МАШИНОБУДУВАННЯ І ТРАНСПОРТ

УДК 622.625.28–522.112(043.5)

О. М. Коптовець[1]
І. В. Козіна[1]

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ФРИКЦІЙНИХ КОЛИВАНЬ У ГАЛЬМІ

[1]Державний ВНЗ «Національний гірничий університет», Дніпропетровськ

Розглянуто спектральний аналіз тангенціальних і нормальних фрикційних коливань у гальмі. Запропоновано критерій відновлення руху динамічної системи на основі чисельного розв'язання, автокореляційну функцію та дискретне перетворення Фур'є часових рядів переміщення зосереджених мас динамічної системи.

Ключові слова: гальмо, динамічна модель, обчислювальний алгоритм, фрикційні коливання, кореляційний та спектральний аналіз.

Вступ

Застосування розробленого обчислювального алгоритму [1] дозволяє отримати часові ряди, що описують переміщення зосереджених мас динамічної системи в дискретні моменти часу t_n, які, як правило, беруться через рівні проміжки часу h_d, названі періодом дискретизації. Величина f_d, зворотна періоду дискретизації, називається частотою дискретизації

$$f_d = \frac{1}{h_d}.$$

Відповідна їй кругова частота ω_d визначається в такий спосіб:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{h_d}.$$

Очевидно, що представлення безперервних переміщень набором дискретних значень приводить до втрати інформації про рух, оскільки залишаються невідомими переміщення в проміжках часу між дискретними значеннями t_n. Однак, можна виділити клас рухів, для яких такої втрати інформації не відбувається і які можуть бути точно відновлені за своїми значеннями в дискретні моменти часу t_n. Відповідно до теореми Котельникова [2], будь-який безперервний сигнал $x(t)$, спектр якого не містить складових із частотою вище частоти дискретизації ω_d, може бути без втрати інформації представлений своїми дискретними значеннями, взятими з інтервалом h, що задовольняють нерівності

$$h < \frac{1}{2f_d} = \frac{\pi}{\omega_d}.$$

Таким чином, завдання ідентифікації й встановлення характеристик динамічного режиму динамічної системи, що розглядається, можна вирішувати на основі аналізу часових рядів переміщень, отриманих за допомогою розробленого обчислювального алгоритму. Необхідно також досліджувати вплив тертя й дисипативних властивостей динамічної системи на характер її руху.

Розглядаючи часові ряди переміщень зосереджених мас динамічної системи як дискретний сигнал, для ідентифікації й встановлення характеристик динамічного режиму можна використовувати методи кореляційного й спектрального аналізу дискретних сигналів.

Метою роботи є ідентифікація і встановлення характеристик динамічного режиму тертя гальма на основі аналізу часових рядів переміщень, отриманих за допомогою обчислювального алгоритму, методами кореляційного і спектрального аналізу дискретних сигналів.

© О. М. Коптовець, І. В. Козіна, 2015

Задачі дослідження — розробка критерію відновлення руху механічної системи на основі чисельного розв'язання, обчислення дискретної автокореляційної функції і дискретного перетворення Фур'є часових рядів переміщень зосереджених мас динамічних систем.

Результати дослідження

Нехай відомі значення дискретного сигналу (часовий ряд) $\{x_n\}$, $n = \overline{1, N+M}$. Тоді дискретна автокореляційна функція сигналу $\{x_n\}$ обчислюється за формулою

$$\psi_m = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n \cdot x_{n+m}\ , \quad m = \overline{0, M},$$

де ψ_m, $m = \overline{0, M}$ — дискретна автокореляційна функція.

Автокореляційна функція служить мірою ступеня подібності сигналу із самим собою. Якщо часовий ряд $\{x_n\}$ періодичний з періодом *K*, то його автокореляційна функція також має періодичність

$$\psi_m = \psi_{m+K}\ , \quad m = \overline{0, M}.$$

При цьому виконується нерівність

$$\psi_0 > \psi_m\ , \quad 0 < m < K.$$

Якщо часовий ряд $\{x_n\}$ є аперіодичним, то його автокореляційна функція повинна мати кінцевий носій, тобто перетворюватися в нуль поза кінцевим інтервалом часу. Для кінцевих відрізків часових рядів критерій аперіодичності можна сформулювати в такий спосіб: для кожного $\varepsilon > 0$ існує $M(\varepsilon)$ таке, що

$$|\psi_m| \le \varepsilon\ , \quad \forall m > M(\varepsilon).$$

Таким чином, обчислення автокореляційні функції для певного часового ряду дозволяє не тільки встановити чи є він періодичним, але й визначити його період у цьому випадку.

Одним з найпоширеніших способів дослідження періодичних рухів динамічних систем є спектральний аналіз. З механічної точки зору, розкладання досліджуваного руху в ряд Фур'є відповідає його представленню у вигляді сукупності простих гармонійних рухів.

Розкладання в ряд Фур'є застосовне як до безперервних функцій, так і до дискретних послідовностей. При цьому вони представляються у вигляді суми гармонічних функцій або комплексних експонент з частотами, що утворюють арифметичну прогресію [3].

Нехай часовий ряд $\{x_n\}$ є періодичним з періодом K, тобто

$$x_{n+K} = x_n\ , \quad \text{для кожного } n.$$

Такий часовий ряд повністю описується кінцевим набором чисел, у якості якого можна обрати довільний фрагмент довжиною K, наприклад $\{x_n\}$, $n = \overline{0, K-1}$. Відомо [3], що реальний періодичний дискретний сигнал (часовий ряд) має періодичний дискретний спектр $\{X_n\}$, що володіє властивістю симетрії

$$X_{n+K} = X_n\ , \quad \text{для кожного } n;$$

$$X_{K-n} = X_n\ , \quad 0 < n < K.$$

У цьому випадку часовий ряд $\{x_n\}$ можна представити у вигляді кінцевого ряду Фур'є в тригонометричній формі

$$x_n = \sum_{k=0}^{K/2} A_k \cos\frac{2\pi kn}{K} + \sum_{k=0}^{K/2} B_k \sin\frac{2\pi kn}{K}, \tag{1}$$

де A_k, B_k — коефіцієнти ряду Фур'є, що обчислюються за формулами

$$A_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{K-1} x_n \cos\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 1, \ldots, \frac{K}{2} - 1;$$

$$A_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{K-1} x_n \cos\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 0,...\frac{K}{2};$$

$$B_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{K-1} x_n \sin\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 1,\ldots,\frac{K}{2}-1.$$

Ряд Фур’є (1) можна також представити у вигляді

$$x_n = \sum_{k=0}^{K/2} C_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{K} + \phi_k\right), \tag{2}$$

де C_k — амплітуда k-ї гармоніки, що обчислюється за формулами

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad k = 0,\ldots,\frac{K}{2},$$

де ϕ_k — фаза k-ї гармоніки, що обчислюється за формулою

$$\phi_k = \mathrm{arctg}\left(-\frac{B_k}{A_k}\right), \quad k = 0,\ldots,\frac{K}{2}.$$

Обчислення спектрів швидкостей і прискорень може проводиться двома способами. Перший полягає в послідовному диференціюванні за часом ряду Фур’є для переміщень, що відповідає (2):

$$\dot{x}_n = \sum_{k=0}^{K/2} \hat{C}_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{K} + \phi_k\right);$$

$$\ddot{x}_n = \sum_{k=0}^{K/2} \hat{\hat{C}}_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{K} + \phi_k\right),$$

де

$$\hat{C}_k = -C_k \frac{2\pi k}{Kh};$$

$$\hat{\hat{C}}_k = -C_k \left(\frac{2\pi k}{Kh}\right)^2.$$

Другий спосіб полягає в обчисленні швидкостей і прискорень на підставі часового ряду переміщень $\{x^n\}$ за допомогою різницевих співвідношень

$$\dot{x}_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2h};$$

$$\ddot{x}_n = \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{h^2}$$

і часових рядів швидкостей $\{\dot{x}^n\}$ і прискорень $\{\ddot{x}^n\}$ у вигляді кінцевих рядів Фур’є

$$\ddot{x}_n = \sum_{k=0}^{K/2} \tilde{C}_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{K} + \tilde{\phi}_k\right);$$

$$\ddot{x}_n = \sum_{k=0}^{K/2} \tilde{\tilde{C}}_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{K} + \tilde{\tilde{\phi}}_k\right),$$

де

$$\tilde{C}_k = \sqrt{\tilde{A}_k^2 + \tilde{B}_k^2}, \quad k = 0,\ldots,\frac{K}{2};$$

$$\tilde{\phi}_k = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\tilde{B}_k}{\tilde{A}_k}\right), \quad k = 0,\ldots,\frac{K}{2};$$

$$\tilde{A}_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{K-1} \dot{x}_n \cos\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 1,\ldots,\frac{K}{2}-1;$$

$$\tilde{A}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{K-1} \dot{x}_n \cos\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 0, \frac{K}{2};$$

$$\tilde{B}_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{K-1} \dot{x}_n \sin\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 1, \ldots, \frac{K}{2} - 1;$$

$$\tilde{\tilde{C}}_k = \sqrt{\tilde{\tilde{A}}_k^2 + \tilde{\tilde{B}}_k^2}, \quad k = 0, \ldots, \frac{K}{2};$$

$$\tilde{\tilde{\phi}}_k = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\tilde{\tilde{B}}_k}{\tilde{\tilde{A}}_k}\right), \quad k = 0, \ldots, \frac{K}{2};$$

$$\tilde{\tilde{A}}_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{K-1} \ddot{x}_n \cos\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 1, \ldots, \frac{K}{2} - 1; \tag{3}$$

$$\tilde{\tilde{A}}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{K-1} \ddot{x}_n \cos\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 0, \frac{K}{2}; \tag{4}$$

$$\tilde{\tilde{B}}_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{K-1} \ddot{x}_n \sin\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 1, \ldots, \frac{K}{2} - 1. \tag{5}$$

Для апостеріорного аналізу точності отримуваних чисельних результатів у цій роботі проводиться порівняння спектрів прискорень обчислених двома способами.

Враховуючи властивості спектра дискретного періодичного часового ряду, використана така методика спектрального аналізу коливань гальмового механізму.

1. Обчислюється крок інтегрування за часом

$$h = \frac{T_1}{N},$$

де N — кількість кроків за часом за період вільних коливань колодки T_1.

В обчислювальних експериментах береться $N = 200$.

2. Обчислюється часовий ряд переміщень $\{X^n\}$ мас динамічної системи на часовому відрізку $\left[0, T_0\right]$, де $T_0 = MT_1$. В обчислювальних експериментах береться $M = 50$.

3. Використовуючи кінцевий відрізок часових рядів $\{x^n\}$ і $\{y^n\}$, $\overline{n = (M-K)N, MN}$, будуються автокореляційні функції переміщень колодки на відрізку $\left[\left(M - K/2\right)N, MN\right]$. В обчислювальних експериментах береться $K = 32$.

4. Використовуючи наближені умови періодичності автокореляційних функцій, визначається період коливань T розглянутої динамічної системи.

Якщо на розглянутому кінцевому відрізку $\left[(M - K/2)N, MN\right]$ умови періодичності не виконуються, то необхідно збільшити параметр *M*, що визначає довжину відрізка $\left[0, T_0\right]$, на якому обчислюються часові ряди переміщень $\{x^n\}$ і $\{y^n\}$ колодки, або збільшити параметр *K*, що визначає максимально допустимий період коливань.

5. Використовуючи кінцевий відрізок часових рядів $\{x^n\}$ і $\{y^n\}$, $\overline{n = (M-K)N, MN}$ обчислюється за формулами (3)—(5) спектр переміщень колодки. Якщо спектр має обмежену смугу частот, то виконується умова

$$l < kN/2 - s, \tag{6}$$

де $s > 0$ — параметр, що визначає ширину спектра.

Якщо виконується умова (6), то дискретне перетворення Фур'є дозволяє відновлювати вихідні безперервні функції переміщень колодки. А якщо ні, то необхідно збільшити частоту дискретизації, тобто зменшити величину кроку інтегрування за часом h і повернутися до п. 2 методики.

Дискретне перетворення Фур'є дозволяє відновити вихідний безперервний періодичний сигнал, що займає обмежену смугу частот.

Висновки

Розроблена методика спектрального аналізу коливань гальмового механізму заснована на припущенні, що його рухи є періодичними. Якщо в розглянутій динамічній системі виникає детермінований хаос, то автокореляційна функція часового ряду переміщень $\{X^n\}$ повинна мати кінцевий носій, тобто перетворюватися в нуль поза кінцевим інтервалом часу. Для кінцевих відрізків часових рядів критерій аперіодичності можна сформулювати в такий спосіб: для кожного $\varepsilon > 0$ існує $M(\varepsilon)$ таке, що $|\psi_m| \le \varepsilon$, для кожного $m > M(\varepsilon)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Коптовец А. Н. Математическая модель процесса торможения с учетом взаимодействия нормальных фрикционных колебаний в тормозных механизмах / А. А. Бобылев, А. Н. Коптовец // Методи розв'язання прикладних задач механіки деформованого твердого тіла : зб. наук. пр. Дніпропетр. нац. ун–ту. — 2007. — Вип. 8. — С. 10—24.
2. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. М. Горячева. — М. : Наука, 2001. — 582 с.
3. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов / А. Б. Сергиенко. — СПб. : Питер, 2002. — 608 с.

Рекомендована кафедрою вищої математики ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 12.01.2015

Коптовець Олександр Миколайович — д-р техн. наук, доцент, професор кафедри транспортних систем і технологій;

Козіна Інна Валеріївна — канд. техн. наук, доцент кафедри управління на транспорті, e-mail: kaksejchas_inna@mail.ru.

Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет», Дніпропетровськ

O. M. Koptovets [1]
I. V. Kozina[1]

Spectrology of friction vibrations in the brakes

[1] State Institution of Higher Education «National Mining University», Dnipropetrovsk

The spectrology of tangential and normal friction vibrations in a brake have been examined in the paper. The criterion of renewal of motion of the dynamic system has been offered on the basis of numeral decision, autocorrelation function and discrete Fourier transform of temporal rows of moving of the concentrated masses of the dynamic system.

Keywords: *brake, dynamic model, computational algorithm, friction vibrations, cross-correlation and spectral analysis.*

Koptovets Oleksandr M. — Dr. Sc. (Eng.), Assistant Professor, Professor of the Chair of Transport Systems and Technology;

Kozina Inna V. — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of the Chair of Transportation Management, e-mail: kaksejchas_inna@mail.ru

А. Н. Коптовец[1]
И. В. Козина[1]

Спектральный анализ фрикционных колебаний в тормозе

[1]Государственное высшее учебное заведение «Национальный горный университет», Днепропетровск

Рассмотрен спектральный анализ тангенциальных и нормальных фрикционных колебаний в тормозе. Предложено критерий восстановления движения динамической системы на основе численного решения, автокорреляционная функция и дискретное преобразование Фурье временных рядов перемещений сосредоточенных масс динамической системы.

Ключевые слова: тормоз, динамическая модель, вычислительный алгоритм, фрикционные колебания, корреляционный и спектральный анализ.

Коптовец Александр Николаевич — д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры транспортных систем и технологий;

Козина Инна Валериевна — канд. техн. наук, доцент кафедры управления на транспорте, e-mail: kaksejchas_inna@mail.ru