MAPLE- МЕТОДИКА СТВОРЕННЯ ГЕНЕРАТОРА ЗАВДАНЬ З НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Володимир Михалевич[1] *,Ярослав Крупський*[2]

[1]Вінницький національний технічний університет
Хмельницьке шосе,95,Вінниця,21021, Україна, тел.: (0432)59-85-91, E-Mail: mikhal@svitonline.com
[2]Вінницький національний технічний університет
Хмельницьке шосе,95,Вінниця,21021, Україна, тел.: (0432)59-85-91, E-Mail: kru-yarik@rambler.ru

Вступ

Створення та впровадження навчально-контролюючого комплексу з вищої математики сприятиме суттєвому підвищенню ефективності навчання та зменшенню об’єму рутинних робіт по підготовці та перевірці індивідуальних завдань студентів. Одним з елементів такого комплексу є блок генерування задач. Генерування індивідуальних завдань є самостійним ефективним засобом при організації навчальної роботи. Крім того, застосування генераторів завдань стимулює пізнавальну активність студентів, що сприяє інтелектуальному розвитку особистості.

Продемонструємо методику по створенню генератора завдань з інтегруванню раціональних алгебраїчних функцій. Найпоширеніші приклади по темі інтегрування раціональних алгебраїчних функцій в книжках з вищої математики [1, 2, 3] такі:

$$\int\frac{dx}{x^2+3x+3},\quad \int\frac{x-4}{x^2-5x+6}dx,\quad \int\frac{5x-1}{x^3-3x-2}dx,\quad \int\frac{x+2}{x^3-2x^2}dx,\quad \int\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx,$$

$$\int\frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx,\quad \int\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}dx,\ldots$$

Наприклад для того, щоб згенерувати невизначений дробовий інтеграл можливо скористатись наступним шаблоном $\int\frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{Kx^4+Lx^3+Rx^2+Sx+T}dx$.

В залежності від коефіцієнтів ми отримаємо близько *31x26=806* різних типів прикладів від звичайного табличного інтегралу $\int\frac{a}{bx+c}dx$ до складного інтегралу де потрібно шукати корені знаменника та розкладати даний дріб на суму простих дробів. Безпосередньо використовувати цей метод незручно, оскільки ми не можемо впливати на кількість цілих коренів знаменника та чисельника. Система генерування повинна підбирати такі корені, щоб в ході обчислення не виникали складні ірраціональні корені та щоб чисельник та знаменник не перетворювались в нулі.

Більш ефективною моделлю генерування раціональних дробів є наступна:

$$\int\frac{\prod_{t=1}^{w}(x-b_t)^{d_t}\prod_{g=1}^{v}\left(x^2+k_gx+l_g\right)^{h_g}}{\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{r_i}\prod_{j=1}^{m}\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{s_j}}dx$$

В залежності від чисел *w, v, n, m* степінь чисельника може бути $\geq$ або $<$ за степінь знаменника. Тобто можемо отримувати правильний або неправильний дріб. Степені h_g та s_j в залежності від важкості завдання доцільно брати 1 або 0.

Одною з альтернативних до приведеного алгоритму є наступний. Згенерувати не порожню множину коренів рівняння чисельника та знаменника, визначити кратність коренів та на основі цих даних створити підінтегральну функцію. Наприклад коренями чисельника є числа -5 та 2 – однократні, а знаменника -1 – однократний корінь та -3 – двократний. Тобто інтеграл матиме вигляд $\int\frac{(x+5)(x-2)}{(x+1)(x+3)^2}dx$. Для реалізації в Maple скористаємось функцією expand для розкриття дужок. Блок програми матиме вигляд:

```
> a[1]:=-5: a[2]:=2: a[3]:=-1: a[4]:=3:
  b[1]:=1:  b[2]:=1: b[3]:=1:  b[4]:=2:
```

```
chiselnik:=expand((x-a[1])^b[1]*(x-a[2])^b[2]):
znamennik:=expand((x-a[3])^b[3]*(x-a[4])^b[4]):
Int(chiselnik/znamennik,x);
```

$$\int \frac{x^2+3\,x-10}{x^3-5\,x^2+3\,x+9}\,dx$$

У всіх попередніх випадках коефіцієнти *a[i]* та *b[i]*, щоб вони неповторювались, можливо обчислювати як вибірку з множини чисел.

```
> with(RandomTools):
  YM:=rand(1..4):   LL:={$-10..-1,$1..10}:
   for i to 4 do
    a[i]:= Generate(choose(LL));
     LL:=LL minus {a[i]}:
if i<3 then Dd[i]:=1;  print('a'[i]=a[i],'d'[i]=Dd[i]);: end if: if YM()=4 then R[i]:=2 else R[i]:=1: end if:
if i>2 then print('a'[i]=a[i],'b'[i]=R[i]);end if:
   end do:
  chiselnik:=(x-a[1])^Dd[1]*(x-a[2])^Dd[2]:   znamennik:=(x-a[3])^R[3]*(x-a[4])^R[4]:
 print(Int(chiselnik/znamennik,x)=Int(expand(chiselnik)/
 expand(znamennik),x));
```

$$à_1=\text{-}10,\ d_1=1 \qquad à_2=\text{-}8,\ d_2=1 \qquad à_3=1,\ b_3=1 \qquad à_4=\text{-}4,\ b_4=2$$

$$\int \frac{(x+10)\,(x+8)}{(x-1)\,(x+4)^2}\,dx=\int \frac{x^2+18\,x+80}{x^3+7\,x^2+8\,x-16}\,dx$$

Представимо універсальну методику по створенню генератора завдань з інтегруванню невизначених інтегралів. Задамо послідовність підінтегральних функцій.

```
> `Послідовність функцій`:=x^2*exp(x),x^2*ln(x), ln(x),x*exp(2*x), x^2*exp(x), exp(x)*sin(x),
x*exp(2*x), x^3*exp(-x),   x^2*exp(-1/2*x), arctg(x), exp(x)*cos(x), arcsin(1/2*x)/(2-x)^(1/2),  arctg((2*x-
1)^(1/2)),x*exp(2*x), exp(x)*sin(x);
```

Послідовність функцій :=

$$x^2\,\mathbf{e}^x,\ x^2\ln(x),\ x\,\mathbf{e}^{(3\,x)},\ \ln(x),\ x\,\mathbf{e}^{(2\,x)},\ x^2\,\mathbf{e}^x,\ \mathbf{e}^x\sin(x),\ x\,\mathbf{e}^{(2\,x)},\ x^3\,\mathbf{e}^{(-x)},\ x\,\mathbf{e}^x,$$
$$x^2\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{x}{2}\right)},\ \operatorname{arctg}(x),\ \mathbf{e}^x\cos(x),\ \frac{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2-x}},\ \operatorname{arctg}(\sqrt{2\,x-1}),\ x\,\mathbf{e}^{(2\,x)},\qquad \mathbf{e}^x\sin(x),\ 3\,x\,\mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Подамо послідовність у вигляді списку

```
> `Список функцій`:=[`Послідовність функцій`];
```

Список функцій :=

$$\left[x^2\,\mathbf{e}^x,\ x^2\ln(x),\ x\,\mathbf{e}^{(3\,x)},\ \ln(x),\ x\,\mathbf{e}^{(2\,x)},\ x^2\,\mathbf{e}^x,\ \mathbf{e}^x\sin(x),\ x\,\mathbf{e}^{(2\,x)},\ x^3\,\mathbf{e}^{(-x)},\ x\,\mathbf{e}^x,\right.$$
$$\left.x^2\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{x}{2}\right)},\ \operatorname{arctg}(x),\ \mathbf{e}^x\cos(x),\ \frac{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2-x}},\ \operatorname{arctg}(\sqrt{2\,x-1}),\ x\,\mathbf{e}^{(2\,x)},\qquad \mathbf{e}^x\sin(x),\ 3\,x\,\mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)}\right]$$

Визначимо кількість елементів списку

```
> `Кількість елементів списку`= nops(`Список функцій`);
```

Кількість елементів списку = 18

Подамо ту саму послідовність у вигляді множини

```
> `Множина функцій`:={`Послідовність функцій`};
```

Множина функцій :=

$$\left\{\mathbf{e}^x\sin(x),\ x^3\,\mathbf{e}^{(-x)},\ x^2\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{x}{2}\right)},\ \mathbf{e}^x\cos(x),\ \frac{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2-x}},\ x\,\mathbf{e}^{(2\,x)},\ x^2\,\mathbf{e}^x,\ \ln(x),\right.$$

$$\arctg(x),\ x^2\ln(x),\ \arctg(\sqrt{2x-1}),\ x\,\mathbf{e}^{(3x)},\ x\,\mathbf{e}^x,\ 3x\,\mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)}\}$$

Визначимо кількість елементів множини

`Кількість елементів множини `=nops(`Множина функцій`);

$$\text{Кількість елементів множини} = 14$$

Як бачимо, при перетворені послідовності в множину зникло 18-14=4 елементи. Очевидно, що при цьому вилучено по одному елементу x^2e^x та $e^x\sin(x)$, які в списку зустрічаються по два рази, а також 2 із трьох елементів xe^{2x}. Такі операції система Maple виконує миттєво для послідовностей із сотен елементів.

Після створення банку унікальних прикладів потрібно проаналізувати їх на належність до типових виразів, що породжують одні й ті самі, або споріднені процеси розв'язання. Для цього Maple має потужний інструментарій. Зокрема можна використати наступний прийом. Створюємо шаблон

```
> `шаблон`:=zz->match(zz=A*x^n*exp(a*x),x,'s');
```

$$\text{шаблон} := zz \to \operatorname{match}(zz = A\,x^n\,\mathbf{e}^{(a\,x)},\ x,\ 's')$$

Вилучаємо із `Множина функцій` всі вирази, які підпорядковуються даному шаблону

```
> select(`шаблон`,`Множина функцій`);
```

$$\{3x\,\mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)},\ x\,\mathbf{e}^{(3x)},\ x\,\mathbf{e}^{(2x)},\ x^3\,\mathbf{e}^{(-x)},\ x\,\mathbf{e}^x,\ x^2\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{x}{2}\right)},\ x^2\,\mathbf{e}^x\}$$

Конструюванням різних шаблонів легко проаналізувати базу даних із сотен і навіть тисяч типових прикладів.

Наступним кроком є розробка на основі створених шаблонів математичних моделей для генерування множини типових прикладів.

Продемонструємо модель для генерування підінтегральних функцій, знаходження первісних для яких передбачає заміну змінної:

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx\,.$$

Різні варіанти функцій $f(x)$ та $\psi(x)$ подамо у вигляді списків

```
> `f`:=[cos(x)*exp(x),sin(x)*exp(x),x*exp(x), x^2*exp(x),x*sin(x),x*cos(x),x^2*sin(x),x^2*cos(x),
ln(x),arcsin(x)];
`psi`:=[arcsin(x),arccos(x),x^2,ln(x),sin(x),tg(x), exp(x),2^x,cos(x),arctg(x)];
```

$$f := [\cos(x)\,\mathbf{e}^x,\ \sin(x)\,\mathbf{e}^x,\ x\,\mathbf{e}^x,\ x^2\,\mathbf{e}^x,\ x\sin(x),\ x\cos(x),\ x^2\sin(x),\ x^2\cos(x),\ \ln(x),\ \arcsin(x)]$$

$$\psi := [\arcsin(x),\ \arccos(x),\ x^2,\ \ln(x),\ \sin(x),\ \operatorname{tg}(x),\ \mathbf{e}^x,\ 2^x,\ \cos(x),\ \arctg(x)]$$

Для генерування невизначених інтегралів на основі сформованих списків функцій потрібно створити два вкладених цикли

```
> L_f:=[]:
for i to nops(`f`) do
 for j to nops(`psi`) do
  L_f:=[op(L_f),Int(subs(x=`psi`[j],`f`[i])*diff(`psi`[j],x),x)]
 end do;
end do:
```

В результаті буде сформовано 10×10=100 невизначених інтегралів, першими по порядку з яких є наступні

$$\int \mathbf{e}^{\arcsin(x)}\,dx,\ \int \cos(\ln(x))\,dx,\ \int \frac{\mathbf{e}^{\arctg(x)}}{(1+x^2)^{(3/2)}}\,dx,\ \int -\frac{x\,\mathbf{e}^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

$$\int \cos(\operatorname{tg}(x))\,\mathbf{e}^{\operatorname{tg}(x)}\,(1+\operatorname{tg}(x)^2)\,dx,\ \int 2\cos(x^2)\,\mathbf{e}^{(x^2)}\,x\,dx,$$

$$\int \cos(\sin(x))\,\mathbf{e}^{\sin(x)}\,\cos(x)\,dx$$

Додавши по одній функції до кожного із списків, дістанемо ще 21 додаткових приклади. Щоб подвоїти кількість згенерованих прикладів із 100 майже до 200 достатньо додати до обох списків функцій по чотири нових функції. Таким способом легко не тільки згенерувати сотні і тисячі унікальних прикладів, але й регулювати їх складність та різноманітність.

Списки *Lpsi* та *Lf* легко розширити, тим самим практично необмежено збільшуючи кількість прикладів заданого типу.

При використанні приведених функцій застосування заміни змінної приводить до табличного інтеграла. Якщо в список функцій f додати ряд функцій типу $x \to x - \sin x, \quad x \to e^x \cos x,$ $x \to x^2 e^x, \quad x \to \ln x, \quad \ldots$ то в результат заміни змінної дістаємо не табличний інтеграл, а інтеграл, знаходження якого вимагає застосування інтегрування частинами.

Розширення списку функцій f за рахунок введення раціональних дробів, наприклад: $x \to \dfrac{3x-5}{2(x-1)(x+4)}$ дозволить в одному прикладі комбінувати способи заміни змінної та інтегрування раціональних дробів.

Що ж стосується функцій $\Psi(x)$, то відповідний список складається з довільних елементарних функцій.

Підстановка $x \to ax + b$ дозволяє підвищити рівень складності прикладу практично в усіх випадках.

Згенеровані таким способом приклади потрібно уважно проаналізувати. Серед них можуть виявитися поодиноі випадки занадто простих виразів, що є результатом символьних спрощень.