УДК 512.534.5

В. Д. Дереч (Вінниц. нац. техн. ун-т)

КЛАСИФІКАЦІЯ СКІНЧЕННИХ КОМУТАТИВНИХ НАПІВГРУП, ДЛЯ ЯКИХ ІНВЕРСНИЙ МОНОЇД ЛОКАЛЬНИХ АВТОМОРФІЗМІВ Є ПЕРЕСТАВНИМ

We give a classification of finite commutative semigroups for which the inverse monoid of local automorphisms is permutable.

Дана классификация конечных коммутативных полугрупп, для которых инверсный моноид локальных автоморфизмов является переставным.

Локальним автоморфізмом напівгрупи S називають ізоморфізм між двома її піднапівгрупами. Множина усіх локальних автоморфізмів напівгрупи S відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд локальних автоморфізмів. Цей моноїд позначатимемо через $PA(S)$. У більшості статей, що стосуються напівгрупи $PA(S)$, розглядається проблема опису таких напівгруп B, що $PA(B) \cong PA(S)$ для даної напівгрупи S. Важливою також є проблема знаходження взаємозв'язків між властивостями напівгрупи S і властивостями інверсної напівгрупи $PA(S)$. Зокрема, у статті [1] (крім іншого) знайдено структуру групи G, для якої інверсний моноїд $PA(G)$ є кліфордовим. У роботі [2] дано опис інверсних напівгруп S, для яких інверсний моноїд усіх локальних автоморфізмів між інверсними піднапівгрупами напівгрупи S є цілком напівпростим або фундаментальним.

Відомо [3], що інверсна напівгрупа локальних автоморфізмів скінченновимірного лінійного простору є переставною (тобто будь-які дві її конгруенції комутують відносно композиції). Аналогічне твердження має місце і для інверсної напівгрупи локальних автоморфізмів скінченної напівгрупи лівих нулів (яка, зрозуміло, ізоморфна скінченній симетричній інверсній напівгрупі). Після цього цілком природно виникає задача знаходження структури таких напівгруп, інверсні моноїди локальних автоморфізмів яких є переставними. У статті [4] цю задачу розв'язано для скінченної в'язки, а також скінченної комутативної інверсної напівгрупи. У пропонованій роботі ми класифікуємо скінченні комутативні напівгрупи, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. Результати даної статті можна вважати продовженням і розвитком (для скінченного випадку) результатів, одержаних у [4]. Основним результатом статті є теорема з п. 2.

1. Основні означення і термінологія. Напіврешітка E називається напіврешіткою скінченної довжини, якщо існує натуральне число n таке, що довжина будь-якого ланцюжка з E не перевищує число n.

Нехай S — довільна напівгрупа, а $\mathbb{N}_0$ — множина всіх невід'ємних цілих чисел. Функцію $\operatorname{rank}\colon S \to \mathbb{N}_0$ називають ранговою на напівгрупі S, якщо для будь-яких $a, b \in S$ виконується нерівність $\operatorname{rank}(ab) \leq \min(\operatorname{rank}(a), \operatorname{rank}(b))$. Число $\operatorname{rank}(x)$ називають рангом елемента x.

Нехай S — інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Функція $\operatorname{rank}(a) = h(aa^{-1})$, де $h(aa^{-1})$ — висота ідемпотента aa^{-1} у напіврешітці ідемпотентів напівгрупи S, є ранговою функцією (див. [5]). Скажемо, що інверсна напівгрупа є напівгрупою скінченного рангу, якщо напіврешітка її ідемпотентів має скінченну довжину.

Нехай S — довільна напівгрупа. Решітку всіх її піднапівгруп будемо позначати через $\mathrm{Sub}(S)$. Якщо напівгрупа S містить найменшу непорожню піднапівгрупу (наприклад, одинична підгрупа в групі), то найменшим елементом $\mathrm{Sub}(S)$ вважатимемо саме цю піднапівгрупу. Якщо ж найменшої непорожньої піднапівгрупі в S не існує, то найменшим елементом $\mathrm{Sub}(S)$ будемо вважати порожню множину $\varnothing$. Легко зрозуміти, що решітка ідемпотентів інверсної напівгрупи $PA(S)$ ізоморфна решітці $\mathrm{Sub}(S)$.

Якщо $\varphi \in PA(S)$, то через $\mathrm{dom}(\varphi)$ і $\mathrm{im}(\varphi)$ будемо позначати відповідно область визначення і множину значень локального автоморфізму φ. Якщо $A \in \mathrm{Sub}(S)$, то через Δ_A будемо позначати відношення рівності на піднапівгрупі A.

Нехай P — впорядкована множина з найменшим елементом 0. Через $\prec$ будемо позначати відношення покриття. Якщо $0 \prec a$, то елемент a називають атомом впорядкованої множини P. Якщо E — нетривіальна напіврешітка скінченної довжини, то, очевидно, вона містить атоми.

Нетривіальну напіврешітку називають примітивною, якщо кожний її ненульовий елемент є атомом.

Напіврешітку називають ланцюгом, якщо вона лінійно впорядкована відносно канонічного порядку.

Напівгрупа називається переставною, якщо будь-які дві її конгруенції комутують відносно звичайної операції композиції бінарних відношень.

Якщо S — інверсна напівгрупа, то через $E(S)$ позначають напіврешітку всіх ідемпотентів напівгрупи S.

Абелева група G називається елементарною абелевою p-групою (p — просте число), якщо будь-який її відмінний від одиниці елемент має порядок p.

Напівгрупа S з нулем називається нільпотентною, якщо для будь-якого елемента $x \in S$ існує натуральне число n таке, що $x^n = 0$.

Напівгрупу S називають архімедовою, якщо для довільних елементів $a, b \in S$ існують натуральні числа m і k такі, що $a^m \in SbS$ і $b^k \in SaS$.

Всі інші необхідні поняття з теорії напівгруп можна знайти в [6].

Зауважимо, що всі напівгрупи, що розглядаються в цій статті, є скінченними. Тому під терміном „напівгрупа” ми розуміємо „скінченна напівгрупа”.

2. Нільпотентна напівгрупа з переставним інверсним моноїдом локальних автоморфізмів. Насамперед сформулюємо кілька тверджень, які нам знадобляться у подальших викладках.

Твердження 1 (див. [3], теорема 2). *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем. Тоді S є переставною в тому і лише в тому випадку, коли виконуються такі дві умови*:

1) *якщо для будь-яких $a, b \in S$ $\mathrm{rank}(a) = \mathrm{rank}(b)$, то $SaS = SbS$*;

2) *для будь-якого $e \in E(S)(\mathrm{rank}(e) \geq 2)$ існують ідемпотенти f і g такі, що $f \neq g$, $f < e$, $g < e$ і $\mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(g) = \mathrm{rank}(e) - 1$.*

Зауваження (див. [3], теорема 1). Якщо ранг довільного елемента нетривіальної інверсної напівгрупи S з нулем не перевищує 1, то напівгрупа S переставна тоді і лише тоді, коли вона є напівгрупою Брандта.

Твердження 2 (див. [4], теорема 1)**.** *Нехай S — скінченна напівгрупа. Ідеали напівгрупи $PA(S)$ лінійно впорядковані тоді і тільки тоді, коли в решітці $\mathrm{Sub}(S)$ неізоморфні піднапівгрупи мають різні висоти.*

Оскільки скінченна комутативна напівгрупа є напіврешіткою архімедових напівгруп (див. [7]), то природно наші дослідження розпочати саме з архімедових напівгруп.

Лема 1. *Нехай S — комутативна архімедова напівгрупа, для якої інверсний моноїд $PA(S)$ є переставним. Тоді S є або нільпотентною напівгрупою, або групою.*

Доведення. Відомо (див. [8]), що скінченна комутативна архимідова напівгрупа є або нільпотентною напівгрупою, або ідеальним розширенням нетривіальної групи за допомогою нільпотентної напівгрупи. Припустимо, що напівгрупа S відмінна від групи і є ідеальним розширенням нетривіальної групи G за допомогою нільпотентної напівгрупи. Згідно з твердженням 1 напівгрупа S містить піднапівгрупу A таку, що $h(A) = h(G)$ і $A \neq G$. Оскільки $h(A) = h(G)$, то згідно з твердженням 2 $A \cong G$. Тобто A — група. Позаяк напівгрупа S містить лише один ідемпотент, то одиниця групи G є разом з тим одиницею групи A. Позначимо ідемпотент напівгрупи S через e. Оскільки $A \neq G$ і $A \nsubseteq G$, то існує елемент $a \in A$ такий, що $a \notin G$. Оскільки $e \in G$ і G — ідеал напівгрупи S, то $ae \in G$. Позаяк ідемпотент e є одиницею групи G, то $a \in G$. Суперечність. Таким чином, напівгрупа S є або групою, або нільпотентною напівгрупою.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай S — комутативна напівгрупа, для якої інверсний моноїд $PA(S)$ є переставним. Тоді S є або групою, або напіврешіткою, або нільпотентною напівгрупою.*

Доведення. Визначимо на S бінарне відношення η таким чином: $(a, b) \in \eta$ тоді і лише тоді, коли кожен з елементів a і b ділить деякий степінь іншого. Відомо (див. [7]), що бінарне відношення η є конгруенцією, до того ж фактор-напівгрупа S/η є напіврешіткою, а кожний клас конгруенції η — архімедовою напівгрупою. Припустимо, що $|S/\eta| \geq 2$. Покажемо, що в цьому випадку напівгрупа S є напіврешіткою, тобто кожний клас конгруенції η одноелементний. Припустимо, що існує клас A конгруенції η такий, що $|A| \geq 2$. Оскільки напівгрупа A є скінченною архімедовою напівгрупою, то згідно з класифікацією архімедових напівгруп (див. [8]) вона є або нільпотентною напівгрупою, або ідеальним розширенням нетривіальної групи за допомогою нільпотентної напівгрупи. Припустимо, що A – нільпотентна напівгрупа. Оскільки $|A| \geq 2$, то існує елемент $a \in A$ (який не є ідемпотентом) такий, що $a^2 = f$, де f— єдиний ідемпотент з класу A. Зрозуміло, що ідемпотенти напівгрупи S утворюють напіврешітку, яку ми позначимо через $E(S)$.

Проаналізуємо можливі випадки.

Випадок 1. Ідемпотент f є найменшим у напіврешітці $E(S)$.

Нехай b — ідемпотент, відмінний від f (такий існує, бо $|S/\eta| \geq 2$). Розглянемо дві піднапівгрупи: $C = \{a, f\}$ і $B = \{b, f\}$. Піднапівгрупа C є нільпотентною, а піднапівгрупа B — напіврешіткою. Оскільки $h(C) = h(B)$, то згідно з твердженням 2 $C \cong B$. Суперечність.

Випадок 2. Ідемпотент f не є найменшим у напіврешітці $E(S)$.

Позначимо через e найменший ідемпотент напіврешітки $E(S)$. Очевидно, що піднапівгрупа $\{f, e\}$ є напіврешіткою, а піднапівгрупа $\{a, f\}$ — нільпотентною напівгрупою. Оскільки $h(\{f, e\}) = h(\{f, a\})$, то згідно з твердженням 2 $\{f, e\} \cong \{f, a\}$. Суперечність.

Припустимо тепер, що A є ідеальним розширенням нетривіальної групи G за допомогою нільпотентної напівгрупи.

Розглянемо можливі випадки.

Випадок A. Ідемпотент $f \in A$ є найменшим у напіврешітці $E(S)$.

Зрозуміло, що група G містить просту нетривіальну підгрупу H. Далі, нехай b — ідемпотент, відмінний від f. Піднапівгрупа $B = \{b, f\}$ є напіврешіткою. Оскільки $h(H) = h(B) = 2$, то згідно з твердженням 2 $H \cong B$. Суперечність.

Випадок B. Ідемпотент $f \in A$ не є найменшим у напіврешітці $E(S)$.

Нехай e — найменший ідемпотент в $E(S)$. Позаяк $h(\{e, f\}) = h(H) = 2$, то згідно з твердженням 2 $H \cong \{e, f\}$. Суперечність.

Таким чином, припущення, що деякий клас конгруенції η не є одноелементним, призводить нас до суперечності. Отже, S — напіврешітка.

Якщо ж $|S/\eta| = 1$, то напівгрупа S є архімедовою, а отже, згідно з лемою 1 або нільпотентною напівгрупою, або групою.

Лему 2 доведено.

У статті [4] показано, що клас скінченних комутативних груп, для яких інверсний моноїд $PA(S)$ є переставним, збігається з класом елементарних абелевих p-груп. У цій статті також доведено, що ланцюгами і примітивними напіврешітками вичерпується клас напіврешіток, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. Отже, з огляду на лему 2 нам залишається розглянути скінченні нільпотентні напівгрупи.

Доведемо декілька лем.

Лема 3. *Нехай S — комутативна нільпотентна напівгрупа. Якщо інверсний моноїд $PA(S)$ є переставним, то для довільного $x \in S$ має місце рівність $x^2 = 0$.*

Доведення. Нехай $a \in S$ і $a \neq 0$. Припустимо, що $a^2 \neq 0$. Тоді циклічна піднапівгрупа $\langle a \rangle$ містить щонайменше 3 елементи. Позначимо через A множину $\langle a \rangle \backslash \{a\}$. Очевидно, що A — піднапівгрупа напівгрупи $\langle a \rangle$. Далі, згідно з твердженням 1 існує піднапівгрупа C така, що $C \subseteq \langle a \rangle, A \neq C$ і $h(A) = h(C)$. Оскільки C є власною піднапівгрупою напівгрупи $\langle a \rangle$, то, очевидно, $a \notin C$. Звідси легко випливає, що $C \subseteq A$. А оскільки $A \neq C$, то $C \subset A$ (строге включення). Звідси $h(C) < h(A)$. Суперечність.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай H — комутативна нільпотентна напівгрупа, для якої моноїд $PA(H)$ є переставним. Якщо $|H| \leq 3$, то H є напівгрупою з нульовим множенням.*

Доведення. Якщо $|H| = 1$ або $|H| = 2$, то немає чого доводити. Припустимо, що $|H| = 3$. Тобто $H = \{0, x, y\}$. Згідно з попередньою лемою $x^2 = 0$ і $y^2 = 0$. Позаяк $xy \neq x$ і $xy \neq y$, то $xy = 0$. Отже, H є напівгрупою з нульовим множенням.

Лему 4 доведено.

Далі будемо вважати, що нільпотентна напівгрупа містить щонайменше 4 елементи.

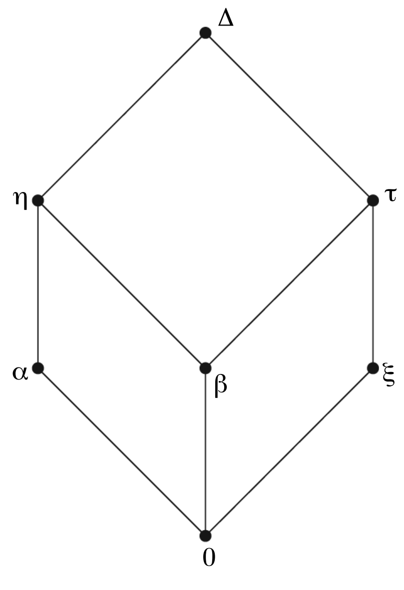
Нехай H ($|H| = n$) — напівгрупа з нульовим множенням. Легко зрозуміти, що інверсний моноїд $PA(H)$ ізоморфний $\mathcal{IS}_{n-1}$ — симетричній інверсній напівгрупі на $(n-1)$-елементній множині. Оскільки напівгрупа $\mathcal{IS}_{n-1}$ є переставною, то $PA(H)$ також переставна напівгрупа. Чи існує скінченна комутативна нільпотентна напівгрупа, відмінна від напівгрупи з нульовим множенням, така, що її інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним? Відповідь є ствердною.

Приклад. Розглянемо множину $K = \{0, x, y, z\}$. На множині K задамо операцію $*$ за допомогою таблички множення

$*$	0	x	y	z
0	0	0	0	0
x	0	0	z	0
y	0	z	0	0
z	0	0	0	0

Легко перевірити, що $(K, *)$ — нільпотентна напівгрупа, яка, очевидно, не є напівгрупою з нульовим множенням. Перелічимо її піднапівгрупи:

$0 = \{0\}$, $\alpha = \{0, x\}$, $\beta = \{0, z\}$, $\xi = \{0, y\}$, $\eta = \{0, x, z\}$, $\tau = \{0, y, z\}$, $\Delta = \{0, x, y, z\}$. (Діаграму решітки піднапівгруп напівгрупи $(K, *)$ див. на рисунку.)



Легко перевірити, що піднапівгрупи однакової висоти ізоморфні. Отже, згідно з твердженням 2 ідеали інверсного моноїда локальних автоморфізмів напівгрупи $(K, *)$ лінійно впорядковані відносно включення, а отже (див. [5], теорема 2), виконується умова 1 твердження 1. Крім того, з діаграми наочно видно, що ідемпотенти напівгрупи $PA(K)$ задовольняють умову 2 твердження 1. Таким чином, згідно з твердженням 1 інверсний моноїд $PA(K)$ є переставним.

Наведений приклад легко узагальнити. Нехай $\mathcal{H}$ — скінченна множина, що містить щонайменше 4 елементи. Нехай 0 і z — два різні фіксовані елементи з множини $\mathcal{H}$. Визначимо бінарну операцію на множині $\mathcal{H}$ таким чином:

1) $0 * x = x * 0 = x * z = z * x = x * x = 0$ для всіх $x \in \mathcal{H}$;

2) якщо $x \neq y$ і $\{x, y\} \cap \{0, z\} = \varnothing$, то $x * y = y * x = z$.

Легко перевірити, що $(\mathcal{H}, *)$ є нільпотентною напівгрупою. Клас таких напівгруп позначимо через $\mathcal{N}$. Опишемо піднапівгрупи напівгрупи $\mathcal{H}$, що належить класу $\mathcal{N}$.

По-перше, будь-яка двоелементна множина, що містить 0, очевидно, є піднапівгрупою напівгрупи $\mathcal{H}$. Будь-яка триелементна множина, що містить 0 і z, є піднапівгрупою напівгрупи $\mathcal{H}$. Інших триелементних піднапівгруп в $\mathcal{H}$ немає. Довільна підмножина множини $\mathcal{H}$, яка містить 0 і z і складається щонайменше з чотирьох елементів, очевидно, є піднапівгрупою напівгрупи $\mathcal{H}$. Інших піднапівгруп напівгрупи $\mathcal{H}$, кількість елементів яких не менша за 4, немає. Ці твердження легко перевіряються.

Покажемо тепер, що моноїд локальних автоморфізмів довільної напівгрупи з класу $\mathcal{N}$ є переставним.

Лема 5. *Нехай $\mathcal{H}$ — довільна напівгрупа з класу $\mathcal{N}$. Інверсний моноїд усіх локальних автоморфізмів напівгрупи $\mathcal{H}$ є переставним.*

Доведення. Спочатку зазначимо, що для довільної ненульової піднапівгрупи $V \in \mathrm{Sub}(\mathcal{H})$, яка містить k елементів, $h(V) = k - 1$. Покажемо, що ідеали моноїда $PA(\mathcal{H})$ утворюють ланцюг відносно включення. Дійсно, якщо A і B — дві піднапівгрупи напівгрупи $\mathcal{H}$, причому $|A| = |B| \leq 3$, то кожна з них є напівгрупою з нульовим множенням, тому $A \cong B$, до того ж $h(A) = h(B)$ в решітці $\mathrm{Sub}(\mathcal{H})$. Нехай тепер C і D — піднапівгрупи $\mathcal{H}$ такі, що $|C| = |D| \geq 4$. Нехай ξ — біекція така, що $\mathrm{dom}(\xi) = C$ і $\mathrm{im}(\xi) = D$. Крім того, $(0)\xi = 0$ і $(z)\xi = z$. Легко перевірити, що $\xi\colon C \to D$ є ізоморфізмом з C в D. Слід також зазначити, що $h(C) = h(D)$ в решітці $\mathrm{Sub}(\mathcal{H})$. Отже, згідно з твердженням 2 ідеали моноїда $PA(\mathcal{H})$ лінійно впорядковані відносно включення. Таким чином (див. [5], теорема 2), виконується умова 1 твердження 1.

Нехай $M \in \mathrm{Sub}(\mathcal{H})$ і $|M| \geq 4$. Якщо $a, b \in M$, причому $a \neq b$ і $\{a, b\} \cap \{0, z\} = \varnothing$, то $M \backslash \{a\}$ і $M \backslash \{b\}$ — дві різні піднапівгрупи напівгрупи M, до того ж $h(M \backslash \{a\}) = h(M \backslash \{b\}) = h(M) - 1$. Аналогічна властивість має місце і для довільної триелементної піднапівгрупи напівгрупи $\mathcal{H}$. Отже, виконується і умова 2 твердження 1. Таким чином, згідно з твердженням 1 інверсний моноїд $PA(\mathcal{H})$ є переставним для будь-якої напівгрупи $\mathcal{H}$ з класу $\mathcal{N}$.

Лему 5 доведено.

Нехай $\mathcal{H}$ — комутативна нільпотентна напівгрупа, відмінна від напівгрупи з нульовим множенням. Нехай інверсний моноїд $PA(\mathcal{H})$ є переставним. Наша подальша задача — показати, що $\mathcal{H}$ належить $\mathcal{N}$. Для цього нам знадобляться ще кілька лем.

Лема 6. *Нехай $\mathcal{H}$ — комутативна нільпотентна напівгрупа, для якої інверсний моноїд $PA(\mathcal{H})$ є переставним, крім того, $\mathcal{H}^2 = \{0, z\}$. Якщо елементи a і b такі, що $a \notin \{0, z\}$, $b \notin \{0, z\}$ і $a \neq b$, то $ab = z$.*

Доведення. Оскільки $z \neq 0$, то існують елементи $x, y \in \mathcal{H}$ такі, що $x \neq y$ і $xy = z$ (див. лему 3). Зрозуміло, що $x \notin \{0, z\}$ і $y \notin \{0, z\}$. Нехай c — довільний елемент з $\mathcal{H}$. Оскільки $cz \in \mathcal{H}^2$, то $cz = z$ або $cz = 0$. Якщо припустити, що $cz = z$, то $z = 0$. Суперечність. Отже,

$cz = 0$. Далі, позаяк $ab \in \mathcal{H}^2$, то $ab = 0$ або $ab = z$. Припустимо, що $ab = 0$. Розглянемо множину $\{0, a, b, z\}$. Це напівгрупа з нульовим множенням. Оскільки $xy = z$, то піднапівгрупа $\{0, x, y, z\}$ не є напівгрупою з нульовим множенням. За умовою інверсний моноїд $PA(\mathcal{H})$ є переставним. Відомо (див. [9], теорема 4), що ідеали переставної напівгрупи утворюють ланцюг відносно включення. Позаяк $h(\{0, a, b, z\} = h(\{0, x, y, z\} = 3$, то згідно з твердженням 2 $\{0, a, b, z\} \cong \{0, x, y, z\}$. Суперечність. Таким чином, $ab = z$.

Лему 6 доведено.

Лема 7. *Нехай S— комутативна нільпотентна напівгрупа, яка не є напівгрупою з нульовим множенням. Якщо інверсний моноїд $PA(S)$ є переставним, то S містить піднапівгрупу, ізоморфну напівгрупі K із прикладу.*

Доведення. Згідно з лемою 3 для кожного елемента $a \in S$ $a^2 = 0$, до того ж за умовою напівгрупа S не є напівгрупою з нулевим множенням. Отже, існують елементи $x, y \in S$ такі, що $x \neq y$ і $xy \neq 0$. Легко перевірити, що $\{0, x, y, xy\}$ є чотириелементною напівгрупою, яка ізоморфна напівгрупі K.

Лему 7 доведено.

Лема 8. *Нехай S— комутативна нільпотентна напівгрупа, яка не є напівгрупою з нульовим множенням. Якщо інверсний моноїд $PA(S)$ є переставним, то $|S^2| = 2$.*

Доведення. Спочатку припустимо, що $|S^2| \geq 4$. Позначимо S^2 через R. Розглянемо можливі випадки.

Випадок 1: $R^2 = \{0\}$, тобто R є напівгрупою з нульовим множенням.

Оскільки $|S^2| \geq 4$, то існують три ненульові елементи $u, v, w \in S^2$. Піднапівгрупа $\{0, u, v, w\}$ є напівгрупою з нульовим множенням. Відомо (див. [9], теорема 4), що ідеали переставної напівгрупи утворюють ланцюг відносно включення. Оскільки $h(\{0, u, v, w\}) = h(K) = 3$, то згідно з твердженням 2 $\{0, u, v, w\} \cong K$. Позаяк напівгрупа K не є напівгрупою з нульовим множенням, одержуємо суперечність.

Випадок 2: $R^2 \neq \{0\}$.

Отже, існують $x, y \in R$ такі, що $xy = z \neq 0$. Оскільки $x \in S^2$, то існують елементи a і b такі, що $ab = x$. Розглянемо множину $\{0, a, x, z\}$. Покажемо, що елементи $0, a, x, z$ є попарно різними. По-перше, $x \neq 0$, $z \neq 0$, $a \neq 0$. Припустимо, що $a = x$, тоді $ab = a$. З останньої рівності легко випливає $a = 0$. Суперечність. Припустимо, що $a = z$. Оскільки $ab = x$, то $zb = xyb = x$. Позаяк $y^2 = 0$, то $bxy^2 = xy = z = 0$. Суперечність. Якщо припустити, що $x = z$, то $x = xy$. Звідси $xy = xy^2 = 0$. Суперечність. Отже, елементи 0, a, x, z є попарно різними. Далі, $ax = aab = 0$, $az = axy = 0y = 0$, $xz = xxy = 0$. Отже, $\{0, a, x, z\}$ — напівгрупа з нульовим множенням. Оскільки $h(\{0, a, x, z\}) = h(K) = 3$ (див. попередню лему), то згідно з твердженням 2 $\{0, a, x, z\} \cong K$. Оскільки піднапівгрупа K не є напівгрупою з нульовим множенням, то одержуємо суперечність. Таким чином, $|S^2| \leq 3$.

Тепер припустимо, що $|S^2| = 3$. Нехай $S^2 = \{0, a, b\}$. Візьмемо елемент $x \notin S^2$. Розглянемо множину $\{0, a, b, x\}$. По-перше, чотири елементи $0, a, b, x$ є попарно різними. Позаяк $b \in S^2$, то існують елементи $z, t \in S$ такі, що $zt = b$. Припустимо, що $bx = a$, тоді $(zt)x = z(tx) = a$. Якщо припустити, що $tx = a$, то $za = a$. Звідси $a = 0$. Суперечність. Якщо припустити, що $tx = b$, то $zb = a$, а отже, $z(zt) = (z^2)t = a = 0$. Суперечність. Таким чином, $bx = 0$.

Розглянемо тепер елемент ax. Оскільки $a \in S^2$, то $a = gf$ для деяких $g, f \in S$. Припустимо, що $ax = a$, тоді $ax^2 = ax = a = 0$. Суперечність. Тепер припустимо, що $ax = b$, тоді $(gf)x = g(fx) = b$. Якщо $fx = b$, то $gb = b$. Звідки легко випливає, що $b = 0$. Суперечність. Якщо ж припустити, що $fx = a$, то $b = ga = g(gf) = g^2 f = 0$. Суперечність. Отже, $ax = 0$. Крім того, очевидно, що $ab = 0$. Таким чином, $\{0, a, b, x\}$ — піднапівгрупа з нульовим множенням. Оскільки $h(\{0, a, x, z\}) = h(K) = 3$ (див. попередню лему), то згідно з твердженням 2 $\{0, a, x, z\} \cong K$. Оскільки піднапівгрупа K не є напівгрупою з нульовим множенням, то одержуємо суперечність. Отже, $|S^2| = 2$.

Лему 8 доведено.

Лема 9. *Нехай S — комутативна нільпотентна напівгрупа, яка не є напівгрупою з нульовим множенням. Якщо моноїд локальних автоморфізмів $PA(S)$ є переставним, то напівгрупа S належить класу $\mathcal{N}$.*

Доведення. За попередньою лемою $S^2 = \{0, z\}$. Згідно з лемою 3 для довільного $x \in S$ $x^2 = 0$. Крім того, очевидно, що $xz = zx = 0$. Зрозуміло, що існують елементи $a, b \in S$ такі, що $a \neq b$, $\{a, b\} \cap \{0, z\} = \varnothing$ і $ab = z$. Припустимо, що елементи $c, d \in S$ такі, що $c \neq d$, $\{c, d\} \cap \{0, z\} = \varnothing$ і $cd = 0$. Тоді піднапівгрупа $\{0, c, d, z\}$ є напівгрупою з нульовим множенням. Відомо (див. [9], теорема 4), що ідеали переставної напівгрупи утворюють ланцюг відносно включення. Оскільки $h(\{0, a, b, z\}) = h(\{0, c, d, z\}) = 3$, то згідно з твердженням 2 $\{0, a, b, z\} \cong \{0, c, d, z\}$. Звідси випливає, що піднапівгрупа $\{0, a, b, z\}$ є напівгрупою з нульовим множенням. Суперечність. Отже, $cd = z$. Це означає що напівгрупа S належить класу $\mathcal{N}$.

Лему 9 доведено.

Тепер перейдемо до доведення основної теореми.

Теорема. *До повного списку комутативних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним, входять*:

1) *лінійно впорядковані напіврешітки*;
2) *примітивні напіврешітки*;
3) *елементарні абелеві p-групи*;
4) *напівгрупи з нульовим множенням*;
5) *нільпотентні напівгрупи з класу $\mathcal{N}$.*

Доведення. Нехай комутативна напівгрупа S така, що інверсний моноїд $PA(S)$ є переставним. Тоді згідно з лемою 2 напівгрупа S є або напіврешіткою, або групою, або нільпотентною напівгрупою. Якщо S — напіврешітка, то згідно з твердженням 3 (див. [4]) вона є або ланцюгом, або примітивною напіврешіткою. Якщо ж напівгрупа S є групою, то згідно з теоремою 2 (див. [4]) вона є елементарною абелевою p-групою. Нехай тепер S — нільпотентна напівгрупа. Якщо вона не є напівгрупою з нульовим множенням, то згідно з лемою 9 напівгрупа S належить класу $\mathcal{N}$. Таким чином, якщо комутативна напівгрупа S така, що інверсний моноїд локальних автоморфізмів $PA(S)$ є переставним, то вона належить одному з п'яти перелічених у теоремі класів.

Доведемо тепер, що для кожної з перерахованих у теоремі напівгруп її моноїд локальних автоморфізмів є переставним. Якщо S — n-елементний ланцюг, то моноїд $PA(S)$ — це, очевидно, інверсна напівгрупа ін'єктивних часткових монотонних перетворень, яка в літературі зазвичай позначається через $\mathcal{I}O_n$. Той факт, що моноїд $PA(S)$ є переставним, відмічено в [4] (твердження 3). Звісно, що це твердження також безпосередньо випливає з того факту, що ідеали напівгрупи $\mathcal{I}O_n$ утворюють ланцюг відносно включення, а конгруенції вичерпуються конгруенціями Ріса. Вищенаведені властивості напівгрупи $\mathcal{I}O_n$ можна знайти в кількох статтях різних авторів (див., наприклад, [10], а також коментарі 14.5.19 і 14.5.20 в [11]). Слід зазначити, що вони (ці властивості) є аналогом відповідних результатів А. Айзенштат про $\mathcal{O}_n$ — напівгрупу усіх повних монотонних перетворень скінченного ланцюга (див. [12]).

Моноїд $PA(S)$ переставний також у випадку, коли напівгрупа S є або примітивною напівґраткою, або елементарною абелевою p-групою (див. [4], теорема 2). Припустимо тепер, що S — напівгрупа з нульовим множенням, до того ж $|S| = n$. Легко зрозуміти, що інверсний моноїд $PA(S)$ ізоморфний $\mathcal{IS}_{n-1}$ — симетричній інверсній напівгрупі на $(n-1)$-елементній множині. Оскільки напівгрупа $\mathcal{IS}_{n-1}$ є переставною (див. [3]), то $PA(S)$ також переставна напівгрупа. Лема 5 стверджує, що для довільної нільпотентної напівгрупи $\mathcal{H}$ з класу $\mathcal{N}$ інверсний моноїд $PA(\mathcal{H})$ є переставним.

Теорему доведено.

1. *Либих А. Л.* Инверсные полугруппы локальных автоморфизмов абелевых групп // Исследования по алгебре. – 1973. – Вып. 3. – С. 25 – 33.
2. *Goberstein S. M.* Inverse semigroups with certain types of partial automorphism monoids // Glasgow Math. J. – 1990. – **32**. – P. 189 – 195.
3. *Дереч В. Д.* Характеристика напіврешітки ідемпотентів переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу з нулем // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1353 – 1362.
4. *Дереч В. Д.* Структура скінченної комутативної інверсної напівгрупи і скінченної в’язки, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1218 – 1226.
5. *Дереч В. Д.* Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 469 – 473.
6. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 286 с.; Т. 2. – 422 с.
7. *Tamura T., Kimura N.* On decompositions of a commutative semigroup // Kodai Math. Sem. Rep. – 1954. – P. 109 – 112.
8. *Tamura T.* Construction of trees and commutative archimedean semigroups // Math. Nachr. – 1968. – **36**. – P. 255 – 287.
9. *Hamilton H.* Permutability of congruences on commutative semigroups // Semigroup Forum. – 1975. – **10**. – P. 55 – 66.
10. *Дереч В. Д.* О квазипорядках на некоторых инверсных полугруппах // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 3. – С. 76 – 78.
11. *Ganyushkin O., Mazorchuk V.* Classical finite transformation semigroups. An introduction. – Springer, 2009. – xii + 314 p.
12. *Айзенштат А.* О гомоморфизмах полугрупп эндоморфизмов упорядоченных множеств // Учен. зап. ЛГПИ. – 1962. – **238**. – С. 38 – 48.

Одержано 12.04.11