УДК 378.147

Хом'юк І.В., Хом'юк В.В.
Вінницький національний
технічний університет
ORCID ID 0000-0002-2516-2968

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ ЯК ЗАСІБ АКТИВІЗАЦІЇ НАВЧАННЯ СТУДЕНТІВ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ У ТЕХНІЧНИХ ВОЗ

У статті проаналізовано концептуальні ідеї доведення теорем в курсі математичного аналізу як засобу активізації навчання студентів у технічних ВОЗ. Використання математичних методів у виробництві зумовлює потребу у інженерах, які матимуть добре розвинуте логічне та алгоритмічне мислення, на формування якого не абияк впливає саме доведення теорем з курсу вищої математики. Визначено, що доведення фундаментальних теорем теорії границь і деяких інших розділів викликають неабиякі труднощі у студентів, що пов'язано із значною абстрактністю міркувань і не завжди чітко видимим геометричним змістом. Наведено деякі шляхи подолання цих труднощів та підвищення активності студентів в оволодінні теоретичним матеріалом. Перш за все, на думку автора, основним джерелом труднощів засвоєння абстрактних міркувань є не зміст, а форма цих міркувань. Специфіка цієї форми приводить до того, що за ε, δ *– символікою та іншими подібними «атрибутами» студенти не завжди бачать сутність поняття, а це створює небезпеку відриву форми доведення теореми від її змісту. Автором запропоновано в доведенні кожної теореми умовно виокремити дві складові: 1) логічну складову (ЛС), яка містить в собі основну ідею доведення; 2) технічну складову (ТС), яка здійснює реалізацію цієї ідеї засобами математичних символів і співвідношень. Наявність цих двох складових відповідає існуванню в кожному предметі чи явищі двох таких категорій, як зміст і форма. Автором запропоновано приклади ЛС доведення трьох важливих теорем математичного аналізу. Встановлено, що виділення ЛС в доведеннях теорем можна використовувати як засіб безпосереднього управління процесом навчання. Поряд з наведенням на лекціях повних доведень теорем представляється доречним в окремих теоремах обмежитись викладом лише ЛС доведення, пропонуючи студентам реалізувати техніку доведення самостійно. Такий прийом є один із способів створення проблемної ситуації і його використання сприяє активізації мислення студентів.*

Ключові слова: *активізація навчання, вища математика, доведення теорем, математичний аналіз, майбутній інженер, логічна складова, технічна складова.*

Постановка проблеми. Вища математика належить до однієї із найскладніших фундаментальних дисциплін в програмі підготовки майбутніх інженерів у вищих технічних навчальних закладах. Майбутні фахівці технічних спеціальностей завдяки курсу вищої математики засвоюють математичні методи, які вони в подальшому використовують в процесі вивчення спеціальних дисциплін, здобувають навички розв'язування основних типів задач і прикладних, в тому числі, а основне завдяки математиці в них формується аналітичне мислення так необхідне майбутнім інженерам. В зв'язку з цим набуває більшого значення засвоєння студентами доведень теорем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання активізації навчальної діяльності студентів розглядається у роботах багатьох дослідників. Так, у працях А. Алексюка, Д. Чернилевського, А. Вербицького, С. Архангельського, В. Козакова, В. Вергасова, С. Зінов'єва, М. Кларін та ін. висвітлено різні аспекти процесу активізації пізнавальної діяльності студентів. П. Автономов, В. Буряк, Л. Петренко, М. Скаткін, А. Сорокін розглядали умови ефективної організації навчально-пізнавальної діяльності студентів. Процес управління навчально-пізнавальною діяльністю молоді відображено в наукових працях Є. Бєлкіна, Л. Клименко, Н. Тализіної, Ю. Щербаня. Питання математичної підготовки студентів вищих навчальних закладів висвітлюються у працях вчених-математиків Б. Гнеденка, Л. Канторовича, Л. Понтрягіна, Г. Бевза, З. Слєпкань.

Мета статті – розглянути здійснення активізації навчання студентів вищої математики у ВОЗ засобом доведення теорем.

Викладення основного матеріалу дослідження. Серед проблем і перспектив математичної освіти в XXI столітті науковці виділяють питання про мету і зміст математичної освіти, ефективну організацію навчального процесу, роль і місце ІКТ, інші педагогічні інновації у математичній освіті, оцінювання навчальних досягнень тощо [2; 5].

В. Садівничий відзначає, що на будь-які реформи, які впроваджуються в математичну освіту, впливають два основні чинники: комп'ютеризація освіти та глобалізація світу, і ставить питання: «Як, яким чином нам поступати і діяти, щоб не залишитися осторонь від того, що відбувається з математичною освітою у світі, і по максимуму використати зовнішні та внутрішні обставини для подальшого покращення нашої вітчизняної системи математичної освіти?» [2]

На сьогоднішній день особливого поширення та попиту набули математичні методи та стандарти, що дозволяють спроектувати будь-який об'єкт дослідження. У зв'язку з цим у майбутніх інженерів має бути добре розвинуте логічне та алгоритмічне мислення, на формування якого не абияк впливає саме доведення теорем з курсу вищої математики. Це в основному стосується теорем загального, фундаментального характеру, осмислення доведення яких сприяє перш за все засвоєнню самої сутності даного поняття або твердження [4]. У звичайних курсах вищої математики, що викладаються у технічних вищих освітніх закладах, доведення таких теорем частіше всього опускають, замінюючи їх твердженнями, що ґрунтуються на наочності. Але для багатьох інженерних спеціальностей необхідна більш глибока математична підготовка і вона має опиратися на достатньо міцний фундамент. Основні теореми курсу математичного аналізу, включаючи і їх доведення, на нашу думку, складають невід'ємну частину цього фундаменту.

Доведення фундаментальних теорем теорії границь і деяких інших розділів викликають неабиякі труднощі у студентів, що пов'язано із значною абстрактністю міркувань і не завжди чітко видимим геометричним змістом. Як наслідок цього, засвоєння доведення нерідко перетворюється в його заучування без розуміння, що в свою чергу, породжує думку про доведення як дещо непотрібне, недоцільне практичному використанню математики.

Наведемо деякі шляхи подолання цих труднощів та підвищення активності студентів в оволодінні теоретичним матеріалом.

Перш за все, на нашу думку, основним джерелом труднощів засвоєння абстрактних міркувань є не зміст, а форма цих міркувань. Специфіка цієї форми приводить до того, що за ε, δ – символікою та іншими подібними «атрибутами» студенти не завжди бачать сутність поняття, а це створює небезпеку відриву форми доведення теореми від її змісту.

Наведемо найпростіший приклад.

Як відомо, число A називають границею функції $f(x)$ в точці a, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0,$ що для довільного $x \in D_f$ буде мати місце співвідношення

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \qquad (1)$$

На жаль, студент не завжди здогадається, що співвідношення (1) означає той простий факт, що якщо x достатньо близько до a, то відповідне значення $f(x)$ наскільки можливо близько до A. Тому своєчасне пояснення того, що цей природній факт математично інтерпретується у співвідношення (1), значно полегшить розуміння цього важливого означення.

Наведемо ще один приклад.

За ознакою Д’аламбера, якщо для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (\forall n : a_n > 0) \qquad (2)$$

існує границя $$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad (3)$$

то при $q < 1$ ряд збігається, а при $q > 1$ – розбігається. Доведення цієї ознаки стане значно менш формальним, якщо спочатку відмітити, що на основі формули (3) при досить великих n будемо мати $\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx q$, тобто $a_{n+1} \approx qa_n$, а це означає, що при великих n ряд (2) мало відрізняється від геометричної прогресії із знаменником q, а отже, при $q < 1$ слід очікувати збіжність ряду, а при $q > 1$ – розбіжність.

Загалом, ми вважаємо, що в доведенні кожної теореми можна умовно виокремити дві складові:

1) логічна складова (ЛС), яка містить в собі основну ідею доведення;

2) технічна складова (ТС), яка здійснює реалізацію цієї ідеї засобами математичних символів і співвідношень.

Наявність цих двох складових відповідає існуванню в кожному предметі чи явищі двох таких категорій, як зміст і форма.

У різних теоремах співвідношення між ЛС і ТС доведення неоднакове. Чим більш «формальніше» твердження і доведення теореми, тим сильніше переважає в них ТС.

Наприклад, в доведенні теореми анулювання все зводиться до техніки доведення.

Теорема (анулювання). Сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) визначника на відповідні алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Доведення.

Візьмемо для доведення, наприклад елементи третього рядка та алгебраїчні доповнення елементів першого рядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{31}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{32}a_{23} - a_{32}a_{21}a_{33} + a_{32}a_{31}a_{23} + a_{33}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{33}a_{31}a_{22} = 0$$

Що й треба було довести.

Разом з тим в доведенні теореми про неперервність складеної функції явно домінує ЛС.

Дійсно, нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, причому $y = f\left[\varphi(x)\right] = F(x)$, і нехай функція $\varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $f(u)$ неперервна в точці u_0, де $u_0 = \varphi(x_0)$. Тоді, якщо x наближається до x_0, то $\varphi(x)$ наближається до $\varphi(x_0)$, тобто u наближається до u_0, а в цьому випадку в силу того, що $f(u)$ наближається до $f(u_0)$, тобто $F(x)$ наближається до $F(x_0)$, що і означає неперервність $F(x)$ в точці x_0.

Розглянемо на прикладах ЛС доведення трьох важливих теорем [1; 3]. Ці теореми характерні тим, що в їх доведеннях суттєво переважають ЛС, засвоєння яких значно полегшить засвоєння цих доведень.

Теорема1. Кожна непорожня обмежена зверху числова множина має точну верхню межу.

Доведення. Нехай E – непорожня множина, така що для всіх $x \in E$ виконується нерівність $x \le b$. І нехай a – який-небудь елемент множини E. Оскільки $\sup E$ геометрично означає праву границю множини, то для знаходження $\sup E$ нас не цікавлять точки $x \in E$, які лежать лівіше точки a. Тому, розділивши навпіл відрізок $\left[a,b\right]$, ми для знаходження правої границі множини беремо спочатку праву половину відрізка, і якщо вона містить хоча б одну точку $x \in E$, то ліва половина відкидається, а права позначається $\left[a_1,b_1\right]$. Якщо ж у правій половині відрізка $\left[a,b\right]$немає точок

$x \in E$, то права границя множини лежить ближче до a ніж до b і тоді в якості $[a_1, b_1]$ береться ліва половина.

Аналогічними міркуваннями від відрізка $[a_1, b_1]$ переходимо до відрізка $[a_2, b_2]$і т.д. В результаті такого процесу звуження пошуку правої границі множини отримаємо нескінченну систему вкладених один в одний відрізків

$$[a,b],[a_1,b_1],[a_2,b_2],...,[a_n,b_n],..., \tag{4}$$

таких, що кожний із них містить по крайній мірі одну точку $x \in E$, а правіше цього відрізка точок $x \in E$ немає, так що права границя множини лежить на цьому відрізку. Тому точка $x = M$, в яку згідно леми про вкладені відрізки, вкладається система (4) і є точною верхньою межею множини E, що і доводить її існування.

Теорема 2. Монотонно зростаюча обмежена зверху числова послідовність має границю.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}$монотонно зростає і обмежена зверху числом Q. Оскільки $\{x_n\}$є обмеженою зверху числовою множиною, то, в силу теореми 1, вона має точну верхню межу M, причому $M \le Q$. Із означення точної верхньої межі випливає, що серед чисел x_n є скільки завгодно близьких до M. Але якщо деяке x_nдостатньо близько до M, то на основі монотонного зростання послідовності всі наступні x_nзнаходяться все ближче до M. Таким чином, при досить великих n всі x_nскільки завгодно близькі до M, а це означає, що $M = \lim x_n$.

Теорема 3 (критерій Коші). Для того щоб послідовність $\{x_n\}$ мала границю, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$існувало таке $N(\varepsilon)$, що для всіх n і m:

$$n > N, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon \tag{5}$$

Доведення. Умова (5) означає, що члени послідовності з досить великими номерами як завгодно близькі між собою, тобто що послідовність $\{x_n\}$ необмежено згущується. Тому, якщо існує $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то в силу означення границі всі точки x_n при $n \to \infty$ необмежено згущуються в околі точки a, а значить, необмежено згущаються і між собою, звідки слідує (5).

І навпаки, нехай (5) виконується. Тоді послідовність необмежено згущається, звідки легко слідує її обмеженість. На основі леми Больцано-Вейєрштрасса із неї можна виділити послідовність $\{x_n\}$, таку, що

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a, \tag{6}$$

де a – деяке число. Відповідно, при $k \to \infty$ точки x_{n_k} необмежено згущуються в околі точки a. Але з іншої сторони на основі (5), точки x_n з досить великими n як завгодно мало відрізняються від x_n для великих k, а отже, на основі (6) при $n \to \infty$ і всі x_n необмежено згущуються в околі точки a, тому $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Виділення ЛС в доведенні теореми загалом не означає спробу замінити нею власне доведення або хоча б протиставити її ТС. Обидві складові одночасно присутні в доведенні, якби взаємно проникаючи одна в одну. Намагання звести доведення до його ЛС може привести до втрати такої риси математики, як строгість і чіткість формулювань та розмірковувань. Однак і зведення доведення теореми до техніки доведення погрожує лишньою формалізацією курсу, що в технічному ВОЗ зовсім неприпустимо. Саме тому, в кожній частині курсу, в процесі доведення кожної теореми слід знаходити оптимальний режим взаємодії між ЛС та ТС.

Виділення ЛС в доведеннях теорем можна використовувати як засіб безпосереднього управління процесом навчання. Поряд з наведенням на лекціях повних доведень теорем представляється доречним в окремих теоремах обмежитись викладом лише ЛС доведення, пропонуючи студентам реалізувати техніку доведення самостійно. Такий прийом є один із способів створення проблемної ситуації і його використання сприяє активізації мислення студентів.

Перспективи подальших досліджень вбачаємо у розробці практичних завдань на різноманітні доведення, що поєднують в собі запропоновані складові та в дослідженні взаємозв'язку ЛС і ТС у процесі формування логічного мислення для предметно-практичної діяльності студентів, що дозволить їм адекватно реагувати на будь-яку інформацію, яка надходить у їх розпорядження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Высш.школа, 1981. – Т.1. – 687с.
2. Триус Ю.В. Проблеми і перспективи вищої математичної освіти / Ю.В.Триус, М.Л.Баакланова // Дидактика математики: проблеми і дослідження. – 2005. – вип. 23 [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://www.nbuv.gov.ua/portal/Soc_Gum/Dmpd/2005_23/23/16-23%2023_2005.pdf.
3. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа / Г.М.Фихтенгольц. – М. : Наука, 1968. – Т.1. – 440с.
4. Хом'юк І. В. Модернізація структури та змісту курсу вищої математики на засадах компетентнісного підходу / І. В. Хом'юк // Сучасна освіта та інтеграційні процеси: збірник наукових праць міжнародної науково-методичної конференції, 22-23 листопада 2017 року, м. Краматорськ, / під заг. ред. С. В. Ковалевського, д-ра техн. наук., проф. – Краматорськ : ДГМА, 2017. – С. 215-218.
5. Хом'юк І.В. Модернізація лекційних занять з вищої математики в освітньому середовищі технічних ВНЗ/ І.В.Хом'юк //Збірник наукових праць Військового інституту Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – К.: ВІКНУ, 2015. – Вип. № 50. – С 356 – 362.

И.В. Хомюк, В.В.Хомюк. Доказательства теорем как средство активизации обучения студентов высшей математики в технических вузах

В статье проанализированы концептуальные идеи доказательства теорем в курсе математического анализа как средства активизации обучения студентов в технических вузах. Использование математических методов в производстве обусловливает необходимость в инженерах, которые будут иметь хорошо развитое логическое и алгоритмическое мышление, на формирование которого влияет именно доказательства теорем по курсу высшей математики. Определено, что доказательство фундаментальных теорем теории границ и других разделов вызывают большие трудности у студентов, что связано со значительной абстрактностью соображений и не всегда четко просматривающимся геометрическим содержанием. Приведены пути преодоления этих трудностей и повышения активности студентов в овладении теоретическим материалом. Прежде всего, по мнению автора, основным источником трудностей усвоения абстрактных рассуждений является не содержание, а форма этих соображений. Специфика этой формы приводит к тому, что за ε, δ *- символикой и другими подобными «атрибутами» студенты не всегда видят сущность понятия, а это создает опасность отрыва формы доказательства теоремы от ее содержания. Автором предложено в доказательстве каждой теоремы условно выделить две составляющие: 1) логическую составляющую (ЛС), которая содержит в себе основную идею доказательства; 2) техническую составляющую (ТС), которая осуществляет реализацию этой идеи средствами математических символов и соотношений. Наличие этих двух составляющих соответствует существованию в каждом предмете или явлении двух таких категорий, как содержание и форма. Автором предложено примеры ЛС доказательства трех важных теорем математического анализа. Установлено, что выделение ЛС в доказательствах теорем можно использовать как средство непосредственного управления процессом обучения. Наряду с наведеним на лекциях полных доказательств теорем представляется уместным в отдельных теоремах ограничиться изложением лишь ЛС доказательства, предлагая студентам реализовать технику доказательства самостоятельно. Такой прием один из способов создания проблемной ситуации и его использование способствует активизации мышления студентов.*

Ключевые слова*: активизация обучения, высшая математика, доказательства теорем, математический анализ, будущий инженер, логическая составляющая, техническая составляющая.*

I.V. Khomyuk, V.V. Khomyuk. Continuation of theory as a tool for activation of students of higher mathematics in technical university

The article analyzes the conceptual ideas of theorems in the course of mathematical analysis as a means of activating the training of students in technical university. The use of mathematical methods in production leads to the need for engineers who have a well-developed logical and algorithmic thinking, the formation of which does not in any way affect the very proof of the theorems on the course of higher mathematics. It is determined that the proof of the fundamental theorems of the theory of boundaries and some other sections causes considerable difficulties for students, which is due to the considerable abstraction of reasoning and not always clearly visible geometric meaning. Some ways to overcome these difficulties and increase the students' activity in mastering the theoretical material are given. First of all, according to the author, the main source of difficulty in assimilating abstract considerations is not the content, but the form of these considerations. The specificity of this form leads to the fact that students do not always see the essence of the concept behind symbols and other similar attributes, which creates the danger of the separation of the form of proof of the theorem from its content. The author proposed in the proof of each theorem conditionally to distinguish two components: 1) the logical component (LC), which contains the basic idea of proof; 2) a technical component (TC), which implements this idea by means of mathematical symbols and relationships. The presence of these two components corresponds to the existence in each subject or phenomenon of two categories such as content and form. The author suggests examples of LC proof of three important theorems of mathematical analysis. It is established that the selection of drugs in the proofs of theorems can be used as a means of direct control of the learning process. Along with the reference in the lectures of complete proofs of theorems it seems appropriate in some theorems to confine the statement only to the proof of the LC, offering students to implement the technique of proof independently. This technique is one of the ways of creating a problem situation and its use helps to stimulate the thinking of students.

Key words*: activation of training, higher mathematics, proofing of theorems, mathematical analysis, future engineer, logical component, technical component.*