*ω=0*), при вільному коливанні (*g≠0*), тоді положення рівноваги буде також рівно нулю $\varphi_0^* = 0$.

Звідси випливає, що дія вібрації зводиться до того, що маятник як би притягується до положень $\varphi_1^* = \gamma$, $\varphi_2^* = \gamma + \pi$. Явище притягання до вказаних положень називається «відведення» (зміщення від правильного положення) елементів коливальної системи.

Також відомо, що під дією вібраційного навантаження на коливальні системи, які представляють собою два або більше кінематично і електрично не зв'язаних між собою роторів, встановлених на загальній рухомій платформі і приводяться в рух від незалежних асинхронних двигунів, виникає ефект самосинхронізації. Даний ефект полягає в синхронному обертанні, тобто з однаковими або кратними середнім кутовим швидкостям і з визначеними взаємними фазами. Розглянемо самосинхронізацію двох номінально однакових дебалансних віброзбуджувачів на вібруючій платформі масою M із однією степеню вільності (рис. 2) при умові, що $m_1e_1\omega^2=m_2e_2\omega^2=me\omega^2$. Дебалансні віброзбуджувачі складаються із збуджуючих роторів масою m_1, m_2 і з ексцентриситетом e_1, e_2 з фазою обертання φ_1 і φ_2 відповідно. Рухома платформа зв'язана із нерухомою основою пружним елементом жорсткістю c_x.

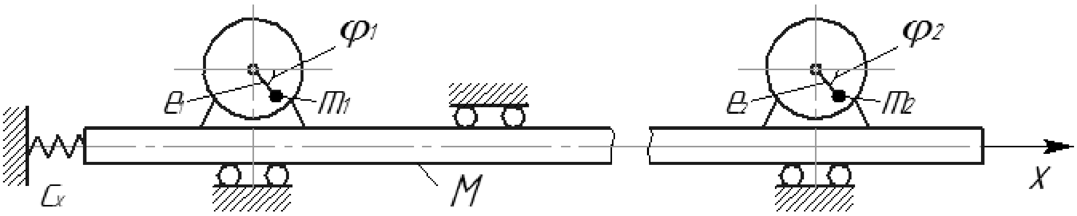

Рис. 2. Розрахункова схема коливальної системи із дебалансними механічними віброзбуджувачами

Рівняння коливання платформи при обертанні неврівноважених роторів описується рівнянням:

$$M\ddot{x} + c_x\dot{x} = m\varepsilon\omega^2\left[\cos(\omega t + \alpha_1) + \cos(\omega t + \alpha_2)\right]. \tag{13}$$

Розв'язок даного рівняння, відповідає встановленим вимушеним коливанням платформи і має вид [11, 12]:

$$x = -\left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)\left(\frac{m\varepsilon}{M}\right)\left[\cos(\omega t + \alpha_1) + \cos(\omega t + \alpha_2)\right], \tag{14}$$

де $\omega^2{}_0=c_x/M$ – частота власних коливань рухомої платформи.

Розв'яжемо дану задачу також методом Пуанкаре-Ляпунова [6, 10]. Складемо вираз для кінетичної і потенціальної енергії системи:

$$E_K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2, \quad E_\Pi = \frac{1}{2}c_x x^2. \tag{15}$$

Із рівнянь (14) і (15) визначаємо Лагранжіан:

$$L = E_K - E_\Pi = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}c_x x^2. \tag{16}$$

По умові Пуанкаре-Ляпунова [6] стійким у першому наближенні рухам будуть відповідати екстремальні точки функції L. Тоді нам необхідно знайти таку функцію, щоб $L(\dot{x}^*) = \min\limits_{\dot{\varphi}\in\Gamma} L(\dot{x})$, де $\Gamma = \varnothing$ і $\Gamma \in R^n$. Для цього знаходимо:

$$\frac{\partial L(\dot{x})}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} = 0\,,$$

звідки визначаємо $\dot{x} = 0$.

Тоді із рівняння (14) і (16):

$$\min_{\dot{\varphi}\in\Gamma} L(\dot{x}) = -\frac{1}{2}c_x x^2 = -\frac{\omega^4\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}\frac{(m\varepsilon)^2}{2M}\left[\cos(\omega t+\alpha_1)+\cos(\omega t+\alpha_2)\right]^2. \tag{17}$$

Згідно інтегральної ознаки стійкості Пуанкаре-Ляпунова [6, 10, 12] для системи слабо зв'язаних квазіконсервативних об'єктів, якщо функція $\Lambda(\dot{\varphi})$, що представляє собою середнє значення лагранжіана $\min\limits_{\dot{\varphi}\in\Gamma} L(\dot{x})$ має в точці $\dot{x}_1 = \dot{x}_1^0, ..., \dot{x}_n = \dot{x}_n^0$ мінімум чи максимум, тоді така точка визначає стійке по першому наближенню періодичний розв'язок, інші стаціонарні точки функції $\Lambda(\dot{x})$ вимагають спеціального розгляду.

Тоді із рівняння (6):

$$\Lambda\left(\dot{x}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\min_{\dot{\varphi}\in\Gamma} L(\dot{x})dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\omega^4\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}\frac{(m\varepsilon)^2}{2M}\left[\cos(\omega t+\alpha_1)+\cos(\omega t+\alpha_2)\right]^2\right]dt\,.$$

Враховуючи, що: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos(\omega t+\alpha_1)\cos(\omega t+\alpha_2)\right)dt = \cos(\alpha_1-\alpha_2)$;

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(\omega t)dt = \frac{1}{2}$ отримуємо:

$$\Lambda\left(\dot{x}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\min_{\dot{\varphi}\in\Gamma} L(\dot{x})dt = -\frac{\omega^4\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}\frac{(m\varepsilon)^2}{M}\left[\cos(\alpha_1-\alpha_2)\right] + C\,,$$

де $C = -\frac{\omega^4\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}\frac{(m\varepsilon)^2}{2M}$ – деяка стала, що не залежить від координати x і яка не суттєва для подальшого дослідження.

Узагальнюючи вище наведені енергетичні залежності, можна ввести потенціальну функцію:

$$D = \Lambda\left(\dot{x}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\min_{\dot{\varphi}\in\Gamma} L(\dot{x})dt = -\frac{\omega^4\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}\frac{(m\varepsilon)^2}{M}\left[\cos(\alpha_1-\alpha_2)\right]. \tag{18}$$

По оптимальній ознаці стійкості, запропонованій Т. Г. Стрижаком [6, 10], для систем із динамічним збудженням якщо в деякій точці $\dot{x}_1 = \dot{x}_1^0, ..., \dot{x}_n = \dot{x}_n^0$ функція $D = \Lambda\left(\dot{x}\right)$ має грубий мінімум, тоді цій точці при достатньо малих значеннях $\dot{x}_1$ відповідає стійка квазірівновага системи. Тоді із рівняння (18):

$$\left.\frac{\partial D}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha^*}=\left.\frac{\partial\left(-\frac{\omega^4\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}\frac{\left(m\varepsilon\right)^2}{M}\left[\cos(\alpha_1-\alpha_2)\right]\right)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha^*}= \tag{19}$$

$$=\frac{\omega^4\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}\frac{\left(m\varepsilon\right)^2}{M}\left[\sin(\alpha_1-\alpha_2)\right]=0.$$

Розв'язок рівняння (19) допускає два суттєво різні розв'язки:

$$\alpha_1-\alpha_2=\pi,\quad \alpha_1-\alpha_2=0 \tag{20}$$

Обертання роторів, яке відповідає першому розв'язку, назвемо синфазним, а другому – протифазним. Для першого розв'язку потенційна функція $D=\Lambda\left(\dot{x}\right)$ згідно виразу (18), має мінімум при $\omega<\omega_0$, при $\omega>\omega_0$ мінімум цієї функції відповідає другому розв'язку. Таким чином, із інтегрального критерію стійкості випливає, що до резонансу стійке синфазне обертання роторів, а після резонансу – протифазне.

Висновки.

1. Для коливальної системи у вигляді фізичного маятника з вібруючою віссю, за допомогою інтегральної ознаки стійкості Пуанкаре-Ляпунова, математично описано фізичне явище «відведення», що характеризується зміщенням елементів коливальної системи від аналогічних положень рівноваги без накладанння зовнішніх вібрацій.

2. За допомогою інтегральної ознаки стійкості Пуанкаре-Ляпунова досліджено ефект самосинхронізації для коливальної системи, що представлена у вигляді незрівноважених роторів на вібруючій основі.

Список використаних джерел

1. *Іскович–Лотоцький Р. Д.* Вібраційні та віброударні пристрої для розвантаження транспортних засобів : монографія / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук. – Вінниця : Вінниця, 2012. – 155 с.

2. *Іскович–Лотоцький Р. Д.* Технологія моделювання оцінки параметрів формоутворення заготовок з порошкових матеріалів на вібропресовому обладнанні з гідроімпульсним приводом : монографія / Р. Д. Іскович-Лотоцький, О. В. Зелінська, Я. В. Іванчук. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 152 с.

3. Hou, YJ., Du, MJ., Fang, P., Zhang, LP. (2017). Synchronization and stability of an elastically coupled tri-rotor vibration system. *Journal of theoretical and applied mechanics*. 55(1). 227-240. DOI: 10.15632/jtam-pl.55.1.227.

4. *Артюнин А. И.* Возможности обобщения задач динамических взаимодействий в неуравновешенных вращениях твердых тел / А. И. Артюнин, С. В. Елисеев // Решетневские чтения. Механика специальных систем. – СибГАУ, 2014. – С. 269 – 271.

5. *Іскович–Лотоцький Р. Д.* Дослідження динаміки процесу роботи універсального гідравлічного віброударного приводу для розвантаження транспортних засобів / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямом «Інженерна механіка») – Луцьк, 2007. – № 20. – С. 184 – 187.

6. *Блехман И. И.* Вибрационная механика. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с.

7. *Іскович–Лотоцький Р. Д.* Застосування гібридного моделювання при розробці установок для утилізації відходів / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Д. В. Тесовський, Я. П. Веселовський // Технологічні комплекси. Науковий журнал – Луцьк, 2012. – № 1,2 (5, 6). – С. 122 – 126.

8. *Іскович–Лотоцький Р. Д.* Основи резонансно–структурної теорії віброударного розвантаження транспортних засобів / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський // Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна. – Д., 2014. – №5(53) – С.109 – 118. DOI: 10.15802/stp2014/30458.

9. Iskovych–Lototsky, R. D., Zelinska, O. V., Ivanchuk, Y. V., Veselovska, N. R. (2017) Development of the evaluation model of technological parameters of shaping workpieces from powder materials. *Eastern–European Journal of Enterprise Technologies. Engineering technological systems*. 1(85). 9–17. DOI: 10.15587/1729-4061.2017.59418.

10. *Искович–Лотоцкий Р. Д.* Установка для утилизации отходов / Р. Д. Искович–Лотоцкий, В. И. Повстенюк, О. М. Данилюк, Я. В. Иванчук // Международный промышленный журнал «Мир техники и технологий» – Харьков, 2007. – №12(73). – С. 36–37.

11. *Іскович–Лотоцький Р. Д.* Оптимізація конструктивних параметрів інерційного віброспрес–молота / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський // Вісник машинобудування та транспорту. – 2016. – №2. – С. 43 – 50.

12. *Іскович–Лотоцький Р. Д.* Моделювання робочих процесів гідроімпульсного привода з однокаскадним клапаном пульсатором / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський // Вібрації в техніці та технологіях. – Вінниця, 2017. – № 3(86). – С. 10–19.

References

1. Iskovych–Lototskyi, R.D., Ivanchuk, Ya.V. (2012). *Vibratsiini ta vibroudarni prystroi dlia rozvantazhennia transportnykh zasobiv [Vibrating and vibro-impact devices for unloading vehicles]*. Monohrafiia. Vinnytsia [in Ukrainian].

2. Iskovych–Lototskyi, R.D., Zelinska O.V., Ivanchuk, Ya.V. (2018). *Tekhnolohiia modeliuvannia otsinky parametriv formoutvorennia zahotovok z poroshkovykh materialiv na vibropresovomu obladnanni z hidroimpulsnym pryvodom [Technology for modeling the evaluation of the parameters of the shaping of blanks from powder materials on vibration press equipment with a hydroimpulse drive]*. Monohrafiia. Vinnytsia [in Ukrainian].

3. Hou, YJ., Du, MJ., Fang, P., Zhang, LP. (2017). Synchronization and stability of an elastically coupled tri-rotor vibration system. *Journal of theoretical and applied mechanics*. 55(1). 227-240. DOI: 10.15632/jtam-pl.55.1.227.

4. Artjunin, A. I., Eliseev, S. V. (2014). Vozmozhnosti obobshhenija zadach dinamicheskih vzaimodejstvij v neuravnoveshennyh vrashhenijah tverdyh tel [Possibilities of generalizing the problems of dynamic interactions in the unbalanced rotations of solids]. *Reshetnevskie chtenija. Mehanika special'nih sistem.* SibGAU. 269 – 271 [in Russian].

5. Iskovych–Lototskyi, R. D., Ivanchuk, Ya. V. (2007). Doslidzhennia dynamiky protsesu roboty universalnoho hidravlichnoho vibroudranoho pryvodu dlia rozvantazhennia transportnykh zasobiv [Investigation of the dynamics operation on universal hydraulic vibro-hydraulic drive for unloading vehicles]. *Naukovi notatky. Mizhvuzivskyi zbirnyk (za napriamom «Inzhenerna mekhanika»)*, 20, 184 – 187 [in Ukrainian].

6. Blehman, I. I. (1994). *Vibracionnaja mehanika [Vibration mechanics].* Moscow: Fizmatlit [in Russian].

7. Iskovych–Lototskyi, R. D., Ivanchuk, Ya. V., Tesovskyi, D. V., Veselovskyi, Ya. P. (2012). Zastosuvannia hibrydnoho modeliuvannia pry rozrobtsi ustanovok dlia utylizatsii vidkhodiv [Application of hybrid modeling in the development of facilities for waste management]. *Tekhnolohichni kompleksy. Naukovyi zhurnal*, 1,2(5, 6), 122 – 126 [in Ukrainian].

8. Iskovych–Lototskyi, R. D., Ivanchuk, Ya. V., Veselovskyi, Ya. P. (2014). Osnovy rezonansno–strukturnoi teorii vibroudarnoho rozvantazhennia transportnykh zasobiv [Fundamentals of the resonance-structural theory of vibration-free unloading of vehicles]. *Nauka ta prohres transportu. Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu im. akademika V. Lazariana,* 5(53), 109–118. DOI: 10.15802/stp2014/30458 [in Ukrainian].

9. Iskovych–Lototsky, R. D., Zelinska, O. V., Ivanchuk, Ya. V., Veselovska, N. R. (2017). Development of the evaluation model of technological parameters of shaping workpieces from powder materials. *Eastern–European Journal of Enterprise Technologies. Engineering technological systems*. 1(85). 9–17. DOI: 10.15587/1729-4061.2017.59418.

10. Iskovich–Lotockij R. D., Povstenjuk, V. I., Daniljuk, O. M., Ivanchuk, Ya. V. (2007). Ustanovka dlja utilizacii othodov [Waste Recycling Plant]. *Mezhdunarodnyj promyshlennyj zhurnal «Mir tehniki i tehnologij»*, 12(73), 36–37 [in Russian].

11. Iskovych–Lototsky, R. D., Ivanchuk, Ya. V., Veselovskyi, Ya. P. (2016). Optymizatsiia konstruktyvnykh parametriv inertsiinoho vibropres–molota [Optimization of design data inertial vibro-hammer]. *Visnyk mashynobuduvannia ta transport*, 2, 43 – 50 [in Ukrainian].

12. Iskovych–Lototsky, R. D., Ivanchuk, Ya. V., Veselovskyi, Ya. P. (2017). Modeliuvannia robochykh protsesiv hidroimpulsnoho pryvoda z odnokaskadnym klapanom pulsatorom [Modeling of the working processes of a hydropulse drive with a single-stage valve pulsator]. *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh*, 3(86), 10–19 [in Ukrainian].

UDC 62-97/-98

Yaroslav Ivanchuk

MATHEMATICAL METHOD FOR DETERMINING STABILITY OSCILLATORY SYSTEMS UNDER THE INFLUENCE OF EXTERNAL VIBRATIONS

Urgency of the research. *The use of vibration technology requires in-depth study of the physical phenomena that occur in a variety of oscillatory systems. In order to determine the optimal parameters of vibrating equipment has increase the efficiency of processes.*

Target setting. *The action of vibration in nonlinear mechanical systems leads to the appearance of physical phenomena that have both useful and negative properties. The necessity of explanation and mathematical description of a number of unique physical phenomena associated with the action of vibrations on mechanical systems makes it possible to develop promising mathematical methods for calculating complex oscillatory systems.*

Actual scientific researches and issues analysis. *In most of the works, on the basis of the developed separate mathematical models, the influence of vibrations on mechanical systems was considered. These models made it possible to theoretically study the synchronization process and the stability region of vibrational systems.*

Uninvestigated parts of general matters defining. *In scientific works there is no single universal mathematical method that allows to theoretically study oscillatory systems on the condition of stability and equilibrium.*

The research objective. *The aim of the article is to develop a universal mathematical method for determining the stability conditions and equilibrium positions of vibrational systems under the action of external vibration.*

The statement of basic materials. *For an integral condition of the Poincare-Lyapunov, on the basis of differential equations of motion and known optimality criteria quasiconservative systems position quasistability oscillatory systems have been identified.*

Conclusions. *For oscillating system as a physical pendulum on the axis of the vibrating mathematically described physical phenomenon "retraction". This phenomenon is characterized by a shift element of the oscillating system similar equilibrium positions without imposing external vibrations. We investigated the effect of self-synchronization to the oscillating system, which is represented in the form of unbalanced rotors at a vibrating manner.*

Keywords: *vibration; oscillating system; sustainability; extremum; equilibrium; optimality; synchronization.*

Fig.: 2. References: 12.

УДК 62-97/-98

Ярослав Иванчук

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНИХ ВИБРАЦИЙ

Актуальность темы исследования. *Применение вибрационной технологии требует углубленного изучения физических явлений, которые возникают в различных колебательных системах с целью определения оптимальных параметров вибрационного оборудования для повышения эффективности технологических процессов.*

Постановка проблемы. *Действие вибрации в нелинейных механических системах приводит к появлению физических явлений, которые могут иметь, как полезный, так и опасный характер. Необходимость объяснения и математического описания ряда своеобразных физических явлений, связанных с действием вибраций на механические системы, позволяет разрабатывать перспективные математические методы расчета сложных колебательных систем.*

Анализ последних исследований и публикаций. *В большинстве работ на базе разработанных отдельных математических моделей было рассмотрено влияние вибраций на механические системы, которые позволили теоретически исследовать процесс синхронизации и области устойчивости колебательных систем.*

Выделение неисследованных раннее частей общей проблемы. *В научных трудах отсутствует единый универсальный математический метод, который позволяет теоретически исследовать колебательные системы на условие устойчивости и равновесия.*

Постановка задачи. *Целью статьи является разработка универсального математического метода для определения условия устойчивости и положений равновесия колебательных систем под действием внешних вибраций.*

Изложение основного материала. *За интегральным условием Пуанкаре-Ляпунова, на базе дифференциальных уравнений движения и известных критериев оптимальности квазиконсервативних систем, были определены положения квазиустойчивости колебательных систем.*

Выводы соответствии со статьей. *Для колебательной системы в виде физического маятника с вибрирующей осью, математически описано физическое явление «увода», характеризующийся смещением элементов колебательной системы от аналогичных положений равновесия без наложения внешних вибраций. Исследован эффект самосинхронизации для колебательной системы, которая представлена в виде неуравновешенных роторов на вибрирующем основании.*

Ключевые слова: *вибрации; колебательная система; устойчивость; экстремум; равновесие; оптимальность; синхронизация.*

Рис.: 2. Библ. 12.

Іванчук Ярослав Володимирович – кандидат технічних наук, доцент, кафедра галузевого машинобудування, Вінницький національний технічний університет (вул. Хмельницьке шосе 95, м. Вінниця, Україна, 21021).
Иванчук Ярослав Владимирович – кандидат технических наук, доцент, кафедра отраслевого машиностроения, Винницкий национальный технический университет (ул. Хмельницкое шоссе 95, г. Винница, Украина, 21021).
Yaroslav Ivanchuk – Ph. D. of Technical Sciences, Associate professor, Industrial engineering department, Vinnytsia National Technical University (95 Khmelnytske shose, Vinnytsia, Ukraine, 21021).
E-mail: ivanchuck@ukr.net
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4775-6505
ResearcherID: J-2797-2018
Scopus Author ID: 57170734800