

Вінницький національний технічний університет  
Факультет інфокомунікацій, радіоелектроніки та наносистем

Кафедра радіотехніки

# ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ ВИМІРЮВАНЬ ПАРАМЕТРІВ ТРАЄКТОРІЙ У СИСТЕМАХ БЛИЖНЬОЇ РАДІОНАВІГАЦІЇ

Магістерська кваліфікаційна робота  
за спеціальністю: 172 – Телекомунікація та радіотехніка  
Освітня програма: Радіотехніка



Виконав:  
студент 2-го курсу, групи РТ – 17м  
Сауляк С . А.  
Керівник: к.т.н., доцент каф. РТ  
Воловик А. Ю.

ВНТУ Вінниця 2019 р.

**Об'єктом дослідження** є процеси перетворення електромагнітних сигналів у приймально-вимірювальних трактах радіонавігаційних пристроїв та систем за умови різноманітності геометричної конфігурації та апріорної інформації щодо поточного стану навколишнього середовища.

**Предметом дослідження** є аналіз поточної точності та достовірності оцінок місцеположення повітряного судна, отриманих методами обробки прийнятих електромагнітних сигналів у радіовимірювальних трактах навігаційних систем.

**Мета роботи** полягає у пошуку таких методів обробки прийнятих електромагнітних сигналів, які здатні забезпечити, максимально можливу або прийнятну з практичної точки зору, точність та достовірність оцінювання місцеположення повітряного судна на основі апріорі заданої інформації щодо стану навколишнього середовища та геометричної конфігурації радіонавігаційної системи.

**Задачі дослідження** Заявлена мета може бути досягнутою у результаті розв'язання низки задач, виконаних у такій послідовності:

- відповідно до технічного завдання обґрунтувати вибір координатної системи та базового навігаційного елементу серед відомих варіантів;
- виконати порівняльний аналіз точності традиційних методів визначення місцеположення повітряного судна за результатами радіонавігаційних вимірювань;
- розробити уточнену математичну модель радіонавігаційного пристрою у вигляді прицевийного радіовисотоміра малих висот, здатного оцінювати не тільки поточну висоту польоту, а й профіль висоти підстильної поверхні;
- методами теорії оптимальної нелінійної фільтрації марковських випадкових процесів виконати



синтез прицевийного радіовисотоміра малих висот;

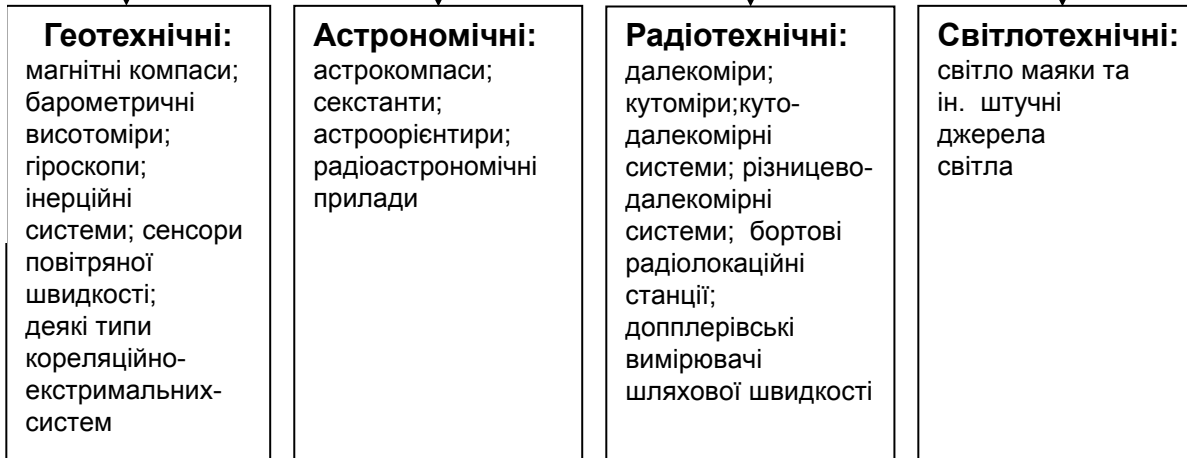
- оцінити потенційну точність синтезованого пристрою за умови прийому, як сильних так і слабких сигналів;
- оцінити структуру синтезованого пристрою на предмет можливості практичної реалізації сучасними засобами обчислювальної техніки;
- розробити систему заходів щодо спрощення алгоритму обробки прийнятих сигналів з метою розвантаження центрального процесора за критерієм обміну зниження точності до прийняттого, з практичної точки зору рівня, на обчислювальну ефективність;
- виконати аналіз економічної ефективності та собівартості пошукової науково-дослідної роботи;
- розробити систему заходів щодо охорони праці та навколишнього середовища

**Методи дослідження:** для аналізу точності визначення місцеположення повітряного судна, як функції від вимірюваного навігаційного елемента, використовувались методи аналітичної геометрії; оцінка потенційної точності базових методів побудови радіонавігаційних систем в усталеному режимі роботи виконувалась методом перетворень Лапласа, а точність у перехідних режимах досліджувалась методом простору станів; для визначення середньоквадратичних похибок при прийомі слабких та сильних сигналів застосовувались методи теорії оптимальної фільтрації марковських випадкових процесів та елементи нелінійної оптимізації, засновані на розвиненнях у багатовимірні функціональні ряди Тейлора.

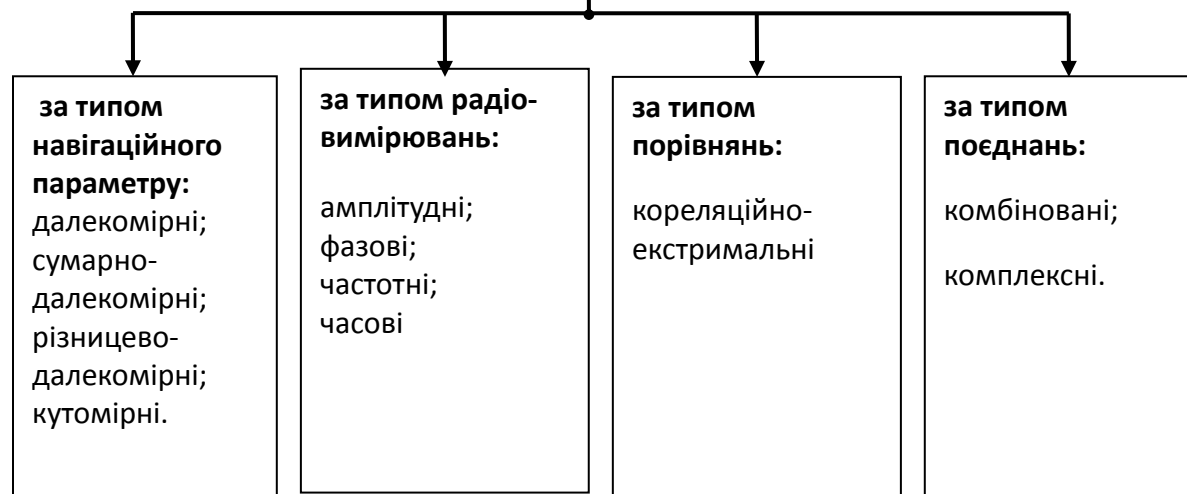




## Класифікація технічних засобів навігації



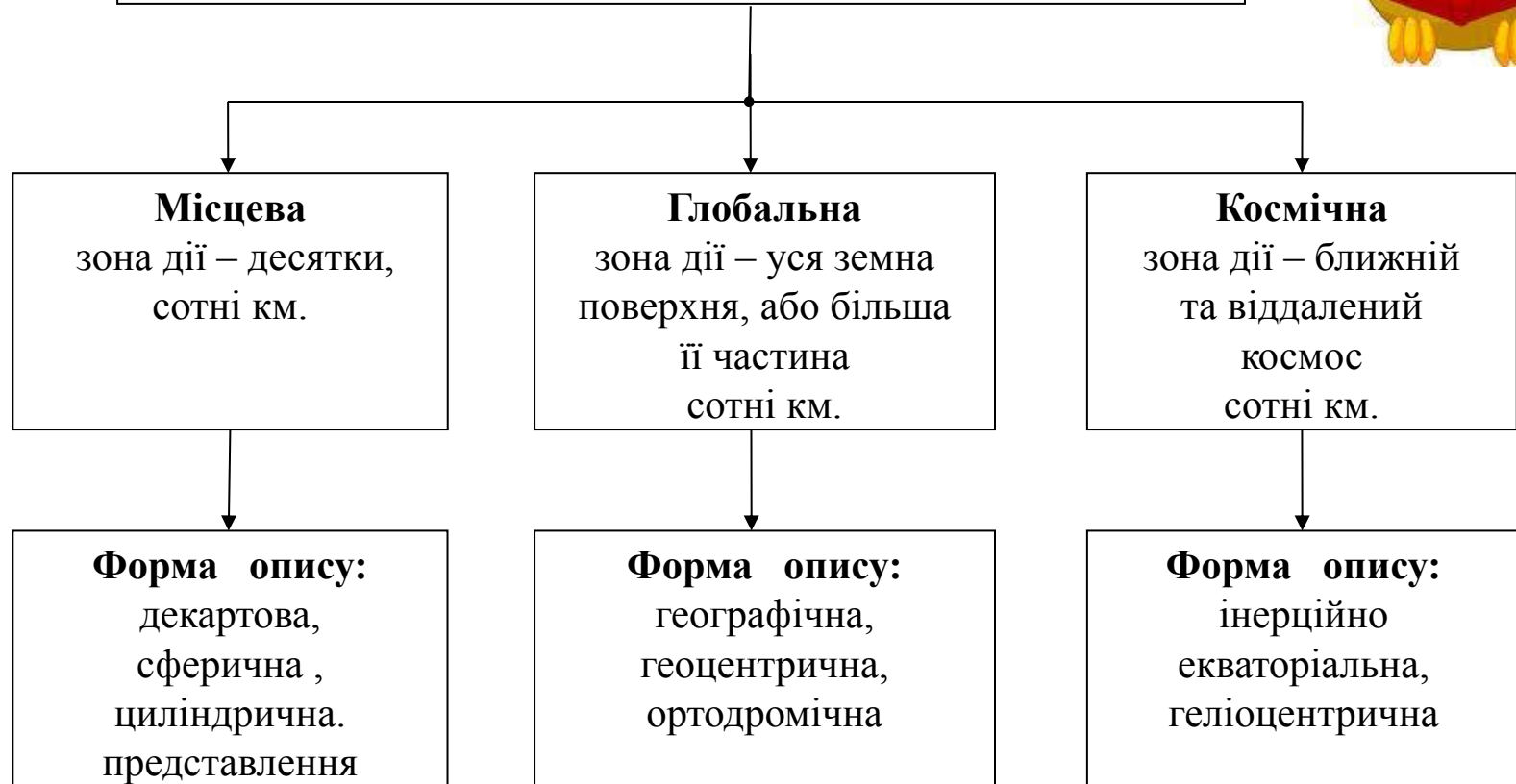
## Класифікація радіотехнічних засобів навігації



# Навігаційні елементи та основні координатні системи



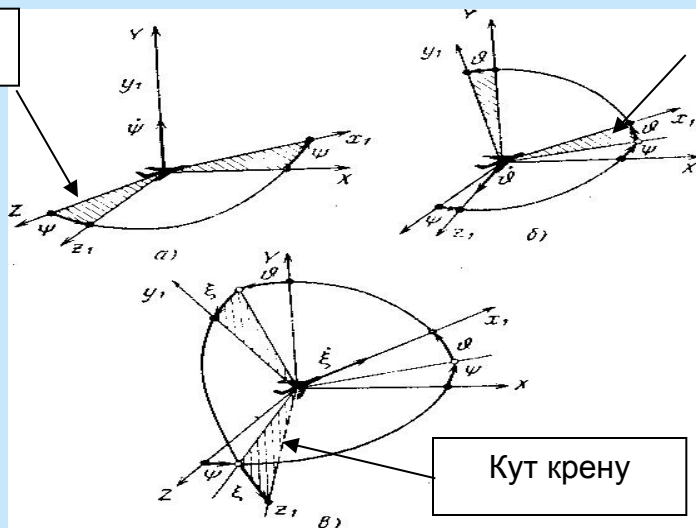
**Класифікація координатних систем за масштабом  
переміщення  
повітряного судна**



# Функціональні зв'язки між горизонтальною та зв'язаною з повітряним судном місцевими координатними системами у декартовій формі

Кут курсу

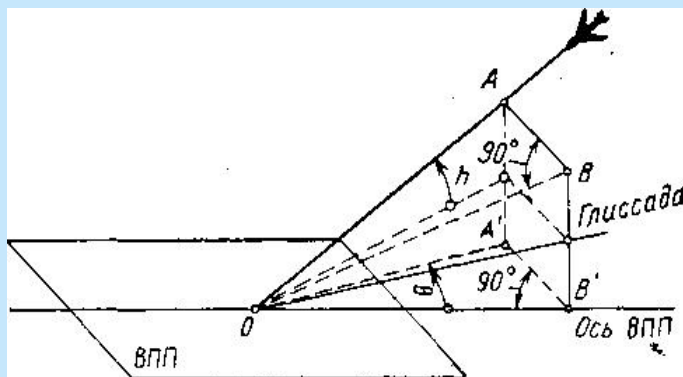
**Горизонтальна Координатна система:**  
початок відліку – у центрі маси;  
основна площина  $ZOX$  – горизонтальна і перпендикулярна до місцевої вертикалі  $OY$



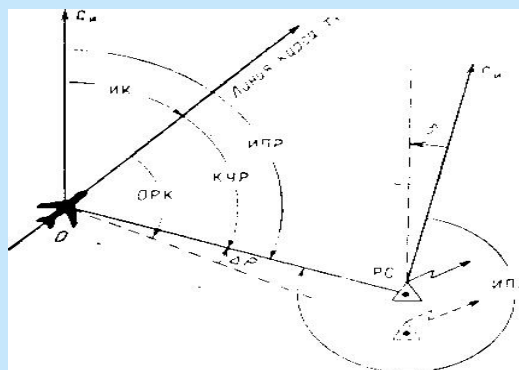
Кут тангажу

**Зв'язана з ПС координатна система**  
утворюється будівельними осями ПС:  
початок відліку – у центрі маси;  
 $OX_1$  – поздовжня вісь,  
 $OZ_1$  – поперечна вісь  
 $OY_1$  – вісь, нормальна до площини  $OX_1Z_1$ .

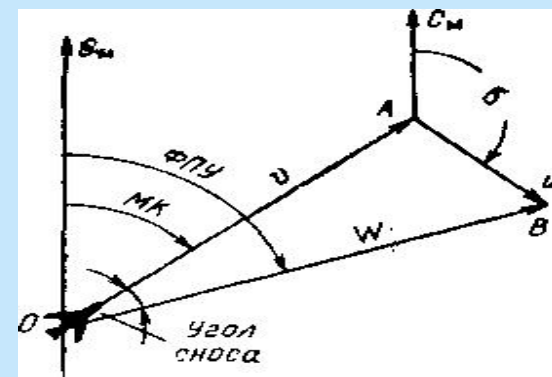
Кут крену



а)

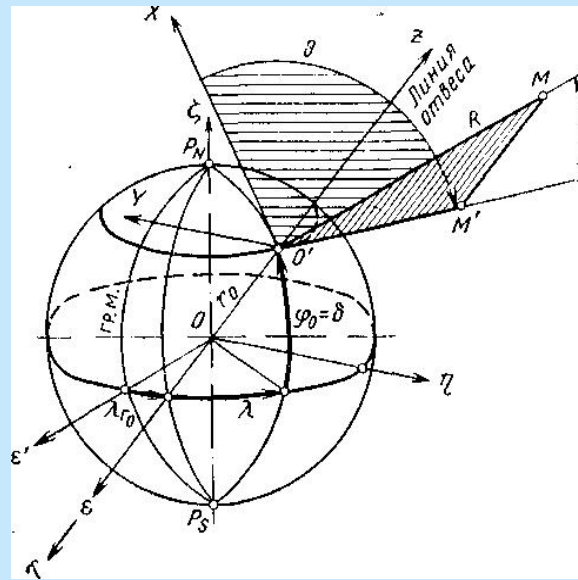
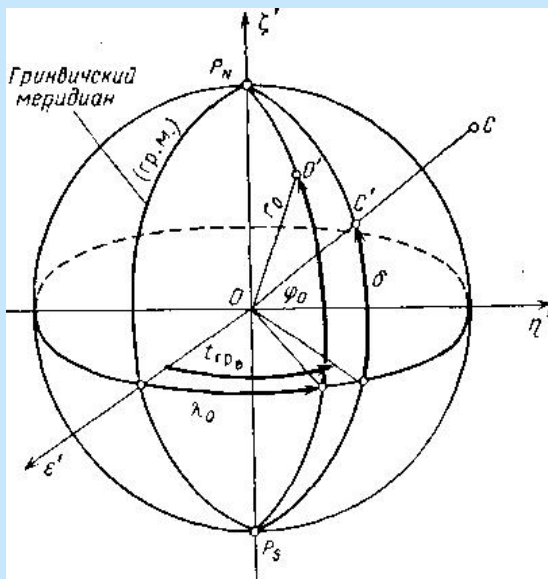


б)



в)

- Модифіковані варіанти місцевих координатних систем:
- а) схема розташування ПС щодо осі злітно-посадкової смуги;
  - б) визначення азимуту ПС на площині;
  - в) схема розташування ПС у навігаційному трикутник



Приклади інших координатних систем:  
 а) геоцентричні системи сферичних і прямокутних координат; б) горизонтальні системи сферичних і прямокутних координат з центром у точці ПС та інерційна екваторіальна система прямокутних координат з початком у центрі Землі

## Методи визначення місцеположення ПС за результатами радіонавігаційних вимірювань та аналіз їх точності

Основні тези:

Точність обчислення координат ПС у просторі залежить від похибок визначення ліній або поверхонь положення, які у свою чергу обумовлені похибками вимірювань радіонавігаційних параметрів.

Похибка визначення поверхонь(ліній) положення прийнято оцінювати відстанню по нормалі між двома поверхнями(лініями), що відповідають дійсному і виміряному значенню.

Рівняння навігаційного параметру являє собою скалярне поле координат  $p=(x, y, z)$ . Зміну цього поля зручно описувати за допомогою поняття градієнту поля.

Уведення поняття градієнту дає змогу зв'язати похибку вимірювань навігаційного параметру  $\Delta p$  з похибкою визначення поверхонь(ліній) положення  $\Delta l$  у вигляді

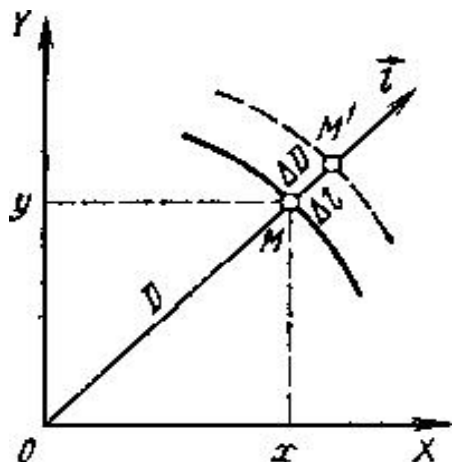
$$\Delta l = \frac{\Delta p}{|\text{grad } p|}; \quad |\text{grad } p| = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2}.$$



# Похибки визначення ліній положення для базових методів вимірювань навігаційних параметрів



## Далекомірний метод:

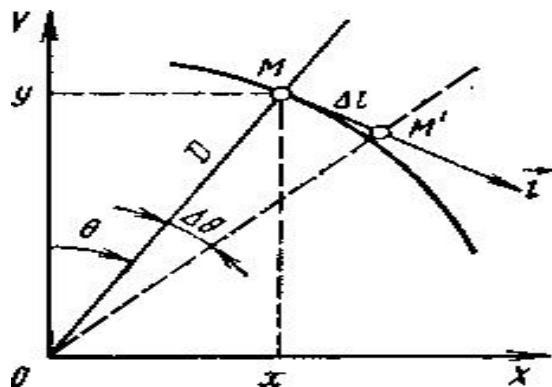


$$|\text{grad } D| = 1, \quad \Delta l = \Delta D, \quad \sigma_l = \sigma_D = \frac{c}{2} \sigma_\tau$$

де  $\sigma_\tau$  середньоквадратичне значення похибки вимірювання віддалі  $\Delta D$ ;  $\sigma_D$  середньоквадратичне значення похибки вимірювання запізнення сигналу;  $c$  – швидкість поширення радіохвиль.

Лінії положення далекомірної системи

## Кутомірний метод:



$$|\text{grad } \theta| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{D}; \quad \Delta l = D\theta, \quad \sigma_l = D\sigma_\theta$$

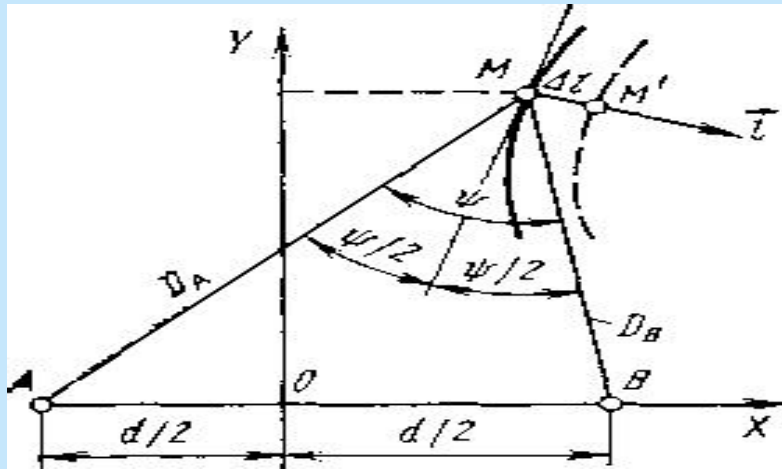
де  $\sigma_\theta$  середньоквадратичне значення похибки вимірювання кута  $\Delta\theta$ .

**Висновок:** величина похибки зростає пропорційно віддалі між ПС та радіонавігаційною точкою .

Лінії положення кутомірної системи



# Різницево-далекомірний метод



Лінії положення різницево-далекомірної системи

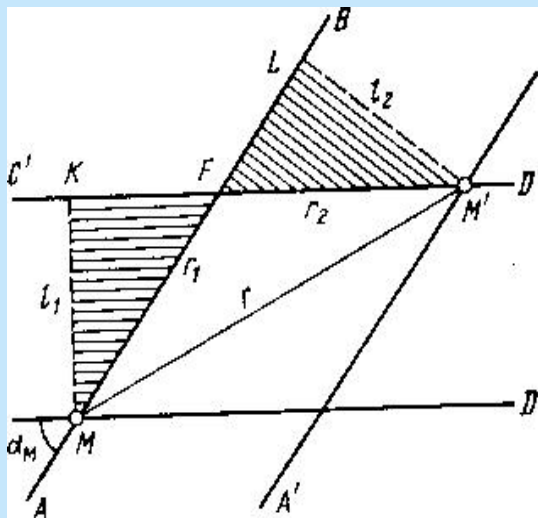
$$D_p = \sqrt{(x + d/2)^2 + y^2} - \sqrt{(x - d/2)^2 + y^2};$$

$$|\text{grad } D_p| = \sqrt{2(1 - \frac{x^2 + y^2 - d^2/4}{D_A D_B})} = \sqrt{2(1 - \frac{D_A^2 + D_B^2 - d^2}{2D_A D_B})};$$

$$\Delta l = \Delta D_p / 2 \sin(\psi/2); \quad \sigma_l = \sigma_{D_p} / 2 \sin(\Psi/2);$$

$$\sigma_l = c \sigma_\tau / 2 \sin(\Psi/2).$$

**Висновок:** величина середньоквадратичної похибки залежить від похибок вимірювання часу запізнення та кута, під яким видна база системи.



$$r = \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \alpha_M}}{\sin \alpha_M}$$

$$\sigma_r = \frac{\sqrt{\sigma_{l_1}^2 + \sigma_{l_2}^2 + 2\sigma_{l_1} \sigma_{l_2} \rho \cos \alpha_M}}{\sin \alpha_M}$$

## Висновки:

1. Середньоквадратичне значення радіальної похибки визначення місцеположення ПС залежить від дисперсій похибок виміру ліній положення AB і CD і кута, під яким перетинаються ці лінії, а також від взаємкореляційної функції.

2. Максимальна точність буде тоді, коли лінії положення перетинаються під кутом у 90°.

## Похибки визначення місцеположення ПС позиційним методом

# СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ СИСТЕМ РАДІОНАВІГАЦІЇ

## Опис динамічних систем методом простору станів

Суть методу:

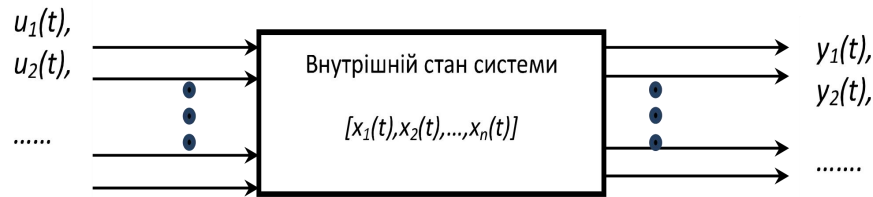
1. Концепція простору станів у сучасній системотехніці започаткована Л.А.Заде у 1963р, згідно, якої система характеризується набором впорядкованих пар функцій, що являють собою її входи та виходи.

2. Цей спосіб дає можливість досліджувати будь-яку систему виключно з точки зору співвідношень причинності між входом та виходом і без прив'язки до її фізичних властивостей і опирається на такі аксіоматичні поняття:

**Поточний стан системи** – мінімальна інформація про її минуле, яка необхідна для повного опису поведінки системи у майбутньому за умови, що поведінка її входів відома, починаючи з поточного моменту часу.

**Змінна стану** – залежна від часу математична змінна, яка повністю визначає стан системи у будь-який момент часу.

3. Опираючись ні ці аксіоми, динамічний об'єкт прийнято характеризувати системою інтегро-диференціальних рівнянь



Графічне зображення концепції змінних стану

### Математичні моделі систем:

нелінійної

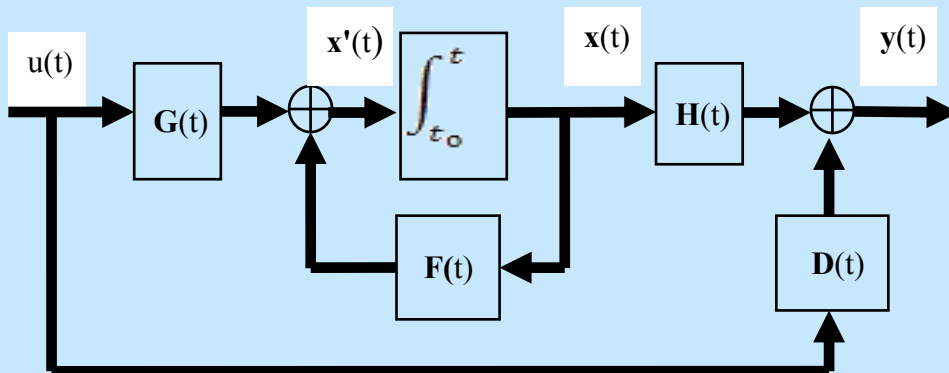
$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t); \mathbf{u}(t)],$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)].$$

лінійної

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$



Структурна схема лінійної системи в термінах змінних стану

## Приклад знаходження системних матриць

Диференційне рівняння системи

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 u^{(1)}(t) + b_{m_0} u(t),$$

Системні матриці

$$F = \frac{1}{a_0} \begin{bmatrix} -a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & a_0 & \dots & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

$$G = \begin{bmatrix} a_0 b_1 - b_0 a_1 \\ a_0 b_2 - b_0 a_2 \\ a_0 b_3 - b_0 a_3 \\ \dots \\ a_0 b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \\ a_0 b_n - b_0 a_n \end{bmatrix};$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{b_0}{a_0} \end{bmatrix}.$$

### Аналіз лінійних систем при гауссових випадкових діяннях

Апріорні дані:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t)$$

$$\overline{\mathbf{w}(t)} = E\{\mathbf{w}(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{w}(t) p(\mathbf{w}) d\mathbf{w};$$

$$\mathbf{Q}_w(t_1, t_2) = \text{cov}\{\mathbf{w}(t_1), \mathbf{w}(t_2)\} \triangleq E\left\{\left[\mathbf{w}(t_1) - \overline{\mathbf{w}(t_1)}\right]\left[\mathbf{w}(t_2) - \overline{\mathbf{w}(t_2)}\right]^T\right\};$$

$$\overline{\mathbf{x}(t_0)} = E\{\mathbf{x}(t_0)\}; \quad \mathbf{P}_{xx}(t_0) = \text{var}\{\mathbf{x}(t_0)\} \triangleq E\left\{\left[\mathbf{x}(t_0) - \overline{\mathbf{x}(t_0)}\right]\left[\mathbf{x}(t_0) - \overline{\mathbf{x}(t_0)}\right]^T\right\}.$$

**Задача полягає** у знаходженні середнього значення процесу  $\overline{\mathbf{x}(t)}$  та другого  $\mathbf{P}_{xx}(t_1, t_2)$  моменту. Розв'язок задачі базується

на використанні рівняння: 
$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau,$$

**Отриманий результат має вигляд:**

$$\overline{\mathbf{x}(t)}' = \mathbf{F}(t)\overline{\mathbf{x}(t)} + \mathbf{G}(t)\overline{\mathbf{w}(t)}$$

– рівняння для середнього значення;

$$\mathbf{P}'_{xx}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{P}_{xx}(t) + \mathbf{P}_{xx}(t)\mathbf{F}^T(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}_w(t)\mathbf{G}^T(t)$$

– рівняння для кореляційної матриці (рівняння Ріккати).

# Аналіз нелінійних систем при гауссових випадкових діяннях

Постановка задачі і основні тези :

1. Вважаючи, що апіорі відомі статистичні характеристики сигналів та завад у вигляді відповідних моделей та закон трансформації вхідних діань у вихідні процеси, тобто відома модель функціонування нелінійної системи, необхідно визначити характеристики вихідних сигналів у статистичному розумінні.
2. Загальний підхід до розв'язку подібних задача дає теорія марковських процесів, яка стверджує, що будь-який випадковий процес можна апроксимувати з достатньою точністю у рамках теорії марковських процесів за рахунок зростання розмірності та ускладнення математичного опису.
3. З теорії марковських випадкових процесів відомо, що зміна у часі умовної густини розподілу ймовірності переходу може бути описана рівнянням у часткових похідних

$$p(x, t / x_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [K_n(x, t) p(x, t / x_0, t_0)] \quad K_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta t} \right) \int_{-\infty}^{\infty} [x(t + \Delta t) - x(t)]^n p(x, t + \Delta t / x', t) dx$$

4. Рівняння справедливе для будь-якого марковського процесу за умови, що існують моменти у вищенаведеному сенсі. Практичне значення має випадок, коли усі моменти порядку, яких вищий двох дорівнюють нулю. Фактично це означає, що марковський процес довільного порядку апроксимується нормальним процесом, для повного опису якого достатньо перших двох моментів. У зв'язку зі значимістю, перші два моменти отримали спеціальні назви:

$$K_2(x, t) \triangleq b(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta t} \right) E \{ [x(t + \Delta t) - x(t)]^2 / x(t) \} \quad \text{– коефіцієнт зносу, і має інтерпретацію швидкості зміни локального середнього значення;}$$
$$K_1(x, t) \triangleq a(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta t} \right) E \{ [x(t + \Delta t) - x(t)]^1 / x(t) \} \quad \text{– коефіцієнт дифузії, і має інтерпретацію швидкості зміни локальної дисперсії.}$$

Отже, у підсумку рівняння має вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t / x_0, t_0) = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x, t) p(x, t / x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(x, t) p(x, t / x_0, t_0)].$$

5. У фізиці його називають дифузійним рівнянням, а у теорії оптимальної нелінійної фільтрації рівнянням Фоккера-Планка-Колмогорова. Це рівняння у часткових похідних другого порядку і відноситься до рівнянь параболічного типу. Точний розв'язок відомий лише для гауссового закону розподілу, а у інших випадках лише – наближений

**Висновок:** Еволюція у часі умовної густини розподілу ймовірності переходу описується у термінах коефіцієнтів зносу та дифузії.

## Взаємозв'язок рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова з рівнянням нелінійної системи, заданої у просторі станів

Основні тези:

1. У сучасній системотехніці поведінку нелінійних динамічних систем описують нелінійним стохастичним рівнянням Ланжевена

$$dx(t) = F[x(t), t]dt + G[x(t), t]w(t)dt, \quad x(t_0) = x_0,$$

де  $F[x(t), t]$  і  $G[x(t), t]$  – детерміновані, безперервні та диференційовані функції своїх аргументів,  $w(t)$  – білий гауссовий шум.

Розв'язок рівняння знаходиться як

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t F[x(\tau), \tau]d\tau + \int_{t_0}^t G[x(\tau), \tau]du(\tau).$$

2. На цьому шляху зустрічаються певні труднощі: – перший інтеграл у відповідає стандартному означенню інтеграла через елементарні суми; другий інтеграл

$$\int_{t_0}^t G[x(\tau), \tau]du(\tau) \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} G[x(\tau_i), \tau_i][u(t_{i+1}) - u(t_i)]$$

є особливим через те, що різниця являє собою приріст вінерівського процесу і його значення визначається останнім спостережуваним моментом часу, тобто  $u(t_i)$ . У такому разі порушуються умови безперервності процесу і звичайні правила визначення похідної, інтегралу не діють. Стохастичні інтеграли у такому розумінні потребують спеціальних правил поведінки з ними, і їх прийнято називати стохастичними інтегралами у розумінні Іто (ім'я математика).

3. Радянський математик Стратонович запропонував означення стохастичного інтегралу, що співпадає з загальноприйнятим, тобто

$$\int_{t_0}^t G[x(\tau), \tau]du(\tau) \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} G[x(\tau_i), \tau_i][u(t_{i+1}) - u(t_i)]$$

де внутрішня точка вибирається посередині часового інтервалу. Такий інтеграл отримав назву стохастичного у розумінні Стратоновича. При цьому залишаються правочинними усі звичайні правила, але досліджувані процеси виходять поза рамки марківських процесів у строго математичному розумінні. При цьому білий шум у (2) замінюється на згладжений ширококутний процес, що його апроксимує. На практиці така апроксимація не викликає суттєвих розходжень з концепцією Іто, оскільки смуга пропускання приймальних пристроїв набагато вужча ширини спектру згладженого шуму.

4. Тепер знайдемо зв'язку між коефіцієнтами зносу  $a[x(t), t]$  та дифузії  $b[x(t), t]$  системними функціями  $F$  і  $G$ . Для цього скористаємось результатами робіт В.І. Тіхонова з статистичної радіотехніки:

$$a[x(t), t] = F[x(t), t] + \frac{1}{2} (N/2) G[x(t), t] \frac{\partial}{\partial x(t)} G[x(t), t]; \quad b[x(t), t] = G^2[x(t), t] N/2.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p[x(t), t / x(t_0), t_0] = -\frac{\partial}{\partial x(t)} \{F[x(t), t] p[x(t), t / x(t_0), t_0]\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2(t)} \left\{ \frac{N_0}{2} G^2[x(t), t] p[x(t), t / x(t_0), t_0] \right\}.$$

# Середнє значення та дисперсія процесу на виході нелінійної системи

Основні тези:

1. Точний розв'язок рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова, за винятком декількох окремих випадків, отримати неможливо.
2. Для цілей інженерної практики достатньо знати середнє значення та дисперсію процесу на виході нелінійної системи. Ці характеристики можна отримати наближено. На практиці найбільшого поширення здобули дві групи методів отримання наближених середніх значень та дисперсії на виході нелінійної системи.
3. Перша група оснований на використанні апроксимацій умовної густини розподілу ймовірностей  $p[\mathbf{x}(t), t / \mathbf{x}(t_0), t_0]$ , які містять обмежене число параметрів, зокрема, два – середнє значення та змішаний момент другого порядку. У теорії марковських процесів таке наближення прийнято називати гауссовим.
4. До другої групи відносять методи, які засновані на апроксимації нелінійних функцій, що входять до рівняння Ланжевена рядами Тейлора з утриманням певної кількості членів ряду. Якщо у рядах утримуються члени не вище першого порядку, то отримаємо наближення першого порядку. Якщо у рядах утримуються ще й квадратичні члени, то отримуємо наближення другого порядку.

## Основний результат:

Апріорні дані:

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), t]dt + \mathbf{G}[\mathbf{x}(t), t]d\mathbf{u}(t) \quad \text{– векторне рівняння Ланжевена, де } \overline{d\mathbf{u}(t)} = \mathbf{0}, \quad \text{var}\{d\mathbf{u}(t)\} = \overline{d\mathbf{u}(t)d\mathbf{u}^T(t)} = \mathbf{Q}_w(t)dt$$

розвинення у ряд Тейлора нелінійних функцій з утриманням лише лінійних складових

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}(t), t] \approx \mathbf{F}[\overline{\mathbf{x}(t)}, t] + \frac{\partial \mathbf{F}[\overline{\mathbf{x}(t)}, t]}{\partial \mathbf{x}(t)} [\mathbf{x}(t) - \overline{\mathbf{x}(t)}];$$

$$\mathbf{G}[\mathbf{x}(t), t] \approx \mathbf{G}[\overline{\mathbf{x}(t)}, t]$$

Формули для розрахунків наближених значень середнього  $\overline{\mathbf{x}^*(t)}$  та дисперсії  $\mathbf{P}_{xx}^*(t)$  на виході нелінійної системи:

$$\frac{d\overline{\mathbf{x}^*(t)}}{dt} = \mathbf{F}[\overline{\mathbf{x}^*(t)}, t];$$

$$\frac{d\mathbf{P}_{xx}^*(t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}[\overline{\mathbf{x}^*(t)}, t]}{\partial \mathbf{x}^*(t)} \mathbf{P}_{xx}^*(t) + \mathbf{P}_{xx}^*(t) \frac{\partial \mathbf{F}^T[\overline{\mathbf{x}^*(t)}, t]}{\partial \mathbf{x}^*(t)} + \mathbf{G}[\overline{\mathbf{x}^*(t)}, t] \mathbf{Q}_w(t) \mathbf{G}^T[\overline{\mathbf{x}^*(t)}, t].$$

# СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ СИНТЕЗУ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

## Постановка задачі

Апріорні дані:

- векторне нелінійне диференціальне рівняння Ланжевена, що описує динаміку досліджуваної системи

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{G}(t) \mathbf{w}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0), \quad t > t_0, \quad \text{де } \mathbf{A}^T[\mathbf{x}(t), t] = [a_1(\mathbf{x}, t), a_2(\mathbf{x}, t), \dots, a_n(\mathbf{x}, t)], \quad \mathbf{w}^T[\mathbf{x}(t), t] = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)]$$

$\mathbf{A}$  – вектор-функція відповідного розміру;  $\mathbf{G}$  – задана матриця розміру  $(n \times m)$ ;  $E\{\mathbf{w}(t)\} = 0$ ,  $E\{\mathbf{w}(t_1) \mathbf{w}^T(t_2)\} = \mathbf{Q}_w \delta(t_1 - t_2)$ ,  $\mathbf{Q}_w$  – матриця інтенсивності білих шумів.

- математична модель нелінійного каналу спостережень  $z(t) = \mathbf{S}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{n}(t)$ ,  $t > t_0$ , де  $\mathbf{S}^T[\mathbf{x}(t), t] = [s_1(\mathbf{x}, t), s_2(\mathbf{x}, t), \dots, s_p(\mathbf{x}, t)]$  – відома вектор функція своїх аргументів,  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_p(t)]$  – вектор широкосмугових шумів, які вважаються білими і гауссовими. Функція  $\mathbf{S}[\mathbf{x}(t), t]$  визначається моделлю корисного сигналу. Процес спостережень починається з моменту  $t_0$  і до поточного  $t$ .

Усю реалізацію процесу спостережень позначимо як  $\mathbf{Y}_{t_0}^t$ .

**Задача нелінійної фільтрації** полягає в отриманні найкращої оцінки  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  у момент часу  $t$  за умови, що спостерігається процес  $\mathbf{Y}_{t_0}^t$

За оцінку приймають умовне математичне сподівання

$$\hat{\mathbf{x}}(t) \triangleq E\{\mathbf{x}(t) / \mathbf{Y}_{t_0}^t\} = \int \dots \int \mathbf{x}(t) p(\mathbf{x}, t / \mathbf{Y}_{t_0}^t) d\mathbf{x}(t), \quad d\mathbf{x}(t) \triangleq \prod_{i=1}^n dx_i(t)$$

Уся інформація про реалізацію процесу  $\mathbf{x}(t)$  міститься в умовній (апостеріорній) густині розподілу ймовірностей  $p(\mathbf{x}, t / \mathbf{Y}_{t_0}^t)$

## Основне рівняння оптимальної нелінійної фільтрації:

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t / \mathbf{Y}_{t_0}^t)}{\partial t} - \left[ p(\mathbf{x}, t / \mathbf{Y}_{t_0}^t) \right] = p(\mathbf{x}, t / \mathbf{Y}_{t_0}^t) \times \left\{ \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) - E[\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) / \mathbf{Y}_{t_0}^t] \right\}^T \mathbf{R}_n^{-1} \left\{ \mathbf{y}(t) - E[\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) / \mathbf{Y}_{t_0}^t] \right\},$$

де  $(\bullet) \triangleq - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a(\mathbf{x}, t) (\bullet) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\bullet)$  – оператор Фоккера–Планка–Колмогорова.

Ліва частина рівняння являє собою не що інше, як рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова записане у символічній формі, а права частина описує процедуру корекції за рахунок використання результатів спостережень.



# Наближені рівняння нелінійної фільтрації

Основні тези:

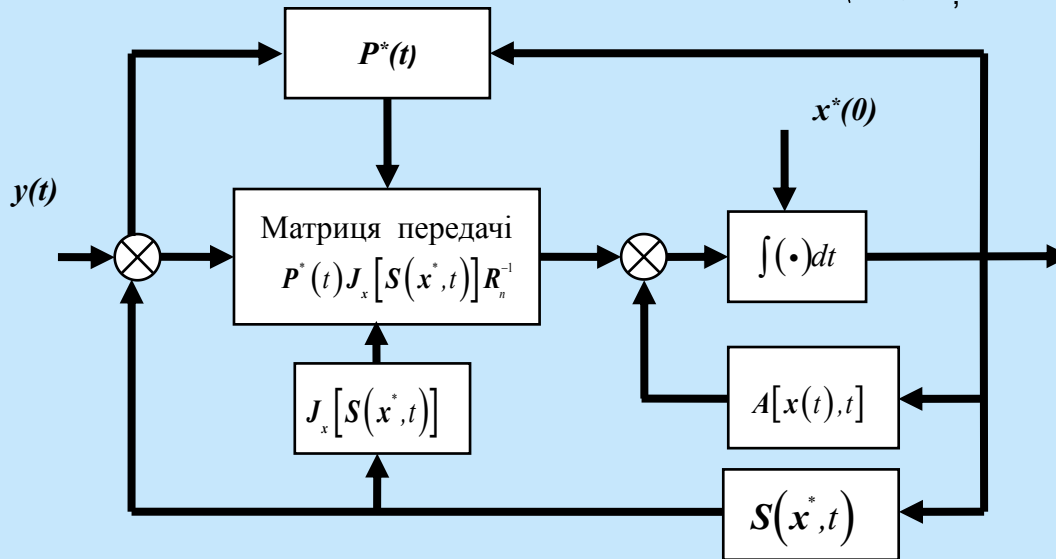
1. Проте для практичних потреб достатньо знати не саму густину розподілу, а лише оцінку вектора стану, оптимальну згідно вибраного критерію.
2. Для визначення оптимальної у строго математичному розумінні оцінки вектора стану необхідно знати апостеріорну густину розподілу, яка є розв'язком рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова. Відомо, що розв'язок цього рівняння можливий лише у окремих випадках, тому у дослідженнях прикладного характеру використовують наближені методи розв'язку.
3. Для отримання наближеної оцінки вектора стану  $x^*(t)$  припустимо, що вищезазначені функції можуть бути розвиненими у ряд Тейлора навколо точної оцінки:

$$A(x,t) = A(\hat{x},t) + J_x^T(A)|_{x=\hat{x}}(x - \hat{x}) + \dots; \quad S(x,t) = S(\hat{x},t) + J_x^T(S)|_{x=\hat{x}}(x - \hat{x}) + \dots$$

де  $J_x^T(A)$  та  $J_x^T(S)$  матриці Якобі, відповідних вектор-функцій. Зберігши лише лінійні складові ряду можна отримати наближення першого порядку для оцінки і кореляційної матриці похибок оцінювання:

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = A[x^*(t),t] + P_{xx}(t)\hat{O}_1^*; \quad x^*(t_0) = \hat{x}_0; \quad \Phi_1^* \triangleq J_x[S(x^*,t)]R^{-1}\{y(t) - S(x^*,t)\}$$

$$\frac{dP_{xx}^*(t)}{dt} = P_{xx}^*(t)J[A(x,t)] + J^T[A(x,t)]P_{xx}^*(t) + G(t)Q_w(t)G^T(t) + P_{xx}^*(t)J_x\left\{J_x\left\{S(x^*,t)R_n^{-1}(t)[y(t) - S(x^*,t)]\right\}\right\}P_{xx}^*(t)$$



Структура нелінійного фільтра при наближенні першого порядку

## Наближені рівняння нелінійної фільтрації за умови отримання скалярних спостережень

Припустимо, що вектор стану, який потребує оцінки описується рівнянням

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0), \quad t > t_0,$$

$$y(t) = S[\mathbf{x}(t), t] + n(t), \quad t \geq t_0,$$

де  $S$  – апріорі відома нелінійна скалярна функція, яка визначається моделлю корисного сигналу;  $n(t)$  – білий гаусів шум з заданими статистичними характеристиками:  $E\{n(t)\} = 0$ ,  $E\{n(t_2)n(t_1)\} = R_n(t_1)\delta(t_2 - t_1)$ ;  $R_n(t_1) = N_0/2$ .

У цьому разі відповідної корекції зазнають рівняння наближеної оцінки вектора стану  $\mathbf{x}^*(t)$  та коваріаційної матриці похибок фільтрації  $\mathbf{P}_{xx}^*(t)$ :

$$\frac{d\mathbf{x}^*(t)}{dt} = \mathbf{A}[\mathbf{x}^*(t), t] + \mathbf{P}_{xx}^*(t)\hat{\mathbf{O}}_1, \quad \mathbf{x}^*(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0;$$

$$\frac{d\mathbf{P}_{xx}^*(t)}{dt} = \mathbf{J}_x^T[\mathbf{A}(\mathbf{x}^*, t)]\mathbf{P}_{xx}^*(t) + \mathbf{P}_{xx}^*(t)\mathbf{J}_x[\mathbf{A}(\mathbf{x}^*, t)] + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}_w(t)\mathbf{G}^T(t) + \mathbf{P}_{xx}^*(t)\mathbf{\Phi}_2\mathbf{P}_{xx}^*(t); \quad \mathbf{P}_{xx}^*(t_0) = \hat{\mathbf{P}}_0$$

Стосовно інших позначень, то  $\mathbf{J}_x^T[\mathbf{A}(\mathbf{x}^*, t)] \triangleq \left[ \frac{\partial a_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \right]$  – матриця Якобі

Тут стохастичні інтеграли розуміються у сенсі Стратоновича. Такий вибір зроблений на користь практичної зручності, оскільки дає змогу застосовувати звичайні правила математичного аналізу. У інженерній практиці для подальшого спрощення алгоритмів фільтрації використовують методи малого параметру та часового осереднення.

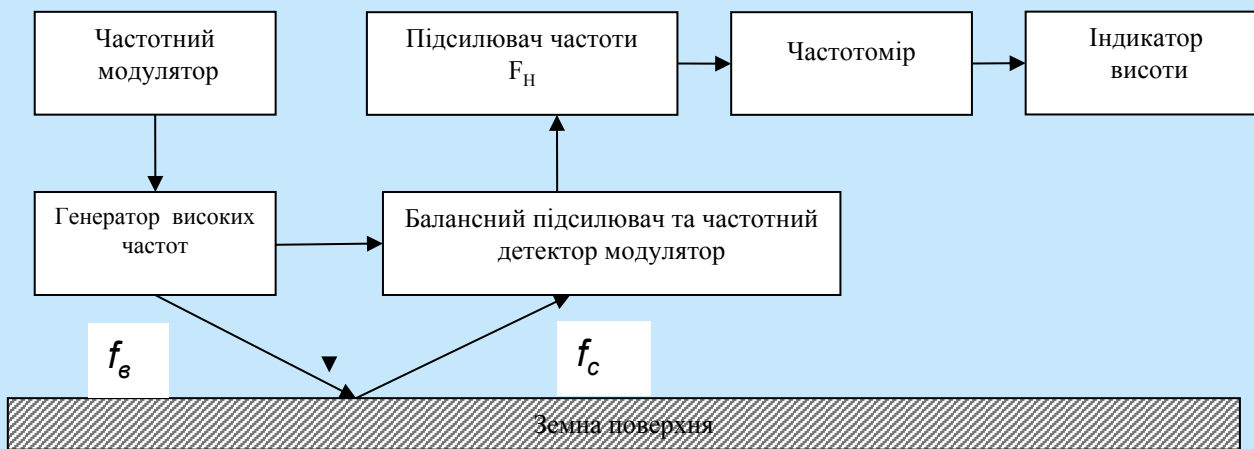
**Метод малого параметру** полягає у тому, що у рівнянні для коваріаційної матриці похибок фільтрації нехтують складовими, що містять шум. Вони вважаються флуктуаційними та малими.

**Метод часового осереднення** полягає у аналізі похибок в усталеному режимі. Унаслідок цього диференціальне рівняння стає алгебраїчним

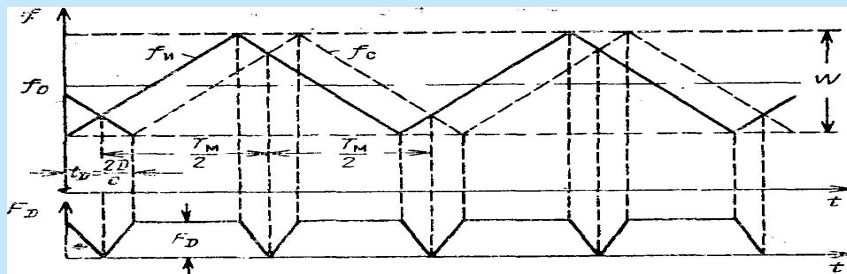
$$\mathbf{G}(t)\mathbf{Q}_w(t)\mathbf{G}^T(t) + \mathbf{P}_{xx}^*(t)\mathbf{\Phi}_2\mathbf{P}_{xx}^*(t); \quad \mathbf{P}_{xx}^*(t_0) = \hat{\mathbf{P}}_0$$

# ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ НА ПРИКЛАДІ СИНТЕЗУ РАДІОВИСОТОМІРА МАЛИХ ВИСОТ

**Сфера застосування та принцип дії радіовисотомірів малих висот.** Радіовисотоміри малих висот ( до 1500 м) застосовуються головним чином для керування польотом повітряних суден у вертикальній площині у системах заходу на посадку та автоматичної посадки, як на наземні аеродроми так і на аеродроми морського базування. Відомі застосування радіовисотомірів для здійснення м'якої посадки аерокосмічних об'єктів, літаків з вертикальним зльотом і посадкою, системах керування крилатими ракетами при польотах на низьких висотах, траєкторія яких відслідковує зміни профілю рельєфу оточуючої місцевості у вертикальній площині та ін.



Структурна схема частотного радіовисотоміра



Часова діаграма роботи частотного радіовисотоміра

Основна розрахункова формула:

$$H = \frac{c F_{H \text{ ґр}}}{4 W F_M} \approx \frac{\tilde{n}}{4 W} \frac{F_H}{F_M}$$

# Синтез пристрою прийому та обробки сигналів у системі вимірювання висоти з частотною симетричною модуляцією

Математичні моделі вхідних діянь та динаміки об'єкту навігації:

1. Сигнал, що надходить до приймального пристрою радіовисотоміра, за наявності гармонічної частотної модуляції, аналітично може бути описаним як:

$$S(t) = A \cos \left[ \omega_0 t + \frac{\Delta \omega}{\Omega} \cos \left( \Omega t - \frac{2}{c} H(t) \right) + \varphi(t) \right]$$

2. Зміну у часі профілю висоти польоту з урахуванням рельєфу оточуючої місцевості часі опишемо системою стохастичних диференційних рівнянь:

$$\frac{dH_p(t)}{dt} = H'_p(t); \quad \frac{dH'_p(t)}{dt} = -2\mu H'_p(t) - \mu^2 H_p(t) + \sqrt{4\mu^3 \sigma_p^2} n_p(t), \quad \text{де } \mu = W/\rho, \quad n_p(t) \text{ – формуючий білий гаусів шум з одиничною дисперсією.}$$

3. Якщо політ повітряного судна здійснюється у турбулентній атмосфері, то рух центра маси у вертикальній площині прийнято описувати системою таких рівнянь:

$$\frac{dH_0(t)}{dt} = W_e(t); \quad \frac{dW_e(t)}{dt} = a(t); \quad \frac{da(t)}{dt} = -(\alpha + b)a(t) - abW_e(t) + \sqrt{2\alpha^2 b \sigma_u^2} n_u(t),$$

де  $n_u(t)$  – формуючий білий гаусів шум з нульовим середнім значенням та одиничною дисперсією;  $W_e(t)$ ,  $a(t)$  – вертикальна швидкість та прискорення;  $\alpha$  – коефіцієнт, який визначається аеродинамічними характеристиками повітряного судна;  $b = V/L$ ,  $L$  – розмір турбулентності атмосфери;  $V$  – повітряна швидкість літака;  $\sigma_u$  – середньоквадратичне значення флуктуаційної складової швидкості вітру.

4. Математичну модель зміни у часі випадкової фази опишемо виразом  $\frac{d\varphi(t)}{d} = -2\frac{\omega_0}{c} V_e(t) + \sqrt{N_\varphi/2} n_\varphi(t)$ , де  $V_e(t)$  – відносна вертикальна швидкість, яка визначає швидкість зближення з землею поверхнею;  $n_\varphi(t)$  – формуючий білий гаусів шум з нульовим середнім значенням та одиничною дисперсією.

5. Об'єднуючи наведені рівняння, отримаємо систему диференційних рівнянь у формі Коші, що описують зміну висоти польоту повітряного судна у часі:

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= W_B(t) - H'_p(t) = V_B(t); & \frac{dH_p(t)}{dt} &= H'_p(t); & \frac{da(t)}{dt} &= -(\alpha + b)a(t) - abW_e(t) + \sqrt{2\alpha^2 b \sigma_u^2} n_u(t), \\ \frac{dV_B(t)}{dt} &= a(t) + 2\mu H'_p(t) + \mu^2 H_p(t) - \sqrt{4\mu^3 \sigma_p^2} n_p(t); & \frac{dH'_p(t)}{dt} &= -2\mu H'_p(t) - \mu^2 H_p(t) + \sqrt{4\mu^3 \sigma_p^2} n_p(t); & \frac{d\varphi(t)}{d} &= -2\frac{\omega_0}{c} V_e(t) + \sqrt{N_\varphi/2} n_\varphi(t) \end{aligned}$$

На вхід приймача радіовисотоміра надходить адитивна суміш сигналу та шуму:

$$y(t) = S[x(t), t] + n(t) = A \cos \left[ \omega_0 t + \frac{\Delta \omega}{\Omega} \cos \left( \Omega t - \frac{2}{c} H(t) \right) + \varphi(t) \right] + n(t)$$

Вектор стану, що підлягає оцінюванню має вигляд:

$$\mathbf{x}^T(t) = [H(t), V_B(t), H_p(t), H'_p(t), a(t), \varphi(t)]^T$$

Надалі розглянемо випадок, коли амплітуда корисного сигналу та горизонтальна швидкість повітряного судна залишаються постійними величинами, а сигнал спостережень є скалярним. За таких умов вектор стану, що підлягає оцінюванню можна описати векторним стохастичним рівнянням

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t)$$

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}(t), t] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_B \\ a(t) + 2\mu H'_p + \mu^2 H_p \\ H'_p \\ -2\mu H'_p - \mu^2 H_p \\ -(\alpha + b)a(t) - \alpha b[V_B + H'_p] \\ -\frac{2\omega_0}{c}V_B \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} \\ g_{51} & g_{52} & g_{53} \\ g_{61} & g_{62} & g_{63} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{4\mu^3\sigma_p^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{4\mu^3\sigma_p^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2\alpha^2 b\sigma_u^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0,5N_\varphi \end{bmatrix}$$

Далі конкретизуємо рівняння для наближеної оцінки вектора стану

$$\frac{d\mathbf{x}^*(t)}{dt} = \mathbf{A}[\mathbf{x}^*(t), t] + \mathbf{P}_{xx}^*(t)\mathbf{F}_1[\mathbf{x}^*(t), t], \quad \mathbf{F}_1[\mathbf{x}^*(t), t] = \left( \frac{\partial S[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} N^{-1}_0(y(t) - S[\mathbf{x}^*(t), t])$$

де  $\mathbf{P}_{xx}^*(t)$  – наближена кореляційна матриця похибок оцінювання.

У підсумку отримуємо систему диференціальних рівнянь для оцінок вектора стану:

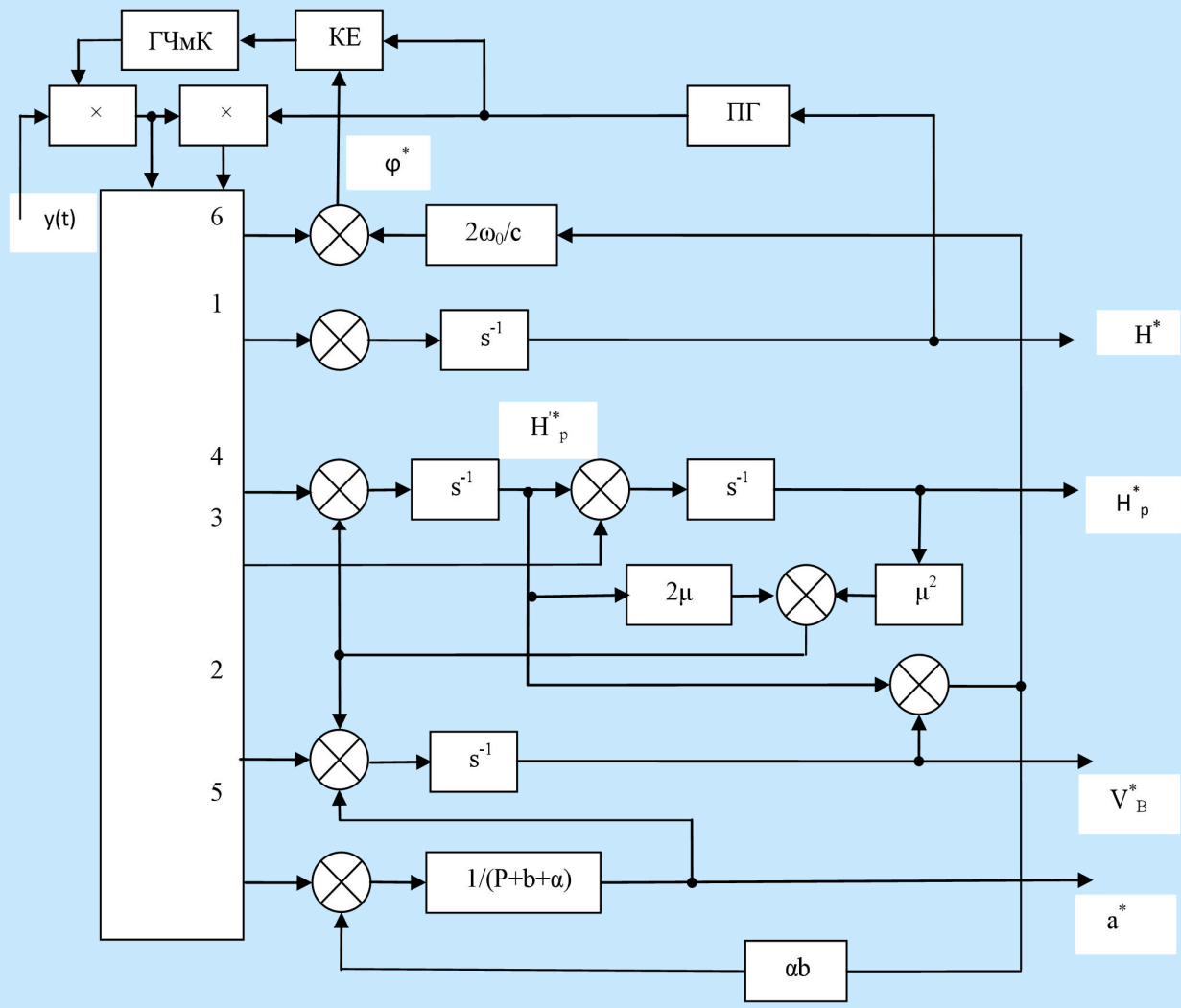
$$\frac{dH^*(t)}{dt} = V_B^*(t) + p_{11}f_1 + p_{16}f_2; \quad \frac{dV_B^*(t)}{dt} = a^*(t) + 2\mu H_p'^*(t) + \mu^2 H_p^*(t) + p_{21}f_1 + p_{26}f_2;$$

$$\frac{dH_p^*(t)}{dt} = H_p'^*(t) + p_{32}f_1 + p_{36}f_2; \quad \frac{dH_p'^*(t)}{dt} = -2\mu H_p'^*(t) - \mu^2 H_p^*(t) + p_{41}f_1 + p_{46}f_2;$$

$$\frac{da^*(t)}{dt} = -(\alpha + b)a^*(t) - \alpha b[V^*(t) + H_p'^*(t)] + p_{52}f_1 + p_{56}f_2; \quad \frac{d\varphi^*(t)}{d} = -2\frac{\omega_0}{c}V_B^*(t) + p_{61}f_1 + p_{66}f_2$$

де  $p_{ij}$  – елементи коваріаційної матриці ;  $f_1 = \frac{4A\Delta\omega}{N_0c} y(t) \sin\Phi_1^* \sin\Phi^*$ ;  $f_2 = \frac{2A}{N_0} y(t) \sin\Phi^*$ ;  $\Phi^* = \left[ \omega_{0r} + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \cos\Phi_1^* + \varphi^* \right]$ ;  $\Phi_1^* = \left[ \Omega t - \frac{2}{c} H^*(t) \right]$

Відповідно до одержаної системи рівнянь складена структурна схема оптимального радіовисотоміра



Структура синтезованого радіовисотоміра

До складу цієї структури входять:

1. Підсистема ФАПЧ, утворена блоками КЕ ( кер. елемент), ГЧМК (генератор частотних модульованих коливань), ПГ - генератор, що перестроюється, канал оцінки фази та пристрій перемноження сигналу  $y(t)$ . Пристрій перемноження являє собою фазовий детектор. Разом вони забезпечують квазікогерентну обробку вхідного сигналу.
2. Оцінки компонент вектора стану формуються на виходах 1-6 блоку перетворень у складі оптимального двовимірного дискримінатора та блоку підсилювачів з оптимальними коефіцієнтами передачі.
3. Виходи 3-4 формують фільтр, який оцінює профіль рельєфу підстильної поверхні. На виходах 1,2,5 формуються оцінки параметрів номінальної висоти згідно заданого режиму польоту. У комбінації з виходами 3-4 формуються значення оцінок істинної висоти повітряного судна з урахуванням поточних значень профілю рельєфу місцевості.

# Оцінка потенційної точності вимірювань висоти

Оцінка потенційної точності виконувалась шляхом чисельного розв'язку матричного рівняння Ріккати методом Рунге-Кута четвертого порядку.

$$\frac{dP_{xx}^*(t)}{dt} = P_{xx}^*(t) J [A(x,t)] + J^T [A(x,t)] P_{xx}^*(t) + G(t) Q_w(t) G^T(t) + P_{xx}^*(t) J_x \left\langle J_x \left\{ S(x^*,t) R_n^{-1}(t) [y(t) - S(x^*,t)] \right\} \right\rangle P_{xx}^*(t)$$

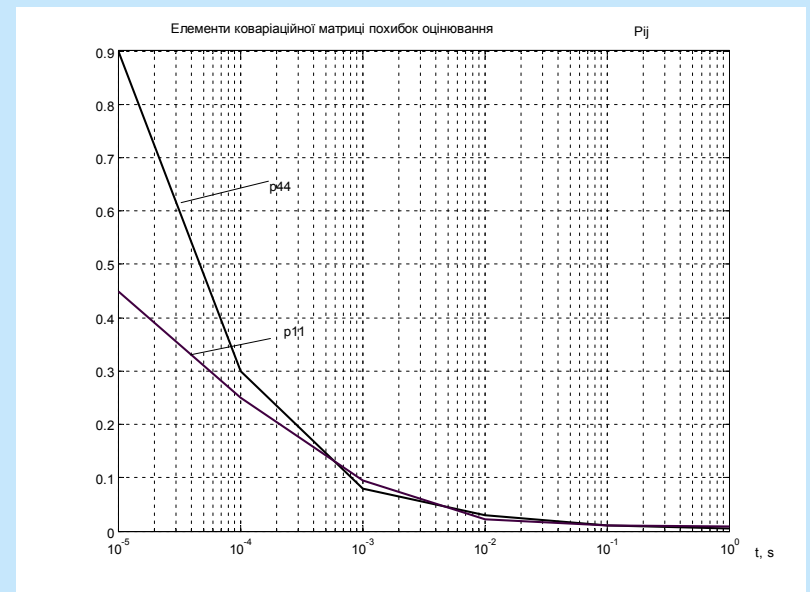
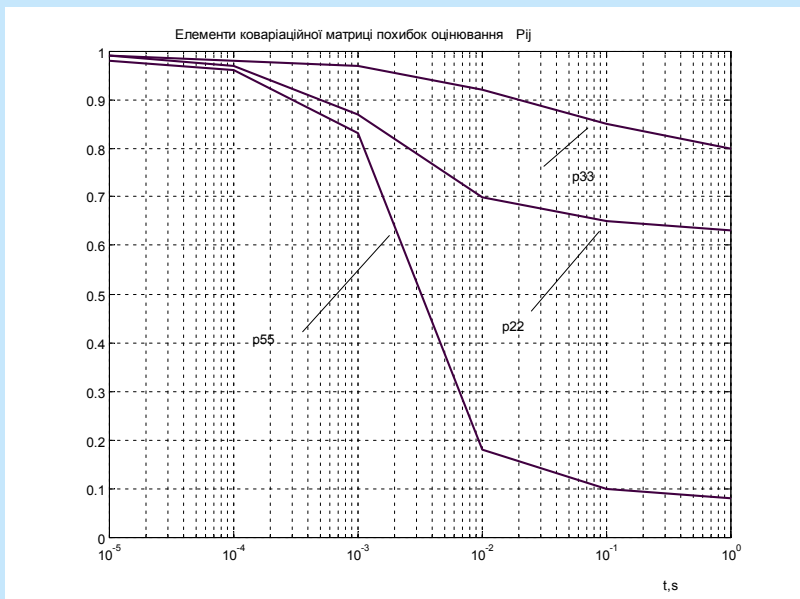
де  $J_x \left\{ S(x^*,t) R_n^{-1}(t) [y(t) - S(x^*,t)] \right\}$  слід розглядати як вектор, а  $J_x \left\{ \bullet \right\}$  – матриця Якобі від аргументу  $\left\{ \bullet \right\}$ .

Оскільки коваріаційна матриця похибок оцінювання є симетричною, то для її визначення достатньо лише розв'язати систему з  $(n+1)n/2$  рівнянь, де  $n$  – порядок системи. У даному випадку  $n=6$ , тобто число рівнянь становитиме двадцять одне. Розрахунки проводились за допомогою пакету прикладних програм MatLab з використанням розширення Control System Toolbox за таких умов:

$$\alpha = 1,3 c^{-1}, \quad b = 1 c^{-1}, \quad \mu = 0,175 c^{-1}, \quad \sigma_p = 15 \text{ м} \quad \sigma_u = 2,5 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}, \quad f_0 = 4,44 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2}$$

$$F = (\Omega / 2\pi) = 300 \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}, \quad \theta_a = 0,7 \text{ рад}$$

Отримані залежності виражені у нормованій формі, тобто розглядались величини  $p_{ij}(t) / p_{ij}(0)$ . Апріорні дані для  $P_{xx}(0)$  були такими:  $p_{11}(0)=300 \text{ м}^2$ ,  $p_{22}(0)=13,2 \text{ м}^2$ ,  $p_{33}(0)=225 \text{ м}^2$ ,  $p_{44}(0)=6,9 \text{ м}^2 \cdot \text{сек}^{-2}$ ,  $p_{55}(0)=8,125 \text{ м}^2 \cdot \text{сек}^{-4}$ ,  $p_{66}(0)=0,5 \text{ рад}^2$ .



Результати розрахунків елементів кореляційної матриці похибок оцінювання



**ДЯКУЮ**



**ЗА УВАГУ...**