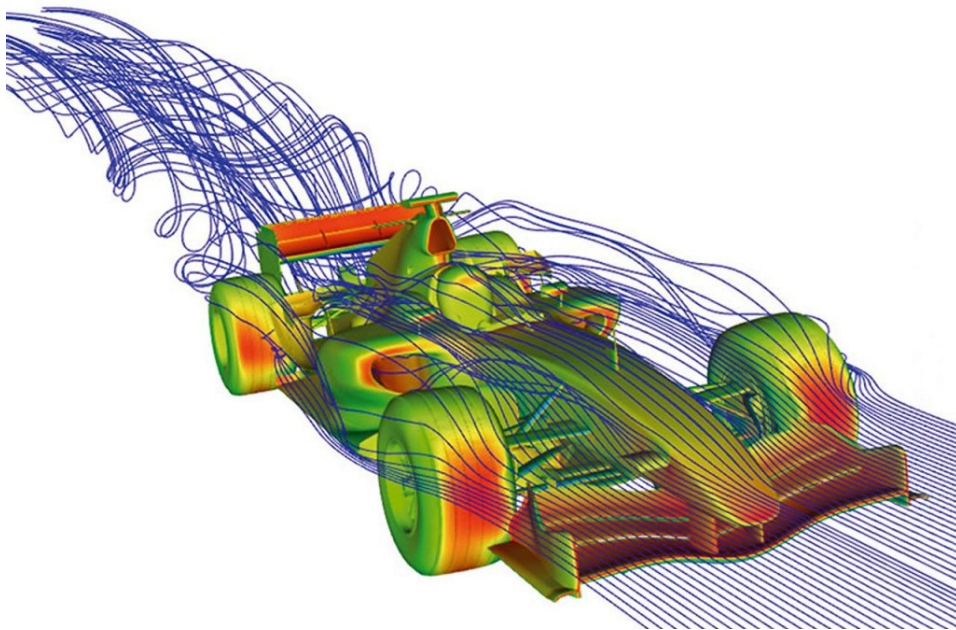


Я. В. Іванчук, Р. Д. Іскович-Лотоцький

**ГІДРАВЛІКА, ГІДРО- ТА ПНЕВМОПРИВОДИ
ЧАСТИНА 1
ОСНОВНІ ЗАКОНИ, РІВНЯННЯ І ВИЗНАЧЕННЯ**



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Я. В. Іванчук, Р. Д. Іскович-Лотоцький

**ГІДРАВЛІКА, ГІДРО- ТА ПНЕВМОПРИВОДИ
ЧАСТИНА 1
ОСНОВНІ ЗАКОНИ, РІВНЯННЯ І ВИЗНАЧЕННЯ**

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2019

УДК 62-522.2

I-86

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 11 від 25.04.2019 р.)

Рецензенти:

В. І. Савуляк, доктор технічних наук, професор

І. В. Севостьянов, доктор технічних наук, професор

І. П. Паламарчук, доктор технічних наук, професор

Іванчук, Я. В.

I-86 Гідравліка, гідро- та пневмоприводи. Частина 1. Основні закони, рівняння і визначення : навчальний посібник / Я. В. Іванчук, Р. Д. Іскович-Лотоцький. – Вінниця : ВНТУ, 2019. – 183 с.

Посібник містить основні закони і рівняння гідравліки, які охоплюють розділи властивостей рідин, гідростатики, кінематики та динаміки рідин, гідродинамічної подібності й особливих випадків течії. Викладено основні питання, спрямовані на набуття студентами теоретичних знань і практичних навичок щодо застосування основ процесів, які протікають в рідких середовищах, в основному, з орієнтацією на гідравлічні приводи технологічного обладнання. Призначений для студентів машинобудівних спеціальностей вищих навчальних закладів та коледжів усіх форм навчання.

УДК 62-522.2

© ВНТУ, 2019

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ.....	7
1.1 Предмет вивчення гідравліки в машинобудуванні	9
1.2 Рідина як об'єкт вивчення гідравліки.....	12
1.3 Гіпотеза суцільності	13
2 ОСНОВНІ ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИН.....	14
2.1 Густина.....	14
2.2 Питома вага	15
2.3 Стисливість рідини.....	15
2.4 Температурне розширення рідини.....	18
2.5 Розчинність газів.....	19
2.6 Кипіння	20
2.7 Опір рідин на розтяг	20
2.8 В'язкість.....	20
2.9 Закон рідинного тертя – закон Ньютона	21
2.10 Аналіз властивостей в'язкості	22
2.11 Неньютонівські рідини	23
2.12 Визначення в'язкості рідини	24
3 ЕКСПЛУАТАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИН.....	26
3.1 Зміна характеристик робочих рідин	28
3.2 Забруднення під час поставки, зберігання і заправки.....	28
3.3 Забруднення в процесі виготовлення, збирання та випробування..	29
3.4 Забруднення в процесі експлуатації	29
3.5 Розпад рідини під дією різних факторів.....	30
3.6 Наслідки забруднення робочої рідини	31
3.7 Робочі рідини	33
4 ГІДРОСТАТИКА.....	34
4.1 Сили, що діють в рідині	34
4.1.1 Масові сили.....	34
4.1.2 Поверхневі сили	35
4.1.3 Сили поверхневого натягу	35
4.1.4 Сили тиску	36
4.1.5 Властивості гідростатичного тиску	37
4.2 Основні рівняння гідростатики	41
4.2.1 Визначення основного рівняння гідростатики	41
4.3 Прилади для вимірювання тиску	42
5 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ РІДИНИ, ЯКА ЗНАХОДИТЬСЯ В СТАНІ СПОКОЮ	45
5.1 Частинні випадки інтегрування рівнянь Ейлера	48
5.1.1 Рідина в стані спокою під дією сили тяжіння	48
5.1.2 Прямолінійний рівноприскорений рух посудини з рідиною ..	50
5.1.3 Рівномірне обертання посудини з рідиною.....	52

6	ТИСК РІДИНИ НА СТІНКИ.....	55
6.1	Сила тиску рідини на плоску стінку	55
6.2	Центр тиску	56
6.3	Сила тиску рідини на криволінійну стінку	59
6.4	Кругла труба під дією гідростатичного тиску	61
6.5	Гідростатичний парадокс.....	62
6.6	Основи теорії плавання тіл	62
7	КІНЕМАТИКА РІДИНИ	64
7.1	Види руху (течії) рідини	64
7.2	Типи потоків рідини	66
7.3	Гідравлічні характеристики потоку рідини	67
8	РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ	71
8.1	Рівняння нерозривності для елементарного потоку рідини.....	71
8.2	Рівняння нерозривності в гідравлічній формі для потоку рідини при встановленому русі.....	72
8.3	Диференціальні рівняння нерозривності руху рідини.....	72
9	ДИНАМІКА РІДИН	78
9.1	Диференціальні рівняння Ейлера для руху ідеальної рідини	78
9.2	Перетворення рівнянь Ейлера	80
9.3	Дослідження рівнянь Ейлера.....	81
9.4	Диференціальні рівняння руху в'язкої рідини (рівняння Нав'є–Стокса)	84
10	ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ ЕЙЛЕРА.....	86
10.1	Рівняння Бернуллі.....	86
10.1.1	Рівняння Бернуллі для струменя ідеальної рідини.....	87
10.2	Геометрична інтерпретація рівняння Бернуллі	89
10.3	Енергетична інтерпретація рівняння Бернуллі.....	90
10.4	Рівняння Бернуллі для потоку ідеальної рідини	91
10.5	Рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини.....	93
11	РЕЖИМИ ТЕЧІЇ РІДИНИ	95
11.1	Два режими течії рідини	95
11.2	Фізичний смисл числа Рейнольдса	97
11.3	Основні особливості турбулентного режиму руху	98
11.4	Виникнення турбулентного режиму руху рідини	99
11.5	Виникнення ламінарного режиму	100
12	ГІДРАВЛІЧНІ ОПОРИ В ПОТОКАХ РІДИНИ.....	102
12.1	Опір потоку рідини.....	102
12.2	Гідравлічні втрати по довжині	103
12.3	Ламінарний потік рідини	105
13	ТУРБУЛЕНТНИЙ РЕЖИМ ТЕЧІЇ РІДИНИ	112
13.1	В'язке тертя при турбулентному русі.....	112
13.2	Турбулентна течія в трубах	114
13.3	Турбулентна течія в гладких трубах.....	115
13.4	Турбулентна течія в шорстких трубах.....	116

14	МІСЦЕВІ ГІДРАВЛІЧНІ ВТРАТИ	119
14.1	Місцеві гідравлічні опори	119
14.2	Види місцевих опорів	120
14.2.1	Миттєве розширення. Теорема Борда-Карно	120
14.2.2	Миттєве звуження потоку	123
14.2.3	Поступове розширення потоку	124
14.2.4	Поступове звуження потоку	126
14.2.5	Раптовий поворот потоку	127
14.2.6	Плавний поворот потоку	127
15	КРИТЕРІЇ ПОДІБНОСТІ	128
15.1	Основи теорії подібності, геометрична і динамічна подібність ..	128
15.2	Критерії подібності для потоків нестисливої рідини	129
15.2.1	Критерії подібності Ньютона	129
15.2.2	Критерії подібності Ейлера	130
15.2.3	Критерії подібності Рейнольдса	131
15.2.4	Критерії подібності Фруда	133
15.2.5	Висновок про подібність напірних потоків	133
16	ВИТІКАННЯ РІДИНИ З ОТВОРІВ І НАСАДОК	134
16.1	Стиснення струменя	134
16.2	Витікання через малий отвір у тонкій стінці	135
16.3	Витікання через насадки	138
17	ГІДРАВЛІЧНИЙ РОЗРАХУНОК ТРУБОПРОВОДІВ	140
17.1	Прості трубопроводи постійного перерізу	140
17.2	Послідовне з'єднання трубопроводів	142
17.3	Паралельне з'єднання трубопроводів	144
17.4	Розгалужені трубопроводи	146
17.5	Трубопроводи з насосною подачею рідини	147
18	ГІДРАВЛІЧНИЙ УДАР В ТРУБОПРОВОДАХ	150
18.1	Швидкість поширення гідравлічної ударної хвилі в трубопроводі	154
18.2	Ударний тиск	158
18.3	Протікання процесу гідравлічного удару в часі	159
18.4	Різновиди гідроудару	160
19	ОСОБЛИВІ ВИПАДКИ ЛАМІНАРНОЇ ТЕЧІЇ	162
19.1	Ламінарний потік в зазорах	162
19.1.1	Ламінарний плин в плоских зазорах	162
19.1.2	Ламінарний потік в плоских зазорах з рухомою стінкою ...	164
19.1.3	Ламінарний потік в кільцевих зазорах	166
19.1.4	Ламінарний потік в трубах прямокутного перерізу	168
19.1.5	Мастильний шар у підшипнику	169
20	ОСОБЛИВІ РЕЖИМИ ТЕЧІЇ РІДИНИ	172
20.1	Кавітаційні течії	172
20.2	Течія із облітерацією	174
20.3	Течія з теплообміном	175
20.4	Течія при великих перепадах тиску	177
	ЛІТЕРАТУРА	181

ВСТУП

Навчальний посібник призначений для студентів машинобудівних спеціальностей закладів вищої освіти, технікумів та коледжів усіх форм навчання. Зміст навчального посібника відповідає плану і програмі лекційних занять з дисципліни «Гідравліка, гідро- та пневмоприводи». Він може слугувати методичним керівництвом під час теоретичної підготовки до занять, а також при виконанні їх практичної частини.

Основною метою цього навчального посібника – надати всім, хто вивчає дисципліну «Гідравліка, гідро- та пневмоприводи» матеріал, який дозволить випрацювати навички застосування теоретичних відомостей до розв’язку конкретних задач технічного характеру і тим самим засвоїти методику підходів до вирішення практичних задач.

У першій частині навчального посібника викладаються теоретичні основи гідравліки – важливі наукові положення про рівновагу і рух рідини, які застосовуються для розв’язування практичних задач [1–5]; детально розглядаються фізичні властивості, особливості руху рідини; наводяться нові наукові дані, отримані за останній час при вивченні механіки рідини. Найбільшу увагу в навчальному посібнику приділено гідравліці трубопроводів (внутрішній задачі гідродинаміки) [4–8].

У цьому посібнику подано практично всі основні питання, що стосуються теоретичних основ і прикладних задач гідромеханічних процесів.

До списку літератури внесено книги, використані авторами для підготовки цього навчального посібника, або книги, які рекомендуються студентам для додаткового вивчення.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Механіка, як розділ фізики, вивчає закони рівноваги і руху матеріальних тіл різних видів (рис. 1.1). Вона поділяється на:

1. механіку твердого тіла, яка вивчає спокій і рух тіл як сукупність сильно зв'язаних матеріальних точок;
2. механіку сипучих середовищ, яка вивчає рух піщаних ґрунтів, зерна тощо;
3. механіку рідких середовищ, в якій вивчають рівновагу та рух рідини.

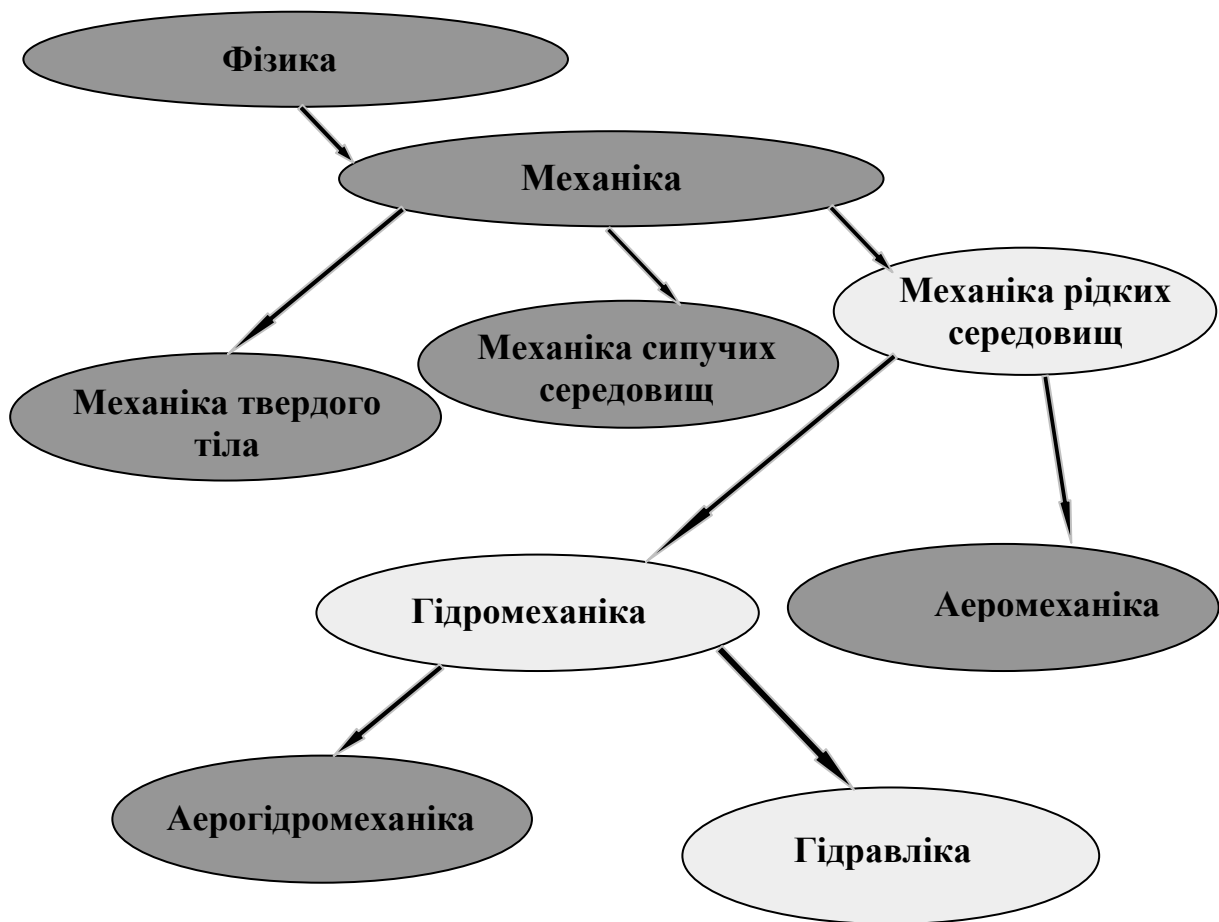


Рисунок 1.1 – Класифікація розділів науки фізика

Частина механіки рідких середовищ, яка розглядає рух рідин, а також силову взаємодію між рідиною та обтікаючими її тілами, або обмежуючими її поверхнями, називається гідромеханікою.

Розділ механіки, в якому вивчають рух газів і рідин та обтікання ними тіл, називають аеромеханікою (рис. 1.1).

Прикладну частину гідромеханіки, для якої характерне певне коло технічних запитань, завдань і методів їх вирішення, називають технічною механікою рідин або гідравлікою.

Зазвичай гідравліку визначають як науку про закони рівноваги і руху рідин та про способи застосування цих законів до вирішення практичних задач. У гідравліці розглядають, головним чином, потоки рідини, обмежені та направлені твердими стінками, тобто рух у відкритих та закритих руслах (каналах). Можна сказати, що гідравліка вивчає внутрішній потік рідин і розв'язує так звану «внутрішню» задачу на відміну від «зовнішньої» задачі, пов'язаної із зовнішнім обтіканням тіл суцільним середовищем, що має місце при русі твердого тіла у рідині або газі (повітрі). «Зовнішню» задачу розглядають власне у гідромеханіці або гідроаеромеханіці. Цей розділ, в основному, пов'язаний із потребами авіації та суднобудування.

У гідравліці при вирішенні різних практичних задач широко використовуються ті чи інші допущення і припущення, що спрощують задачі, які розглядаються. Досить часто розв'язки в гідравліці ґрунтуються на результатах експериментів, і тому в гідравліці використовується відносно багато різних емпіричних і напівемпіричних формул. При цьому, як правило, оцінюються тільки головні характеристики досліджуваного явища, і часто використовуються ті чи інші інтегральні та осереднені величини, які дають достатні для технічних задач характеристики явищ, що розглядаються.

За своїм характером технічна механіка (гідравліка) близька до відомих дисциплін – опору матеріалів і будівельної механіки, у яких також вивчаються питання механіки твердого тіла. Потрібно враховувати, що гідравліка, будучи загально-технічною дисципліною, може розглядатися як «професійна фізика рідкого тіла», у якій, зокрема, даються основи відповідних гідравлічних розрахунків. Ці розрахунки використовуються при проектуванні інженерних гідротехнічних споруд, конструкцій, а також гідросистем технологічного обладнання, що використовуються у багатьох галузях техніки.

Зрозуміло, що гідравліка поділяється на статику рідини (гідростатику), кінематику потоків рідини та динаміку рідини (гідродинаміку).

Метод, який використовується у сучасній гідравліці при дослідженні руху, полягає в такому. Досліджувані явища спочатку спрощуються, і до них застосовують закони теоретичної механіки. Потім отримані результати порівнюють із даними дослідів, визначають ступінь розходження, уточнюють та виправляють теоретичні висновки і формули для їх пристосування до практичного використання. Цілий ряд явищ вкрай важко піддаються теоретичному аналізу, з огляду на складність їх досліджують експериментальним шляхом, а результати такого дослідження подають у вигляді емпіричних формул [9].

Особливо велике значення гідравліки в машинобудуванні, де необхідно мати справу із закритими потоками у трубах під тиском, багаторазово перевищуючими атмосферний. Гідросистеми, які складаються із насосів, трубопроводів, різних гідроагрегатів, широко використовують у машино-

будуванні як пристрої передачі та перетворення енергії, рідкого охолодження, паливоподачі, мащення тощо.

Можна також відмітити, що має місце й інший підхід до класифікації розділів механіки рідких середовищ. У цьому підході говорять про два різних методи дослідження:

– метод «технічної механіки рідини» («технічної гідромеханіки», «гідрравліки»),

– метод «математичної механіки рідини» («математичної гідромеханіки»).

У математичній механіці рідини широко використовується відносно складний математичний апарат. Рішення, отримані в такому випадку, виявляються більш строгими в математичному відношенні.

Як показав досвід, методи математичної механіки рідини дуже часто виявляються настільки важкими, що величезну більшість практичних задач такими методами розв'язати неможливо. Цим і пояснюється виникнення та розвиток технічної, прикладної науки – технічної механіки рідин, тобто гідрравліки, яка прагне дати приблизні відповіді на всі ті запитання, пов'язані із рухомою або нерухомою рідинами, які ставить перед нами практика.

Можна сказати, що в технічній гідромеханіці (гідрравліці) приблизно розв'язуються складні задачі за допомогою простих методів. У математичній гідромеханіці відносно точно розв'язуються тільки деякі найпростіші задачі за допомогою складних методів.

1.1 Предмет вивчення гідрравліки в машинобудуванні

Важливою частиною майже будь-якого технологічного обладнання, верстата, преса, маніпулятора тощо є привод. Найпростішим чином привод можна розуміти як сукупність пристроїв, призначених для перетворення та передачі енергії, необхідної для здійснення технологічного руху із заданими кінематичними та силовими характеристиками. У техніці широко застосовуються механічний, електричний, пневматичний (газовий, частіше всього повітряний) та гідрравлічний приводи та їх комбінації. Найважливішою характеристикою будь-якого привода є обертальний момент (або сила), який може забезпечуватись при одних і тих самих розмірах чи вазі. Спробуємо порівняти за цим показником електричний, пневматичний та гідрравлічний приводи.

Для такого аналізу розглянемо основний елемент привода, який найчастіше зустрічається – обертальний двигун (рис. 1.2). Будь-який такий двигун принципово складається із нерухомого статора і обертового всередині нього ротора. При чому, в будь-якому двигуні можна вважати, що ротор відштовхується від статора, в результаті чого створюється обертання.

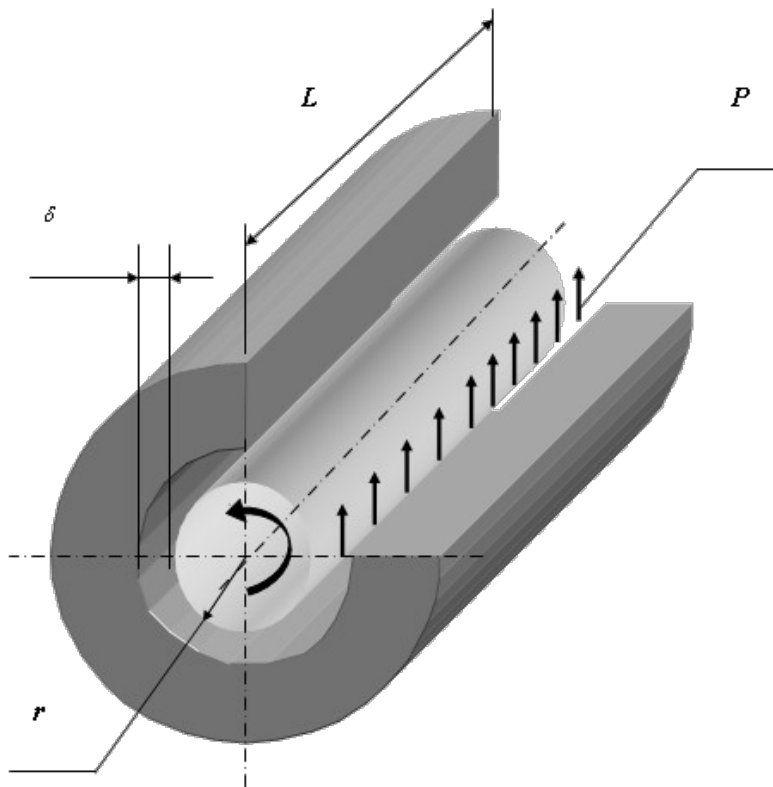


Рисунок 1.2 – Принципова схема обертального двигуна

Таким чином, можна вважати, що між статором і ротором є якесь робоче середовище (робоче тіло), яке, опираючись на статор, безпосередньо штовхає ротор. В електродвигуні – це електромагнітне поле, у пневматичному двигуні – це повітря, у гідродвигуні – це рідина. Чим більша сила відштовхування, тим більший обертовий момент розвиває двигун. Величина сили відштовхування залежить від того, як сильно стиснуто робоче середовище, тобто від того, яке напруження робочого середовища [5].

Для будь-якого двигуна (з деякими непринциповими допущеннями) можна вважати, що обертальний момент описується функцією виду:

$$M_{кр} = F(L, r, \delta, Z, P), \quad (1.1)$$

де L – довжина відштовхування ротора від статора, r – радіус ротора, δ – радіальний зазор між ротором і статором, P – напруженість робочого середовища, Z – кількість пар елементів, що взаємодіють у процесі відштовхування ротора від статора (пари полюсів, пластини гідро- або пневмодвигуна тощо).

Опираючись на цю функцію, легко визначити гранично допустимі можливі максимальні напруження для будь-якого двигуна як відношення обертального моменту, який розвивається, до його геометричних розмірів. Ця формула буде мати вигляд:

$$P = \frac{M_{кр}}{Lr\delta Z}. \quad (1.2)$$

Величина P буде виражатися в одиницях напруженості робочого середовища Н/м^2 .

Якщо таким способом проаналізувати двигуни усіх трьох типів, розділивши їхні максимальні обертальні моменти на відповідні геометричні характеристики, то можна встановити таке:

- 1) P електромагнітного поля – близько 1 МПа;
- 2) P газового середовища – близько 1 МПа;
- 3) P рідкого середовища – 6,3–40 МПа і вище.

Отже, гідравлічний привод у багато разів і навіть десятки разів більш енергоємний, ніж електричний і пневматичний.

При цьому гідравлічний привод має ще одну, дуже важливу особливість, яку можна продемонструвати на такому досліді (рис. 1.3). Візьмемо три однакових циліндри. У перший циліндр помістимо два магніти однойменними полюсами назустріч один до одного так, щоб верхній магніт виконував роль рухомого поршня. У другому, заповненому повітрям, і у третьому, заповненому рідиною, встановимо щільно підігнані поршні. До всіх трьох поршнів прикладемо силу, яка стискає робочі середовища: електромагнітне поле, повітря та рідину. При збільшенні сили поршні починають опускатися, а напруження робочого середовища P буде зростати. У циліндрі з рідиною переміщення буде практично непомітним порівняно з іншими циліндрами. Тобто рідина порівняно із газом та електромагнітним полем, практично нестислива у більшості діапазонів сил. Останнє проілюстровано на графіку. Ця якість забезпечує високу жорсткість гідропривода у великому діапазоні навантажень.

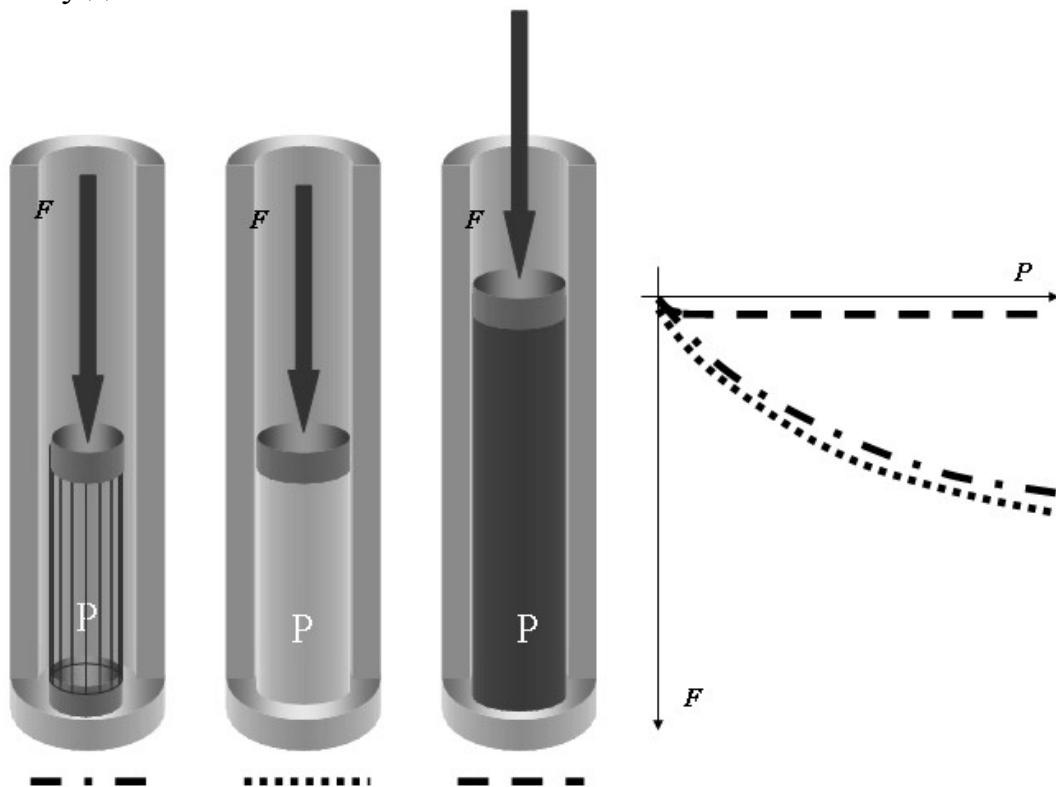


Рисунок 1.3 – Принципова хема експериментального дослідження жорсткості приводів

Описані особливості гідравлічного привода визначають сферу його використання у техніці. У більшості випадків його застосування обумовлене необхідністю у високих енергетичних показниках при малій вазі або габаритах.

1.2 Рідина, як об'єкт вивчення гідравліки

Передачу енергії у гідравлічних системах забезпечують робочі рідини, тому щоб ефективно їх застосовувати, необхідно знати їх властивості.

Рідини, як і всі речовини, мають молекулярну будову. Вони займають проміжне положення між газами та твердими тілами (рис. 1.4). Це визначається величинами міжмолекулярних сил і характером рухів молекул, з яких вони складаються. У газах відстань між молекулами більша, а сили міжмолекулярної взаємодії менші, ніж у рідинах та твердих тілах, тому гази відрізняються від рідин та твердих тіл більшою стисливістю. Порівняно з газами рідини та тверді тіла малостисливі.

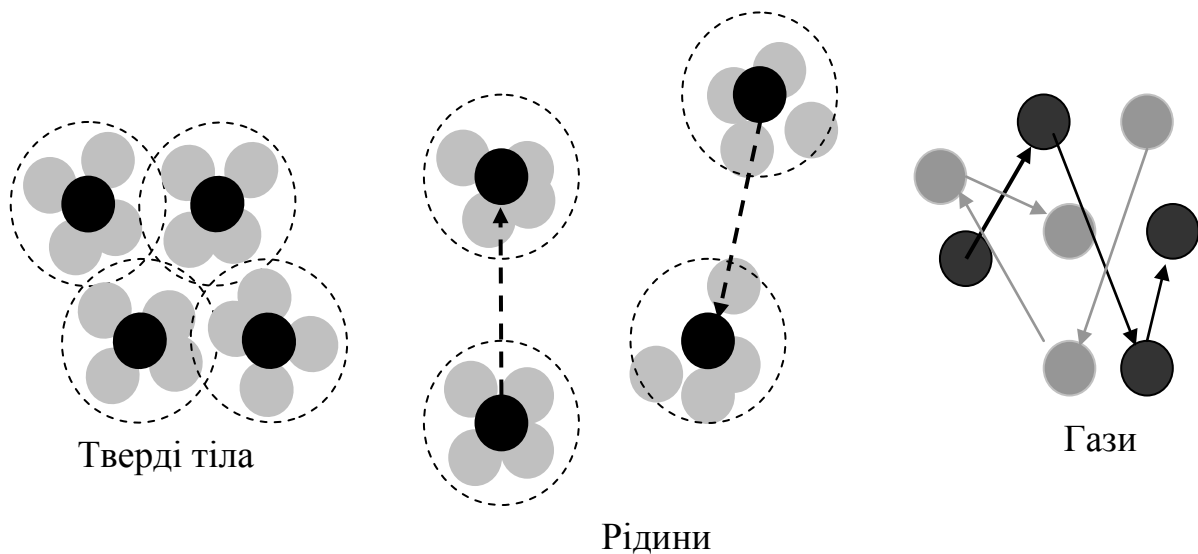


Рисунок 1.4 – Принципова будова фізичних речовин

Молекули рідини знаходяться у неперервному хаотичному тепловому русі, що відрізняється від теплового руху газів та твердих тіл. У рідинах цей рух здійснюється у вигляді коливань (10^{13} коливань за секунду) відносно миттєвих центрів і стрибкоподібних переходів від одного центра до іншого. Тепловий рух молекул твердих тіл полягає у коливаннях відносно стабільних центрів. Тепловий рух молекул газу виглядає як безперервні стрибкоподібні зміни місць [10].

При цьому необхідно відмітити, що зміни температури і тиску призводять до змін властивостей рідин. Встановлено, що при підвищенні температури і зниженні тиску властивості рідин наближаються до властивостей газів, а при зниженні температури і підвищенні тиску – до властивостей твердих тіл.

Термін «рідина» застосовується для позначення і власне рідини, яку розглядають як нестисливе або мало стисливе середовище, і газу, який можна розглядати як «стисливу рідину».

1.3 Гіпотеза суцільності

Розглядати та математично описувати рідину як сукупність великої кількості окремих частин, що знаходяться у постійному непрогнозованому русі, на сучасному рівні науки не є можливим. З цієї причини рідина розглядається як деяке суцільне деформовне середовище, яке має можливість безперервно заповнювати простір, в якому знаходиться. Іншими словами, під рідиною розуміють усі тіла, для яких характерна властивість текучості, основана на явищі дифузії. Текучістю можна називати здатність тіла як зазвичай сильно змінювати свій об'єм під дією багатьох малих сил. Таким чином, у гідравліці рідину розуміють як абстрактне середовище - континуум, який є основою гіпотези суцільності. Континуум вважається неперервним середовищем без порожнин та проміжків, властивості якого однакові у всіх напрямках. Це означає, що всі характеристики рідини є безперервними функціями і всі частинні похідні за всіма змінними також неперервні.

Також такі тіла (середовища) називають краплинними рідинами. Краплинні рідини – це такі рідини, які в малих кількостях прагнуть набути кулястої форми, а в більшості утворюють вільну поверхню.

Дуже часто в математичних описах гідравлічних закономірностей використовують поняття «частинка рідини» або «елементарний об'єм рідини». До них можна віднести безкінечно малий об'єм, в якому знаходиться досить багато молекул рідини. Наприклад, якщо розглянути куб води, де розмір сторони становить 0,001 см, то в цьому об'ємі буде знаходитися $3,3 \cdot 10^{13}$ молекул. Частинка рідини вважається досить малою порівняно із розмірами області, занятої рухомою рідиною або рідиною, що знаходиться в стані спокою.

Суцільне середовище являє собою модель, яка успішно використовується при дослідженні закономірностей спокою та руху рідини. Правомірність застосування такої моделі рідини підтверджена всією практикою гідравліки.

2 ОСНОВНІ ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИН

2.1 Густина

Густина рідин ρ , як і для будь-яких інших тіл, являє собою масу одиниці об'єму, і для нескінченно малого об'єму рідини dW масою dM (рис. 2.1) може бути визначена за формулою:

$$\rho = \frac{dM}{dW}.$$

Для однорідних рідин можна вважати, що:

$$\rho = \frac{dM}{dW},$$

де M – маса рідини, W – об'єм рідини.

Одиниці вимірювання: $[\text{кг}/\text{м}^3]$, $[\text{кг}/\text{дм}^3]$, $[\text{кг}/\text{л}]$, $[\text{г}/\text{см}^3]$.

Густина рідини залежить від температури і тиску. Всі рідини, окрім води, характеризуються зменшенням густини зі зростанням температури (рис. 2.2). Густина води має максимум при $t=4^\circ\text{C}$ та зменшується при будь-яких інших температурах. У цьому

проявляється одна з аномальних властивостей води. Температура, при якій густина води максимальна, зі збільшенням тиску зменшується. Так, при тиску 14 МПа вода має максимальну густину при $0,6^\circ\text{C}$.

Густина прісної води дорівнює $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, солоної морської води – $1020 \div 1030 \text{ кг}/\text{м}^3$, нафти та нафтопродуктів – $650 \div 900 \text{ кг}/\text{м}^3$, ртуті – $13596 \text{ кг}/\text{м}^3$.

При зміні тиску густина рідин змінюється незначно. У більшості випадків густину рідини в розрахунках можна вважати постійною. Проте зустрічаються випадки, коли зміною густини нехтувати не можна, оскільки це може призвести до значних помилок.

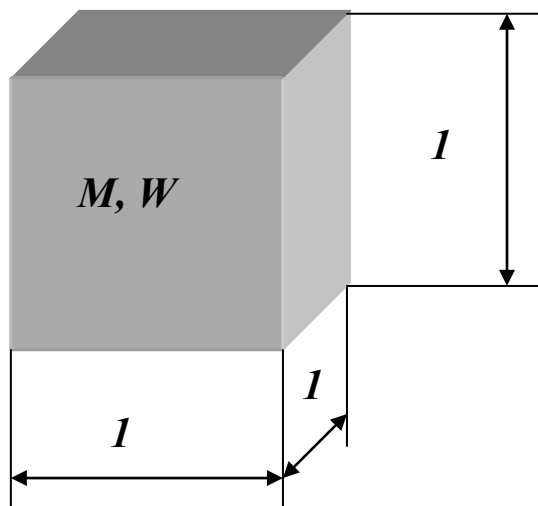


Рисунок 2.1 – Елементарний об'єм

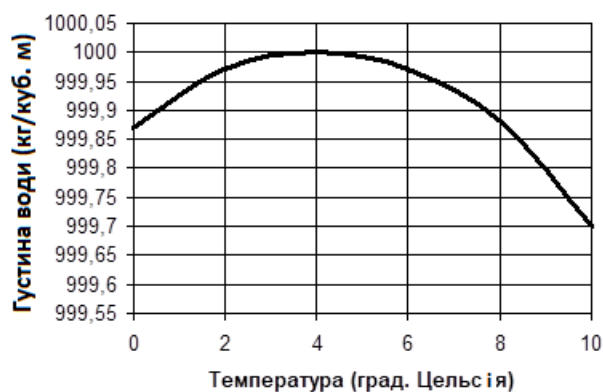


Рисунок 2.2 – Діаграма зміни густини води залежно від температури

2.2 Питома вага

Питоною вагою рідини γ – називається вага одиниці її об’єму. Ця величина виражається формулою для нескінченно малого об’єму рідини dW з вагою dG (рис. 2.3):

$$\gamma = \frac{dG}{dW} = \frac{gdM}{dW}.$$

Для однорідних рідин можна вважати:

$$\gamma = \frac{G}{W} = \frac{gM}{W}.$$

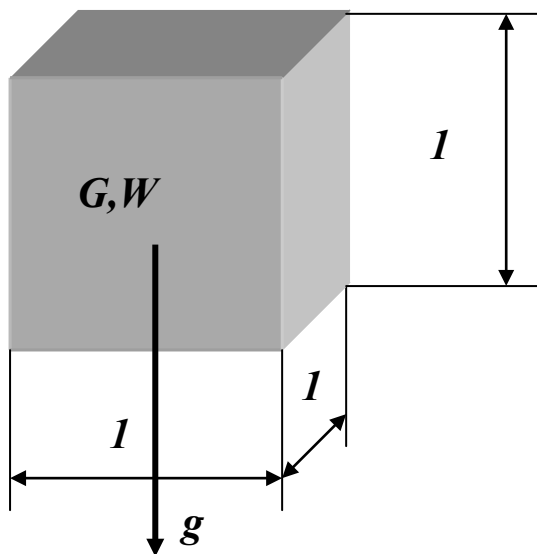


Рисунок 2.3 – Елементарний об’єм

де G – вага рідини.

Питома вага рідини та густина пов’язані співвідношенням:

$$\gamma = \rho g,$$

де g – прискорення вільного падіння.

Одиниці вимірювання: $[\text{Н/м}^3]$, $[\text{Н/дм}^3]$, $[\text{Н/л}]$, $[\text{Н/см}^3]$, $1\text{Н} = 1\text{кг} \cdot (\text{м/с}^2)$.

Значення прискорення вільного падіння g на землі змінюється від $9,831 \text{ м/с}^2$ на полюсах до $9,781 \text{ м/с}^2$ на екваторі.

2.2.1 Відносна питома вага

Інколи зручно використовувати таку характеристику рідини, яка називається «відносна питома вага». Це відношення питомої ваги рідини до питомої ваги прісної води:

$$\delta_p = \frac{\gamma_p}{\gamma_{\text{води}}}.$$

Одиниця вимірювання відносної питомої ваги – величина безрозмірна.

2.3 Стисливість рідини

Стисливість рідини це властивість рідини змінювати свій об’єм при зміні тиску.

Стисливість характеризується коефіцієнтом об’ємного стиснення (стисливості) β_P , що являє собою відносну зміну об’єму рідини W при зміні тиску P на одиницю (рис. 2.4).

$$\beta_P = -\frac{1}{W_0} \frac{dW}{dp}.$$

Знак мінус в формулі вказує, що при збільшенні тиску об'єм рідини зменшується.

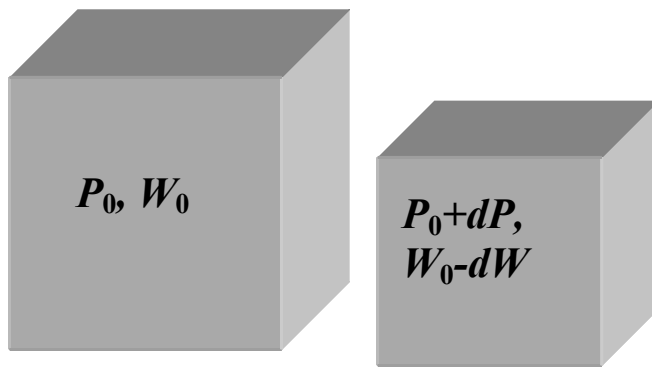


Рисунок 2.4 – Схема зміни тиску в елементарному об'ємі

Одиниця вимірювання стисливості: Па^{-1} (Паскаль. $1\text{Па}=1\text{Н}/\text{м}^2$).

Перепишемо визначення β_p у вигляді:

$$\beta_p = -\frac{dW}{W_0} \frac{1}{dp}. \quad (2.1)$$

Обидві частини (2.1) помножимо на знаменник і перенесемо в ліву частину

$$\beta_p W_0 dp + dW = 0. \quad (2.2)$$

Врахуємо, що

$$dW = W - W_0. \quad (2.3)$$

Підставимо (2.3) в рівняння (2.2):

$$\beta_p W_0 dp + W - W_0 = 0. \quad (2.4)$$

З рівняння (2.4) виразимо W і отримаємо формулу для визначення нового значення об'єму при відомому збільшенні тиску:

$$W = W_0 - \beta_p W_0 dp = W_0 (1 - \beta_p dp). \quad (2.5)$$

Якщо врахувати, що всі зміни об'єму виникають при незмінній масі за рахунок зміни густини ($W_0 = \frac{M}{\rho_0}$ і $W = \frac{M}{\rho}$), можна отримати формулу зміни густини при зміні тиску:

$$\frac{M}{\rho} = \frac{M}{\rho_0} (1 - \beta_p dp) \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{(1 - \beta_p dp)}{\rho_0}. \quad (2.6)$$

З рівняння (2.6) виражаючи ρ , отримаємо:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \beta_p dp}.$$

Зміну об'єму dW , що відбувається за рахунок зміни густини $d\rho$ при постійній масі, можна записати у вигляді:

$$dW = \frac{M}{d\rho}. \quad (2.7)$$

Підставивши (2.7) у (2.1), визначимо коефіцієнт стисливості рідини через зміну її густини:

$$\beta_p = -\frac{dW}{W_0} \frac{1}{dp} = \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{dP}. \quad (2.8)$$

Відсутність знака мінус у виразі (2.8) означає, що збільшення тиску призводить до збільшення густини.

Величина, обернена коефіцієнту стисливості, або, інакше, коефіцієнту об'ємного стиснення β_p , позначається як:

$$E_p = \frac{1}{\beta_p} \quad (2.9)$$

і називається об'ємним модулем пружності рідини.

Тоді формула (2.9) набуває такого вигляду:

$$E_p = \rho \frac{dP}{d\rho}. \quad (2.10)$$

Вираз (2.10) називається законом Гука для рідини. Одиниця вимірювання об'ємного модуля пружності рідини: [Па], [МПа], [кГс/см²].

Модуль пружності E_p залежить від температури і тиску. Тому розрізняють два модулі пружності: адіабатичний та ізотермічний. Перший має місце при швидкоплинних процесах без теплообміну [11]. Процеси, які виникають в більшості гідросистем, виникають з теплообміном, тому частіше використовується ізотермічний модуль пружності. Приблизна форма залежностей E_p від P та t^0 подана на графіках (рис. 2.5). Все це говорить про те, що рідини не повністю точно слідує закону Гука.

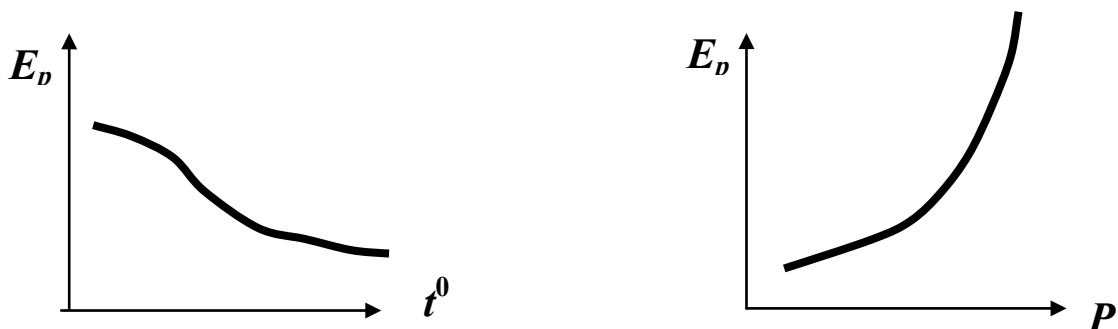


Рисунок 2.5 – Діаграми зміни об'ємного модуля пружності рідини залежно від: а) – температури; б) – тиску

Розглянемо декілька прикладів значень об'ємних модулів пружності.

Мінеральні масла, що використовуються в технологічних машинах з гідравлічним приводом, при $t^0 = 20$ °С мають об'ємні модулі пружності $1,35 \cdot 10^3 \div 1,75 \cdot 10^3$ МПа (менше значення відноситься до більш легкої оливи), бензин та гас – приблизно $1,3 \cdot 10^3$ МПа, гліцерин – $4,4 \cdot 10^3$ МПа, ртуть – у середньому $3,2 \cdot 10^3$ МПа.

На практиці експлуатації гідравлічних систем є випадки, коли внаслідок дії того чи іншого збурення в рідині може значно змінюватися тиск. В таких випадках нехтування стисливістю призводить до значних похибок.

Відомо, що швидкість поширення звуку c в однорідній рідині можна визначити за формулою:

$$c = \sqrt{\frac{E_p}{\rho}}. \quad (2.11)$$

Якщо згадати, що $E_p = \rho \frac{dP}{d\rho}$, та підставити це значення у формулу (2.11)

швидкості поширення звуку, отримаємо:

$$c = \sqrt{\frac{\rho \frac{dP}{d\rho}}{\rho}} = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}. \quad (2.12)$$

У цьому випадку зміна густини рідини, що викликана зміною тиску, буде визначатися за такою формулою:

$$d\rho = \frac{dP}{c^2}. \quad (2.13)$$

Якщо вважати, що рідина не стиснена, тобто $d\rho=0$, то із рівняння (2.13) визначаємо, що швидкість поширення звуку в рідині виявиться нескінченною величиною ($c=\infty$). При використанні цього значення c у випадку достатньо великих об'ємів рідини (озеро або нафтопровід) або швидкої зміни тиску, наприклад, при різкому закритті або відкритті запірною пристрою в трубопроводі, результати розрахунків виявляться суттєво неточними. З цієї причини в описаних умовах вважати рідину нестисливою недопустимо.

2.4 Температурне розширення рідини

Температурне розширення рідини полягає в тому, що вона може змінювати свій об'єм при зміні температури. Така властивість характеризується температурним коефіцієнтом об'ємного розширення, який виражає відносну зміну об'єму рідини при зміні температури на одиницю (на 1°C) та при постійному тиску:

$$\beta_t = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt}. \quad (2.14)$$

За аналогією з властивістю стисливості рідини можна записати

$$W = W_0(1 + \beta_t dt) \quad (2.15)$$

або через густину:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta_t dt}. \quad (2.16)$$

Зміна об'єму при зміні температури відбувається за рахунок зміни густини.

Для більшості рідин коефіцієнт β_t зі збільшенням тиску зменшується. Коефіцієнт β_t зі зменшенням густини нафтопродуктів від 920 до 700 кг/м^3 збільшується від 0,0006 до 0,0008; для робочих рідин гідросистем β_t зазвичай вважають незалежним від температури. Для цих рідин збільшення тис-

ку від атмосферного до 60 МПа призводить до зростання β_t приблизно на 10–20 %. При цьому, чим вища температура робочої рідини, тим більше збільшення β_t . Для води зі збільшенням тиску при температурі до 50 °С β_t збільшується, а при температурі вище 50 °С – зменшується.

2.5 Розчинність газів

Розчинність газів – здатність рідини поглинати (розчиняти) гази, які знаходяться в контактi з нею. Усі рідини тією чи іншою мірою поглинають та розчиняють гази. Ця властивість характеризується коефіцієнтом розчинності k_p .

Якщо в закритій посудині (2.6) рідина знаходиться в контактi з газом при тиску P_1 , то газ розпочне розчинятися в цій рідині.

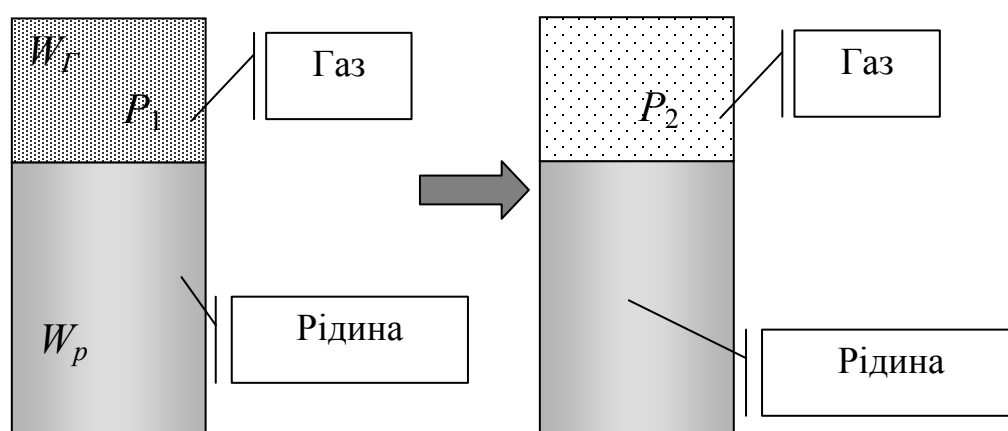


Рисунок 2.6 – Схема розчинення газів в рідині

Через деякий час відбудеться насичення рідини газом і тиск в посудині зміниться. Коефіцієнт розчинності пов'язує зміну тиску в посудині з об'ємом розчиненого газу та об'ємом рідини таким співвідношенням:

$$\frac{W_2}{W_p} = K_p \frac{P_2}{P_1}, \quad (2.17)$$

де W_2 – об'єм розчиненого газу при нормальних умовах, W_p – об'єм рідини, P_1 і P_2 – початковий і кінцевий тиск газу.

Коефіцієнт розчинності залежить від типу рідини, газу і температури. При температурі 20 °С і атмосферному тиску у воді міститься близько 1,6% розчиненого повітря по об'єму ($k_p=0,016$). Зі збільшенням температури від 0 до 30 °С коефіцієнт розчинності повітря у воді зменшується. Коефіцієнт розчинності повітря в оливах при температурі 20 °С дорівнює приблизно 0,08–0,1. Кисень відрізняється більш високою розчинністю, ніж повітря, тому вміст кисню в повітрі, розчиненому в рідині, приблизно на 50% вищий, ніж в атмосферному. При зменшенні тиску газ із рідини видаляється. Процес виділення газу протікає інтенсивніше, ніж розчинення.

2.6 Кипіння

Кипіння – це здатність рідини переходити в газоподібний стан. Інакше цю властивість рідин називають випаровуваністю.

Рідину можна довести до кипіння підвищенням температури до значень, більших температури кипіння при заданому тиску, або зниженням тиску до значень, менших тиску насичених парів $p_{нп}$ рідини при заданій температурі. Утворення бульбашок при зниженні тиску до тиску насичених парів називається холодним кипінням.

Рідина, із якої видалений розчинений в ній газ, називається дегазованою. У такій рідині кипіння не виникає і при температурі, більшій температурі кипіння при заданому тиску.

2.7 Опір розтягу рідин

Опір розтягу рідин полягає в можливості рідини чинити опір розтягувальним силам (рис. 2.7).

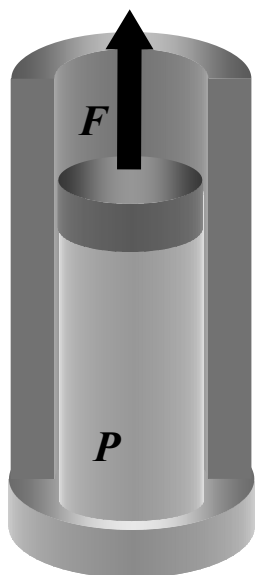


Рисунок 2.7 – Схема опору розтягу рідин

Опір розтягу рідин може виникати тільки в дегазованих рідинах. У експериментальних досліджах при центрифугуванні дегазованої дистильованої води вдавалось отримати на дуже короткий час напруження на розтяг у воді, яке доходило приблизно до 25 МПа. Технічні рідини не чинять опір зусиллям на розтяг.

Гази можуть знаходитися в рідині в розчиненому та нерозчиненому вигляді. Присутність в рідині нерозчиненого газу у вигляді бульбашок суттєво зменшує модуль пружності рідини, при цьому це зменшення не залежить від розмірів бульбашок повітря. Динамічна в'язкість рідини зі збільшенням вмісту в ній повітря зростає. Вміст нерозчиненого повітря в робочих рідинах гідросистем машин і механізмів так само, як і в трубопроводах, які подають рідину, може сильно вплинути на параметри роботи трубопроводів і гідросистем.

2.8 В'язкість

В'язкість – властивість рідини чинити опір відносному зсуву її шарів. В'язкість проявляється в тому, що при відносному переміщенні шарів рідини на поверхнях їх дотику виникають сили опору зсуву, які називаються силами внутрішнього тертя або силами в'язкості. Якщо розглянути те, як розподіляється швидкість шарів рідини по перерізу потоку, то можна легко побачити, що чим далі від стінок потоку, тим швидкість руху частин біль-

ша. Безпосередньо біля стінок потоку швидкість руху рідини дорівнює нулю. Ілюстрацією такого ефекту, так званої струйної моделі потоку є рисунок 2.8, де наведено такі позначення:

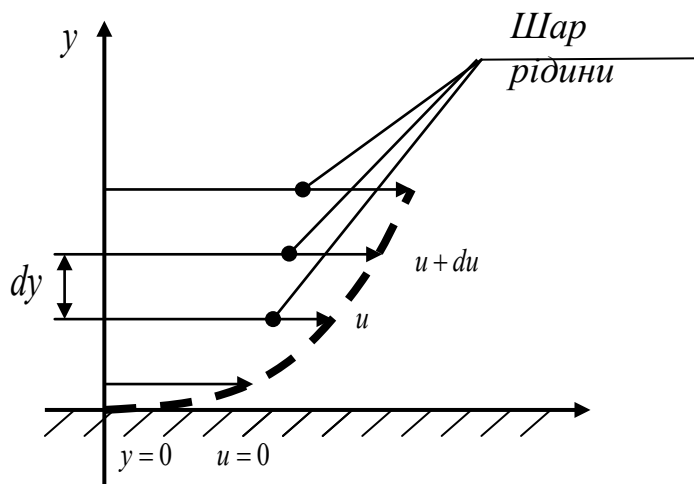


Рисунок 2.8 – Схема розподілу векторів швидкості по висоті потоку рідини

u – швидкість шару рідини, du – відстань між сусідніми шарами рідини.

Повільно рухомий шар рідини «гальмує» сусідній шар рідини, який рухається швидше, навпаки, шар, який рухається з більшою швидкістю, тягне за собою шар, який рухається з меншою швидкістю. Сили внутрішнього тертя виникають внаслідок наявності міжмолекулярних зв'язків між рухомими шарами.

2.9 Закон рідинного тертя – закон Ньютона

Якщо у рівномірно рухомому потоці рідини розглянути два сусідніх шари з ординатами y_1 та y_2 , які розташовані на відстані dy один від одного, і швидкість першого з них позначити u_1 , а швидкість другого u_2 , то різниця між ними становитиме du . Тоді можна записати:

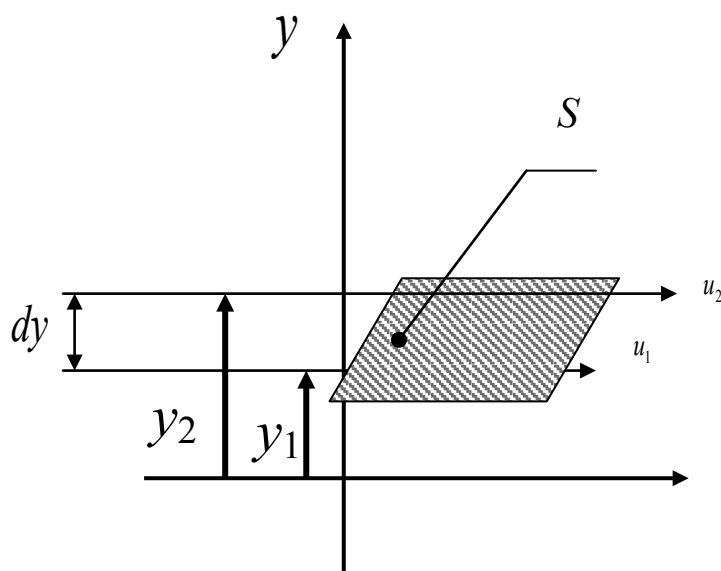


Рисунок 2.9 – Схема визначення сили в'язкого тертя

$$\lim_{y_1 \rightarrow y_2} \frac{u_2 - u_1}{y_2 - y_1} = \frac{du}{dy}. \quad (2.18)$$

Величина, розрахована в рівнянні (2.18), називається градієнтом швидкості по перерізу потоку або поперечним градієнтом швидкості. Він показує, як змінюється швидкості шарів рідини по перерізу потоку.

Якщо між сусідніми шарами рідини виділити деяку площу S (рис. 2.9), тоді згідно з гіпотезою Ньютона:

$$T = \mu S \frac{du}{dy}, \quad (2.19)$$

де T – сили в'язкого тертя, S – площа тертя; μ – коефіцієнт в'язкого тертя.

Величина μ в цьому виразі є динамічним коефіцієнтом в'язкості, який дорівнює

$$\mu = \frac{T}{S} \frac{1}{(du / ds)}$$

або

$$\mu = \tau \frac{1}{(du / ds)},$$

де τ – дотичне напруження в рідині (залежить від типу рідини).

Фізичний смисл коефіцієнта в'язкого тертя – число, що дорівнює силі тертя, яка розвивається на одиничній поверхні при одиничному градієнті швидкості. Одиницями вимірювання: $[\text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2]$, $[\text{кГс} \cdot \text{с} / \text{м}^2]$, $[\text{Пз}]$ {Пуазейль}, $1 \text{ Пз} = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$.

На практиці частіше використовується кінематичний коефіцієнт в'язкості, він називається так тому, що в його розмірності відсутнє позначення сили. Цей коефіцієнт являє собою відношення динамічного коефіцієнта в'язкості рідини до її густини:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2.20)$$

Одиниці вимірювання: $[\text{м}^2 / \text{с}]$, $[\text{см}^2 / \text{с}]$, $[\text{Ст}]$ {стокс}, $[\text{сСт}]$ {сантистокс}, $1 \text{ Ст} = 100 \text{ сСт}$ {1Ст=1 см²/с}.

2.10 Аналіз властивостей в'язкості

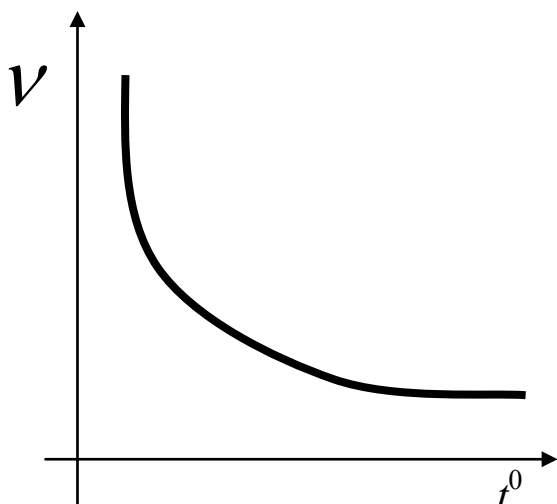


Рисунок 2.10 – Діаграма зміни кінематичної в'язкості в залежності від температури

Для крапельних рідин в'язкість залежить від температури t і тиску P , проте остання залежність проявляється тільки при великих змінах тиску, близько декількох десятків МПа.

Залежність коефіцієнта динамічної в'язкості від температури подана на рис. 2.10 та виражається формулою:

$$\mu_t = \mu_0 e^{-k_t(T-T_0)}, \quad (2.21)$$

де μ_t – коефіцієнт динамічної в'язкості при заданій температурі, μ_0 – коефіцієнт динамічної в'язкості при температурі (для мінеральних олив при 50 °С), T – за-

дана температура, T_0 – температура, при якій виміряно значення μ_0 (50 °С для мінеральних олив); k_t – коефіцієнт, для мінеральних олив дорівнює 0,02–0,03; e – основа натурального логарифма (дорівнює 2,718282).

Залежність відносного коефіцієнта динамічності в'язкості $\mu_p = \mu / \mu_0$ від тиску (рис. 2.11) описується формулою:

$$\mu_p = \mu_0 e^{k_p(P-P_0)},$$

де μ_p – коефіцієнт динамічної в'язкості при заданому тиску, μ_0 – коефіцієнт динамічної в'язкості при відомому тиску (найчастіше за нормальних умов), P – заданий тиск, P_0 – тиск, при якому виміряно значення μ_0 , k_p – коефіцієнт, для мінеральних олив дорівнює 0,002–0,003.

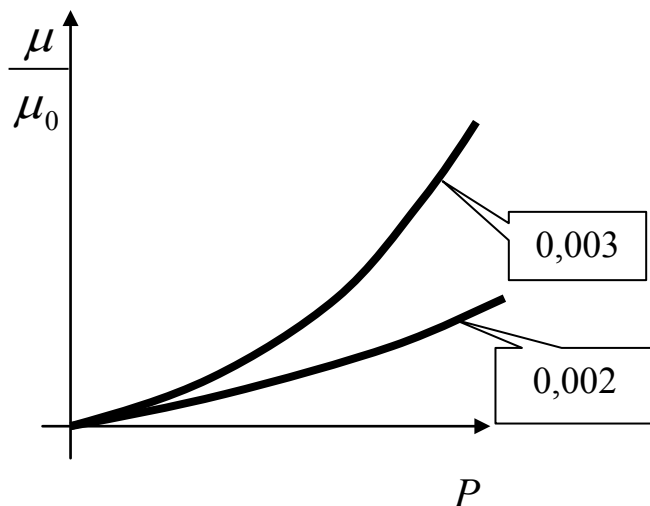


Рисунок 2.11 – Діаграма зміни відносного коефіцієнта динамічності в'язкості залежно від тиску

Вплив тиску на в'язкість рідини проявляється тільки при високих тисках.

Для прикладу наведемо значення кінематичного коефіцієнта в'язкості ν для деяких рідин: індустриальні оливи (за ГОСТ 20799-75) при температурах 50 °С: И-5А – 4-5 сСт; И-12А – 10-14 сСт; И-40А – 35-45 сСт; вода прісна при 20 °С – 0,0101 сСт; ртуть при 15 °С – 0,0011 сСт; сталь рідка при 1550 °С – 0,0037 сСт.

В'язкість рідини – це властивість, яка проявляється тільки при умові руху самої рідини,

і не впливає на рідини, які знаходяться в стані спокою. В'язке тертя в рідинах підлягає закону тертя, принципово відмінному від закону тертя твердих тіл, оскільки залежить від площі тертя та швидкості руху рідини.

Рідини, які підлягають описаному закону рідинного тертя Ньютона, називаються ньютонівськими рідинами. Однак є рідини, тертя в яких описується іншими закономірностями.

2.11 Неньютонівські рідини

Особливістю ньютонівських рідин є повна відсутність тертя спокою. Проте існують рідини (розчини полімерів, колоїдні суспензії, будівельні розчини, харчові і кормові суміші тощо), для яких зв'язок між дотичним напруженням τ та поперечним градієнтом швидкості не підлягає закону Ньютона. Такі рідини називаються неньютонівськими або аномальними та відрізняються від ньютонівських наявністю дотичного напруження в стані спокою τ_0 .

Наприклад, дотичні напруження підлягають закону:

$$\tau = \tau_0 \pm \mu \frac{du}{dy}. \quad (2.22)$$

Такі рідини називаються в'язкопластичними, і рух їх шарів починається лише після того, як буде подолано напругу зсуву спокою τ_0 .

Для інших неньютонівських рідин динамічна в'язкість може залежати від градієнта швидкості, часу тощо. Ця залежність може мати, наприклад, такий вигляд:

$$\tau = \tau_0 \pm \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^k. \quad (2.22, a)$$

де k – коефіцієнт, який може залежати від швидкості, часу, температури, тиску та деяких інших факторів.

2.12 Визначення в'язкості рідини

В'язкість рідини визначається експериментально за допомогою приладів, які називаються віскозиметрами. Прикладом такого приладу може слугувати віскозиметр Стокса. Його робота полягає у такому. У прозорі трубку з рідиною поміщається кулька, густина якої вищою густини рідини. Кулька повільно занурюється в в'язку рідину з постійною швидкістю V . На кульку будуть діяти: по-перше, сила тяжіння:

$$F_{тяж} = \rho_k W g, \quad (2.23)$$

по-друге, виштовхувальна (архімедова) сила

$$F_{арх} = \rho_p W g, \quad (2.24)$$

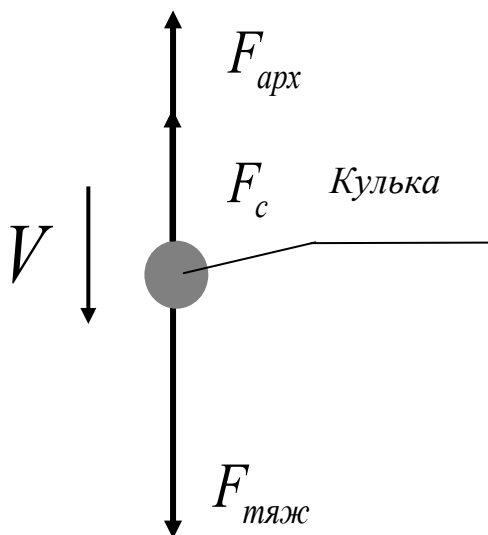
по-третє, сила Стокса, створена в'язким тертям на поверхні кульки

$$F_c = 3\pi d V \mu. \quad (2.25)$$

У наведених виразах застосовано такі позначення:

ρ_k – густина матеріалу кульки, ρ_p – густина рідини, W – об'єм кульки, V – швидкість опускання кульки, g – прискорення вільного падіння, μ – динамічний коефіцієнт в'язкості, d – діаметр кульки.

Рисунок 2.12 – Схема визначення в'язкості рідини



Оскільки швидкість тіла постійна, то за другим законом Ньютона можна записати:

$$F_{тяж} = F_c + F_{арх}. \quad (2.26)$$

Об'єм кульки W :

$$W = \frac{1}{6} \pi d^3. \quad (2.27)$$

Підставляючи отримані вирази (2.23) – (2.25), (2.27) в рівняння сил (2.26), що діють на кульку, отримуємо:

$$3\pi d \mu \frac{1}{V} = \frac{1}{6} \pi g d^3 (\rho_k - \rho_p). \quad (2.28)$$

Виражаючи з останньої формули μ , будемо мати вираз для визначення динамічного коефіцієнта в'язкості:

$$\mu = \frac{1}{18} g d^2 \frac{1}{V} (\rho_k - \rho_p). \quad (2.29)$$

Якщо виміряти час занурення кульки на визначену, раніше виміряну глибину, тоді неважко визначити в'язкість будь-якої рідини.

3 ЕКСПЛУАТАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИН

Крім розглянутих фізичних властивостей рідин при їх використанні в технологічних машинах необхідно враховувати й інші характеристики. Вони не впливають на математичний опис гідравлічних явищ, але виявляються істотними при експлуатації гідросистем. Вимоги до таких властивостей визначаються, перш за все, метою, з якою рідина застосовується в технологічній машині. У гідроприводі рідина виконує кілька різних функцій. По-перше, це функція робочого тіла, що забезпечує перенесення енергії в гідросистемі, тому її називають робочою рідиною, в гідроприводах гальм – гальмівними рідинами. По-друге, робоча рідина є мастильною й охолоджувальною речовиною.

У системах мащення їх називають оливами, в системах охолодження – охолоджувальними або мастильно-охолоджувальними рідинами (МОР). У цьому випадку вони забезпечують зменшення сил тертя в парах тертя. По-третє, рідина є середовищем, що видаляє з гідросистеми продукти зносу. По-четверте, мастильно-охолоджувальні рідини забезпечують захист деталей від корозії. Комплекс фізико-хімічних властивостей робочих рідин має найкращим чином забезпечувати їх основну і додаткові функції [12]. Необхідно, щоб робочі рідини гідросистем мали такі додаткові властивості.

Антифрикційні (змащувальні) властивості полягають в здатності рідини зменшувати сили тертя між рухомими деталями. Ця властивість забезпечується за допомогою додання різних модифікаторів і присадок.

Стабільність в'язкості полягає в мінімальній залежності в'язкості від температури в необхідному температурному діапазоні. В'язкість рідини має бути оптимальною, тобто має забезпечувати гарні змащувальні властивості за мінімальних втрат через нещільності і зазори в гідросистемі. Ця властивість істотно залежить від відносних швидкостей руху рухомих частин.

Температура кипіння має бути високою, що забезпечує роботоздатність і стійкість рідини у великому температурному діапазоні.

Стійкість до механічної і хімічної деструкції та до окислення має бути високою в умовах застосовуваного температурного режиму, а також протягом максимально тривалого терміну служби.

Модуль об'ємної пружності має бути максимально високим.

Коефіцієнти теплопровідності і питомої теплоємності мають бути високими, що забезпечує інтенсивне відведення тепла з гідросистеми і підвищує точність її роботи.

Коефіцієнт теплового розширення має бути невеликим, тому що це також приводить до збільшення точності роботи гідросистеми.

Температурою застигання називають таку найвищу температуру, при якій поверхня рівня оливи, залитої в стандартну пробірку, не рухається при нахилі пробірки на 45° протягом 5 хв. Ця температура характеризує рідину

з точки зору збереження текучості, а отже, можливості транспортування і зливу в холодну пору року.

Температура застигання оливи має бути не менше ніж на 10–17 °С нижчою найменшої температури навколишнього середовища, в умовах якого буде працювати гідросистема.

Температурою замерзання називають температуру початку кристалізації, тобто температуру, при якій в рідині утворюється хмарка з дрібних кристалів. При цьому не може бути розшарування рідини і виділення з неї складових компонентів.

Потрібно, щоб рідина не містила легкокипаровувани компоненти, випаровування яких може привести при тривалій експлуатації до загустіння рідини.

Вогнестійкість рідин виражається в тому, що рідина не має бути причиною виникнення або поширення пожежі.

З точки зору вогнестійкості рідини характеризуються температурами спалаху, займання і самозаймання. Під температурою спалаху розуміється мінімальна температура, при якій над поверхнею рідини утворюється кількість пари, достатньої для виникнення короткочасного спалаху. Температурою займання називається така температура, при якій кількість виділеної пари така, що горіння триває після видалення джерела вогню. Температурою самозаймання називається така температура, при якій рідина або її пара спалахує при контакті з повітрям без зовнішнього джерела займання.

Температура запалювання оливи на нафтовій основі знаходиться в межах 180—230 °С, а температура самозаймання від 260–370 °С та вище.

Негорючість у багатьох випадках є вирішальною властивістю при виборі типу робочої рідини. У гідросистемах, розташованих близько до джерел тепла або вогню, необхідні негорючі рідини.

Більш високу пожежну безпеку, порівняно з мінеральними, мають синтетичні рідини. Вони практично не горять при можливих високих температурах і не поширюють вогню. При роботі з мінеральними оливами при температурі вище 70 °С необхідно усувати контакт з повітрям. Для цього баки при 70 °С і вище необхідно заповнювати інертним газом (азотом, аргонном або гелієм). Цього ж ефекту можна досягти механічним поділом газового та рідинного середовищ.

Діелектричні властивості. Зустрічаються випадки, коли важливими є ізолювальні і діелектричні властивості рідини.

Більшість рідин для гідросистем – гарні ізолятори. Така властивість дозволяє поміщати в них електричні агрегати та їх елементи (соленоїди, обмотки електродвигунів та ін.) без додаткової ізоляції. Проте в цьому випадку в рідинах не має бути металевих присадок і металевих продуктів зносу. Вони також не можуть містити воду.

Вплив рідини на гумові деталі. Важливою властивістю робочих рідин для гідросистем є вплив їх на матеріали конструктивних елементів, зокре-

ма, на гумові деталі гідроагрегатів, які використовуються як ущільнення. Зміна їх властивостей, що відбувається під впливом рідини, супроводжується порушенням герметичності і іншими помилками в роботі гідросистем.

Жодна робоча рідина не має абсолютної інертності. Тому важливо, щоб вона не критично погіршувала основні якості матеріалу ущільнювальних пристроїв. У результаті тривалого контакту робочої рідини з гумовими деталями можуть змінюватися їх об'єм, вага, міцність та інші механічні властивості деталей. Особливо потрібно відзначити вплив на гуму синтетичних рідин, одні з яких викликають або надмірне набухання ущільнювального матеріалу, або, навпаки, значну його усадку.

Вартість робочої рідини має бути, за змоги, низькою. Перераховані властивості гідравлічних робочих рідин, на жаль, не мають постійного характеру. У процесі роботи гідросистем відбувається зміна їх характеристик.

3.1 Зміна характеристик робочих рідин

Найістотнішим фактором, що впливає на властивості робочих рідин, є кількість і склад часток забруднюючих цю рідину.

Забруднення робочих рідин гідросистеми може відбуватися:

- під час постачання рідин, зберігання і заправки їх в гідросистему;
- в процесі виготовлення, складання та випробування елементів гідросистеми;
- в процесі експлуатації;
- за рахунок розпаду самої рідини під дією різних факторів.

3.2 Забруднення під час поставки, зберігання і заправки

Різні присадки і добавки, які призначені для поліпшення експлуатаційних властивостей рідини, в процесі транспортування і зберігання можуть виділятися з рідини, перетворюючись в забруднювальні речовини. При тривалому зберіганні в умовах додатних температур в оливах можуть розвиватися колонії мікроорганізмів, водоростей і грибків. Розмір окремих грибків і бактерій, а також їх спор становить, як правило, 1 – 2 мкм, проте може досягати і 10 мкм. В основному, їх спостерігають на межі олива-вода. Безперервно йде процес окислення оливи. Активність цього процесу підвищується зі збільшенням температури і при наявності в оливі емульгованого повітря. Каталізатором окислення є частинки зносу з чорних і кольорових металів. При окисленні в оливі утворюються розчинні і нерозчинні продукти, які сприяють її згущенню і можуть, насамкінець, випадати у вигляді осаду на деталі гідроапаратів і гідромашин. Найдрібніші нерозчинні продукти окислення коагулюють і укрупнюються.

Помічені випадки «мимовільного» збільшення розмірів частинок забруднень в герметично закритих судинах. Наприклад, якщо при заправці в рідини були зафіксовані часточки не більше 10 мкм, то згодом виявлялися часточки розміром 25–200 мкм у вигляді пухких утворень. Швидке зростання розміру часток відбувається в рідині, що піддається трясінню при транспортуванні. Рідина може забруднюватися частинками пилу з повітря. Пил надходить в баки через систему наддуву і дренажу, через заливні горловини під час «відкритої» заправки баків. Пил завжди присутній в атмосфері. В одному літрі повітря число частинок пилу може змінюватися від 10 до 200000. Гранична крупність частинок пилу в повітрі становить 50 мкм, основну масу пилу становлять частинки пилу розміром менше 10 мкм. Їх склад:

- до 80% – кварц твердістю 7 одиниць по десятибальній шкалі (Моса);

- до 17% – окис алюмінію з твердістю 9 одиниць;

- польовий шпат з твердістю 6–6,5 одиниць;

- інші компоненти.

Для порівняння: твердість алмаза за десятковою шкалою – 10, заліза – 4,4, міді – 3,0, алюмінію – 2,9.

Таким чином, велика частка частинок пилу співрозмірна із зазорами в рухомих вузлах гідроагрегатів, а твердість деяких компонентів забруднень значно перевершує твердість матеріалів спряжених деталей.

3.3 Забруднення в процесі виготовлення, складання та випробування

Велика кількість частинок забруднення залишається в гідросистемі і її елементах після виготовлення і ремонту. Це пісок, який потрапляє при литті; пил, що осів на стінках; окалина від зварювання, кування або термічної обробки; залишки механічної обробки деталей; задири від трубопроводів; волокна ганчір'я, що залишаються після протирання. Притирочні пасти, які застосовуються при доведенні гідроагрегатів, утворюють змішані з парафіном, стеарином, воском та інші абразивні зерна (карбіди бору і кремнію, білий електрокорунд, алмазний пил), твердість яких перевищує твердість більшості конструкційних матеріалів. Паста при обробці деталей зазвичай накопичується в глухих відгалуженнях системи і при її роботі поступово вимивається, циркулюючи разом з робочою рідиною.

3.4 Забруднення в процесі експлуатації

Найбільша кількість частинок забруднення потрапляє в робочі рідини в процесі експлуатації гідросистеми. За рахунок зношення її елементів робочі рідини забруднюються безперервно найрізноманітнішими видами за-

бруднювачів – іржею, гумою, металом, абразивними частинками, волокнистими частинками, фарбою, пилом. Особливо інтенсивний знос спостерігається в парах тертя, дросельних елементах, робочих камерах гідромашин [14], розподільчих пристроях плунжерних насосів тощо. Продукти зносу деталей, що труться, надходять в рідину безперервно. При мікроаналізі проб рідини було встановлено, що розмір металевих продуктів зношення, що генеруються в робочу рідину, становить від 1 до 10 мкм.

Спільний вплив вологи, кисню повітря і робочої рідини може викликати на поверхні деталей, трубопроводів, баків утворення іржі і лушення покриттів. Частинки іржі випадають у вигляді осаду частинок мікронних розмірів. Цьому сприяє вібрація конструкції і пульсації тиску.

Крім того, забруднення в рідину потрапляють при обслуговуванні системи, при недбалому монтажі агрегатів, шлангів та трубопроводів, через незаглушені з'єднувальні вузли, через забруднення інструментів, заправних засобів, одягу обслуговуючого персоналу.

Джерелом забруднення палив і олів в деяких випадках можуть слугувати також самі фільтри, призначені для очищення рідини. У процесі роботи фільтрувальні елементи частково руйнуються і їх компоненти вимиваються потоком рідини. Такого типу забруднення спостерігаються у всіх фільтрах з волокнистими наповнювачами, виготовленими, наприклад, з паперу, вовни, повсті, целюлози, скловолокна тощо. Крім того, при використанні волокнистих наповнювачів, які можуть змінювати пористість при збільшенні перепаду тисків під час гідрударів і пульсацій тиску, затримані фільтром часточки забруднення повільно проходять через фільтрувальний елемент і знову потрапляють у робочу рідину.

3.5 Розпад рідини під дією різних факторів

Робоча рідина в процесі зберігання, транспортування, заправки та експлуатації піддається впливу різних видів енергії, вступає в контакт з різними видами матеріалів (металами, полімерами, кислотами, водою тощо), багато з яких є каталізаторами хімічних процесів. Постійно впливовим чинником є теплова енергія, іноді радіаційна і електрична. Ці види енергії визначають інтенсивність статичних процесів старіння. Старінням називають зміну властивостей речовини в часі. У динамічних умовах, додатково до цих видів енергії, на оливу діють механічна енергія при стисненні і розрідженні, хвильова механічна енергія при вібраціях, звукових і ультразвукових коливаннях. У результаті цих дій в робочій рідині відбувається комплекс фізико-хімічних змін, які можна розділити на три групи.

1. Зміни фізичного характеру: випаровування компонентів оливи, проникнення в рідину продуктів зношування, розчинення газів, води і компонентів еластомерів, зміна кількісного складу присадок за рахунок утворення сорбційних плівок на поверхнях контактуючих деталей.

2. Зміни хімічного характеру: окислення вуглеводнів базової оливи і присадок внаслідок присутності в оливі води і водних розчинів, реакції присадок оливи з матеріалами гідросистеми та інші хімічні процеси.

3. Зміни механіко-хімічного характеру: участь оливи в процесах тертя, перемішування, а також стимулювальний вплив механічних впливів на хімічні реакції.

3.6 Наслідки забруднення робочої рідини

Надійність роботи гідропривода знаходиться в безпосередній залежності від чистоти робочої рідини. У більшості випадків спостерігаються такі порушення роботи і пошкодження, викликані забрудненням:

- утрудненість руху або повна зупинка;
- помилки позиціонування привода;
- відхилення заданої швидкості руху гідродвигуна;
- стрибкоподібний рух привода при плавній зміні керівного сигналу;
- зменшення жорсткості системи через збільшення витоків в гідроагрегатах;
- псування поверхні штоків і валів гідродвигунів;
- псування поверхні сідел клапанів.

Ці пошкодження значно погіршують якість виконуваних обладнанням технологічних операцій і ведуть до виробництва бракованих виробів.

Крім цього, наявність забруднення в рідині необхідно враховувати при розробці елементів гідросистем. Наприклад: сили, необхідні для переміщення плунжерів розподільників, вимірювані десятими частками Ньютона, можуть за наявності забруднення зрости в сотні разів, викликавши порушення нормальної роботи гідросистеми і навіть вихід з ладу окремих її ділянок. Щоб гарантувати надійну роботу, для подолання сил тертя плунжерів застосовують електромагніти з великим тяговим зусиллям, що досягає 150 Н. Такі пристрої мають великі розміри і масу, малий термін служби, оскільки великі інерційні сили, які розвиваються якорем при його втягуванні, швидко розбивають електромагніт, що веде до збільшення витрат на обслуговування системи. У той же час, великі пускові струми потребують потужних контактних пристроїв в системах електроживлення.

Забруднення в рідині істотно впливає також на термін служби гідроапаратів і гідромашин. Рідина зі зваженими твердими частинками при течії з великою швидкістю, що досягає в деяких ділянках систем 300 м/с, притупляє, подібно абразивній емульсії, кромки розподільних отворів. Від цього з часом збільшуються зазори, зменшуються перекриття, змінюються коефіцієнти витрати і опору сопел та точних (каліброваних) отворів.

З вищевказаного випливає, що необхідно постійно контролювати ступінь чистоти робочої рідини під час заправки і роботи обладнання, тому що це може привести до своєчасного попередження відмов в роботі гідросистем. Для кожної гідросистеми залежно від її призначення і виконуваних

функцій, планової надійності і терміну служби апаратури має бути призначена певна ступінь чистоти робочої рідини.

У більшості випадків для оцінки ступеня чистоти рідини використовуються такі показники:

- маса частинок забруднення в одиниці об'єму рідини;
- об'єм механічних включень в одиниці об'єму рідини;
- кількість частинок різних розмірів в одиниці об'єму рідини.

Ступінь чистоти робочої рідини визначається на основі декількох стандартів: ГОСТ 6370–59, 10227–62, 10577–63 і т. д. Наведемо приклад деяких з них. За ГОСТ 6370 – 59 рідина вважається чистою, якщо вміст забруднювальних частинок в ній не перевищує 0,005 %, що становить 50 мг/л. Загальною масою частинок забруднення не можна до кінця охарактеризувати ступінь забрудненості, оскільки при однаковій масі кількість частинок може значно змінюватися.

За ГОСТ 17216–2001 забрудненість визначається інакше. Цей стандарт встановлює 19 класів чистоти робочої рідини, кожному з яких відповідає певне число частинок різного розміру, які містяться в 0,1 л рідини.

Міжнародна асоціація транспортної авіації рекомендує використовувати як робоче середовище рідину з частинками забруднення не більше 5 мкм та з обмеженим числом менших розмірів.

За проектом міжнародної організації ІСО/ТК 131 класи чистоти рідини встановлюються за розмірами частинок, більших ніж 15 мкм.

Існують й інші методи визначення забрудненості робочого середовища.

У всіх випадках контролю чистоти рідини має бути перемішана або проба має зніматися не пізніше однієї хвилини після зупинки гідросистеми. Пристосування для вилучення проби повинно виключати проникнення в пробу частинок забруднення ззовні як під час взяття, так і під час транспортування, що забезпечує проведення максимально точного аналізу.

Крім перерахованих існує ще цілий ряд вимог до проведення подібних аналізів.

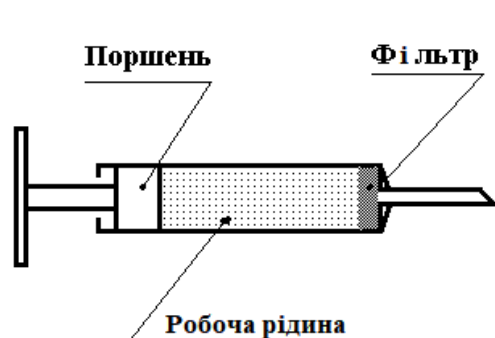


Рисунок 3.1 – Принципова схема аналізу ступеня чистоти робочої рідини

Метод аналізу ступеня чистоти робочої рідини орієнтований на ГОСТ 17216-2001, який враховує кількість та розмір забруднювальних частинок в 100 см³ рідини і класифікує рідину по 19 класах чистоти. Зазвичай цей аналіз проводиться таким чином. За допомогою спеціального забірною пристрою (рис. 3.1), що за зовнішнім виглядом і принципом дії нагадує шприц, набирається проба рідини об'ємом 100 см³. Далі ця рідина пропускається через фільтрувальний елемент, на якому залишаються частинки забруднення. Після цього за

допомогою мікроскопа проводиться підрахунок частинок, які осіли на фільтрі з урахуванням їх розмірів. Такий метод – дуже тривалий і трудомісткий процес. При його використанні суб'єктивна похибка оператора може сягати 100%, а час, що витрачається на аналіз однієї проби (одного фільтрувального елемента), – кількох годин.

3.7 Робочі рідини

У гідросистемах машин технологічного призначення найчастіше застосовують спеціальні рідини мінерального походження з діапазоном в'язкості при 50 °С приблизно 10–175 сСт. Мінеральні оливи, що застосовуються як робочі рідини гідросистем, відрізняються від мінеральних масливих (машинних) олив тим, що вони містять присадки, які надають їм специфічні властивості, відсутні у олив. Так, наприклад, для отримання мінімальної залежності в'язкості від температури застосовують в'язкі присадки.

4 ГІДРОСТАТИКА

Гідростатика – розділ гідромеханіки, що вивчає закони рівноваги нерухомої рідини, яка знаходиться під дією зовнішніх сил.

Внаслідок дії цих сил всередині рідини виникають напруження стиску, які в гідравліці називаються тиском і позначаються літерою P . У гідростатиці сили, що діють на рідину, вважаються незалежними від часу. З урахуванням цього положення можна вважати, що напруження, які виникають в рідині під дією зовнішніх сил, залежать тільки від координат точки в рідині. Таким чином, основними задачами гідростатики є визначення тиску в рідині як функції координат:

$$P = f_p(X, Y, Z), \quad (4.1)$$

а також визначення сил, що діють зі сторони рідини на тверді стінки.

4.1 Сили, що діють в рідині

4.1.1 Масові сили

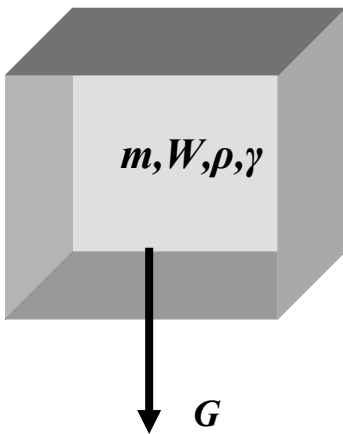


Рисунок 4.1 –
Елементарний
об'єм рідини

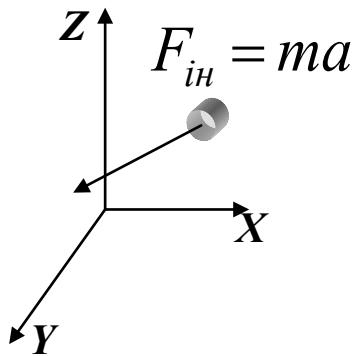


Рисунок 4.2 –
Елементарний об'єм
рідини

Масові сили – це сили, пропорційні масі рідини. У випадку однорідної рідини ці сили пропорційні об'єму. Насамперед, до них відноситься вага рідини (рис. 4.1):

$$G = mg = W\rho g = W\gamma, \quad (4.2)$$

де G – вага рідини, W – об'єм рідини, m – маса рідини, g – прискорення вільного падіння, ρ – густина рідини, γ – питома вага рідини.

Як відомо, маса є мірою інертності тіла. Ця властивість притаманна і рідині, тому до масових сил відносяться й сили інерції:

$$F_{in} = m \frac{dV}{dt} = \rho W \frac{dV}{dt} = ma; \quad (4.3)$$

де F_{in} – інерційна сила, V – швидкість рідини, t – час руху, a – прискорення руху.

Сили інерції, що діють в рідині, як і для твердого тіла, можуть проектуватися на осі (рис. 4.2):

$$F_{in}^x = m \frac{dV_x}{dt} = ma_x,$$

$$F_{in}^z = m \frac{dV_z}{dt} = ma_z,$$

$$F_{in}^y = m \frac{dV_y}{dt} = ma_y;$$

де F_{in}^x , F_{in}^y , F_{in}^z – проекції сил інерції на відповідні осі.

4.1.2 Поверхневі сили

Поверхневі сили – сили, величини яких пропорційні площі. До них відносять два види сил. Сили поверхневого натягу і сили в'язкого тертя. Останні проявляються тільки при русі рідини і не відіграють ніякої ролі, коли рідина знаходиться в спокої. Ці сили, як властивість в'язкості, були розглянуті при вивченні властивостей рідин.

4.1.3 Сили поверхневого натягу

Молекули рідини притягуються одна до одної з певною силою. Причому всередині рідини сили, що діють на будь-яку молекулу, врівноважуються, тому що з усіх боків від неї знаходяться однакові молекули, розташовані на однаковій відстані. Проте молекули рідини, які знаходяться на межі (з газом, твердим тілом або на межі двох змішуваних рідин) виявляються в нестійкому стані, тому що з боку іншої речовини діє притягання інших молекул, розташованих на інших відстанях (рис. 4.3). Виникає перевага якоїсь сили.

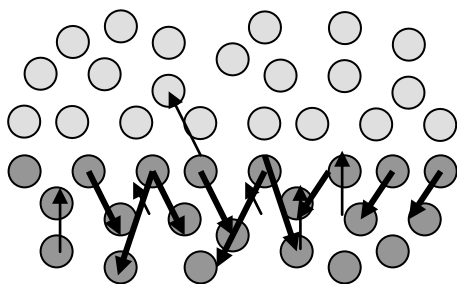


Рисунок 4.3 – Схема молекулярної взаємодії в рідині

Під дією цього впливу поверхня рідини прагне прийняти форму, яка відповідає найменшій площі. Якщо сили всередині рідини більші зовнішніх сил, то поверхня рідини прагне набути сферичної форми. Наприклад, малі маси рідини в повітрі прагнуть до кулястої форми, утворюючи краплі. Може мати місце і зворотне явище, яке спостерігається як явище капілярності.

У трубах малого діаметра (капілярах) спостерігається викривлення вільної поверхні, що межує з газом або з парами цієї ж рідини. Якщо поверхня трубки змочується, вільна поверхня рідини в капілярі увігнута. Якщо відсутнє змочування, вільна поверхня опукла, як при краплеутворенні. У всіх цих випадках сили поверхневого натягу обумовлюють додаткові напруження $p_{нов}$ в рідині. Величина цих напружень визначається за формулою:

$$p_{нов} = \frac{2\sigma}{r}, \quad (4.4)$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу, r – радіус сферичної поверхні, якої набуває рідина.

Ці додаткові напруження легко спостерігати, якщо в посудину з рідиною занурити капіляр (рис. 4.4). У цьому досліді можливі два варіанти. У першому випадку рідина, за рахунок поверхневих сил, підніметься по капіляру на незначну висоту. Тоді говорять про капілярний підйом, і спостерігається явище змочування. У другому варіанті рідина опускається в капілярі нижче рівня рідини в посудині. Таке явище називають капілярним зануренням, яке відбувається при незмочуванні.

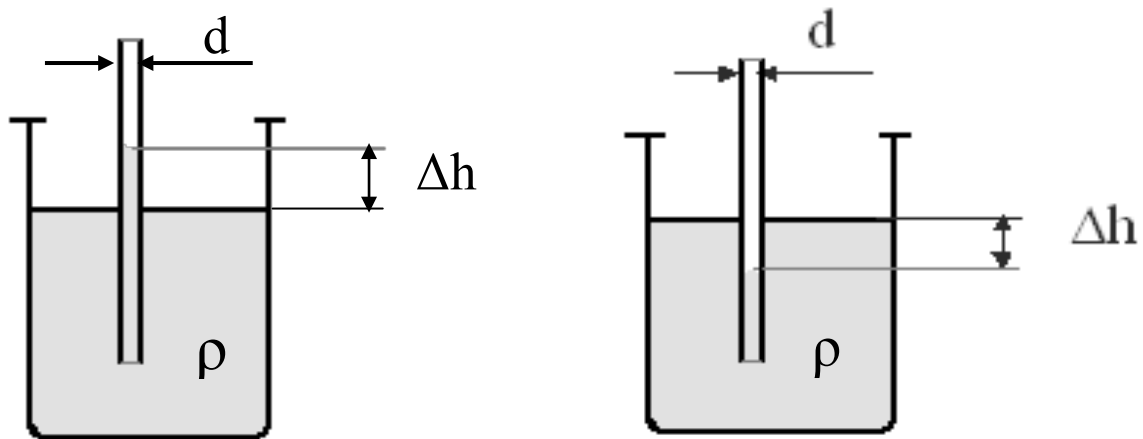


Рисунок 4.4 – Принципова хема досліду капілярного ефекту

В обох випадках величина Δh пропорційна додатковому напруженню, викликаному в рідині поверхневими силами. Вона дорівнює:

$$\Delta h = \frac{4\sigma}{gd\rho}, \quad (4.5)$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу, d – діаметр капіляра, k – коефіцієнт пропорційності, який виражається такою формулою $k=4\sigma/g\rho$, і залежить від рідини. Наприклад, при $t=20$ °С, k спирту становить 11,5, ртуті –10,15, а води – 30.

Підняття води в капілярах ґрунту є важливим фактором у поширенні води. Висота капілярного підняття в ґрунтах змінюється від нуля (галечники) майже до 5 м (глини). При цьому зі збільшенням мінералізації води висота капілярного підняття збільшується.

Поверхневий натяг і капілярні ефекти визначають закономірності руху рідини в умовах невагомості.

До поверхневих сил відносяться і сили тиску, тому що вони діють на поверхні рідини.

4.1.4 Сили тиску

Тиск – напруження, що виникають в рідині під дією стискальних сил. У загальному випадку поверхнева сила ΔR , діюча на площині ΔS під деяким кутом до неї, може бути розкладена на нормальну ΔF_n та тангенціальну ΔT складові (рис. 4.5). Перша, направлена всередину об'єму, називається силою тиску, друга – силою тертя. Нормальна складова викликає в рідині нормальне напруження або гідромеханічний тиск, який в рідині, що знаходиться в стані спокою, називається гідростатичним. Якщо сила ΔF_n рівномірно розподілена по площі ΔS , тоді:

$$\Delta P = \frac{\Delta F_n}{\Delta S}, \quad (4.6)$$

або переходячи до межі:

$$dP = \frac{dF}{dS} \quad (4.7)$$

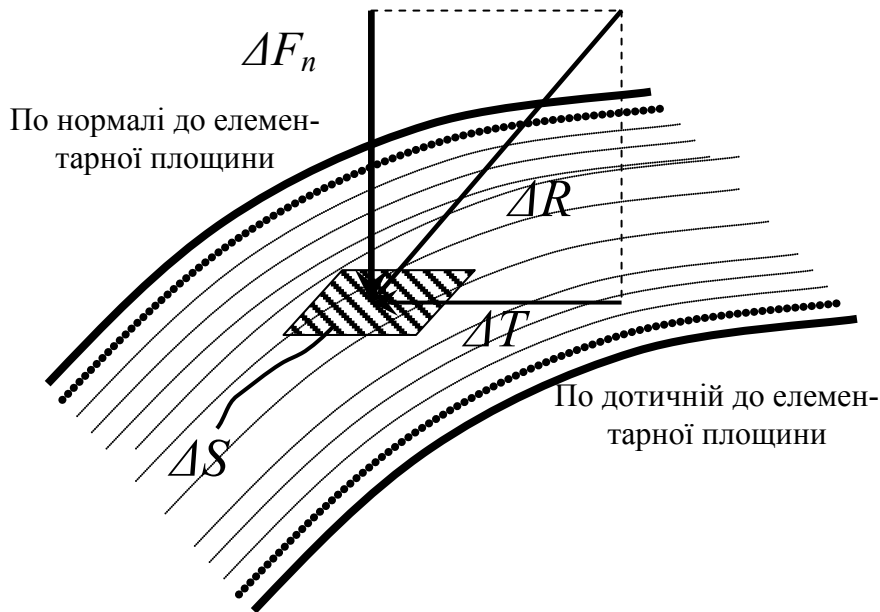


Рисунок 4.5 – Схема розташування складових сил на елементарній площині в рідині

У будь-якому випадку причиною виникнення тиску є зовнішня сила, прикладена до рідини. Часто в гідроприводі такою силою є навантаження F , прикладене до виконавчого органу. Це навантаження впливає на рідину через якусь жорстку поверхню і, отже, розподілене рівномірно, наприклад площа поршня гідроциліндра S . У такому випадку тиск P визначається за формулою:

$$P = \frac{F}{S} \quad (4.8)$$

Якщо тиск рахується від нуля, то він називається абсолютним та позначається $P_{абс}$, якщо від атмосферного – надлишковим і позначається $P_{над}$. Атмосферний тиск позначається $P_{атм}$.

Крім того, розрізняють тиск гідродинамічний і гідростатичний. Гідродинамічний тиск виникає у рухомій рідині. Гідростатичний тиск – тиск у рідині, яка знаходиться у стані спокою.

4.1.5 Властивості гідростатичного тиску

Перша властивість формулюється так: на зовнішній поверхні рідини гідростатичний тиск завжди направлений по нормалі всередину об'єму, який розглядається.

У наведеному формулюванні «зовнішня поверхня» – це будь-яка поверхня, яку можна виділити всередині рідини (навіть подумки), або поверхню розділу середовищ.

Доводиться перша властивість шляхом міркувань методом «від супротивного».

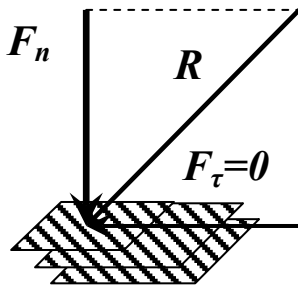


Рисунок 4.6 – Схема складових сили гідростатичного тиску

Розглянемо рідину, яка знаходиться в стані спокою (рис. 4.6). Відомо, що рідина погано чинить опір дотичним зусиллям. Якщо б сила від тиску R діяла б не по нормалі до площини, то її можна було б подати в вигляді двох складових – нормальною F_n та дотичною F_t . Тоді дотична складова зміщувала б шари рідини один відносно одного. Це означало, що рідина не знаходилася б в стані спокою. Це протирічить початковому твердженню.

З першої властивості витікає, що напруження стиску – єдиний вид напруження в рідині, яка знаходиться в стані спокою.

Друга властивість полягає в тому, що в будь-якій точці всередині рідини тиск в усіх напрямках однаковий. Інакше ця властивість тиску звучить так: на будь-яку площу всередині об'єму рідини, незалежно від її кута нахилу, діє однаковий тиск.

Доведемо другу властивість. Для цього розглянемо довільний об'єм в нерухомій рідині у вигляді прямокутного тетраедра з розмірами d_x , d_y , d_z . Розглянемо цей об'єм в деякій довільній системі координат X , Y , Z (рис. 4.7).

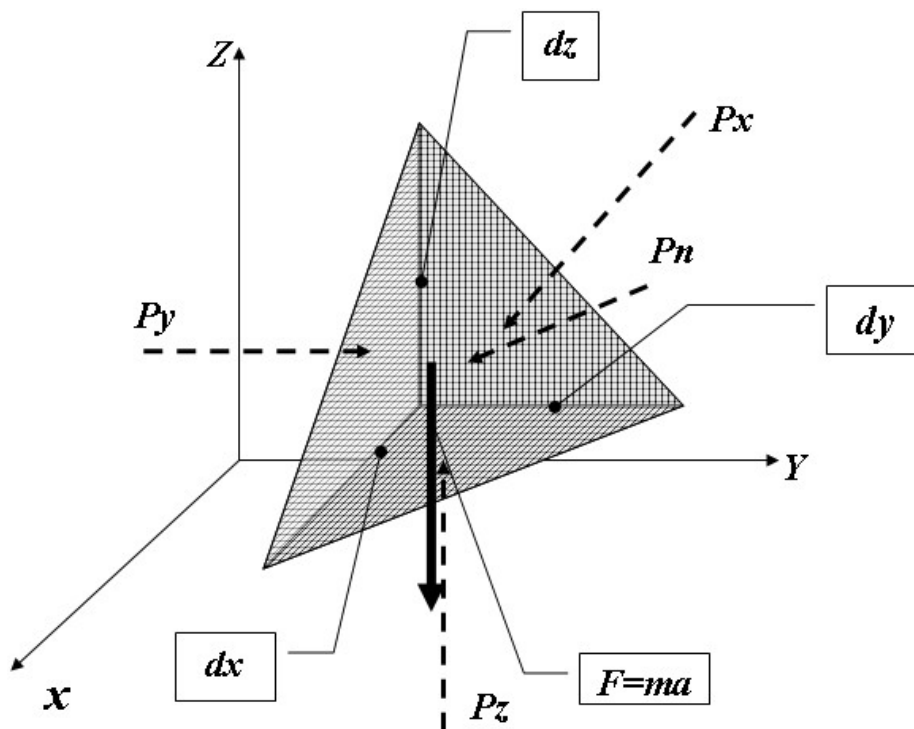


Рисунок 4.7 – Схема визначення властивості рідини однаковості тиску у всіх напрямках

На рисунку 4.7 наведено такі літерні позначення: P_x, P_y, P_z – гідростатичний тиск, який діє на грань, перпендикулярну відповідній осі, P_n – гідростатичний тиск, що діє на похилу грань dS , F – інерційні сили (або сили ваги).

Тетраedr dx, dy, dz за означенням знаходиться в стані спокою, отже, сума сил, що діє на нього, нульова, тобто:

$$\sum_{x,y,z} F_{x,y,z} = 0. \quad (4.9)$$

Розглянемо детально ці сили. Насамперед, на виділений тетраedr діють сили тиску. У проекціях на осі системи координат, за напрямом кожної з осей діє сила від тиску на межу, перпендикулярну до цієї осі. Цій силі протидіє проекція на відповідну вісь сили тиску на похилу (велику) грань тетраедра. Отримуємо три пари сил, відповідно осям:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} P_x d_x d_y - P_n dS \cos(\hat{x}, n); \\ \frac{1}{2} P_y d_x d_z - P_n dS \cos(\hat{y}, n); \\ \frac{1}{2} P_z d_x d_y - P_n dS \cos(\hat{z}, n). \end{cases} \quad (4.10)$$

Разом з силами тиску, в загальному випадку, на тетраedr діють інерційні сили (або в найпростішому випадку, сила ваги), які дорівнюють добутку маси на проекцію прискорення на відповідну вісь. Масу визначимо як добуток густини рідини і об'єму тетраедра.

Об'єм прямокутного тетраедра дорівнює $\frac{1}{6} dx dy dz$. У цьому випадку інерційні сили будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_x \\ \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_y \\ \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_z \end{cases} \quad (4.11)$$

Додавши обидві отримані системи рівнянь (4.10) і (4.11), і, прирівнявши їх до нуля, через рівноваги тетраедра отримаємо загальну систему рівнянь сил, що діють в рідині, яка знаходиться в стані спокою:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}P_x d_x d_y - P_n dS \cos(x, n) + \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_x = 0; \\ \frac{1}{2}P_y d_x d_z - P_n dS \cos(y, n) + \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_y = 0; \\ \frac{1}{2}P_z d_x d_y - P_n dS \cos(z, n) + \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_z = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Якщо врахувати, що площа кожної грані тетраедра, паралельної площинам координат, дорівнює площі проекції похилої грані на відповідну координатну площину, то отримаємо таку рівність:

$$\frac{1}{2}d_x d_y = dS \cos(x, n) = \frac{1}{2}d_x d_z = dS \cos(y, n) = \frac{1}{2}d_x d_y = dS \cos(z, n). \quad (4.13)$$

Розділивши рівняння сил (4.12) на відповідно однакові площі (4.13), отримаємо:

$$\begin{cases} P_x - P_n + \frac{1}{3} dx \rho a_x = 0; \\ P_y - P_n + \frac{1}{3} dy \rho a_y = 0; \\ P_z - P_n + \frac{1}{3} dz \rho a_z = 0. \end{cases} \quad (4.13, a)$$

Спрямувавши розміри тетраедра до 0, тобто $d_x, d_y, d_z \rightarrow 0$ і $dS \rightarrow 0$ остання система рівняння (4.13, а) набуде вигляду:

$$\begin{cases} P_x - P_n = 0; \\ P_y - P_n = 0; \\ P_z - P_n = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Прирівнявши ці три рівняння (4.14), отримаємо таку рівність:

$$P_x = P_y = P_z = P_n. \quad (4.15)$$

Як результат можна зробити такий висновок: тиск не залежить від напрямку або, іншими словами: тиск – величина скалярна.

Проте виникає питання, яким чином виходить, що тиск і площа величини скалярні, а їх добуток сила – величина векторна: $\vec{F} = P \times S$ –?

Відповідь на це питання полягає в такому. Напрямок вектора сили задає елементарна площа, на яку діє тиск. Цей напрямок завжди перпендикулярно елементарній площі дії і направлено всередину розглянутого об'єму.

4.2 Основні рівняння гідростатики

Визначимо тепер величину тиску всередині рідини, яка знаходиться в стані спокою. З цією метою розглянемо довільну точку A , яка знаходиться на глибині h_a (рис. 4.8). Поблизу цієї точки виділимо елементарну площу dS . Якщо рідина знаходиться в стані спокою, то і точка A також знаходиться в рівновазі, що означає зрівноваженість сил, діючих на площу.

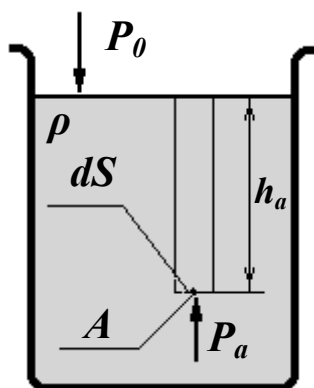


Рисунок 4.8 – Схема визначення тиску в рідині

На рисунку 4.8 прийнято такі позначення: A – довільна точка в рідині, h_a – глибина точки A , P_0 – тиск зовнішнього середовища, ρ – густина рідини, P_a – тиск в точці A , dS – елементарна площина.

Зверху на площину діє зовнішній тиск P_0 (у випадку, якщо вільна поверхня межує з атмосферою, тоді $P_0 = P_{атм}$), і вага стовпа рідини. Знизу – тиск в точці A . Рівняння сил, діючих на елементарну площу, в цих умовах набуде вигляду:

$$dSP_0 + dSh_ag\rho = P_a dS. \quad (4.16)$$

Розділивши цей вираз на dS і враховуючи, що точка A вибрана довільно, отримаємо вираз для P у будь-якій точці рідини, яка знаходиться в стані спокою:

$$P = P_0 + \rho gh, \quad (4.17)$$

де h – глибина рідини, на якій визначається тиск P .

Отриманий вираз називається основне рівняння гідростатики.

4.2.1 Визначення основного рівняння гідростатики

По-перше, з основного рівняння гідростатики витікає, що для будь-якої точки рідини до складу величини тиску входить P_0 – тиск, який прикладено до межової поверхні рідини ззовні. Ця складова однакова для будь-якої точки рідини [15, 16]. Тому з основного рівняння гідростатики витікає закон Паскаля: тиск, прикладений до межової поверхні рідини, яка знаходиться у стані спокою, передається усім точкам цієї рідини в усіх напрямках однаково. Потрібно підкреслити, що тиск у всіх точках неоднаковий. Однакова лише та частина (складова), яка прикладена до межової поверхні рідини. Закон Паскаля – основний закон, на основі якого працює об'ємний гідропривод, який застосовується в абсолютній більшості гідросистем технологічних машин.

Другим наслідком є той факт, що на однаковій глибині в рідині, яка знаходиться в стані спокою, тиск однаковий. Як результат – можна говорити про поверхні однакового тиску. Для рідини, що знаходиться в абсолютному спокої або рівномірно рухається, ці поверхні – горизонтальні площини. В інших випадках відносного спокою, які будуть розглянуті нижче, поверхні однакового тиску можуть мати іншу форму або не бути горизон-

тальними. Існування поверхонь однакового тиску дозволяє вимірювати тиск в будь-якій точці рідини.

4.3 Прилади для вимірювання тиску

Існує два основних типи приладів для вимірювання тиску в рідині. До приладів першого типу можна віднести п'єзометри. Вони являють собою вертикальну трубку, зазвичай прозору. Якщо, наприклад, потрібно виміряти тиск в точці a , то досить під'єднати цю трубку до стінки посудини так, щоб її кінець знаходився на поверхні однакового тиску, що проходить через цю точку. У п'єзометрі встановиться рівень рідини, пропорційний тиску в точці a . Абсолютний тиск в цій точці буде:

$$P_{абс} = P_0 + \rho g h_a. \quad (4.18)$$

З іншої сторони, цей тиск можна подати як:

$$P_{абс} = P_{атм} + \rho g h_n. \quad (4.19)$$

Звідки

$$h_n = \frac{P_0 - P_{атм} + \rho g h_a}{\rho g} = \frac{P_{над} - P_{атм}}{\rho g}. \quad (4.20)$$

Величина h_n називається п'єзометричною висотою. За її величиною роблять висновок про величину тиску.

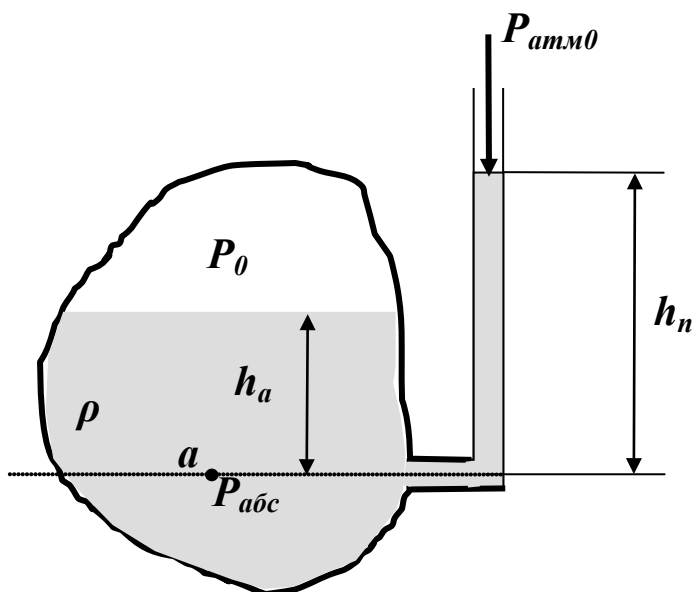


Рисунок 4.9 – Схема п'єзометричного визначення тиску

Якщо абсолютний тиск менший атмосферного $P_{абс} < P_{атм}$, то в рідині має місце розрідження або вакуум. Такий тиск називають вакуумметричним тиском $P_{вак}$, а висоту в п'єзометрі називають вакуумметричною висотою $h_{вак}$.

Ці величини відповідно дорівнюють:

$$P_{\text{вак}} = P_{\text{атм}} + P_{\text{абс}} \cdot h_{\text{вак}} = \frac{P_{\text{атм}} - P_{\text{абс}}}{\rho g}. \quad (4.21)$$

До другого типу приладів відносяться манометри, які мають велику різноманітність за типами, розмірами та характеристиками. Проте принципово усі ці прилади складаються з чутливого елемента, який змінює свою форму під дією тиску, та пов'язаних з цим елементом передаточного механізму та реєструвального приладу (індикатора).

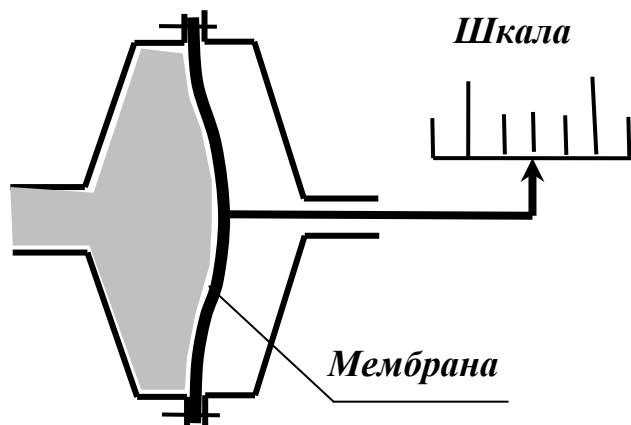


Рисунок 4.10 – Схема вимірювання тиску манометром мембранного типу

Стрілка, яка переміщується вздовж шкали. Такий прилад відрізняється невеликим відхиленням реєструвального елемента – стрілки, отже, точність вимірювання великою бути не може (рис. 4.10).

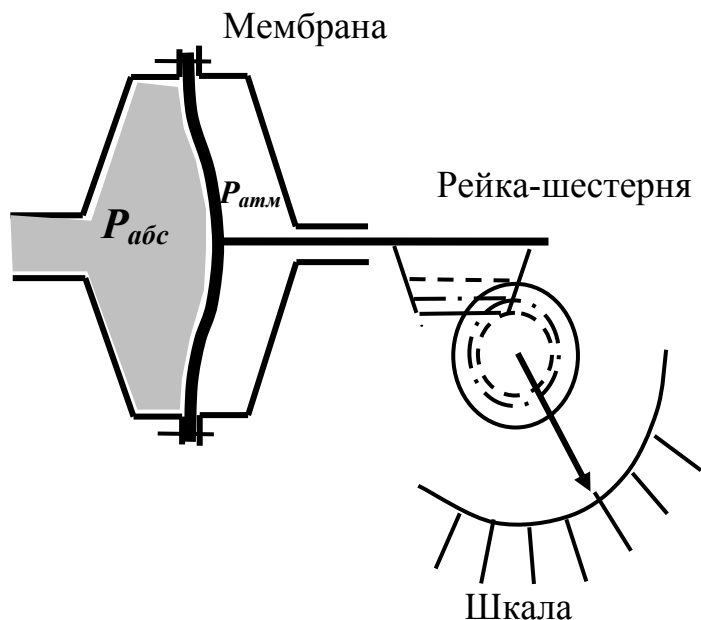


Рисунок 4.11 – Схема вимірювання тиску манометром із зубчастою рейкою

Під'єднувати манометри для вимірювання тиску в певній точці потрібно так, як і п'езометри, на рівні поверхні, яка дорівнює вибраній точці тиску. Наприклад, під дією тиску гнучкий чутливий елемент – мембрана – згинається (рис. 4.10). Розмір такого відхилення пропорційний величині вимірюваного тиску. Разом із мембраною відхилюється жорстко з'єднана з нею

Для збільшення чутливості приладу мембрану можна з'єднати із зубчастою рейкою, яка знаходиться в зачепленні з шестернею (рис. 4.11). Якщо з останньою жорстко з'єднати стрілку, то при зміні тиску вона буде повертатися відносно радіальної шкали. У такому випадку прогин мембрани дасть більше, ніж в першому випадку, лінійне відхилення кінця стрілки. Це збільшить точність показань приладу.

Загальним недоліком таких приладів є мале вихідне відхилення чутливого елемента – мембрани.

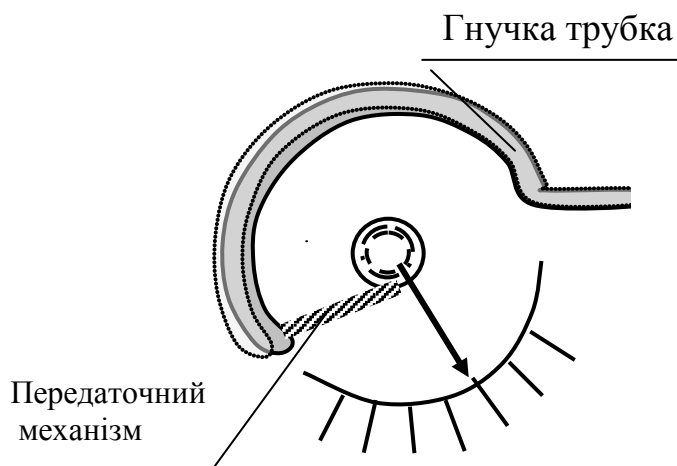


Рисунок 4.12 – Схема вимірювання тиску манометром із гнучкою трубкою

двищенні тиску трубка розгинається, і це відхилення значно більше, ніж відхилення мембрани при такому ж тиску.

У всіх випадках чутливий елемент (мембрану або гнучку трубку) можна з'єднати із індуктивним електричним перетворювачем, що складається із сердечника і електричної котушки. Таким чином можна і використовувати п'єзокристалічний перетворювач. В обох випадках буде генеруватися електричний сигнал, пропорційний величині тиску. Цей сигнал після відповідних електричних аналогових або цифрових перетворювачів можна передавати на великі відстані і реєструвати стрілочними або цифровими, наприклад рідкокристалічними, індикаторами. Цей сигнал нескладно також передавати для обробки на комп'ютері.

Для усунення цього недоліку використовуються більш складні чутливі елементи (рис. 4.12). Найчастіше таким елементом є пустотілів трубка, радіально зігнута. Один кінець трубки зв'язаний із штуцером для підключення вимірювального тиску, інший – із зубчастим сектором, який зв'язаний із шестернею та стрілкою, що повертається навколо шкали. При пі-

5 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ РІДИНИ, ЯКА ЗНАХОДИТЬСЯ В СТАНІ СПОКОЮ

Диференціальні рівняння рівноваги рідини, що знаходиться в стані спокою, інакше називають диференціальними рівняннями Ейлера. Вони отримані для загального випадку відносного спокою рідини. Можливі такі варіанти відносного спокою (рис. 5.1).

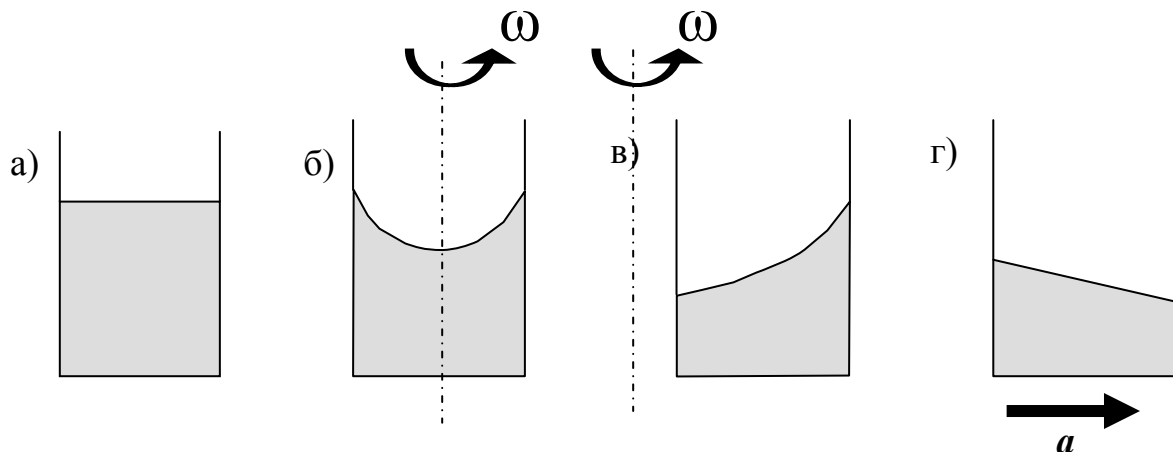


Рисунок 5.1 – Типові схеми відносного спокою рідини:

- а) – рівномірний рух; б), в) – обертальний рух з постійною кутовою швидкістю; г) – прямолінійний рівноприскорений рух

Перший варіант (див. рис. 5.1, а) відповідає абсолютному спокою або рівномірному руху посудини з рідиною. Такий варіант розглядався при виведенні основного рівняння гідростатики (див. розд. 4.2).

Другий варіант – обертання посудини з рідиною з постійною кутовою швидкістю ω навколо центральної осі (рис. 5.1, б). Не дивлячись на те, що вся маса рідини обертається разом з посудиною, частинки рідини одна відносно іншої не переміщуються, отже, весь об'єм рідини, як і в першому випадку, являє собою ніби тверде тіло. Тиск в кожній точці рідини не змінюється в часі і залежить тільки від координат. З цих причин рідина підпадає під визначення тої, що знаходиться в стані спокою.

Третій варіант (рис. 5.1, в) аналогічний другому, тільки обертання здійснюється навколо довільно розташованої вертикальної осі. У другому і третьому випадку вільна поверхня рідини набуває нової форми, відповідної новому рівноважному положенню рідини.

У четвертому варіанті (див. рис. 5.1, г) посудина з рідиною рухається прямолінійно і рівноприскорено. Такий випадок проявляється, наприклад, в процесі розгону або зупинки автоцистерни з рідиною. У цьому випадку рідина займає новий врівноважений стан, де вільна поверхня набуває похилого положення, яке зберігається до зміни прискорення. Частинки рідини одна відносно одної знаходяться в спокої, і тиск залежить тільки від координат.

У всіх перерахованих випадках на рідину діють, по-перше, сили ваги, по-друге, сили інерції, по-третє, сили тиску.

Розглянемо в довільній системі координат x, y, z довільну точку A (рис. 5.2). Поблизу цієї точки виділимо елементарний об'єм dx, dy, dz у формі прямокутного паралелепіпеда, грані якого для простоти математичних виразів паралельні координатним площинам.

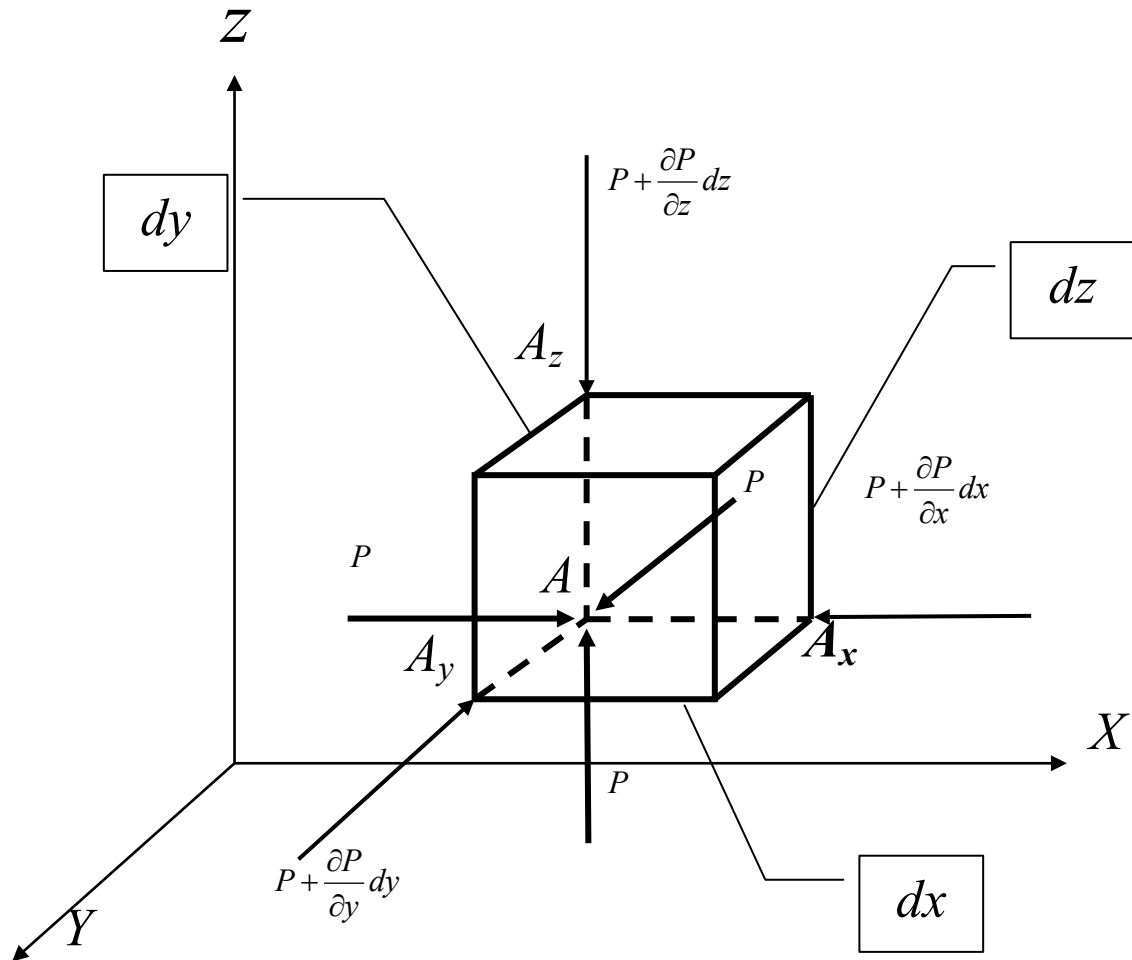


Рисунок 5.2 – Розрахункова схема диференціального рівняння рівноваги рідини

Відмітимо таке:

– тиск є функцією координат (при цьому в будь-якій точці по всіх напрямках однаковий);

– при переході до точок A_x (A_y, A_z) змінюється тільки одна координата на нескінченно малу величину dx (dy, dz), тому функція отримує приріст тільки за однією координатою;

– цей приріст дорівнює частинному диференціалу за відповідною координатою $\frac{\partial P}{\partial x} dx, \frac{\partial P}{\partial y} dy, \frac{\partial P}{\partial z} dz$.

Таким чином, різниця тисків, що діє на протилежній грані паралелепіпеда (всередині розглянутого об'єму), перпендикулярні до

відповідних осей, матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} \Delta P_x = P - (P + \frac{\partial P}{\partial x} dx) = -\frac{\partial P}{\partial x} dx; \\ \Delta P_y = P - (P + \frac{\partial P}{\partial y} dy) = -\frac{\partial P}{\partial y} dy; \\ \Delta P_z = P - (P + \frac{\partial P}{\partial z} dz) = -\frac{\partial P}{\partial z} dz. \end{cases} \quad (5.1)$$

Виходячи з (5.1), визначимо різниці сил, що виникають під дією тиску, в проекціях на осі координат:

$$\begin{cases} \Delta F_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dzdxdy; \\ \Delta F_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dydxdz; \\ \Delta F_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dxdydz. \end{cases} \quad (5.2)$$

Крім сил тиску на паралелепіпед будуть діяти інерційні сили F^{in} в загальному випадку, які визначаються масою і прискореннями a_x, a_y, a_z :

$$\begin{cases} F_x^{in} = a_x \rho dxdydz; \\ F_y^{in} = a_y \rho dxdydz; \\ F_z^{in} = a_z \rho dxdydz. \end{cases} \quad (5.3)$$

Враховуючи, що паралелепіпед знаходиться в стані спокою, сума сил, що діє на нього, дорівнює 0:

$$\begin{cases} a_x \rho dxdydz - \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = 0; \\ a_y \rho dxdydz - \frac{\partial P}{\partial y} dydxdz = 0; \\ a_z \rho dxdydz - \frac{\partial P}{\partial z} dzdxdy = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Розділивши систему рівнянь сил (5.3) на масу цього паралелепіпеда, отримуємо систему рівнянь Ейлера:

$$\begin{cases} a_x - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho} = 0; \\ a_y - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{\rho} = 0; \\ a_z - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{1}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

На практиці, щоб позбутися частинних похідних, використовують одне рівняння, замінюючи систему. Для цього перше рівняння системи (5.5) множать на dx , друге – на dy , третє – на dz і додають їх:

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz - \frac{1}{\rho} \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right)}_{dP} = 0. \quad (5.6)$$

У цій формулі (5.6) сума в дужках є повним диференціалом тиску, який дорівнює:

$$dP = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz). \quad (5.7)$$

Отримане рівняння (5.7) показує, як змінюється тиск при зміні координат всередині рідини, яка знаходиться в стані спокою для загального випадку відносного спокою.

5.1 Частинні випадки інтегрування рівнянь Ейлера

5.1.1 Рідина в стані спокою під дією сили тяжіння

Спочатку розглянемо найпростіший випадок стану спокою. Рідина знаходиться під дією сили тяжіння (рис. 5.3). Це означає, що проекції прискорень на осі X та Y відсутні. Єдиним прискоренням є прискорення вільного падіння g , тобто:

$$a_x=0, \dots, a_y=0, \dots, a_z=-g. \quad (5.8)$$

Тоді повний диференціал тиску після підстановки в нього прискорень набуває вигляду:

$$dP = -\rho g dz. \quad (5.9)$$

Після інтегрування виразу (5.9) отримуємо:

$$\int dP = \int -\rho g dz \Rightarrow P = -\rho g z + C. \quad (5.10)$$

Сталу інтегрування, яка дорівнює:

$$C = P + \rho g z. \quad (5.11)$$

знайдемо, підставивши параметри для рівної поверхні P_0 и Z_0 .

Після підстановки цих значень в інтеграл P будемо мати рівність:

$$P = -\rho g z + P_0 + \rho g z_0. \quad (5.12)$$

Переписавши вираз (5.12) в іншому вигляді, отримаємо:

$$P = P_0 + \rho g z_0 - \rho g z = P_0 + \rho g (z_0 - z). \quad (5.13)$$

Якщо позначити $(Z_0 - Z)$ через h , то наведена рівність (5.13) набуває вже знайомого нам вигляду основного рівняння гідростатики

$$P = P_0 + \rho g h. \quad (5.14)$$

З цієї ж рівності (5.14) можна отримати такий вигляд:

$$P + \rho g z = P_0 + \rho g z_0, \quad (5.15)$$

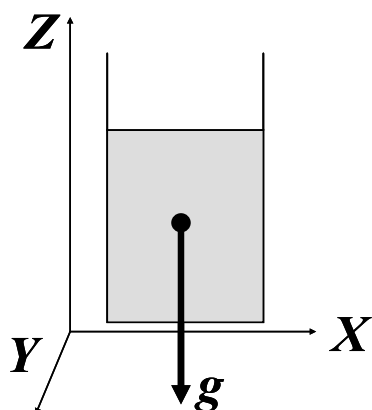


Рисунок 5.3 – Схема рідини в стані спокою під дією сили тяжіння

або

$$z + \frac{P}{\rho g} = \text{const.} \quad (5.16)$$

Останній вираз (5.16) дуже часто називають основним законом гідростатики.

Отриманий вище основний закон гідростатики (5.16) нескладно вивести, опираючись на такі міркування. Вони не носять строгого математичного характеру, але правильно відображають фізику явища.

Розглянемо довільну точку a всередині об'єму рідини, яка розташована на якійсь висоті відносно деякого довільного рівня. Цей рівень назвемо нульовим рівнем (нульовою лінією). Будемо вважати, що на цій лінії потенційна енергія, що залежить від положення розглянутого об'єму рідини, дорівнює нулю. З точки зору практики можна вважати, що це рівень, нижче якого розглянутий об'єм рідини не може пролитися.

Наприклад, для лабораторної склянки це рівень столу, для гідросистеми верстата – рівень підлоги, для системи опалення – рівень землі або підвалу.

Поблизу точки a виберемо елементарний об'єм dW (рис. 5.4). Виразимо потенційну енергію цього об'єма як суму двох складових: енергії, яка залежить від положення над нульовою лінією $m_a g z_a$, та енергії тиску $dW P_a$, яка залежить від ступеня внутрішнього напруження в вибраному об'ємі.

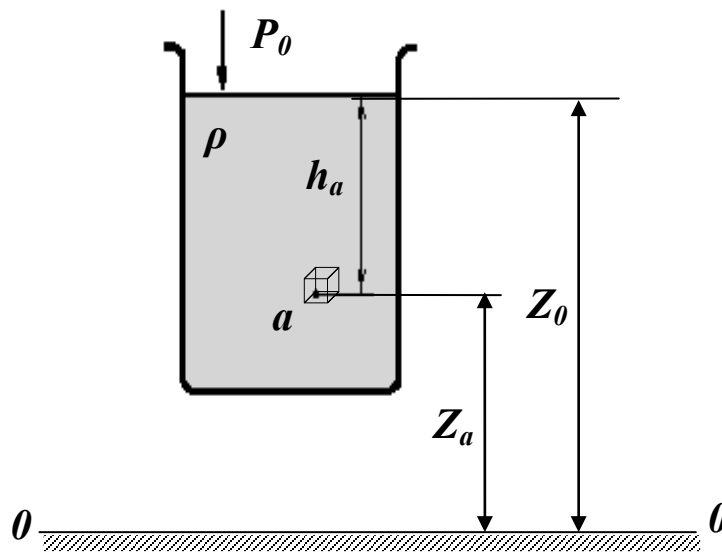


Рисунок 5.4 – Розрахункова схема гідростатичного тиску рідини

$$E_a = m_a g z_a + dW P_a, \quad (5.17)$$

де $P_a = P_0 + h_a \rho g$ тиск в точці a ; $m_a = dW \rho$ – маса об'єму dW , який обрано навколо точки a .

$$E_a = dW \rho g z_a + dW P_a. \quad (5.18)$$

Тоді потенційна енергія із рівняння (5.18) буде виражена:

$$E_a = dW \rho g z_a + W (P_0 + h_a \rho g). \quad (5.19)$$

Якщо врахувати, що $h_a = z_0 - z_a$, і підставити його в останній вираз (5.19), то отримаємо:

$$E_a = dW \rho g z_a + dWP_0 + dW \rho g (z_0 - z_a). \quad (5.20)$$

Розкривши дужки в (5.20), отримаємо:

$$E_a = dW \rho g z_a + dWP_0 + dW \rho g z_0 - dW \rho g z_a. \quad (5.21)$$

Після скорочення в (5.21) отримаємо:

$$E_a = dWP_0 + dW \rho g z_0. \quad (5.22)$$

Вихідний вираз для потенційної енергії об'єму, що розглядається, має вигляд $E_a = dW \rho g z_a + dWP_a$. Тоді можна записати:

$$dW \rho g z_a + dWP_a = dWP_0 + dW \rho g z_0. \quad (5.23)$$

Розділимо обидві частини цього виразу (5.23) на вагу розгляданого об'єму $dW \rho g$. Як результат отримаємо вже відомий вираз основного закону гідростатики:

$$z_a + \frac{P_a}{\rho g} = z_0 + \frac{P_0}{\rho g}. \quad (5.24)$$

Якщо згадати, що точка a була вибрана довільно, можна записати отриману рівність (5.24) у загальному вигляді:

$$z + \frac{P}{\rho g} = \text{const}. \quad (5.25)$$

З висновку зрозуміло, що фізичний зміст основного закону гідростатики – закон збереження енергії для рідини, яка знаходиться в стані спокою, говорить про те, що механічна енергія будь-якої частинки рідини однакова.

У виразі (5.25):

z – потенційна енергія одиниці ваги рідини, яка визначається над положенням нульової лінії;

$\frac{P}{\rho g}$ – потенційна енергія одиниці ваги рідини, яка залежить від ступеня її стиску.

У геометричній інтерпретації константу позначають буквою H та називають гідростатичним тиском, а саму формулу записують у вигляді:

$$z + \frac{P}{\rho g} = H. \quad (5.26)$$

Складові основного закону гідростатики у такому випадку називають:

z – нівелірна висота; $\frac{P}{\rho g}$ – п'єзометрична висота.

5.1.2 Прямолінійний рівноприскорений рух посудини з рідиною

Якщо посудина з рідиною нерівномірно рухається, то на рідину діють сили ваги і інерційні сили. Під їх дією частинки рідини займають нове положення. Якщо рух рівноприскорений, тоді нове положення буде зрівно-

важеним, і рідина буде знаходитись у відносному спокої. Вільна поверхня і поверхні рівня не горизонтальні. Форма цих поверхонь визначається величиною і напрямком рівнодійної масових сил. При цьому рівнодійна завжди перпендикулярна до поверхні (перша властивість гідростатичного тиску). Поверхні рівня не можуть перетинатися, тому що в такому випадку в одній точці діяло б два різних тиски.

Розглянемо посудину з рідиною, яка рухається з постійним прискоренням a (рис. 5.5).

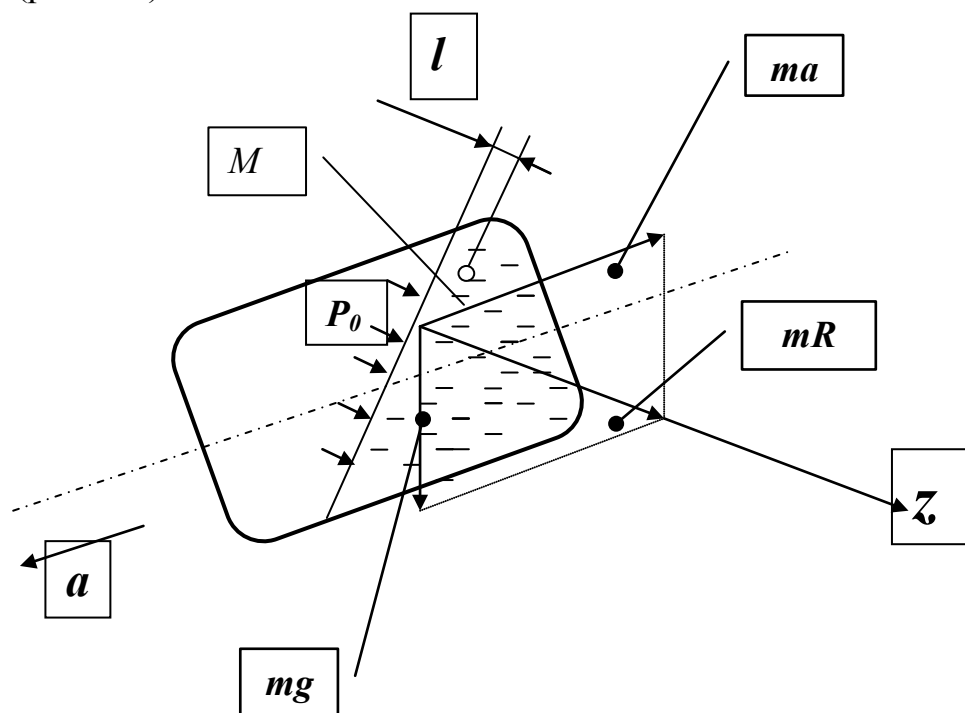


Рисунок 5.5 – Розрахункова схема рівноприскореного прямолінійного руху рідини

Рідина в цій посудині займе нове рівноважне положення. Рівновага об'єму рідини описується повним диференціалом тиску:

$$dP = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz). \quad (5.27)$$

Визначимо тиск в довільній точці рідини. Для цього візьмемо довільну точку M на відстані l від вільної поверхні. Крім цього виберемо систему координат, таку, щоб вісь Z була спрямована по перпендикуляру до вільної поверхні. Таке розташування осі не змінить істотного виведення, але математичні вирази будуть простіші і більш пізнавані. Тоді при прямолінійному русі в обраній системі координат:

$$a_x = a_y = 0, a_z = R. \quad (5.28)$$

Підставивши ці значення (5.28) у вираз для повного диференціала (5.27), отримаємо:

$$dP = \rho(Rdl). \quad (5.29)$$

Після інтегрування (5.29) отримаємо:

$$P = \rho Rl + C. \quad (5.30)$$

Сталу інтегрування C знайдемо з граничних умов на вільній поверхні, коли при $l=0$, $P=P_0$. Стала C набуде вигляду $C = P_0 + \rho R l_{=0} = P_0$. Після підстановки (5.30) в кінцевому вигляді отримаємо:

$$P = P_0 + \rho R l. \quad (5.31)$$

Підсумкова формула (5.31) аналогічна основному рівнянню гідростатики (5.26), з тією лише різницею, що замість глибини h використовується відстань від похилої вільної поверхні l , а замість прискорення вільного падіння g – рівнодійне прискорення R .

5.1.3 Рівномірне обертання посудини з рідиною

Розглянемо посудину з рідиною (рис. 5.6), яка обертається навколо своєї осі з постійною швидкістю ω . На рідину діють зовнішні тиски, сили тяжіння та інерційні сили. В результаті їх дії рідина займає нове рівноважне положення. Вільна поверхня набуває форми параболоїда. Розглянемо на цій поверхні довільну точку N . Рівнодійна сила R , діюча в точці N , перпендикулярна до вільної поверхні. Величина цієї сили збільшується зі збільшенням радіуса, а кут її нахилу до горизонту зменшується. Це означає, що нахил цієї поверхні до горизонту зростає зі збільшенням радіуса. Таким чином, сила R визначає форму вільної поверхні. Знайдемо математичну формулу цієї поверхні.

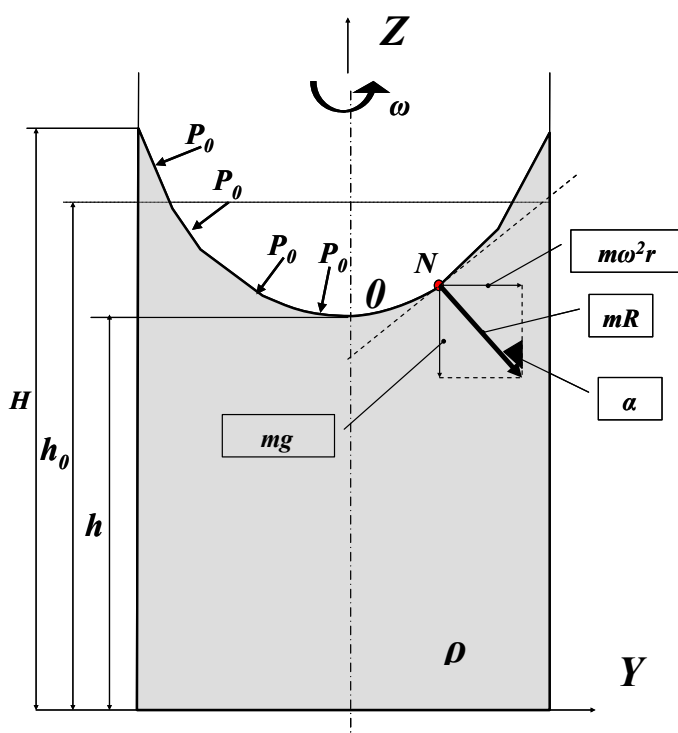


Рисунок 5.6 – Розрахункова схема посудини з рідиною, що рівномірно обертається

З рисунку 5.6 видно, що:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}. \quad (5.32)$$

Із рівняння (5.32) виразимо dz :

$$\int dz = \int \frac{\omega^2 r}{g} dr. \quad (5.33)$$

Проінтегрувавши (5.33), отримаємо:

$$\int dz = \int \frac{\omega^2 r}{g} dr \Rightarrow z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C. \quad (5.34)$$

Сталу інтегрування знайдемо з відомих умов: при $r=0$, $z=h$. Підставивши ці значення в останнє рівняння (5.34), отримаємо, що $C=h$. Тоді будемо мати формулу, яка описує форму кривої, утвореної вільною поверхнею:

$$z = h + \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \quad (5.35)$$

Тепер визначимо тиск в рідині, використовуючи повний диференціал тиску:

$$dP = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz). \quad (5.36)$$

Для цього випадку відносного спокою:

$$a_x = \omega^2 x, \text{ т } a_y = \omega^2 y, \text{ т } a_z = -g. \quad (5.37)$$

З урахуванням (5.37) повний диференціал тиску набуде вигляду:

$$dP = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz). \quad (5.38)$$

Проінтегруємо цю функцію (5.38):

$$\int dP = \int \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz) = \rho \int \omega^2 x dx + \rho \int \omega^2 y dy - g \int dz.$$

Результатом інтегрування буде вираз:

$$P = \rho\left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz\right) + C = \rho \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho gz + C. \quad (5.39)$$

Враховуючи, що $x^2 + y^2 = r^2$, де r – радіус обертання, із (5.39) отримаємо:

$$P = \rho \frac{\omega^2}{2} (r^2) - \rho gz + C. \quad (5.40)$$

Сталу інтегрування C визначимо з умови, що при $r=0$, $P=P_0$, тоді $z=h$. Стала інтегрування з урахуванням прийнятих умов буде визначатись:

$$C = P_0 + \rho gh + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2}. \quad (5.41)$$

Тоді формула, що виражає тиск в рідині, яка обертається з постійною кутовою швидкістю, набуде вигляду:

$$P = P_0 + \rho gh - \rho gz + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} = P_0 + \rho g(h - z) + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2}. \quad (5.42)$$

Зауважимо, що у кінцевому виразі (5.42) перший доданок характеризує тиск зовнішнього середовища. Другий доданок описує тиск, створений стовпом рідини, що знаходиться нижче точки 0 , тобто глибиною під рівнем нульової точки. Третя складова характеризується висотою над точкою 0 , і, отже, описує тиск, що створюється рідиною, яка піднімається по краях посудини, причому ця величина залежить від відстані точки до осі обертання. Таким чином, виявляється, що тиск в кожній точці рідини, що обертається з постійною швидкістю відносно вертикальної осі, складається з зовнішнього тиску і тиску стовпа рідини над цією точкою.

З наведеного аналізу можна зробити такий висновок. Посудину з рідиною, яка рівномірно обертається, можна подумки уявити як сукупність посудин, які мають нескінченно малі площі. Тиск у будь-якій точці такої посудини підпорядковується основному рівнянню гідростатики і підраховується звичним чином. Висота стовпа рідини в посудинах залежить від частоти обертання і радіусу обертання реальної посудини. Звідси стає зрозуміло, що варіант рівномірного обертання рідини навколо довільно розташованої вертикальної осі практично не відрізняється від вже розглянутого.

6 ТИСК РІДИНИ НА СТІНКИ

Найважливою задачею гідростатики є визначення сил, з якими рідина діє на тверді стінки, які її оточують. Дуже часто необхідно знати величину, напрям і точку прикладання сил, викликаних тиском, щоб правильно провести розрахунки на міцність елементів конструкції гідропривода (гідравлічних машин, апаратів й арматури). Подібні задачі необхідно розв'язувати і під час проектування гідротехнічних споруд (греблі, дамби, причали тощо). Проаналізуємо розв'язок задач (типових), які виникають найчастіше.

6.1 Сила тиску рідини на плоску стінку

Розглянемо довільну площу ds , розташовану на плоскій похилій стінці посудини з рідиною на відстані Y від осі x , та визначимо сили, діючі на цю площину (рис. 6.1).

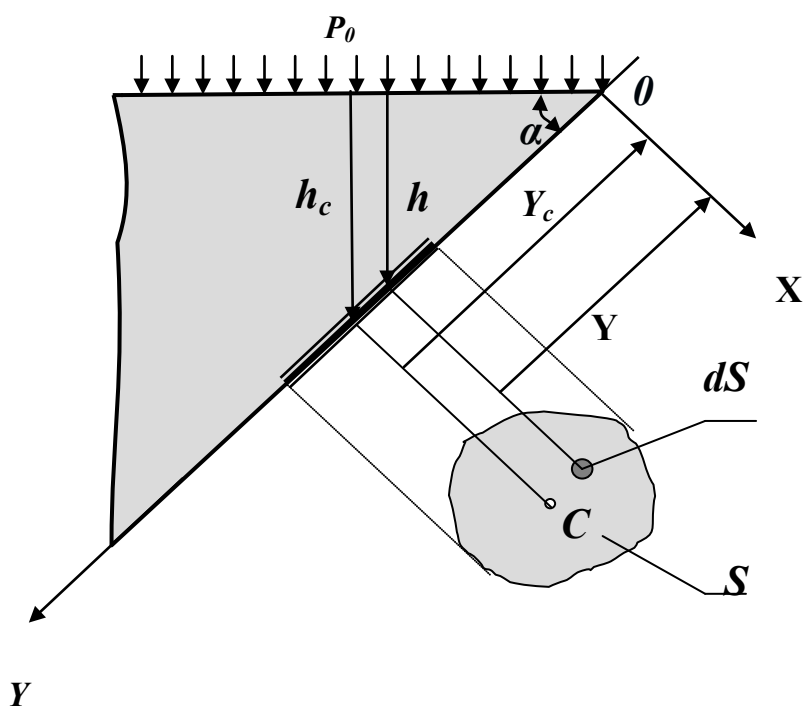


Рисунок 6.1 – Розрахункова схема визначення сил тиску рідини на плоску стінку

Сила від тиску, що діє на елементарну площу dS , буде описуватись такою формулою:

$$dF = PdS = (P_0 + \rho gh)dS . \quad (6.1)$$

Якщо проінтегрувати вирази (6.1) за площею, можна визначити повну силу, що діє на всю площу вцілому:

$$F = P_0 \int_s dS + \rho g \int_s hdS . \quad (6.2)$$

З рисунку 6.1 відомо, що в останньому виразі $h = Y \sin \alpha$. Підставивши значення h в попередній вираз (6.2), отримаємо:

$$F = P_0 S + \rho g \sin \alpha \int_S Y dS . \quad (6.3)$$

З теоретичної механіки відомо, що інтеграл $\int_S Y dS$ є ні що інше, як статичний момент площі S відносно осі Ox . Він дорівнює добутку твірної цієї площі на координату її центра ваги, тобто можна записати:

$$\int_S Y dS = Y_c S , \quad (6.4)$$

де Y_c – відстань від осі x до центра ваги площі S .

Підставивши формулу моменту (6.4) у вираз сили (6.3), отримаємо:

$$F = P_0 S + \overbrace{\rho g Y_c \sin \alpha}^{P_{над}} S . \quad (6.5)$$

h_c

Аналіз другого доданка показує, що твірна $Y_c \sin \alpha$ – це глибина положення центра ваги площини, а $\rho g Y_c \sin \alpha$ – надлишковий тиск рідини в центрі ваги площини. З урахуванням цього можна записати:

$$F = \underbrace{(P_0 + \rho g h_c)}_{P_c} S . \quad (6.6)$$

Сума в дужках в останньому виразі (6.6) є абсолютним тиском в центрі ваги довільної площини. Таким чином, можна зробити висновок: повна сила тиску рідини, що діє на плоску стінку, дорівнює добутку її площі на величину гідростатичного тиску в центрі ваги цієї стінки.

Проте необхідно врахувати, що ця сила не сконцентрована в точці, а розподілена по усій площі, і розподіл цей нерівномірний. З цієї причини для розрахунків, крім величини сили, діючої на похилу площину, необхідно знати точку прикладання рівнодійної сили.

6.2 Центр тиску

Розподілене навантаження, що діє на похилу стінку, замінимо сконцентрованим. Для цього знайдемо на похилій стінці положення точки D , в якій прикладена рівнодійна сили тиску. Точку, в якій прикладена ця сила, називають центром тиску. Як вже неодноразово розглядалося, тиск, що діє в будь-якій точці, відповідно до основних рівнянь гідростатики складається з двох частин: зовнішнього тиску P_0 , який передається усім точкам рідини однаково, і тиску стовпа рідини P , який визначається глибиною занурення цієї точки.

Розглянемо два випадки (рис. 6.2). У першому випадку на рисунку 6.2, а) тиск P_0 передається усім точкам площини однаково. Отже, рівнодійна $F_{вн}$ цього тиску буде прикладена в центрі ваги площини S . При цьому необхідно врахувати, що в більшості випадків цей тиск діє і зі сторони рідини та із зовнішньої сторони стінки.

У другому випадку на рисунку 6.2, б) тиск P збільшується зі збільшенням глибини. При цьому величина рівнодійної цієї сили $F_{над}$ відома і дорівнює:

$$F_{над} = \rho g h_c S,$$

а точку її прикладання необхідно визначити.

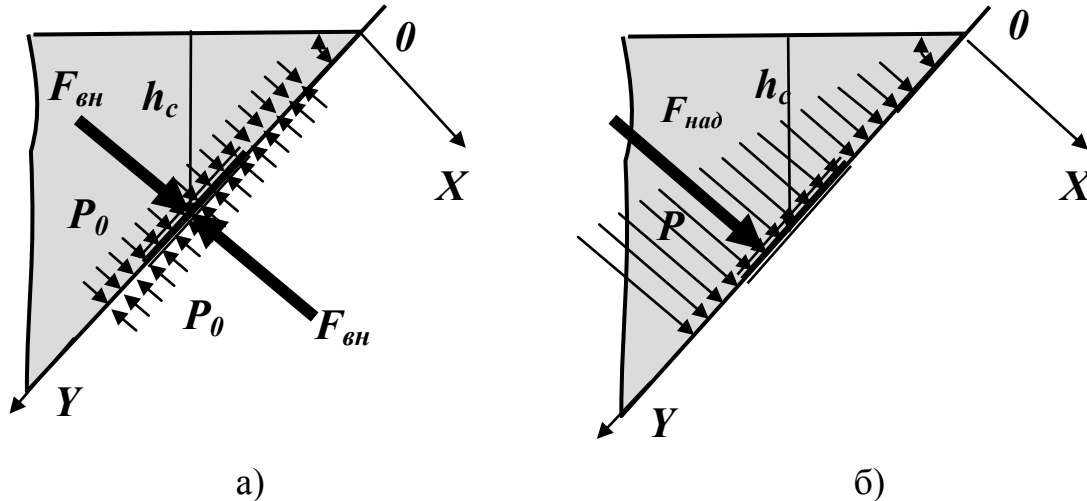


Рисунок 6.2 – Розрахункові схеми дії зовнішніх сил на похилу стінку:
а) – від зовнішнього тиску; б) – від п'езометричного тиску

Для визначення центра надлишкового тиску (рис. 6.3) застосуємо рівняння, згідно з яким момент рівнодійної сили відносно осі Ox дорівнює сумі моментів складових сил, тобто:

$$F_{над} Y_D = \int_S Y dF_{над};$$

де Y_D – координата точки прикладання сили $F_{над}$, Y – поточна глибина.

Врахуємо, якщо h_c виразити як координату точки C по осі Y , то $F_{над}$ набуде вигляду:

$$F_{над} = (\rho g \sin \alpha Y_c S) Y_D = \int_S Y d(\rho g \sin \alpha Y S) = \rho g \sin \alpha \int_S Y^2 dS.$$

Замінивши у цьому виразі $F_{над}$ та Y_D інтегралом, згідно із згаданим рівнянням механіки, будемо мати:

$$F_{над} Y_D = \int_S Y dF_{над} = \int_S Y d(\rho g \sin \alpha Y S) = \rho g \sin \alpha \int_S Y^2 dS. \quad (6.7)$$

Звідси виразимо Y_D :

$$Y_D = \frac{\rho g \sin \alpha \int_S Y^2 dS}{\rho g \sin \alpha Y_c S} = \frac{\int_S Y^2 dS}{Y_c S}. \quad (6.8)$$

Інтеграл в чисельнику дробу рівняння (6.8) є статичним моментом інерції площини S відносно осі Ox і зазвичай позначається як J_x :

$$\int_S Y^2 dS = J_x. \quad (6.9)$$

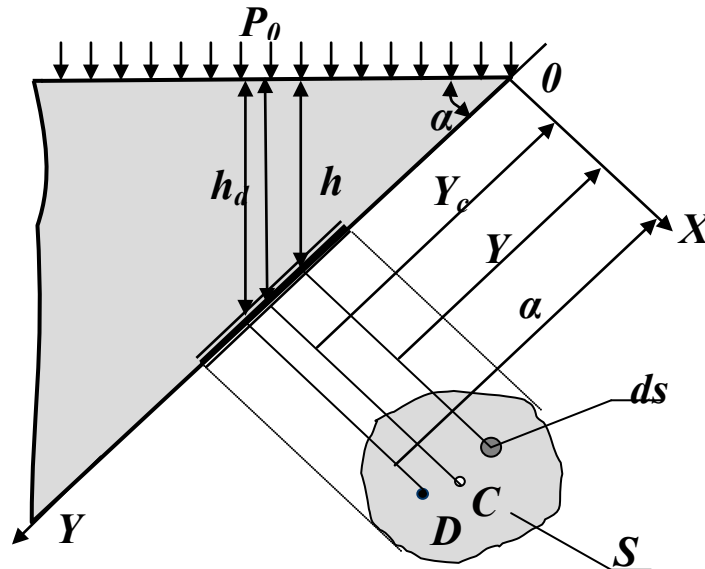


Рисунок 6.3 – Розрахункова схема для визначення центра надлишкового тиску

З теоретичної механіки відомо, що статичний момент площі відносно осі обертання дорівнює сумі власного моменту інерції (моменту інерції цієї площі відносно осі, яка проходить через її центр ваги і паралельно першій осі) і добутку цієї площі на квадрат відстані від осі обертання до центра її ваги:

$$J_x = J_{x_0} + Y_c^2 S. \quad (6.10)$$

Із врахування останнього означення (6.8) остаточно можна виразити Y_D у вигляді:

$$Y_D = \frac{J_{x_0} + Y_c^2 S}{Y_c S} = Y_c + \frac{J_{x_0}}{Y_c S}. \quad (6.11)$$

Таким чином, різниця в положеннях ΔY (глибинах) центра ваги (рис. 6.3) площини (точка C) і центра тиску (точка D) становить:

$$\Delta Y = \frac{J_{x_0}}{Y_c S}. \quad (6.12)$$

У підсумку можна зробити такі висновки. Якщо зовнішній тиск діє на стінку з обох сторін, то знайдена точка D буде центром тиску. Якщо зовнішній тиск з боку рідини вищий за тиску з протилежного боку (наприклад, атмосферного), тоді центр тиску визначається за правилами механіки як точка прикладання рівнодійної двох сил: сили, яка утворюється зовнішнім тиском, і сили, що створюється вагою рідини. При цьому, чим більший зовнішній тиск, тим ближче розташовується центр тиску до центра ваги.

У гідроприводі технологічного обладнання зовнішні тиски в десятки і сотні разів перевищують тиски, викликані висотою стовпа рідини. Тому в

розрахунках гідравлічних машин і апаратів положення центрів тиску вважають такими, що збігаються з центрами ваги.

6.3 Сила тиску рідини на криволінійну стінку

Найчастіше необхідно визначити силу, яка діє на циліндричну поверхню і має вертикальну вісь симетрії. Можливі два варіанти. Перший варіант – рідина діє на стінку зсередини (рис. 6.4). У другому варіанті рідина діє на стінку ззовні. Розглянемо обидва варіанти.

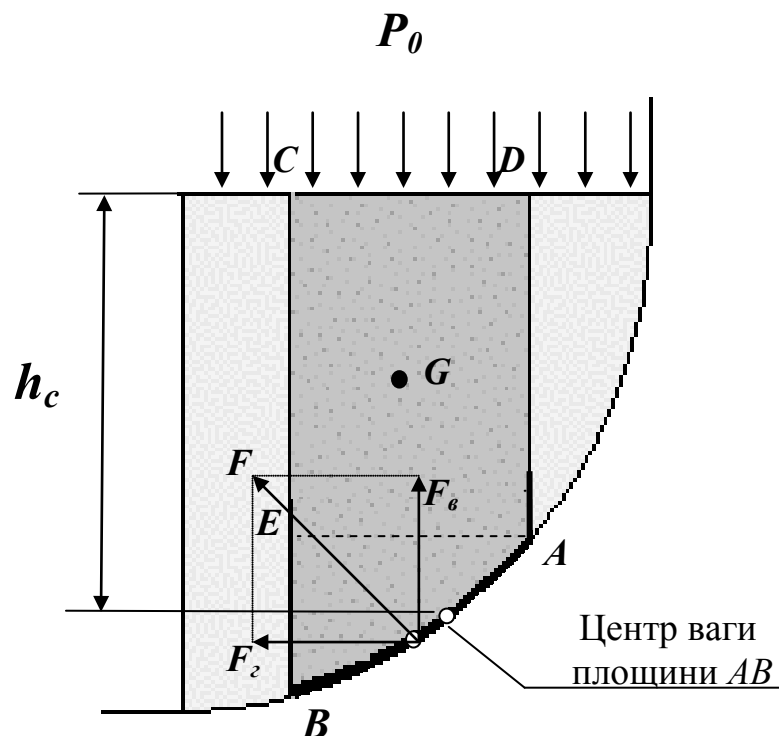


Рисунок 6.4 – Розрахункова схема для визначення сил тиску рідини на криволінійну стінку, що діють зсередини

У першому випадку виділимо об’єм рідини, обмежений ділянкою циліндричної поверхні AB і ділянкою вільної поверхні CD , розташованою над ділянкою AB , та двома вертикальними поверхнями BC і CD , які проходять через точки A і B . Ці поверхні обмежують об’єм $ABCD$, який знаходиться в рівновазі. Розглянемо умови рівноваги цього об’єму у вертикальному і горизонтальному напрямках. Зауважимо, що, якщо рідина діє на поверхню AB із якоюсь силою F , то з такою ж силою, але у зворотному напрямку, і поверхня діє на цей об’єм рідини. Силу, перпендикулярну до поверхні AB , можна подати у вигляді горизонтальної F_2 і вертикальної F_g складових.

Умова рівноваги об’єму $ABCD$ у вертикальному напрямку:

$$F_g = P_0 S_2 + G, \quad (6.13)$$

де P_0 – зовнішній тиск, S_2 – площа горизонтальної проекції поверхні AB , G – вага виділеного об’єму рідини.

Умову рівноваги такого об'єму в горизонтальній площині запишемо з урахуванням того, що сили, які діють на однакові вертикальні поверхні AD і CE , взаємно врівноважуються. Залишається тільки сила тиску на площину BE , яка пропорційна вертикальній проекції S_e поверхні AB . З урахуванням часткового урівноваження матимемо умову рівноваги сил в горизонтальному напрямку у вигляді:

$$F_z = S_e \rho g h_c + P_0 S_e, \quad (6.14)$$

де h_c – глибина розташування центра ваги поверхні AB .

Знаючи F_z і F_e , визначимо повну силу F , яка діє на циліндричну поверхню:

$$F = \sqrt{F_z^2 + F_e^2}. \quad (6.15)$$

У другому випадку (рис. 6.5), коли рідина діє на циліндричну поверхню ззовні, величина гідростатичного тиску у всіх точках поверхні AB має ті ж значення, що і в першому випадку, оскільки визначається такою ж глибиною. Сили, що діють на поверхню в горизонтальному і вертикальному напрямках, визначаються за тими самими формулами, але мають протилежний напрям. При цьому під величиною G потрібно розуміти той самий об'єм рідини $ABCD$, не дивлячись на те, що насправді в цьому випадку він і не заповнений рідиною.

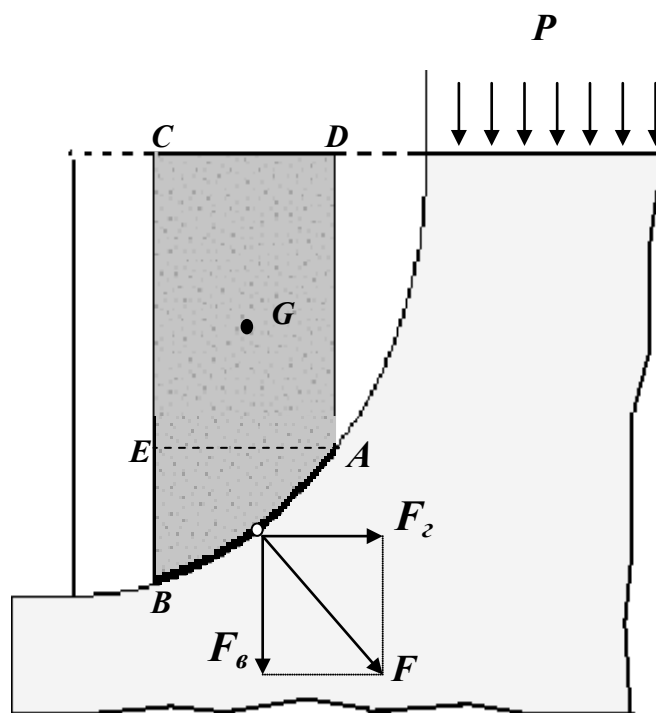


Рисунок 6.5 – Розрахункова схема для визначення сил тиску рідини на криволінійну стінку, що діють на стінку ззовні

Положення центра тиску на циліндричній стінці легко можна знайти, якщо відомі сили F_z і F_e і визначені центр тиску на вертикальній проекції стінки і центр ваги об'єму $ABCD$, що розглядається. Завдання спрощується, якщо розглянута поверхня є кроловою, тому що рівнодійна сила при

цьому перетинає вісь поверхні. Це відбувається через те, що сили тиску завжди перпендикулярні до поверхні, а перпендикуляр до кола завжди проходить через його центр.

6.4 Кругла труба під дією гідростатичного тиску

У гідравлічних системах технологічного призначення рідина, в основному, передається по трубах круглого перерізу. У водопроводах, каналізаційних і багатьох інших трубопровідних системах, гідротехнічних спорудах широко використовуються труби і різні резервуари круглого перерізу. Тому задача визначення навантаження на трубу є вельми поширеною. У таких розрахунках використовується раніше отримана формула горизонтальної складової сили, що діє з боку рідини на криволінійну поверхню:

$$F_z = S_g \rho g h_c + P_0 S_g = S_g (\rho g h_c + P_0). \quad (6.16)$$

Для труб невеликого діаметра, які застосовуються в машинобудівному гідроприводі, тиском стовпа рідини можна знехтувати, нехтуючи його розміром. Тоді рівняння (6.16) набуде вигляду

$$F_z = S_g P_0, \quad (6.17)$$

де P_0 – зовнішній тиск.

Розглянемо трубу (рис. 6.6) довжиною l із внутрішнім діаметром D і товщиною стінок δ , яка знаходиться під дією гідростатичного тиску P . Цей тиск викликає сили F_x на розтяг. Через симетричність труби такі сили розтягу будуть діяти однаково у всіх напрямках. Для вертикальної площини ця сила буде дорівнювати:

$$F_x = P D l, \quad (6.18)$$

де добуток Dl – є вертикальною проекцією площини стінки труби.

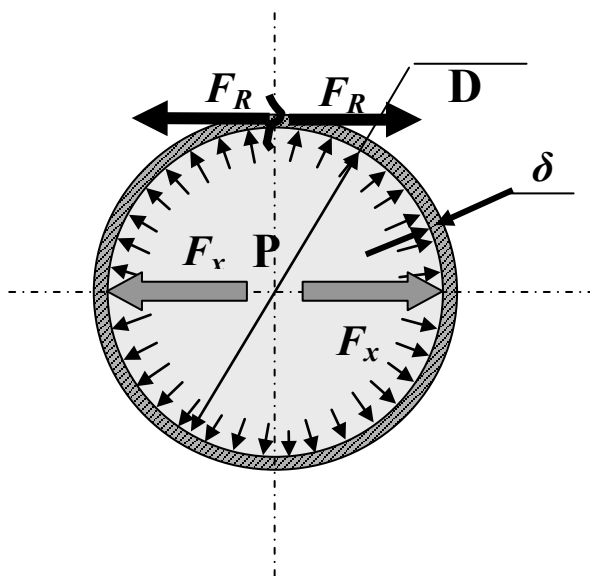


Рисунок 6.6 – Розрахункова схема для визначення навантаження на стінки трубопроводу

Сили розтягу будуть протидіяти силам реакції F_R , що виникають у стінках труби. Площа стінок труби S_δ в будь-якому осьовому перерізі становитиме:

$$S_\delta = 2l\delta. \quad (6.19)$$

Під дією сил розтягу в стінках труби буде виникати сумарна сила реакції F_R , що дорівнює за величиною розтягувальній силі, але направлена в протилежну сторону:

$$F_R = F_x. \quad (6.20)$$

З (6.20) знаходимо напругу σ в стінках труби, викликану тиском всередині труби. Вона дорівнює:

$$\sigma = \frac{F_R}{S_\delta} = \frac{PDI}{2l\sigma} = \frac{PD}{2\sigma}. \quad (6.21)$$

6.5 Гідростатичний парадокс

Розглянемо три посудини (рис. 6.7) різної форми, заповнені рідиною до однакового рівня h_c . Усі посудини такі, що мають однакову площу дна.

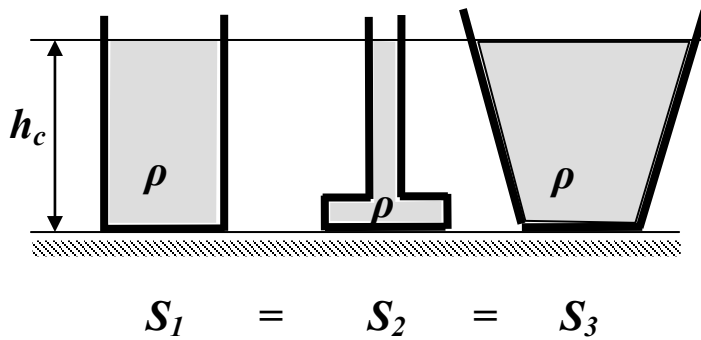


Рисунок 6.7 – Типові схеми для визначення гідростатичного парадоксу

Згідно з загальною формулою визначення сили, діючої на поверхню

$$F_{над} = \rho g h_c S, \quad (6.22)$$

можна визначити силу, що діє на дно посудини. Для усіх трьох посудин ці сили виявляться однаковими і такими, що незалежать від ваги рідини у посудині. Але на опору всі посудини

будуть діяти з різними силами, рівними вазі посудин з рідиною. Цей факт отримав назву гідростатичного парадоксу.

6.6 Основи теорії плавання тіл

Будемо вважати, що в рідину густиною ρ занурено тіло об'ємом V (рис. 6.8). Виберемо систему координат, вісь Z якої направимо вниз, а осі X і Y уздовж вільної поверхні. Розглянемо зусилля, що діють на тіло з боку рідини [17, 18].

Усі горизонтальні складові, як було встановлено вище, будуть врівноважуватись. Для визначення вертикальних складових виділимо в твердому тілі елементарний циліндричний об'єм з площею поперечного перерізу dS . На торцеві поверхні цього об'єму діють сили dF_1 зверху та dF_2 знизу.

Вертикальна складова сили dF_1 буде:

$$dF_1 \cos \alpha_1 = \rho g dS_1 \cos \alpha_1 = \rho g z_1 dS. \quad (6.23)$$

Вертикальна складова сили dF_2 буде:

$$dF_2 \cos \alpha_2 = -\rho g dS_2 \cos \alpha_2 = \rho g z_2 dS. \quad (6.24)$$

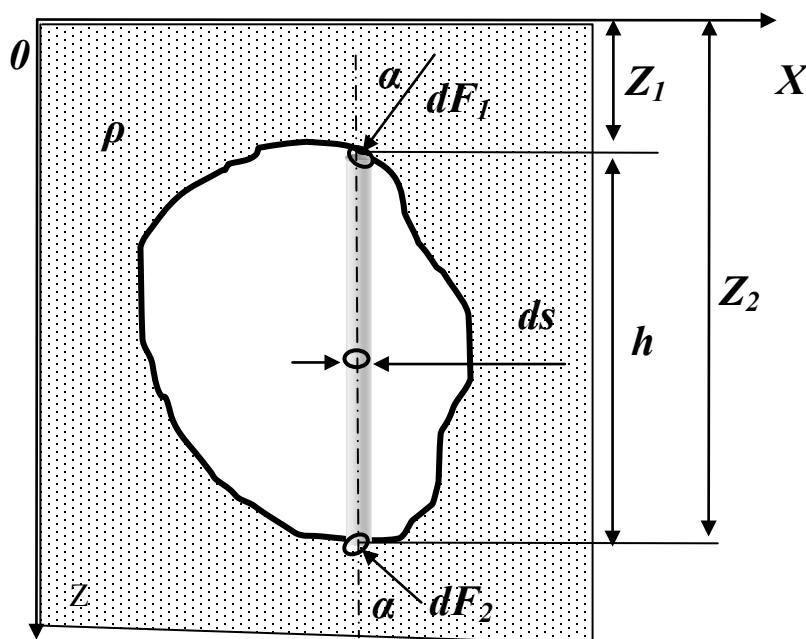


Рисунок 6.8 – Розрахункова схема визначення сил, що діють на плаваюче тіло

Будемо вважати, що занурене в рідину тіло знаходиться в рівновазі. Тому вага виділеного елементарного циліндра dG буде врівноважуватися діючими на нього силами.

$$dG = \rho g z_1 dS - \rho g z_2 dS = -\rho g h dS. \quad (6.25)$$

Проінтегрувавши цей вираз за площею горизонтальної проекції тіла, отримаємо:

$$G = -\rho g \int_s h dS = -\rho g V. \quad (6.26)$$

Вираз (6.26) називається законом Архімеда і визначається як: занурене в рідину тіло втрачає в своїй вазі стільки, скільки важить витіснена ним рідина. Іншими словами на тіло, занурене в рідину, діє витискаюча сила, що дорівнює вазі витісненої тілом рідини. Ця сила прикладена в точці, яка називається точкою вводитоннажності.

Залежно від відношення ваги та витісняючої сили можливі три стани тіла:

- якщо вага більша витісняючої сили – тіло тоне,
- якщо вага менша витісняючої сили – тіло спливає,
- якщо вага дорівнює витісняючій силі – тіло плаває.

7 КІНЕМАТИКА РІДИНИ

Основним завданням цього розділу гідравліки є визначення залежностей швидкості u і тиску P в кожній точці потоку рідини, які є відповідними функціями часу t і координат x, y, z :

$$u = f_u(x, y, z, t) \text{ і } P = f_P(x, y, z, t). \quad (7.1)$$

Вивчення залежностей (7.1) почнемо з розгляду ідеальної рідини, під якою будемо розуміти уявну рідину, що не має в'язкості і, отже, не має внутрішніх сил. Тиск в такій рідині має властивості статичного тиску, тобто напрямлений по внутрішній нормалі і передається однаково в усіх напрямках.

7.1 Види руху (течії) рідини

Течія рідини може бути невстановленою (нестационарною) або встановленою (стационарною).

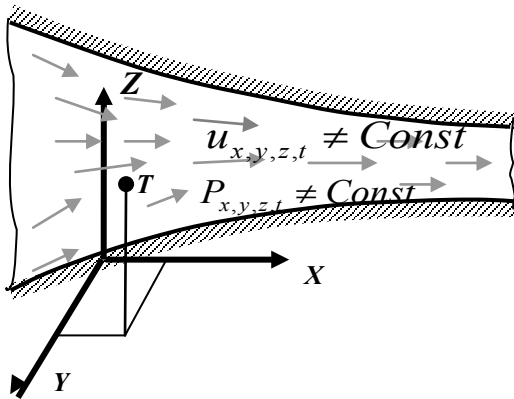


Рисунок 7.1 – Схема невстановленого руху рідини

Невстановлений рух – це рух, при якому швидкість руху потоку і тиск з часом змінюються (рис. 7.1), тобто u та P залежать не тільки від координат точки в потоці, а і від моменту часу, в який визначаються характеристики руху:

$$u = f_u(x, y, z, t) \text{ і } P = f_P(x, y, z, t). \quad (7.2)$$

Прикладом невстановленого руху може бути витікання рідини з посудини, яка випорожнюється, при цьому рівень рідини в посудині постійно змінюється (зменшується) із витіканням

рідини.

Встановлений рух – такий, при якому в будь-якій точці потоку швидкість руху і тиск з часом не змінюються (рис. 7.2), тобто u та P залежать тільки від координат в точці потоку, а не залежать від моменту часу, в який визначаються характеристики руху:

$$u = f'_u(x, y, z) \text{ і } P = f'_P(x, y, z),$$

та, отже:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0.$$

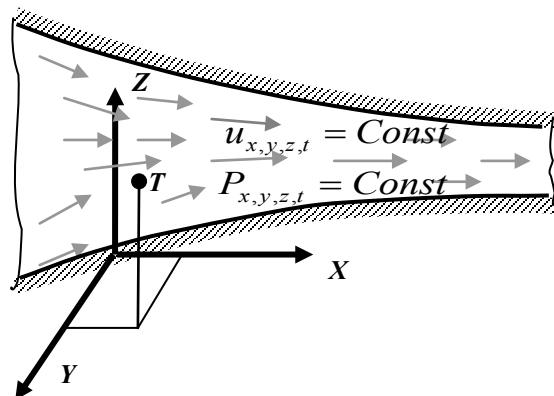


Рисунок 7.2 – Схема встановленого руху рідини

Приклад встановленого руху – витікання рідини з посудини з постійним рівнем, який не змінюється (залишається постійним) із витіканням рідини.

У разі сталого перебігу в процесі руху будь-яка частинка, потрапляючи в задане, відносно твердих стінок, місце потоку, завжди має однакові параметри руху. Отже, кожна частинка рухається по певній траєкторії.

Траєкторією називається шлях, який проходить частинка рідини в просторі за певний проміжок часу.

При встановленому русі форма траєкторії не змінюється під час руху. У разі невстановленого руху величини напрямку і швидкості руху будь-якої частинки рідини безперервно змінюються, отже, і траєкторії руху частинок у цьому випадку також постійно змінюються в часі (рис. 7.3).

Тому для розгляду картини руху, який утворюється в кожний момент часу, застосовується поняття лінії току (течії).

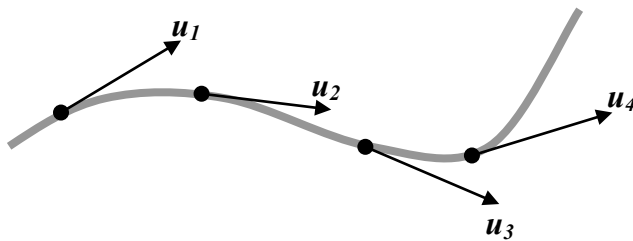


Рисунок 7.3 – Схема траєкторії течії рідини

Лінія току – це крива (рис. 7.4), проведена в рухомій рідині в заданий момент часу так, що в кожній точці вектори швидкості u_i збігаються з дотичними до цієї кривої.

Потрібно розрізняти траєкторію та лінію току. Траєкторія характеризує шлях, який проходить одна певна частинка, а

лінія току – напрямки руху в певний момент часу кожної частинки рідини, яка лежить на ній.

При встановленому русі лінії току збігаються з траєкторіями частинок рідини. При невстановленому русі вони не збігаються, і кожна частинка рідини лише в певний момент часу знаходиться на лінії току, яка сама існує лише в дану мить. У наступний момент виникають інші лінії току, на

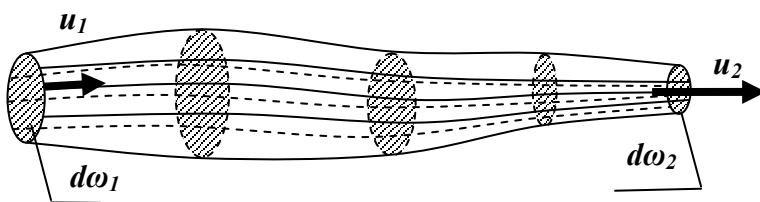


Рисунок 7.4 – Схема лінії струму течії рідини

яких будуть розташовуватися інші частинки. Ще через мить картина знову змінюється.

Якщо виділити у рідині рухомий замкнений контур площиною $d\omega$ і через усі точки цього контура провести лінії току, то утвориться

трубчаста поверхня, яка називається трубкою току. Частина току, яка обмежена поверхнею трубки току, називається елементарним струменем рідини. Таким чином, елементарний струмінь рідини заповнює трубку току та обмежена лініями току, які проходять через точки виділеного контура з

площиною $d\omega$. Якщо $d\omega$ прямує до нуля, то елементарний струмінь перетворюється в лінію току.

З наведених вище визначень випливає, що будь-якому місці поверхні кожного елементарного струменя (трубки току) в будь-який момент часу вектора швидкостей спрямовані по дотичній (і, отже, нормальні складові відсутні). Це означає, що жодна частинка рідини не може потрапити всередину струменя або вийти назовні.

При встановленому русі елементарні струмені рідини мають ряд властивостей:

- площа поперечного перерізу струменя та його форми протягом часу не змінюються, оскільки не змінюються лінії струму;
- проникнення частинок рідини через бокову поверхню елементарного струменя не виникає;
- у всіх точках поперечного перерізу елементарного струменя швидкості руху однакові внаслідок малої площі поперечного перерізу;
- форма, площа поперечного перерізу елементарного струменя та швидкості в різних поперечних перерізах струменя можуть змінюватися.

Трубка току є ніби непроникною для частинок рідини, а елементарна цівка є елементарним потоком рідини.

При невстановленому русі форма і місце розташування елементарних цівок безперервно змінюються.

Крім того, усталений рух поділяється на рівномірний і нерівномірний.

Рівномірний рух характеризується тим, що швидкості, форма і площа перетину потоку не змінюються по довжині потоку.

Нерівномірний рух відрізняється зміною швидкостей, глибин, площ перетинів потоку по довжині потоку.

Серед нерівномірно рухомих потоків потрібно відмітити плавний змінний рух, який характеризується тим, що:

- лінії струму викривлюються мало;
- лінії струму майже паралельні, і живий переріз можна вважати плоским;
- тиск в живому перерізі потоку залежать від глибини.

7.2 Типи потоків рідини

Сукупність елементарних цівок рідини являє собою потік рідини. Розрізняють такі типи потоків (або типи рухів рідини).

Напірні потоки (напірні рухи) – це такі, коли потік обмежений твердими стінками зі всіх сторін, при цьому в будь-якій точці потоку тиск відрізняється від атмосферного зазвичай в більшу сторону, але може бути і меншим атмосферного. Рух у цьому випадку виникає за рахунок тиску, створеного, наприклад, насосом або водонапірною баштою. Тиск вздовж напірного потоку зазвичай змінний. Такий рух має місце у всіх

гідроприводах технологічного обладнання, водопроводах, опалювальних системах тощо.

Безнапірні потоки (безнапірні рухи) відрізняються тим, що потік має вільну поверхню, яка знаходиться під атмосферним тиском. Безнапірний рух протікає під дією сил тяжіння самого потоку рідини. Тиск в таких потоках приблизно однаковий і відрізняється від атмосферного тільки за рахунок глибини потоку. Прикладом такого руху може бути течія води в річці, каналі, струмку.

Вільний струмінь не має твердих стінок. Рух виникає під дією сил інерції та ваги рідини. Тиск у такому русі практично дорівнює атмосферному. Приклад вільного струменя – витікання рідини зі шланга, крана тощо.

7.3 Гідравлічні характеристики потоку рідини

У гідравліці розрізняють такі характеристики потоку: живий переріз, змочений периметр, гідравлічний радіус, витрата, середня швидкість.

Живим перерізом потоку називається поверхня (поперечний переріз), нормальна до всіх ліній току, яка його перетинає, і така, що лежить всередині потоку рідини. Площа живого перерізу позначається буквою ω . Для елементарного струменя рідини використовують поняття живого перерізу елементарного струменя (переріз струменя, перпендикулярний до ліній струму), площу якого позначають через $d\omega$.

Змочений периметр потоку – лінія, по якій рідина дотикається до поверхонь русла в цьому живому перерізі. Довжина цієї лінії позначається буквою χ .

У напірних потоках змочений периметр збігається з геометричним периметром, оскільки потік рідини дотикається до всіх твердих стінок.

Гідравлічним радіусом R потоку називається величина, яка часто використовується у гідравліці і являє собою відношення площі живого перерізу ω до змоченого периметра χ :

$$R = \frac{\omega}{\chi}. \quad (7.3)$$

При напірному русі в трубі круглого перерізу (рис. 7.5, а) гідравлічний радіус буде дорівнювати:

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = \frac{d}{4}, \quad (7.4)$$

тобто чверті діаметра або половині радіуса труби.

Для безнапірного потоку прямокутного перерізу (рис. 7.5, б) з розмірами $a \times b$ гідравлічний радіус можна розрахувати за формулою:

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{ab}{2a + b}. \quad (7.5)$$

Вільна поверхня рідини при визначенні змоченого периметра не враховується.

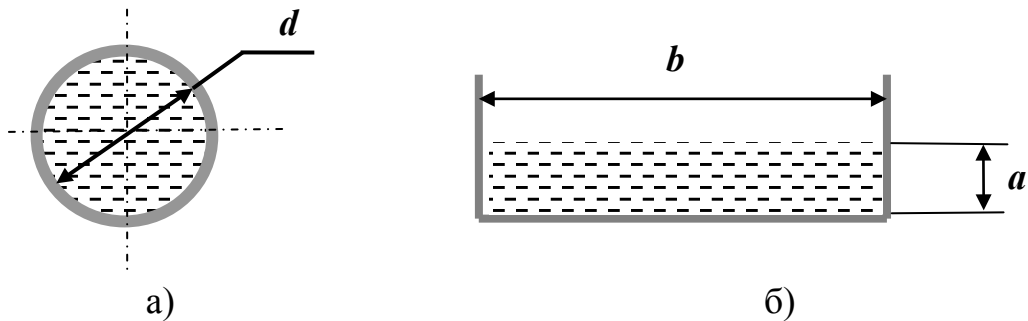


Рисунок 7.5 – Схеми визначення гідравлічного радіуса потоку рідини:
а) – в трубі круглого перерізу; б) – в трубі прямокутного перерізу

Витрата потоку рідини (витрата рідини) – кількість рідини, яка протікає через одиницю часу через живий переріз потоку.

Розрізняють об'ємну, масову і вагову витрати рідини.

Об'ємна витрата рідини – це об'єм рідини, який протікає за одиницю часу через живий переріз потоку. Об'ємна витрата рідини вимірюється зазвичай в $\text{м}^3/\text{с}$, $\text{дм}^3/\text{с}$ або л/с. Визначається за формулою:

$$Q = \frac{W}{t}, \quad (7.6)$$

де Q – об'ємна витрата рідини, W – об'єм рідини, який протікає через живий переріз потоку, t – час протікання рідини.

Масова витрата рідини – це маса рідини, яка протікає за одиницю часу через живий переріз потоку. Масова витрата вимірюється зазвичай в $\text{кг}/\text{с}$, $\text{г}/\text{с}$ або $\text{т}/\text{с}$ та визначається за формулою:

$$Q_M = \frac{M}{t}, \quad (7.7)$$

де Q_M – масова витрата рідини, M – маса рідини, яка протікає через живий переріз потоку, t – час протікання рідини.

Вагова витрата рідини – це вага рідини, яка протікає за одиницю часу через живий переріз потоку. Вагова витрата вимірюється зазвичай в $\text{Н}/\text{с}$, $\text{кН}/\text{с}$. Формула для її визначення має вигляд:

$$Q_G = \frac{G}{t}, \quad (7.8)$$

де Q_G – вагова витрата рідини, G – вага рідини, яка протікає через живий переріз потоку, t – час протікання рідини.

Найчастіше використовується об'ємна витрата потоку рідини. З врахуванням того, що потік складається з елементарних потоків, витрата потоку складається з витрат елементарних потоків рідини dQ .

Витрата елементарного потоку – об’єм рідини dW , який проходить через живий переріз струменя за одиницю часу. Таким чином:

$$dQ = \frac{dW}{dt}. \quad (7.9)$$

Якщо останній вираз (7.9) проінтегрувати за площею живого перерізу потоку, можна отримати формулу об’ємної витрати рідини як суму витрат елементарних потоків:

$$Q = \int_{\omega} dQ. \quad (7.10)$$

Застосування формули (7.10) в розрахунках досить важке, оскільки витрати елементарних потоків рідини в різних точках живого перерізу потоку різні. Тому на практиці для визначення витрати частіше користуються поняттям середньої швидкості потоку.

Середня швидкість потоку рідини V_{cp} в заданому перерізі – це неіснуюча в дійсності швидкість потоку, однакова для всіх точок цього живого перетину, з якою мала б рухатися рідина, щоб її витрата дорівнювала фактичній.

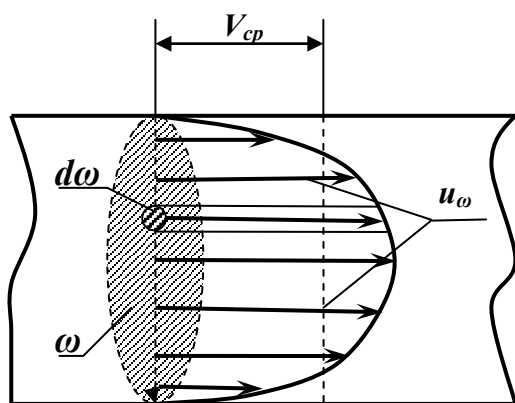


Рисунок 7.6 – Схема потокової моделі руху рідини

У гідравліці розглядається потокова модель руху рідини, тобто потік уявляємо як сукупність елементарних потоків рідини (рис. 7.6), які мають різні швидкості руху u_{ω} . Індекс ω означає (нагадає), що в кожній точці живого перерізу швидкості різні. Елементарні струмені ніби ковзають один по одному. Вони труться між собою і внаслідок цього їх швидкості відрізняються. Причому, всередині потоку швидкості найбільші, а до периферії вони зменшуються. Розподілення швидкостей по живому перерізу

потoku можна подати у вигляді параболоїда з основою, що дорівнює ω . Висота його в будь-якій точці дорівнює швидкості, яка відповідає елементарній функції u_{ω} . Площа елементарного потоку – $d\omega$. У межах цієї площі швидкість можна вважати постійною. Зрозуміло, що за одиницю часу через живий переріз потоку буде проходити об’єм рідини W_t , який дорівнює об’єму параболоїда. Цей об’єм рідини і буде дорівнювати витраті потоку:

$$W_{t=\text{параболоїда}} = Q = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} u_{\omega} d\omega. \quad (7.11)$$

З урахуванням поняття середньої швидкості, яка у всіх точках живого перерізу однакова, за одиницю часу через живий переріз потоку буде проходити об’єм рідини (позначимо його W_{tcp}):

$$W_{tcp} = \omega V_{cp}. \quad (7.12)$$

Якщо прирівняти ці об'єми $W_{\text{ср}} = W_{t=\text{параболоїда}}$, то можна визначити значення середньої швидкості потоку рідини:

$$V_{\text{ср}} = \frac{\int u_{\omega} d\omega}{\omega} = \frac{Q}{\omega}. \quad (7.13)$$

У подальшому середню швидкість потоку рідини будемо позначати буквою V без індексу ср .

При нерівномірному русі середня швидкість в різних живих перерізах по довжині потоку різна. При рівномірному русі середня швидкість по довжині потоку постійна у всіх живих перерізах.

8 РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ

8.1 Рівняння нерозривності для елементарного потоку рідини

У технологічному обладнанні найчастіше розглядають потоки, в яких не утворюються розриви рідини, тобто рідина повністю заповнює простір.

Розглянемо елементарний потік нестисненої рідини при встановленому русі, в якому виділимо два довільних перерізи 1–1 і 2–2, розташовані на деякій відстані один від одного. Тут $d\omega_1$ та $d\omega_2$ – площі, u_1 і u_2 – швидкості, dQ_1 і dQ_2 – витрати елементарного струменя у відповідних живих перерізах.

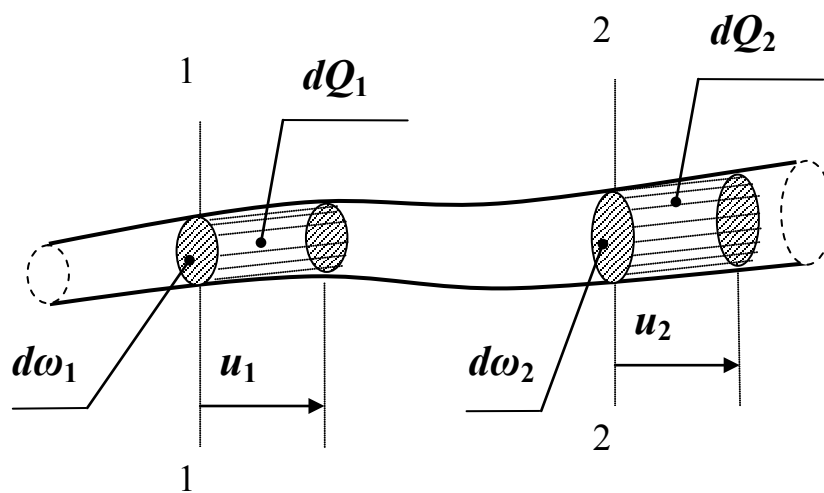


Рисунок 8.1 – Схем потоку нестисненої рідини

Очевидно, що

$$dQ_1 = d\omega_1 u_1 \text{ і } dQ_2 = d\omega_2 u_2, \quad (8.1)$$

причому dQ_1 втікає у розглядану ділянку елементарного потоку, а dQ_2 – витікає.

Врахуємо, що форма елементарного потоку не змінюється протягом часу, а поперечний притік і відтік неможливі, оскільки швидкості на боковій поверхні потоку направлені по дотичним до ліній струму, з яких складається ця бокова поверхня, тоді отримуємо, що витрати dQ_1 і dQ_2 однакові, тобто:

$$d\omega_1 u_1 = d\omega_2 u_2. \quad (8.2)$$

Внаслідок того, що перерізи 1–1 і 2–2 вибрані довільно, подібні співвідношення справедливі для будь-яких перерізів елементарного потоку. Отже, із (8.2) можна записати:

$$d\omega_i u_i = \text{const} \text{ або } dQ_i = \text{const}. \quad (8.3)$$

Останнє співвідношення (8.3) називається рівнянням нерозривності у гідравлічній формі для елементарного потоку нестисливої рідини при усталеному русі.

8.2 Рівняння нерозривності в гідравлічній формі для потоку рідини при встановленому русі

Якщо підсумувати витрати всіх елементарних потоків в кожному живому перерізі потоку, то отримаємо рівняння нерозривності для потоку при встановленому русі. Зазвичай його записують в такому вигляді:

$$Q = \text{const} \quad (8.4)$$

або $\omega_i V_i = \text{const} \quad (8.5)$

або $\int_{\omega} u_i d\omega = \text{const.} \quad (8.6)$

Зі сказаного видно, що для нестисливої рідини при встановленому русі витрата у всіх живих перерізах потоку однакова, незважаючи на те, що площі живого перерізу і середні швидкості в кожному перерізі можуть бути різними.

З рівняння нерозривності (8.3)–(8.6) витікає наступне важливе співвідношення:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (8.7)$$

тобто середні швидкості в живих перерізах потоку зворотно-пропорційні їхнім площам.

Рівняння нерозривності потоку рідини в гідравлічній формі (8.3)–(8.6) дуже часто застосовується в гідравліці для опису руху рідини в каналах і трубопроводах.

8.3 Диференціальні рівняння нерозривності руху рідини

Рівняння, розглянуті вище, записані в інтегральній формі і не враховують усіх умов руху потоку рідини.

Розглянемо той самий рух рідини, опираючись на важливіший закон механіки – закон збереження маси.

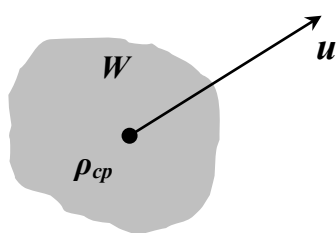


Рисунок 8.2 – Схема руху рідини довільного об'єму

Розглянемо рух зі швидкістю u деякого довільного об'єму W густиною ρ_{cp} . Маса цього об'єму дорівнює $M = \rho_{cp} W$. Умовою суцільності (нерозривності) є:

$$\frac{dM}{dt} = 0, \quad (8.8)$$

тобто маса об'єму W не змінюється в часі. Проте незмінність маси не означає, що складові, які визначають масу, також мають бути постійними. Причому, в загальному випадку змінюються в часі як об'єм W , так і густина рідини ρ . Тоді можна записати:

$$\frac{dM}{dt} = W \frac{d\rho}{dt} + \frac{dW}{dt} \rho = 0. \quad (8.9)$$

Перший доданок в цьому рівнянні $W \frac{d\rho}{dt}$ описує зміну маси за рахунок зміни густини при постійному об'ємі, а другий доданок $\frac{dW}{dt} \rho$ описує зміну маси за рахунок зміни об'єму при постійній густині.

Враховуючи те, що $W = \frac{M}{\rho}$ і $\rho = \frac{M}{W}$, підставимо ці значення в останнє рівняння і перетворимо його до виду:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{M}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{dW}{dt} \frac{M}{W} = 0. \quad (8.10)$$

Розділимо рівняння (8.10) на M , привівши його тим самим до рівняння для одиничної маси:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = 0. \quad (8.11)$$

Перший доданок показує зміну густини в часі, тобто в процесі руху (у міру переміщення) рідини. Другий доданок – зміна об'єму в процесі руху.

Розглянемо детально другий доданок. Для цього візьмемо довільну точку A (рис. 8.3) з координатами X, Y, Z . Через неї (та поблизу неї) в момент часу t протікає рідина зі швидкістю u . У проекції на осі координат в точці A рідина має швидкості u_x, u_y, u_z , відповідно. Виділимо навколо точки A нескінченно малий об'єм у формі паралелепіпеда з розмірами dx, dy, dz . Будемо вважати цей об'єм нерухомим, а рідину – протікаючою через нього. Визначимо величину об'єму рідини, яка надходить в розглядуваний об'єм і витікає із нього за час dt .

У проекції на вісь X в точці A горизонтальна складова швидкості – u_x . У точці A_2 (розташована на межі $dy-dz$), яка знаходиться на відстані $\frac{1}{2}dx$ від A , горизонтальна складова буде:

$$u_{x(A_2)} = u_x + \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (8.12)$$

У точці A_1 (розташована на другій межі $dy-dz$) горизонтальна складова цієї швидкості буде дорівнювати:

$$u_{x(A_1)} = u_x - \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (8.13)$$

У проекції на вісь Y в точці A складова швидкості буде дорівнювати u_y . У точці, розташованій в центрі межі $dx-dz$, яка знаходиться на відстані $\frac{1}{2}dy$ від точки A , ця складова швидкості буде:

$$u_y = u_y + \frac{1}{2} dy \frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (8.14)$$

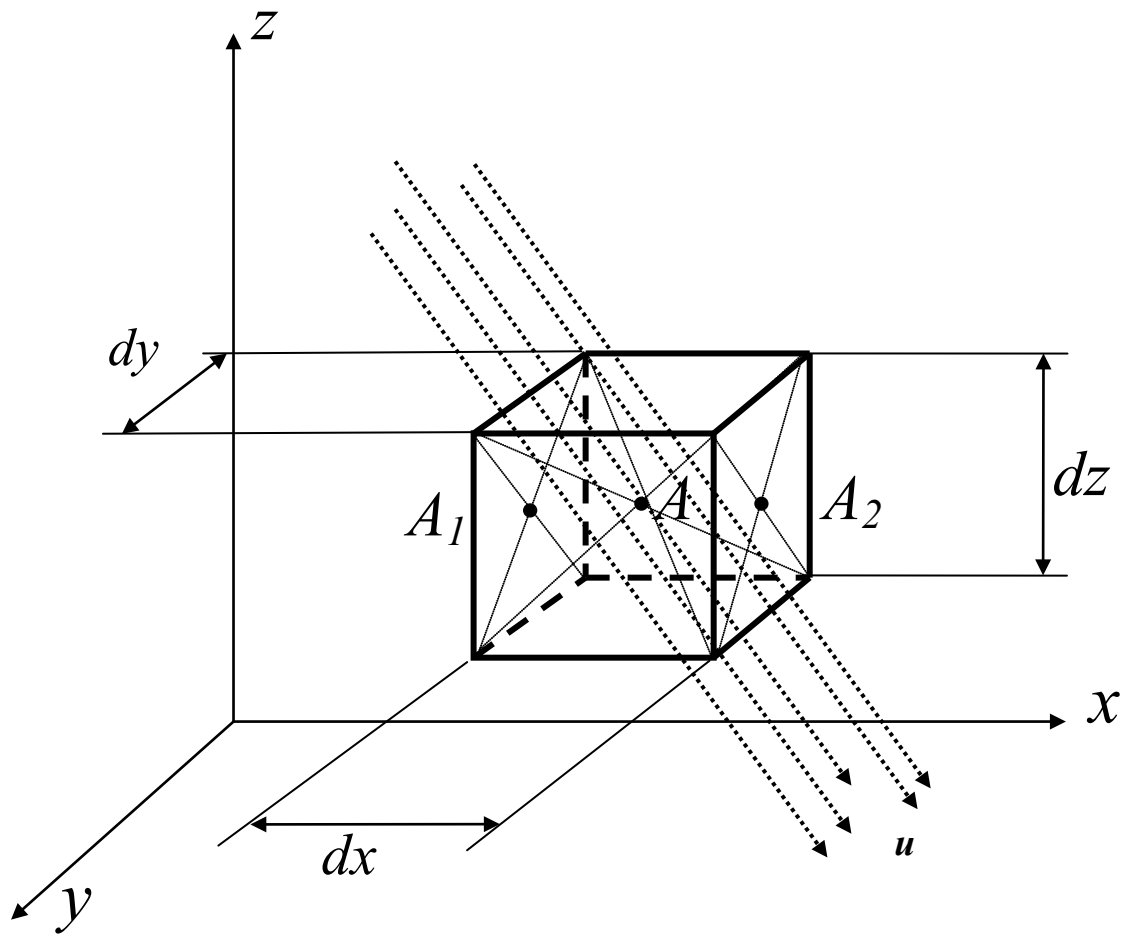


Рисунок 8.3 – Схема визначення диференціального рівняння нерозривності руху рідини

У точці, розташованій в центрі протилежної межі $dx-dz$ і яка знаходиться на відстані $\frac{1}{2}dy$ від точки A , ця складова швидкості буде:

$$u_y = u_y - \frac{1}{2}dy \frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (8.15)$$

Аналогічно в проекції на вісь Z в точці A складова швидкості буде дорівнювати u_z . У точці, розташованій в центрі границі $dx-dy$ і яка знаходиться на відстані $\frac{1}{2}dz$ від A , ця складова швидкості набуде вигляду:

$$u_z = u_z + \frac{1}{2}dz \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (8.16)$$

У точці, розташованій в центрі протилежної границі $dx-dy$, і яка знаходиться на відстані $\frac{1}{2}dz$ від точки A , ця складова швидкості буде:

$$u_z = u_z - \frac{1}{2} dz \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (8.17)$$

В останніх виразах (8.15) – (8.17) частинні похідні $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$, $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ показують зміну величин u_x , u_y та u_z , відповідно, які припадають на одиницю довжини, виміряну вздовж осі, що проходить через точку A , і паралельно відповідним координатним осям.

Об'єми рідини $W_{\dots(oux)}$, що витікають через відповідні межі $dy-dz$, $dx-dz$, $dx-dy$, будуть дорівнювати добуткам відповідних проекцій швидкостей на площі граней:

$$\begin{cases} W_{y-z(oux)} = (u_x + \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dydzdt, \\ W_{x-z(oux)} = (u_y + \frac{1}{2} dy \frac{\partial u_y}{\partial y}) dx dz dt, \\ W_{x-y(oux)} = (u_z + \frac{1}{2} dz \frac{\partial u_z}{\partial z}) dx dy dt. \end{cases} \quad (8.18)$$

Аналогічно об'єми рідини $W_{\dots(ox)}$, що втікають через відповідні межі $dy-dz$, $dx-dz$, $dx-dy$, будуть дорівнювати проекціям відповідних швидкостей на такі ж за розмірами площі граней:

$$\begin{cases} W_{y-z(ox)} = (u_x - \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dydzdt, \\ W_{x-z(ox)} = (u_y - \frac{1}{2} dy \frac{\partial u_y}{\partial y}) dx dz dt, \\ W_{x-y(ox)} = (u_z - \frac{1}{2} dz \frac{\partial u_z}{\partial z}) dx dy dt. \end{cases} \quad (8.19)$$

Легко бачити із систем рівнянь (8.18)–(8.19), що зміна об'ємів dW_{\dots} рідини, яка проходить через протилежні межі за час dt , будуть відповідно дорівнювати:

$$\begin{aligned} dW_{y-z} &= W_{y-z(oux)} - W_{y-z(ox)} = \\ &= (u_x + \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dydzdt - (u_x - \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dydzdt = \\ &= (u_x + \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dydzdt - u_x + \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dydzdt = \\ &= (\frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dydzdt + \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dydzdt = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz dt. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Останні два вирази (8.18) і (8.19) запишемо аналогічно без детального виведення:

$$dW_{x-z} = W_{x-z(eyz)} - W_{x-z(ex)} = \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz dt, \quad (8.21)$$

$$dW_{x-y} = W_{x-y(eyz)} - W_{x-y(ex)} = \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy dz dt. \quad (8.22)$$

Повний об'єм рідини, який протікає за час dt через вибраний довільним чином нерухомий елементарний об'єм простору dx, dy, dz , буде дорівнювати сумі об'ємів рідини, яка протікає через всі три пари протилежних меж:

$$dW = dW_{y-z} + dW_{x-z} + dW_{x-y}. \quad (8.23)$$

Підставивши в останній вираз (8.23) значення відповідних об'ємів $dW_{y-z}, dW_{x-z}, dW_{x-y}$, отримаємо:

$$\begin{aligned} dW &= \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz dt + \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz dt + \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy dz dt = \\ &= \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt. \end{aligned} \quad (8.24)$$

У цьому виразі добуток $dx dy dz$ ніщо інше, як весь об'єм рідини W , що протікає через розглянутий паралелепіпед dt . Таким чином, підставивши цю формулу у вихідний вираз $\frac{1}{W} \frac{dW}{dt}$ (другий доданок враховує зміну об'єму в законі збереження маси), аналізом якого ми займаємося, отримаємо:

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = \frac{1}{dx dy dz} \frac{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt}{dt} \Rightarrow \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (8.25)$$

Рівність нулю виразу (8.25) називають рівнянням нерозривності для нестисливої рідини в диференціальній формі, він записується таким чином:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (8.26)$$

До такого ж висновку можна дійти, ґрунтуючись на таких міркуваннях: якщо вважати, що рідина нестислива, то умовою нерозривності (суцільності) потоку можна вважати рівність втікання і витікання об'ємів, тобто зміна об'єму має дорівнювати нулю. У виразі (8.24) для dW величини dx, dy, dz, dt обов'язково мають додатні (не нульові) значення.

Тоді для того, щоб $\frac{dM}{dt} = 0$, необхідним є виконання такої умови:

$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$, яким і є вже згадане вище рівняння нерозривності (8.26) для нестисливої рідини в диференціальній формі.

Якщо в отримане рівняння нерозривності (8.26) додати доданок, який враховує зміну густини рідини в часі $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$, то отримаємо формулу, яка виражає зміну одиничної маси рідини, що протікає за час dt через об'єм dx , dy , dz . Прирівнявши це рівняння до нуля, отримаємо рівняння нерозривності для стисливої рідини в диференціальній формі:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (8.26)$$

Його фізичний зміст полягає в тому, що зміна густини в часі обернено пропорційна зміні об'єму рідини в часі. Об'єм змінюється через зміни швидкості в часі, тобто внаслідок зміни форми потоку.

Останній вираз (8.26) є першим рівнянням (умова) в системі диференціальних рівнянь, які описують рух потоку рідини.

9 ДИНАМІКА РІДИН

Головне завдання цього розділу, разом із розділом кінематики рідин, полягає у встановленні зв'язків між силами, що існують в потоці рідини і характеристиками руху цієї рідини. Нагадаємо, що ці зв'язки в загальному випадку описуються рівняннями виду:

$$\begin{cases} u_x = f_{ux}(x, y, z, t), \\ u_y = f_{uy}(x, y, z, t), \\ u_z = f_{uz}(x, y, z, t), \\ P = f_p(x, y, z, t). \end{cases}$$

Знаходження цих функцій є досить складним завданням. Тому для спрощення їх розв'язку Л. Ейлер припустив, що рідина є ідеальною, тобто не має в'язкості, а також те, що всі перераховані функції безперервні і диференціюються, хоча фізичною причиною неперервності розподілу швидкостей в рідині, що рухається, є саме в'язкість.

9.1 Диференціальні рівняння Ейлера для руху ідеальної рідини

Розглянемо довільну точку A в потоці рідини (рис. 9.1). Тиск в цій точці позначимо літерою P . Виділимо поблизу неї прямокутний об'єм рідини розмірами dx , dy , dz .

Так само як і в разі виведення диференціальних рівнянь для рідини (див. розд. 8), що знаходиться у стані спокою, систему рівнянь, яка виражає сили, що діють на виділений об'єм, отримаємо в проекціях на осі координат. Визначимо різницю тисків, що діють на протилежні грані:

$$\begin{cases} \Delta P_x = P - (P + \frac{\partial P}{\partial x} dx) = -\frac{\partial P}{\partial x} dx, \\ \Delta P_y = P - (P + \frac{\partial P}{\partial y} dy) = -\frac{\partial P}{\partial y} dy, \\ \Delta P_z = P - (P + \frac{\partial P}{\partial z} dz) = -\frac{\partial P}{\partial z} dz. \end{cases} \quad (9.1)$$

Система рівнянь (9.1) отримана із врахуванням припусків, що тиск, як і в статиці, діє по нормалі усередину об'єму, який розглядається, а зміна тиску за кожною з координат дорівнює частинному диференціалу за відповідною координатою $\frac{\partial P}{\partial i} di$. Тоді різниці цих сил в проекціях на осі координат будуть:

$$\begin{cases} \Delta F_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz, \\ \Delta F_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx dz, \\ \Delta F_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dz dx dy. \end{cases} \quad (9.2)$$

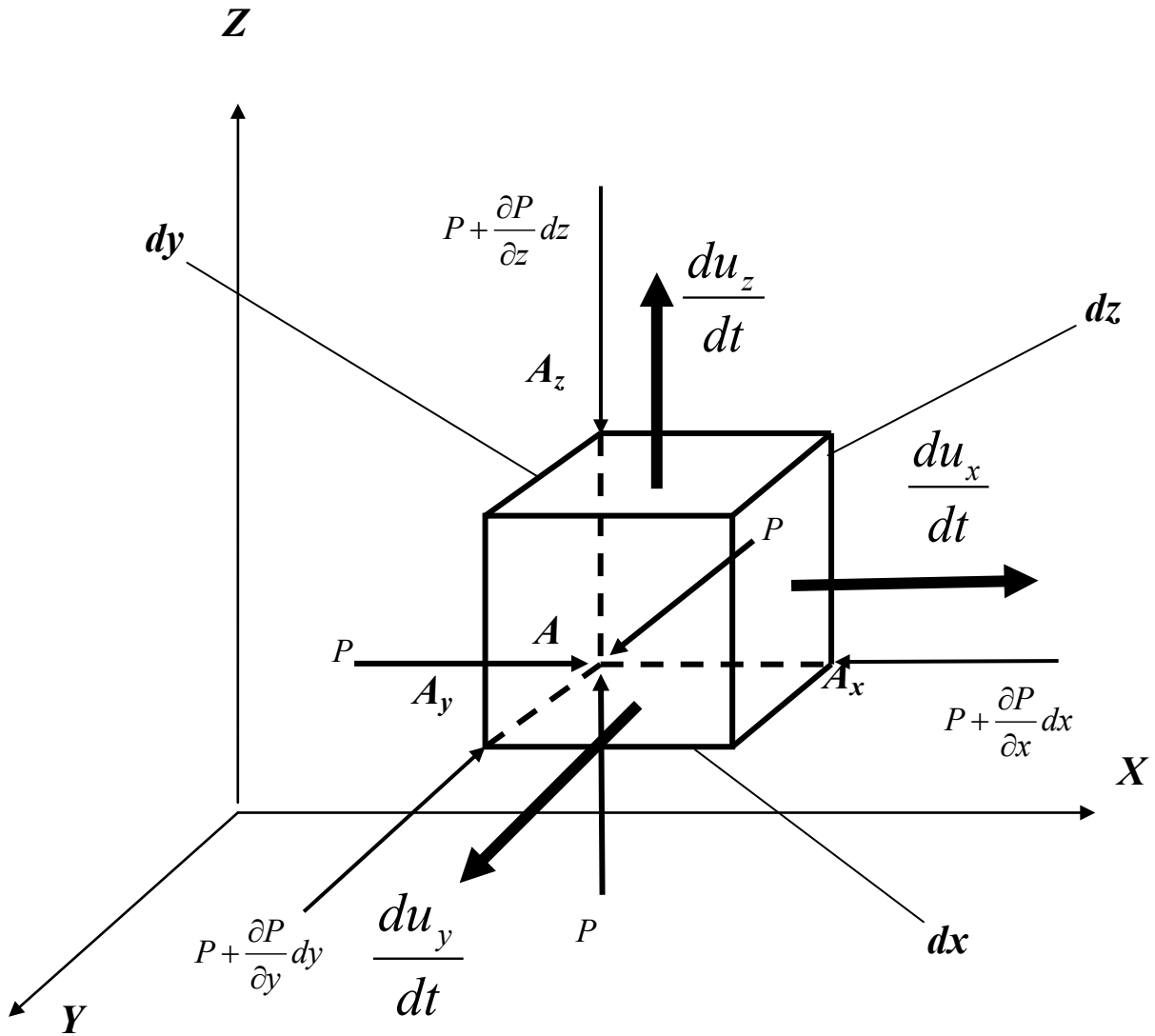


Рисунок 9.1 – Розрахункова схема визначення диференціальних рівнянь Ейлера для руху ідеальної рідини

Крім сил тиску на виділений об'єм будуть діяти інерційні сили в загальному випадку, які визначаються прискореннями a_x , a_y , a_z .

$$\begin{cases} F_x^{in} = a_x \rho dx dy dz, \\ F_y^{in} = a_y \rho dx dy dz, \\ F_z^{in} = a_z \rho dx dy dz. \end{cases} \quad (9.3)$$

Під дією цих сил об'єм, який розглядається, рухається з прискоренням $\frac{du}{dt}$ або $\frac{du_x}{dt}, \frac{du_y}{dt}, \frac{du_z}{dt}$ в проєкціях на осі координат. Тоді отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_x - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho} = \frac{du_x}{dt}; \\ a_y - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{\rho} = \frac{du_y}{dt}; \\ a_z - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{1}{\rho} = \frac{du_z}{dt}, \end{cases} \quad (9.4)$$

яка носить назву диференціальних рівнянь Ейлера для руху ідеальної рідини. Система рівнянь (9.4) справедлива для ідеальної рідини, тобто для руху без внутрішнього опору; вони описують зв'язок між силами в рідині і законами її руху.

9.2 Перетворення рівнянь Ейлера

Так само як і в статичі, щоб позбутися від частинних похідних, помножимо рівняння системи (9.4) відповідно на dx, dy і dz та додамо їх:

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) = \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz. \quad (9.5)$$

Проаналізуємо отриману інформацію. В (9.5) перші три доданки $(a_x dx + a_y dy + a_z dz)$ фактично є сумою інерційних сил або ваг, діючих в рідині. Позначимо цю суму $d\Phi$ і назвемо її силовою функцією або, точніше, силовою потенціальною функцією.

Згадаємо зі статички, що $\left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right)$ – повний диференціал тиску dP .

Врахуємо також, що кожний доданок в правій частині можна переписати в іншому вигляді, наприклад, $\frac{du_x}{dt} dx$ подати як $du_x \frac{dx}{dt}$. Зі свого боку

$\frac{dx}{dt} = u_x$. І тоді остаточно $\frac{du_x}{dt} dx = u_x du_x = \frac{1}{2} u_x^2$. Застосувавши такі ж перетворення до всіх трьох доданків, отримаємо:

$$\frac{1}{2} du_x^2 + \frac{1}{2} du_y^2 + \frac{1}{2} du_z^2 = \frac{1}{2} d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2} du^2. \quad (9.6)$$

З врахуванням проведеного аналізу перетворимо «складені рівняння» (9.6) до узагальненої форми рівнянь Ейлера:

$$d\Phi - \frac{1}{\rho} dP - \frac{1}{2} du^2 = 0. \quad (9.7)$$

9.3 Дослідження рівнянь Ейлера

У правій частині диференціальних рівнянь Ейлера (9.6) для ідеальної рухомої рідини входить величина du_x . Її можна подати як повний диференціал функції незалежних змінних для du_x , який можна записати у вигляді:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} dt + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz. \quad (9.8)$$

Тоді це рівняння (9.8) для du_x після ділення на dt буде мати вигляд:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (9.9)$$

де $\frac{du_x}{dt} = u_x$ – проекція швидкості u на вісь X .

Остаточно отримаємо:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z. \quad (9.10)$$

За аналогією те саме можна записати і для других осей. З урахуванням таких перетворень система диференціальних рівнянь Ейлера для рухомої рідини набуде вигляду:

$$\begin{cases} a_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z, \\ a_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z, \\ a_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z. \end{cases} \quad (9.11)$$

Фізичний смисл частинних похідних в рівнянь Ейлера (9.11) розглянемо на прикладі зміни швидкості тільки за однією координатою X (рис. 9.2).

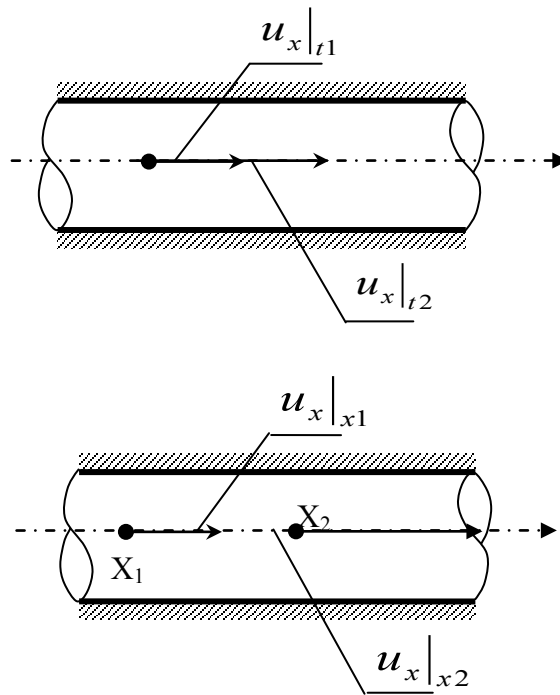


Рисунок 9.2 – Схема зміни швидкості тільки за координатою X

Доданок $\frac{\partial u_x}{\partial t}$ описує зміну швидкості рідини в часі, тобто характеризує невстановлений режим руху рідини. Якщо рух встановлений, то цей доданок дорівнює нулю.

Величини $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ – прямі частинні похідні. Вони описують зміну швидкості вздовж осі залежно від тієї самої координати.

Члени $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ та $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ – дотичні частинні похідні, тобто похідні за суміжною координатою, які показують як змінюється значення швидкості в напрямі x (в проекції на вісь X) залежно від зміни координат на перпендикулярних осях Y та Z . Розглянемо їх докладніше. У момент часу t_1 швидкість рідини в точці A – $u_{xa|t1}$ дорівнює u_x , а в точці B – $u_{xb|t1} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$.

Природньо, що приріст швидкості по осі Y в цьому випадку становитиме $\Delta u_x = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$.

У момент часу t_2 через безкінечно малий проміжок часу dt швидкість точки A $u_{xa|t2}$ стане $u_x dt$, а в точці B – $u_{xb|t2} = u_x dt + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy dt$. Тоді тангенс кута $d\alpha$ (рис. 9.3) можна розрахувати за формулою:

$$tg d\alpha = \frac{u_{xb|t2} - u_{xa|t2}}{ab} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} dy dt}{dy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} dt. \quad (9.12)$$

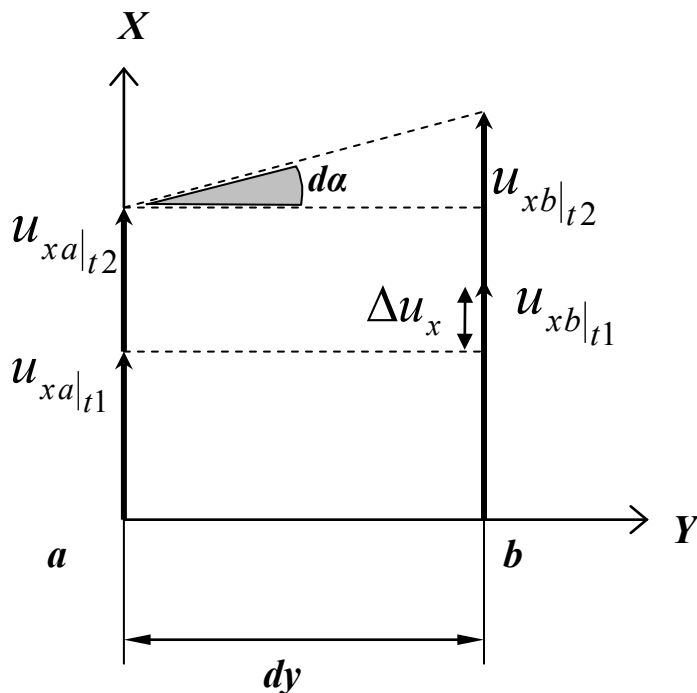


Рисунок 9.3 – Схема визначення тангенса кута вектора швидкості

Враховуючи, що при малих кутах їхні тангенси дорівнюють самим кутам, можна записати $tg d\alpha = d\alpha$. Тоді $d\alpha = \frac{\partial u_x}{\partial y} dt$. Переписавши останній вираз, остаточно отримаємо:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Це відношення показує, що розглянута частинна похідна є ніщо інше, як ab відносно осі Y (тобто, це співвідношення описує обертання навколо «третьої» осі).

Таким чином можна дослідити й інші частинні похідні:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}, \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_z}{\partial y}, \frac{\partial u_x}{\partial z}, \frac{\partial u_z}{\partial x}.$$

За аналогією з наведеними вище міркуваннями можна стверджувати, що частинна похідна $\frac{\partial u_y}{\partial x}$, так як і $\frac{\partial u_x}{\partial y}$, описує обертання частинок рідини в площині XU відносно осі Z , частинні похідні $\frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_z}{\partial y}$ описують обертання

частинок в площині YZ відносно осі X , а частинні похідні $\frac{\partial u_x}{\partial z}$, $\frac{\partial u_z}{\partial x}$ описують обертання частинок рідини в площині XZ відносно осі Y .

Насамкінець можна відмітити, що такий рух можна спостерігати, наприклад, у вихорі, які часто виникають поблизу зливних отворів при зливі води з ванн чи раковин або в інших схожих умовах.

9.4 Диференціальні рівняння руху в'язкої рідини (рівняння Нав'є-Стокса)

Досі ми не розглядали вплив сил в'язкого тертя на рух рідини. Спробуємо врахувати ці сили. Для простоти розглянемо рух реальної (в'язкої) рідини в проекції на одну координату. Будемо вважати, що частинка у формі паралелепіпеда (рис. 9.4) з розмірами dx , dy , dz рухається уздовж осі X . За рахунок сил в'язкого тертя на верхню і нижню поверхні розглянутого об'єму діятимуть сили тертя dT_g і dT_n , відповідно. Ці сили залежать від площі тертя dy , dz і величини дотичного напруження на поверхнях тертя τ . На нижній поверхні буде діяти сила тертя:

$$dT_n = \tau dx dy, \quad (9.13)$$

на верхній вона буде відрізняться на величину приросту дотичних напружень вздовж осі Z :

$$dT_g = \left(\tau + \frac{d\tau}{dz} dz\right) dx dy. \quad (9.14)$$

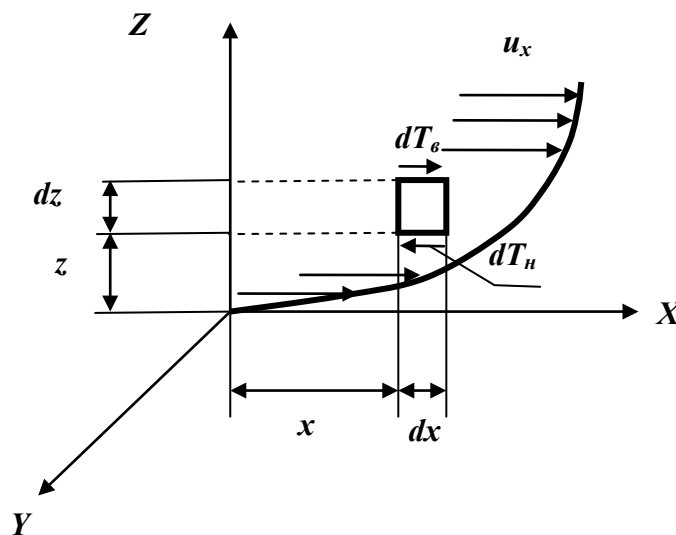


Рисунок 9.4 – Схема для виведення рівняння Нав'є-Стокса

Рівнодійна цих сил, що діє на розглядуваний об'єм буде дорівнювати різниці сил тертя:

$$dT_g - dT_n = \left(\tau + \frac{d\tau}{dz} dz\right) dx dy - \tau dx dy = \frac{d\tau}{dz} dx dy dz \quad (9.15)$$

або

$$dT_x = \frac{d\tau}{dz} dW, \quad (9.16)$$

де dW – величина об'єму рідини, яка розглядається.

Напруження внутрішнього тертя, зумовленого в'язкістю, за законом рідинного тертя має вигляд:

$$\tau = \mu \frac{du_x}{dy}, \quad (9.17)$$

де μ – динамічний коефіцієнт в'язкості.

Після підстановки отримаємо:

$$dT_x = \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du_x}{dy} \right) dW = \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} dW. \quad (9.18)$$

У рівняннях Ейлера всі сили віднесені до одиничної маси, тому і сили, обумовлені в'язким тертям, зведемо до такого ж виду:

$$\frac{dT_x}{\rho dW} = \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u_x}{dy^2} = \nu \frac{d^2 u_x}{dy^2}, \quad (9.19)$$

де $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – кінематичний коефіцієнт в'язкості.

Якщо подібні міркування провести для залишкових координат, тобто перейти до загального випадку просторового руху, коли складові швидкості u_x, u_y, u_z є функціями трьох координат X, Y, Z . У такому випадку проекція сили в'язкого тертя на вісь X в перерахунку до одиниці маси дає величину:

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right). \quad (9.20)$$

Аналогічні вирази можна записати і для двох інших координат. Якщо рівняння Ейлера для рухомої рідини доповнити проекціями сил в'язкого тертя на осі координат, вийдуть диференціальні рівняння руху в'язкої рідини, які носять назву рівняння Нав'є–Стокса і мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} = a_x - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right); \\ \frac{du_y}{dt} = a_y - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{\rho} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right); \\ \frac{du_z}{dt} = a_z - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{1}{\rho} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \end{cases} \quad (9.21)$$

10 ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ ЕЙЛЕРА

Інтегрування рівнянь Ейлера розглянемо на поширеному прикладі руху рідини під дією сили тяжіння. Прикладами такого руху можуть слугувати: течія річки, струмка або будь-якого іншого потоку рідини, течії рідини у водопроводі, який працює від водонапірної башти.

Рух рідини описується узагальненою формою рівнянь Ейлера:

$$d\Phi - \frac{1}{\rho} dP - \frac{1}{2} du^2 = 0. \quad (10.1)$$

У розглянутому випадку, коли рух рідини здійснюється виключно під дією сили тяжіння, силова потенційна функція $d\Phi = a_x dx + a_y dy + a_z dz$ набуває вигляду:

$$d\Phi = -gdz, \quad (10.2)$$

де g – прискорення вільного падіння.

Підставивши вираз (10.2) в рівняння Ейлера, і помноживши на «-1», для того, щоб позбутися від знаків «мінус» перед кожним доданком, отримаємо:

$$gdz + \frac{dP}{\rho} + \frac{du^2}{2} = 0. \quad (10.3)$$

Після інтегрування вираз (10.3) набуде вигляду:

$$gz + \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} - C = 0, \quad (10.4)$$

де C – стала інтегрування (знак «-» перед нею не має фізичного значення і поставлений тільки для зручності подальших математичних перетворень).

Розділивши останню рівність (10.4) на g , прийдемо до остаточного вигляду:

$$z + \frac{P}{g\rho} + \frac{u^2}{2g} = H. \quad (10.5)$$

Отриманий вираз (10.5) називається інтегралом Бернуллі, а постійна величина H називається гідродинамічним напором або повним напором. Інша назва інтеграла Бернуллі, яка зустрічається значно частіше, – рівняння Бернуллі для потоку ідеальної рідини.

10.1 Рівняння Бернуллі

Рівняння Бернуллі (10.5) для потоку ідеальної рідини отримано строгими математичними методами, що використовуються в класичній гідромеханіці. Те саме рівняння можна отримати (не строго), використовуючи міркування, які часто застосовуються в гідравліці.

10.1.1 Рівняння Бернуллі для струменя ідеальної рідини

Розглянемо елементарний потік ідеальної рідини при усталеному русі (рис. 10.1), в якому виділимо два перерізи 1–1 і 2–2. Площі живих перерізів потоку позначимо $d\omega_1$ і $d\omega_2$. Положення центрів мас цих перерізів відносно довільно розташованої лінії порівняння (нульової лінії) 0–0 характеризується величинами z_1 і z_2 , відповідно. Тиск і швидкість рідини в цих перерізах мають значення P_1, P_2 і u_1, u_2 , відповідно.

Будемо вважати, що рух потоку рідини відбувається тільки під дією сили тиску (внутрішнє тертя в рідині відсутнє), а тиск має властивості статичного і діє по нормалі всередину розглянутого об'єму.

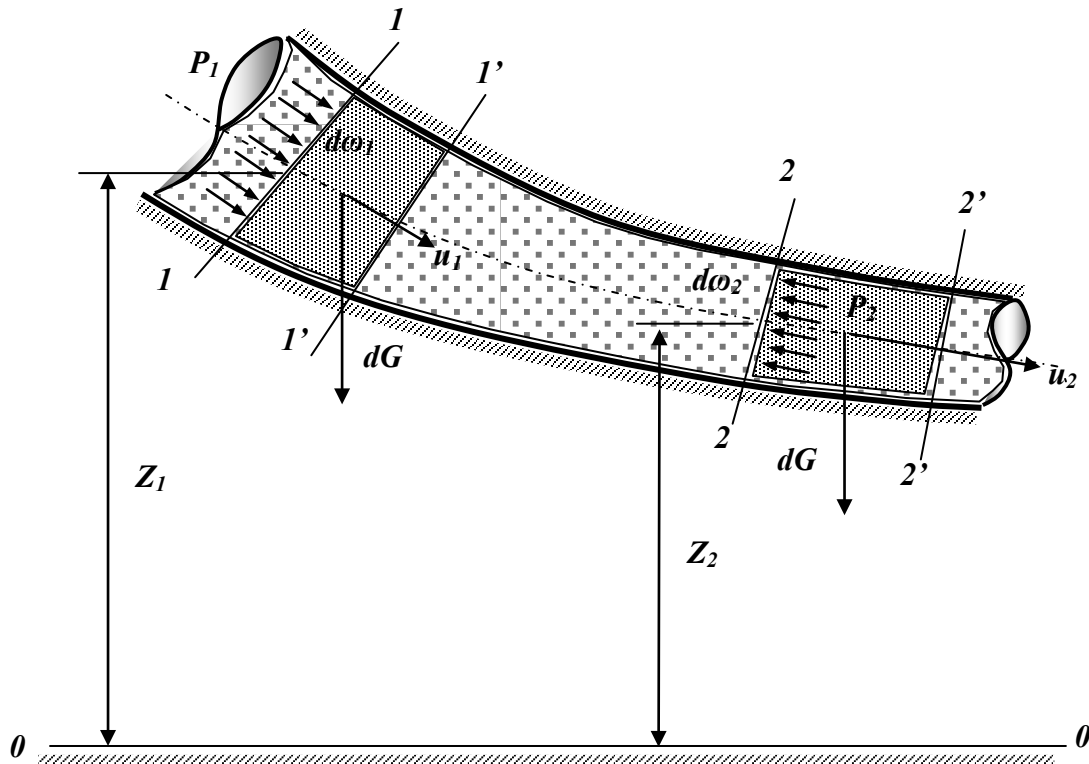


Рисунок 10.1 – Схема руху елементарного потоку ідеальної рідини при усталеному русі

За малий проміжок часу dt частинки рідини з 1–1 перемістяться в 1'–1' на відстань $u_1 dt$, а частинки з 2–2 в 2'–2' на відстань $u_2 dt$.

Згідно з теоремою кінетичної енергії приріст енергії тіла (в цьому випадку виділеного об'єму рідини) дорівнює сумі робіт усіх діючих на нього сил.

Роботу в цьому випадку виконують сили тиску, що діють в розглянутих живих перерізах потоку 1–1 і 2–2, а також сили тяжіння. Тоді робота сил тиску в перерізі 1–1 буде додатною, тому що напрямок сили збігається з напрямком швидкості потоку. Вона буде дорівнювати добутку сили $p_1 d\omega_1$ на шлях $u_1 dt$:

$$P_1 d\omega_1 u_1 dt . \tag{10.6}$$

Робота сил тиску в перерізі 2–2 буде від'ємною, тому що напрямок сили протилежний напрямку швидкості. Тоді її значення буде:

$$-P_2 d\omega_2 u_2 dt. \quad (10.7)$$

Повна робота, яку виконують сили тиску, набуде вигляду:

$$P_1 d\omega_1 u_1 dt - P_2 d\omega_2 u_2 dt. \quad (10.8)$$

Робота сил тяжіння дорівнює зміні потенціальної енергії положення виділеного об'єму рідини при переміщенні з перерізу 1–1 в переріз 2–2. З урахуванням умови нерозривності потоку і нестисливості рідини виділені елементарні об'єми будуть однакові і, отже, будуть однакові їхні ваги dG :

$$dG = \rho g u_1 d\omega_1 dt = \rho g u_2 d\omega_2 dt. \quad (10.9)$$

При перетіканні з перерізу 1–1 в переріз 2–2 центр ваги виділеного об'єму переміститься на різницю висот $(z_1 - z_2)$ і робота, яку виконують сили тяжіння, становитиме:

$$dG(Z_1 - Z_2). \quad (10.10)$$

Проаналізуємо тепер зміну кінетичної енергії розглянутого об'єму елементарного потоку рідини.

Приріст кінетичної енергії виділеного об'єму за dt дорівнює різниці його кінетичних енергій в перерізах 1–1 і 2–2. Цей приріст становитиме:

$$\frac{dG}{g} u_1^2 - \frac{dG}{g} u_2^2 = (u_1^2 - u_2^2) \frac{dG}{2g}. \quad (10.11)$$

Прирівнюючи приріст кінетичної енергії (10.11) до суми робіт сил тяжіння (10.10) і сил тиску (10.8), прийдемо до вигляду:

$$dG(Z_1 - Z_2) + P_1 d\omega_1 u_1 dt - P_2 d\omega_2 u_2 dt = (u_1^2 - u_2^2) \frac{dG}{2g}. \quad (10.12)$$

Розділивши обидві частини рівняння (10.12) на вагу dG , тобто привівши рівняння (10.12) до одиничної ваги, отримаємо:

$$\frac{dG(Z_1 - Z_2)}{dG} + \frac{P_1 d\omega_1 u_1 dt}{\rho g u_1 d\omega_1 dt} - \frac{P_2 d\omega_2 u_2 dt}{\rho g u_2 d\omega_2 dt} = (u_1^2 - u_2^2) \frac{dG}{2g} \frac{1}{dG}. \quad (10.13)$$

Після скорочень і перетворень у рівнянні (10.13) прийдемо до шуканого вигляду:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}. \quad (10.14)$$

Якщо врахувати, що перерізи 1–1 і 2–2 обрані довільно, можна прийти до висновку, що сума наведених вище величин $z_i + \frac{P_i}{\rho g} + \frac{u_i^2}{2g}$ описує рух рідини під дією сил тиску і сил тяжіння та є величиною постійною для елементарного потоку, тобто:

$$Z + \frac{P}{g\rho} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}(= H). \quad (10.15)$$

Таким чином, знову отримано те саме (раніше отримане інтегруванням рівнянь Ейлера) рівняння Бернуллі для елементарного потоку нев'язкої рідини при усталеному русі під дією сил тяжіння.

10.2 Геометрична інтерпретація рівняння Бернуллі

Положення будь-якої частинки рідини відносно деякої довільної лінії нульового рівня $0-0$ визначається вертикальною координатою Z (рис. 10.2). Для реальних гідравлічних систем це може бути рівень, нижче якого рідина з цієї гідросистеми витікати не може. Наприклад, рівень підлоги цеху для верстата або рівень підвалу будинку для домашнього водопроводу.

– Як і в гідростатиці, величину Z називають нівелірною висотою.

– Другий доданок $-\frac{P}{g\rho}$ називається п'езометричною висотою. Ця величина відповідає висоті, на яку піднімається рідина в п'езометрі, якщо його встановити в розглянутому перерізі, під дією тиску P .

– Сума перших двох членів рівняння $Z + \frac{P}{g\rho}$ – гідростатичний напір.

– Третій доданок рівняння Бернуллі $\frac{u^2}{2g}$ називається швидкісною висотою або швидкісним напором. Цю величину можна уявити як висоту, на яку піднімається рідина, яка почала рухатися зі швидкістю u за відсутності опору руху.

– Суму усіх трьох членів (висот) називають гідродинамічним або повним напором і, як вже було сказано, позначають буквою H .

Усі складові рівняння Бернуллі мають розмірність довжини і їх можна зобразити графічно (рис. 10.2).

Значення z , $\frac{P}{g\rho}$, $\frac{u^2}{2g}$ – нівелірну, п'езометричну і швидкісну висоти можна визначити для кожного перерізу елементарного потоку рідини. Геометричне місце точок, висота яких дорівнює $z + \frac{P}{g\rho}$, називається п'езометричною лінією. Якщо до цих висот додати швидкісні висоти, які дорівнюють $\frac{u^2}{2g}$, то виходить інша лінія, яка називається гідродинамічною або напірною лінією.

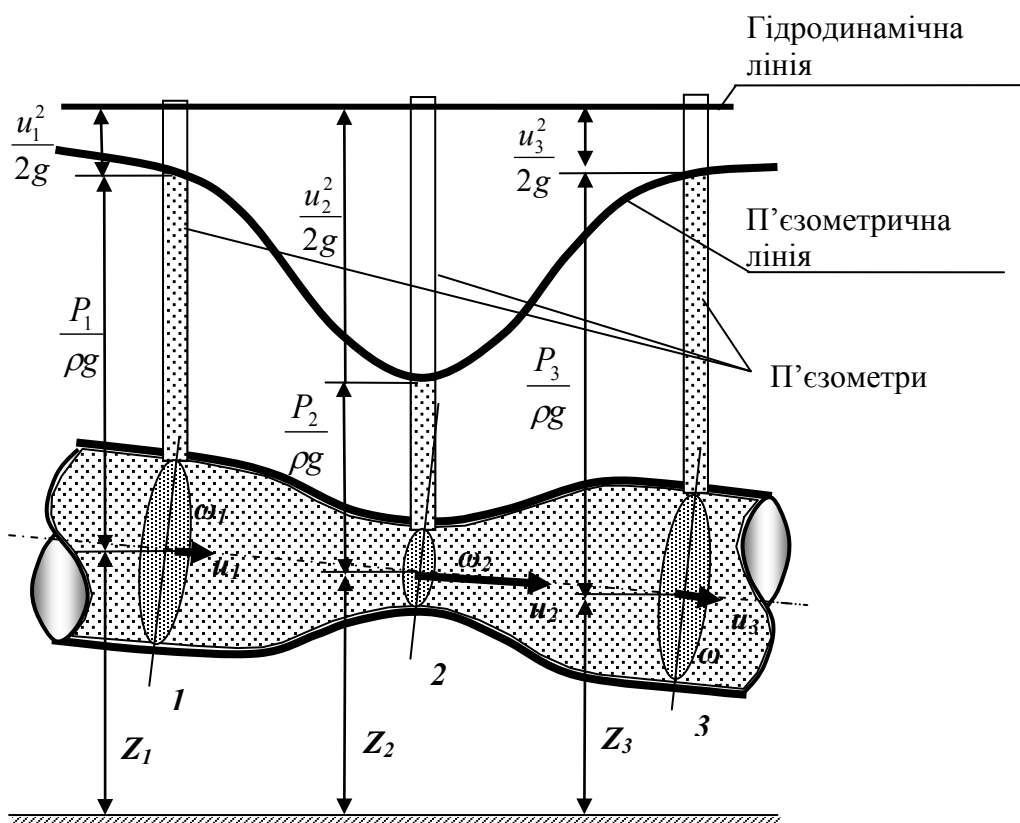


Рисунок 10.2 – Схема графічного зображення рівняння Бернуллі

Із рівняння Бернуллі для потоку нев'язкої рідини (і графіка) виходить, що гідродинамічний напір по довжині потоку постійний.

10.3 Енергетична інтерпретація рівняння Бернуллі

Вище було отримано рівняння Бернуллі з використанням енергетичних характеристик рідини. Сумарною енергетичною характеристикою рідини є її гідродинамічний напір.

Із фізичної точки зору це відношення величини механічної енергії до величини ваги рідини, що має цю енергію. Таким чином, гідродинамічний напір потрібно розуміти як енергію одиниці ваги рідини. І для ідеальної рідини ця величина є сталою по довжині. Таким чином, фізичний зміст рівняння Бернуллі – це закон збереження енергії для рухомої рідини:

$$H = z + \frac{P}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}. \quad (10.16)$$

Фізичний зміст доданків, що входять до рівняння, такий (рис. 10.3): Z – потенційна енергія одиниці ваги рідини (питома енергія) – енергія, яка характеризує положення (висоту) одиниці ваги рідини відносно площини порівняння (нульового рівня), прийнятої за початок відрахунку; $\frac{P}{\rho g}$ – потенціальна енергія одиниці ваги рідини – енергія, обумовлена стис-

кання одиниці ваги рідини, що знаходиться під тиском P ; $z + \frac{P}{\rho g}$ – повна потенціальна енергія одиниці ваги рідини; $\frac{u^2}{2g}$ – кінетична енергія одиниці ваги рідини – енергія, яка характеризує рух одиниці ваги рідини із швидкістю u ; H – повна енергія одиниці ваги рідини (повна питома енергія).

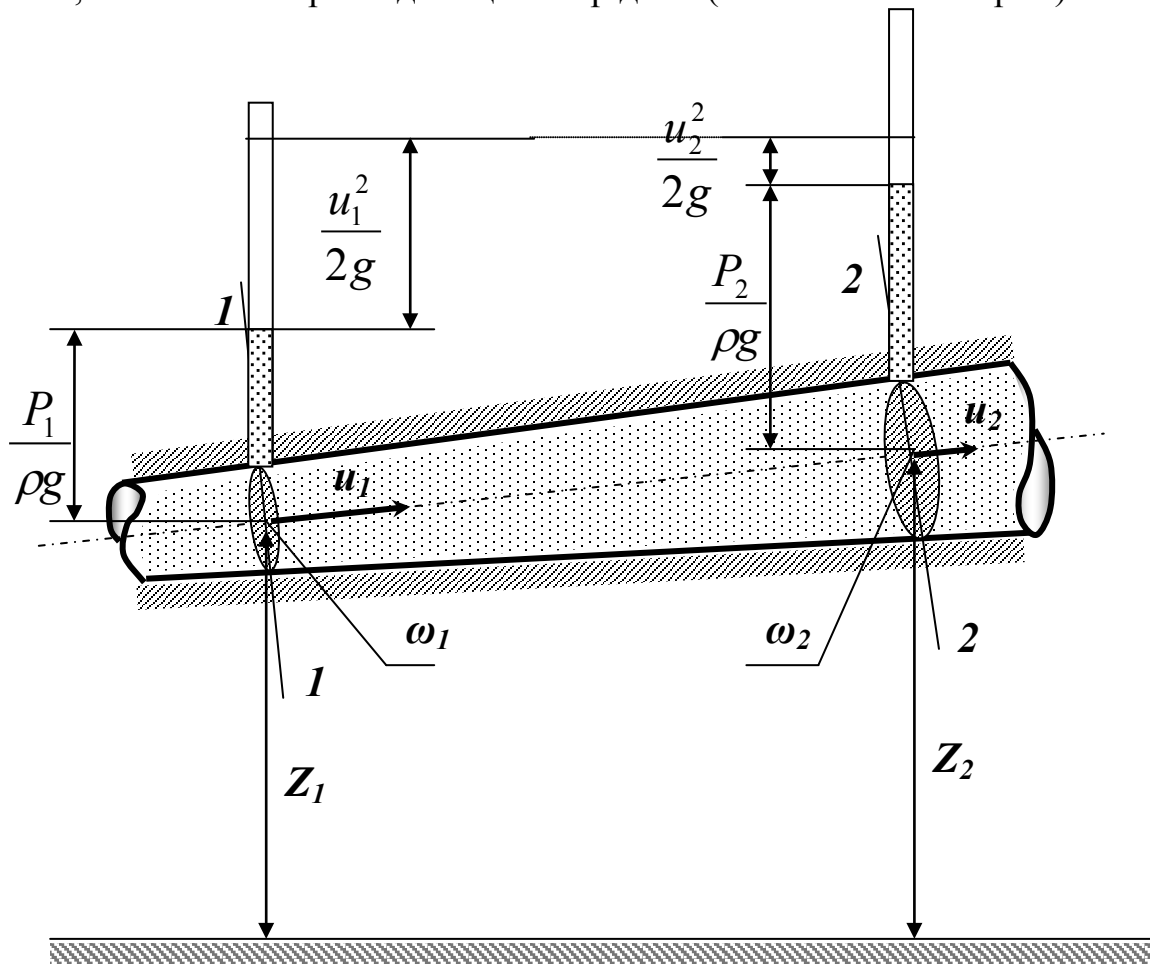


Рисунок 10.3 – Схема енергетичної інтерпретації рівняння Бернуллі

10.4 Рівняння Бернуллі для потоку ідеальної рідини

Потік ідеальної рідини, як вказувалося раніше, можна подати сокупністю елементарних потоків рідини. Швидкості по перерізу потоку неоднакові, причому всередині потоку швидкості найбільші, а на периферії вони зменшуються (струменева модель потоку) (рис. 10.4). Це означає, що різні потоки в одному перерізі мають різні значення кінетичної енергії. Звідси витікає, що кінетична енергія, порахована із використанням швидкостей елементарних цівок u_ω , та кінетична енергія, порахована із використанням значення середньої швидкості V , будуть мати різні значення. Вияснимо, яка ця різниця. Кінетична енергія елементарної цівки dE_{ec} дорівнює:

$$dE_{ec} = \frac{u_{\omega}^2 dm}{2}, \quad (10.17)$$

де dm – маса рідини густиною ρ , яка протікає через живий переріз елементарної цівки $d\omega$ зі швидкістю u_{ω} за час dt , дорівнює:

$$dm = u_{\omega} \rho d\omega dt. \quad (10.18)$$

Проінтегрувавши вираз (10.17), отримаємо вираз для кінетичної енергії потоку ідеальної рідини E_n^i :

$$E_n^i = \int_{\omega} dE_{ec} = \int_{\omega} \frac{u_{\omega}^2 dm}{2} = \int_{\omega} \frac{u_{\omega}^2 u_{\omega} \rho d\omega dt}{2} = \frac{\rho}{2} \int_{\omega} u_{\omega}^3 d\omega dt. \quad (10.19)$$

Якщо припустити, що $t=1$, то із (10.19) отримуємо:

$$E_n^u = \frac{\rho}{2} \int_{\omega} u_{\omega}^3 d\omega. \quad (10.20)$$

Остання формула (10.20) визначає енергію потоку із використанням швидкостей елементарних цівок u_{ω} .

Якщо отримати значення кінетичної енергії потоку із використанням значення середньої швидкості V , отримаємо формулу:

$$E_n^V = \frac{mV^2}{2}, \quad (10.21)$$

де m – маса рідини густиною ρ , яка протікає через живий переріз потоку ω зі швидкістю V за час t і дорівнює:

$$m = V \rho \omega t. \quad (10.22)$$

Після підстановки при $t=1$ отримуємо:

$$E_n^V = \frac{\rho}{2} V^3 \omega. \quad (10.23)$$

Відношення E_n^i і E_n^V дорівнює:

$$\frac{E_n^i}{E_n^V} = \frac{\int u^3 d\omega}{V^3 \omega} = \alpha. \quad (10.24)$$

Отримана величина α має назву коефіцієнта кінетичної енергії або коефіцієнта Коріоліса. Смысл цього коефіцієнта полягає у відношенні дійсної кінетичної енергії потоку у певному перерізі до кінетичної енергії у тому самому перерізі потоку, але при рівномірному розподілі швидкостей. При рівномірному розподілі швидкостей його значення дорівнює одиниці, а при нерівномірному – завжди більше одиниці і для будь-якого потоку його значення знаходиться у межах від 1 до 2 і більше.

Враховуючи коефіцієнт кінетичної енергії, зведемо рівняння Бернуллі для потоку ідеальної рідини, яке набуде вигляду:

$$H_{\text{потоку}} = Z + \frac{P}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g}. \quad (10.25)$$

Потрібно врахувати, що в загальному випадку у різних перерізах потоку коефіцієнт α буде мати різні значення.

10.5 Рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини

У реальних потоках рідини наявні сили в'язкого тертя. Як результат – шари рідини труться один об одного в процесі руху. На це тертя витрачається частина енергії потоку. З цієї причини під час руху неминуча втрата енергії. Ця енергія, як і при будь-якому терті, перетворюється у теплову енергію. Через ці втрати енергія потоку рідини по довжині потоку і у його напрямку постійно зменшується. Тобто напір потоку $H_{\text{потоку}}$ в напрямку руху потоку стає меншим. Якщо розглядати два з'єднаних перерізи 1–1 і 2–2, то втрати гідродинамічного напору Δh становитимуть:

$$\Delta h = H_{1-1} - H_{2-2}, \quad (10.26)$$

де H_{1-1} – напір у першому перерізі потоку рідини, H_{2-2} – напір у другому перерізі потоку, Δh – витрачений напір – енергія, витрачена кожною одиницею ваги рідини, яка рухається, на подолання опору на шляху потоку від перерізу 1–1 до перерізу 2–2.

Із урахуванням втрат енергії рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини буде мати вигляд:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h. \quad (10.27)$$

Індексами 1 і 2 позначено характеристики потоку в перерізах 1–1 і 2–2.

Якщо врахувати, що характеристики потоку V і α залежать від геометрії потоку, яка для напірних потоків визначається геометрією трубопроводу, зрозуміло, що втрати енергії (напору) в різних трубопроводах будуть змінюватися неоднаково. Показником змін напору потоку є гідравлічний нахил I , який характеризує втрати напору на одиниці довжини потоку. Фізичний зміст гідравлічного нахилу – інтенсивність розсіювання енергії по довжині потоку. Іншими словами, величина I показує, як швидко трубопровід поглинає енергію потоку, що протікає у ньому:

$$I = \frac{\Delta h}{L_{1-2}}. \quad (10.28)$$

Зміну енергії по довжині потоку зручно прослідкувати на графіках (рис. 10.5). Із рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини (закону збереження енергії) (10.27) видно, що гідродинамічна лінія для потоку реальної рідини (з одним джерелом енергії) завжди неспадна. Те саме справедливо і для п'єзометричної лінії, але лише у випадку рівномірного руху, коли

швидкісний напір постійний – $\alpha \frac{V^2}{2g} = const$, а зменшення напору відбувається лише за рахунок змін потенціальної енергії потоку, головним чином, за рахунок зменшення тиску P .

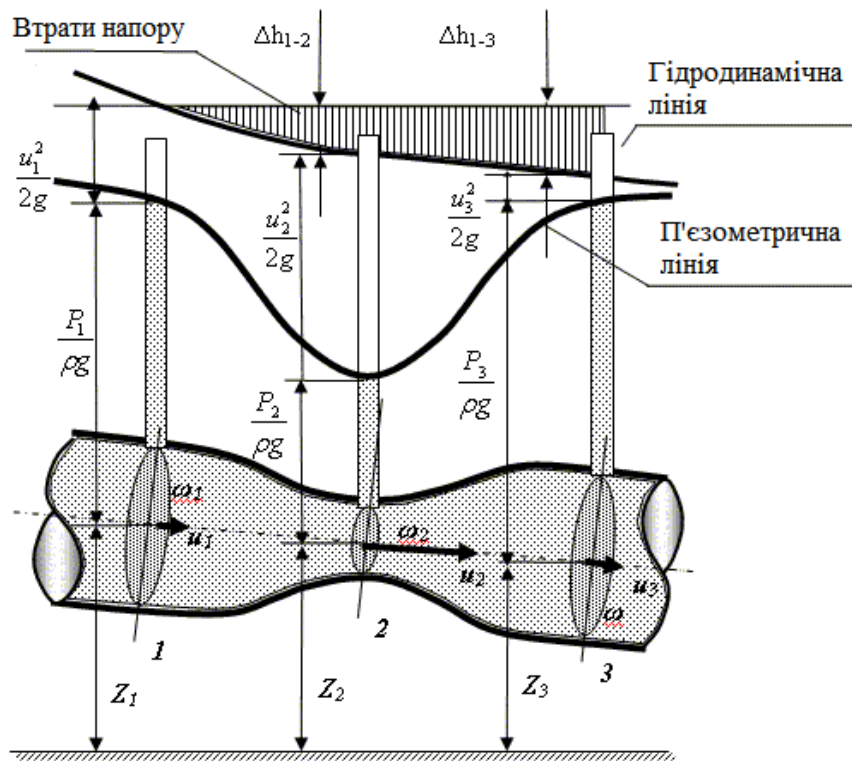


Рисунок 10.5 – Схема зміни енергії реальної рідини по довжині потоку

11 РЕЖИМИ ТЕЧІЇ РІДИНИ

11.1 Два режими течії рідини

Візьмемо прозору трубу, в якій з невеликою швидкістю V_1 тече прозора рідина, наприклад, вода (рис. 11.1). У цей потік помістимо невеликі, істотно менші за діаметр потоку, трубки. У трубках під тиском знаходиться підфарбована рідина, наприклад, кольорові чорнила, яка може з них витікати, якщо відкрити крани K . Будемо відкривати їх на короткий час (1–3 секунди) і припиняти подачу чорнила через якісь проміжки часу так, щоб можна було простежити рух кольорової рідини. У такому випадку в потоці будуть виникати різнокольорові струмені, причому кольорова рідина буде явно показувати розподіл швидкостей (епюра швидкостей) по перерізу потоку. Цей розподіл буде відповідати розглянутій раніше струменевій моделі потоку. Якщо спостерігати за рухом рідини, то можна ясно бачити, що при переміщенні від перерізу 1 до перерізу 2 картина розподілу швидкостей буде залишатись незмінною, а рух рідини буде шаруватим, плавним, всі цівки ліній току будуть паралельні між собою. Такий рух носить назву ламінарний (від латинського слова lamina – шар).

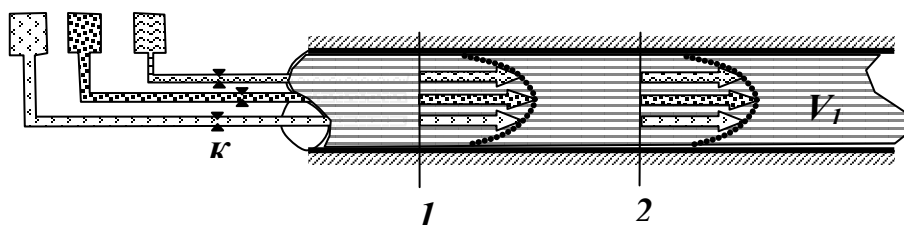


Рисунок 11.1 – Схема потоку рідини

Якщо збільшити швидкість основного потоку до величини V_2 і повторити експеримент з кольоровими цівками, то епюри швидкостей ніби витягнуться, а характер руху залишиться колишнім, ламінарним (рис. 11.2, а).

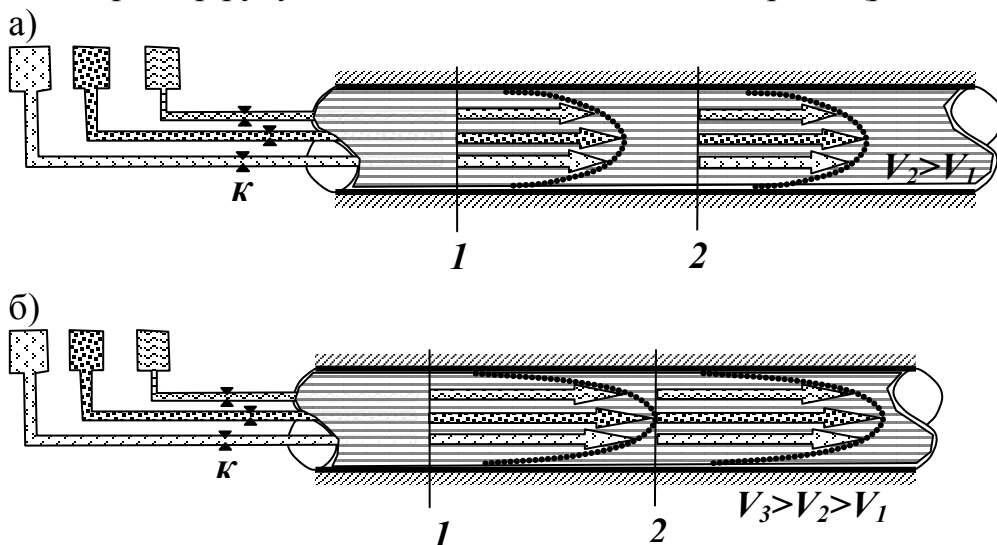


Рисунок 11.2 – Схема ламінарного потоку рідини

Попутно зауважимо, що коефіцієнт кінетичної енергії α , який входить в рівняння Бернуллі і враховує співвідношення дійсної кінетичної енергії потоку до кінетичної енергії, обчисленої з використанням середньої швидкості, при «витягуванні» епюра швидкостей зростає.

Якщо ще збільшити подачу рідини до швидкості V_3 , то епюри швидкостей можуть витягнутися ще більше і при цьому рух буде спокійним, плавним – ламінарним. Коефіцієнт α наближається до значення 2 (рис. 11.2, б).

Проте до нескінченності збільшувати швидкість при ламінарному режимі руху потоку неможливо. Обов'язково настане такий момент, коли характер руху рідини радикально зміниться. Кольорові цівки почнуть спочатку коливатися, потім розмиватися й інтенсивно перемішуватися (рис. 11.3). Течія потоку стає неспокійною, з постійним вихороутворенням. Епюра розподілу швидкостей по перерізу потоку наблизиться до прямокутної форми, а значення швидкостей в різних перерізах потоку будуть практично дорівнювати середній швидкості руху рідини. Значення коефіцієнта кінетичної енергії α наближається до 1.

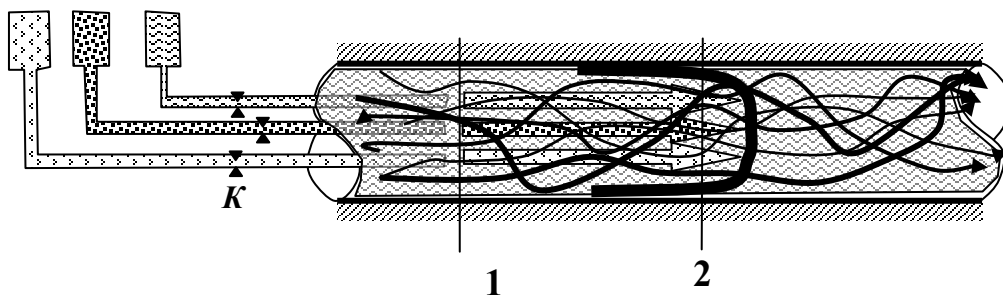


Рисунок 11.3 – Схема потоку рідини при переході від ламінарного до турбулентного режиму течії

Такий рух рідини називається турбулентним (від латинського слова *turbulentus* – збурений, хаотичний).

Якщо знову зменшити швидкість течії рідини, відновиться ламінарний режим руху. Перехід від одного режиму руху до другого відбуватиметься приблизно при одній і тій самій швидкості, яку називають критичною швидкістю і позначають $V_{кр}$. Експерименти показують, що значення цієї швидкості прямо пропорційно кінематичному коефіцієнту в'язкості рідини ν і обернено пропорційно діаметру трубопроводу d (для найбільш часто використовуваних труб круглого перерізу) або гідравлічному радіусу потоку R (для інших типів труб і русел).

$$V_{кр} = k \frac{\nu}{d} \text{ або } V_{кр} = k_1 \frac{\nu}{R}. \quad (11.1)$$

У цих виразах (11.1) коефіцієнти k і k_1 – безрозмірні величини, однакові (близькі за даними різних експериментів) для всіх рідин (і газів) для

будь-яких розмірів труб і перерізів потоку. Надалі ми будемо розглядати тільки напірні потоки в трубах круглого перерізу.

Безрозмірний коефіцієнт $k = \frac{V_{кр} d}{\nu}$ називається критичним числом Рейнольдса – за прізвищем англійського вченого–фізика, який досліджував в 1883 р. два режими течії рідини. Цей коефіцієнт позначається:

$$Re_{кр} = \frac{V_{кр} d}{\nu}. \quad (11.2)$$

Дослідним шляхом встановлено, що критичне число Рейнольдса для круглих труб – 2320, а для інших перерізів – 580.

Для визначення режиму руху в потоці потрібно знайти фактичне число Рейнольдса Re , яке можна визначити для будь-якого потоку за формулою:

$$Re = \frac{Vd}{\nu}, \quad (11.3)$$

і порівняти його з критичним числом $Re_{кр}$.

При цьому, якщо $Re < Re_{кр}$, тоді режим руху ламінарний, якщо $Re > Re_{кр}$, то режим руху турбулентний.

11.2 Фізичний смисл числа Рейнольдса

Фізичний смисл числа Рейнольдса полягає в зміні режимів течії рідини. Нині не існує строгого науково доведеного пояснення цьому явищу, проте найбільш достовірною гіпотезою вважається така: зміна режимів руху рідини визначається відношенням сил інерції до сил в'язкості в потоці рідини. Якщо переважають перші, то режим руху турбулентний, якщо другі – ламінарний. Турбулентні потоки виникають за високих швидкостей руху рідини і малої в'язкості, ламінарні потоки виникають в умовах повільного перебігу і у в'язких рідинах. На практиці в різних газопроводах, водопроводах і подібних до них системах частіше зустрічаються турбулентні потоки навіть при швидкостях, менших 1 м/с. У гідросистемах технологічного обладнання, в яких як робочі рідини використовуються мінеральні масла, турбулентний режим виникає при швидкостях понад 15 м/с, тоді як при проектуванні таких систем найчастіше передбачають швидкості 4–5 м/с. Режим руху в таких трубопроводах, як правило, ламінарний.

Оскільки сили інерції і сили в'язкості в потоці рідини залежать від багатьох причин, то при швидкостях, близьких до критичної, можуть виникати перехідні режими, при яких спостерігаються нестійкий ламінарний або турбулентний рух. Ці режими відображені на схемі на рисунку 11.4.

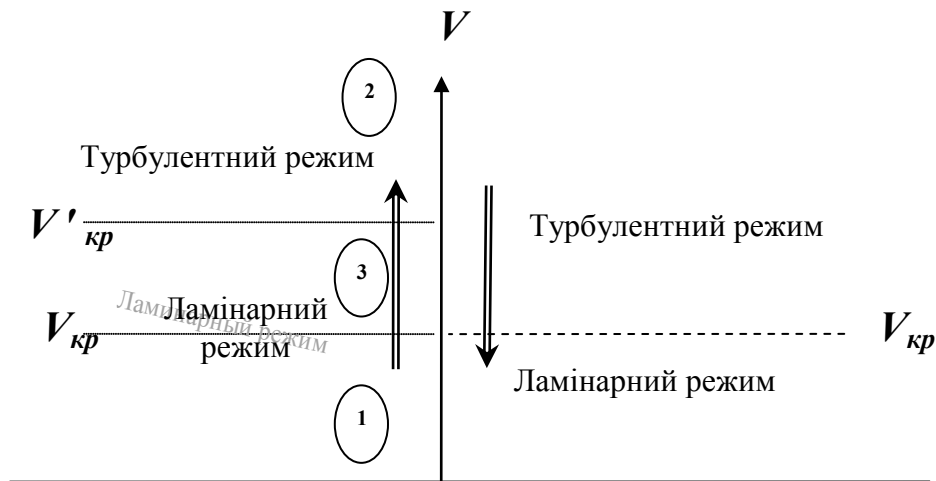


Рисунок 11.4 – Схема визначення режиму течії рідини

Якщо швидкість течії збільшувати, то ламінарний режим (зони 1 і 3) переходить в турбулентний (зона 2) при швидкості $V'_{кр}$ – верхня критична швидкість. Їй відповідає верхнє число Рейнольдса. Якщо швидкість зменшувати, тоді перехід з турбулентного потоку в ламінарний відбувається при швидкості $V_{кр}$ – нижня критична швидкість. Їй відповідає нижнє число Рейнольдса. Зону 3 називають нестійкою, або перехідною, зоною. При швидкостях, які до неї належать, можуть існувати як ламінарні, так і турбулентні потоки. Проте ламінарний режим в цій зоні дуже нестійкий і будь-яке збурення, наприклад, коливання труби, моментально призводить до виникнення турбулентного потоку. З цієї причини на практиці цю зону завжди відносять до турбулентної, а під критерієм Рейнольдса розуміють нижнє число $Re_{кр}$. У зонах 1 і 2 режимами руху завжди стійкі. Навіть якщо режим руху в зоні 1 примусово змінити, наприклад, за допомогою спеціальних пристроїв – турбулезаторів потоку, то через дуже короткий час потік знову стане ламінарним.

11.3 Основні особливості турбулентного режиму руху

Як вже зазначалося вище, на практиці зустрічаються обидва режими руху рідини, проте найбільші особливості мають турбулентні потоки. Перелічимо основні з них:

- за характером руху частинки рідини в турбулентному потоці поведуться приблизно так, як молекули в поданні кинетичної теорії газів: вони знаходяться в стані безладного хаотичного руху. У разі, наприклад, трубопроводів з цим пов'язано істотне зростання втрат енергії при русі рідини порівняно з ламінарним потоком;
- у турбулентному режимі відбувається вирівнювання епюри розподілу швидкостей по перерізу потоку;

- з турбулентним рухом пов'язано також посилення теплопередачі всередині рідини;
- перемішування визначається наявністю в турбулентному потоці вже згаданих вище, перпендикулярних до основного напрямку руху рідини, складових швидкостей;
- перемішування в турбулентно рухомій рідині приводить до зважування фракції в потоці іншої фази (тверді, газоподібні і т. п.), що знаходиться в дисперсному стані;
- турбулентний рух є рухом несталим; усі гідравлічні характеристики, зокрема швидкості, в кожній точці зайнятого турбулентним потоком простору змінюються з часом.

Таким чином, турбулентний рух можна визначити як рух рідини з пульсацією швидкостей, що приводить до перемішування рідини.

11.4 Виникнення турбулентного режиму руху рідини

Якщо на якійсь ділянці трубопроводу існує турбулентний потік, то це не означає, що такий самий характер руху зберігається у всій трубі. На різних ділянках трубопроводу та навіть на одних і тих самих ділянках в різні періоди часу потік може мати різний характер. Це може визначатися або різними діаметрами трубопроводів, або зміною швидкості течії рідини. У всіх випадках при виникненні умов турбулентного режиму він встановлюється в трубі не миттєво. Це відбувається протягом деякого часу на ділянці труби певної довжини. Розглянемо процес виникнення турбулентного режиму руху (рис. 11.5).

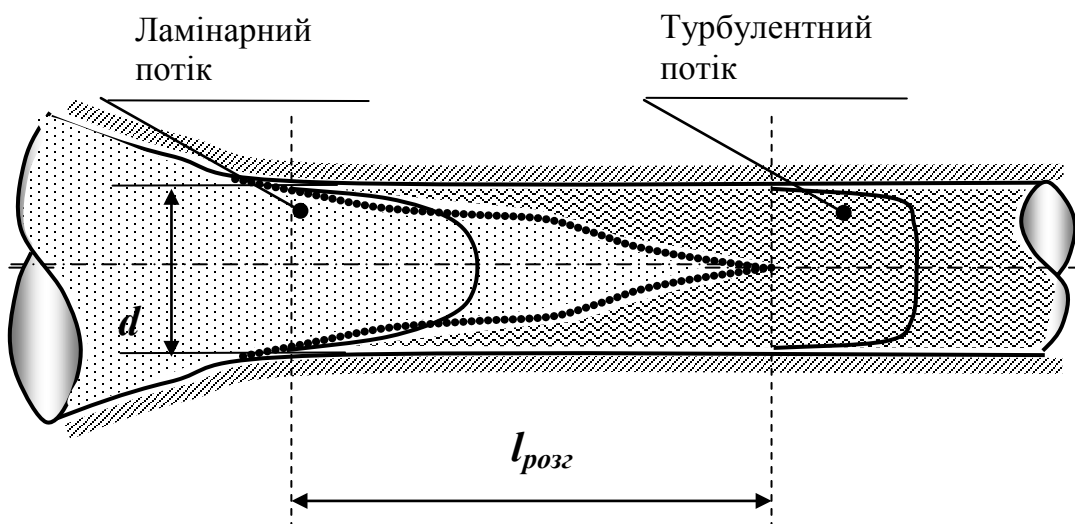


Рисунок 11.5 – Схема течії рідини при переході від ламінарного до турбулентного режиму течії

Перехід до турбулентного режиму може відбуватися з ламінарного, наприклад, в результаті плавної або раптової зміни діаметра труби. Такий самий перехід можливий за рахунок зміни швидкості руху рідини. До утворення турбулентного режиму може призводити також і зміна форми потоку рідини.

Крім перерахованих причин можливі й інші, особливо при режимах, які характеризуються числами Рейнольдса, близькими до критичного.

На підставі досвіду [3, 5, 15] встановлено таке. Коли створюються умови для такого переходу, наприклад, звуження прохідного перерізу труби досягає значення, при якому потік може стати турбулентним, по периферії потоку ламінарний шар порушується і далі за течією розвивається турбулентний примежовий шар. Товщина цього шару через турбулентне перемішування досить швидко збільшується, і турбулентний потік заповнює весь переріз трубопроводу. Ділянка, на якій відбувається перетворення ламінарного режиму руху в турбулентний, називається розгінною ділянкою. Її довжина $l_{розг}$ за експериментальними даними дорівнює:

$$l_{розг} \approx (40 \div 50) d, \quad (11.4)$$

де d – діаметр трубопроводу.

11.5 Виникнення ламінарного режиму

У реальних гідросистемах, навіть при ламінарному режимі течії рідини в круглих трубах, на шляху потоку зустрічаються ділянки з іншою геометрією. Це можуть бути з'єднання труб, вигини, гідроапаратура тощо. На таких ділянках характер потоку змінюється, режим руху стає турбулентним.

Потік після проходження такої ділянки при вході рідини в пряму трубу, за відповідної швидкості, встановлюється параболічний розподіл швидкостей (рис. 11.6). Потік знову прагне до ламінарного режиму руху. Відбувається це не моментально, а протягом деякого часу на відрізьку труби певної довжини. Такий відрізок називають початковою ділянкою ламінарної течії $l_{ноч}$.

Довжину такої ділянки можна визначити з формули Шіллера:

$$\frac{l_{ноч}}{d} = 0,029 Re, \quad (11.5)$$

де d – діаметр труби.

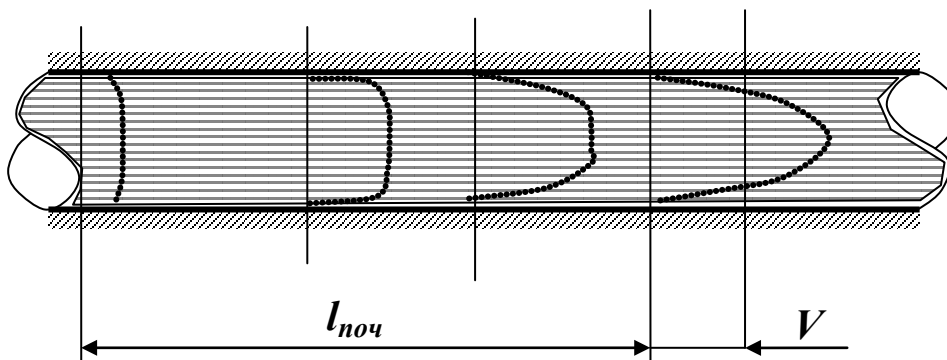


Рисунок 11.6 – Схема виникнення ламінарного режиму

З рівняння (11.5), якщо як число Re взяти критичне число Рейнольдса, легко побачити, що максимально можлива довжина такої ділянки дорівнює

$$l_{ноч} = 0,029 Re_{кр} d = 0,029 \times 2300d = 66,7d . \quad (11.6)$$

Втрати енергії на цій ділянці будуть дещо більшими, ніж в решті частини труби. З урахуванням цього формула для розрахунку втрат напора на тертя $h_{тр}$ при ламінарному русі в круглих гладких трубах набуває вигляду:

$$h_{тр} = \left(0,165 + \frac{64 l}{Re d} \right) \frac{V^2}{2g} . \quad (11.7)$$

Для коротких труб таке уточнення втрат може мати суттєве значення, для довгих труб величину 0,165 можна не враховувати.

12 ГІДРАВЛІЧНІ ОПОРИ В ПОТОКАХ РІДИНИ

12.1 Опір потоку рідини

Гідравлічна рідина в гідросистемах технологічного обладнання, як уже обговорювалося раніше, відіграє роль робочого тіла. Вона забезпечує перенесення енергії від джерела гідравлічної енергії до споживачів (в більшості випадків, до гідродвигуна). Для такого перенесення використовуються напірні потоки. У подібних потоках рідина з усіх боків обмежена твердими стінками трубопроводів, каналів гідроапаратів і порожнин гідромашин. Надалі ми будемо орієнтуватися саме на такі випадки, хоча аналогічні процеси супроводжують і рух безнапірних потоків.

Природно, що тверді стінки перешкоджають вільному руху рідини. Тому при відносному русі рідини і твердих поверхонь неминуче виникають (розвиваються) гідравлічні опори. На подолання виникаючих опорів витрачається частина енергії потоку. Цю втрачену енергію називають гідравлічними втратами питомої енергії або втратами напору. Гідравлічні втрати, в основному, пов'язані з подоланням сил тертя в потоці та об тверді стінки і залежать від ряду факторів, основними з яких є:

- геометрична форма потоку;
- розміри потоку;
- шорсткість твердих стінок потоку;
- швидкість течії рідини;
- режим руху рідини (який пов'язаний зі швидкістю, але враховує її не тільки кількісно, але й якісно);
- в'язкість рідини;
- деякі інші експлуатаційні властивості рідини.

Але гідравлічні втрати практично не залежать від тиску в рідині.

Величина гідравлічних втрат оцінюється енергією, втраченою кожною ваговою одиницею рідини. З рівняння Бернуллі, складеного для двох перерізів потоку, позначених індексами 1 і 2, втрати енергії потоку рідини Δh (рис. 12.1) можна записати як:

$$\Delta h = \left(Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \right) - \left(Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \right). \quad (12.1)$$

Нагадаємо, що в цьому рівнянні $Z + \frac{P}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g}$ – енергія одиниці ваги, яка рухається в полі сил тяжіння; Z – потенціальна енергія одиниці ваги рідини, що залежить від її положення над рівнем нульового потенціалу (лінією відліку); $\frac{P}{\rho g}$ – потенціальна енергія одиниці ваги рідини, яка залежить від ступеня її стиснення (від тиску); P – тиск в потоці рідини;

ρ – густина рідини; $\frac{\alpha V^2}{2g}$ – кінетична енергія одиниці ваги потоку рідини; α – коефіцієнт кінетичної енергії; V – середня швидкість потоку рідини; G – прискорення вільного падіння.

Якщо врахувати, що труба в обох перерізах 1 і 2 має однакові площі поперечних перерізів, рідина є нестислива і виконується умова суцільності (нерозривності) потоку, то, незважаючи на гідравлічні опори і втрати напору, кінетична енергія в обох перерізах буде однаковою. Врахувавши це, а також те, що при високому тиску в напірних потоках і невеликій (практично нульовій) різниці нівелірних висот Z_1 и Z_2 , втрати питомої енергії можна подати у вигляді:

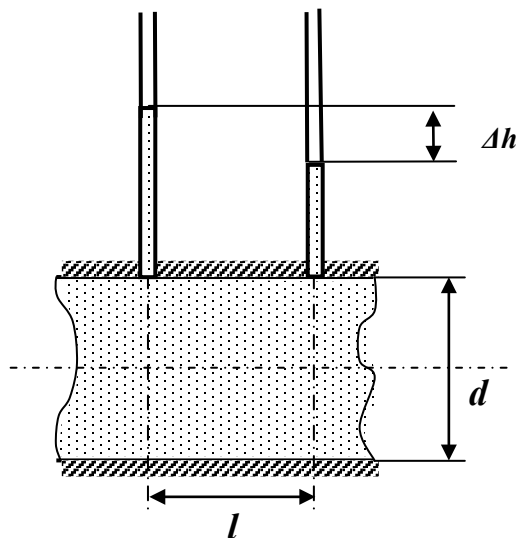


Рисунок 12.1 – Схем визначення втрат питомої енергії потоку рідини

$$\Delta h = \frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g}. \quad (12.2)$$

Досліди показують, що в багатьох (але не у всіх) випадках втрати енергії прямо пропорційні квадрату швидкості течії рідини, тому в гідравліці прийнято виражати втрачену енергію в частках від кінетичної енергії, віднесеної до одиниці ваги рідини

$$\Delta h = \xi \frac{V^2}{2g}, \quad (12.3)$$

де ξ – коефіцієнт опору.

Таким чином, коефіцієнт опору можна визначити як відношення втраченого напору до швидкісного напору.

Гідравлічні втрати в потоці рідини поділяють на 2 види: втрати по

довжині, місцеві втрати.

12.2 Гідравлічні втрати по довжині

Втрати напору по довжині, інакше їх називають втратами напору на тертя h_{mp} в чистому вигляді, тобто так, що немає ніяких інших втрат, виникають в гладких прямих трубах з постійним перерізом при рівномірному русі. Такі втрати обумовлені внутрішнім тертям в рідині і тому відбуваються і в шорстких трубах, і в гладких. Величина цих втрат виражається залежністю:

$$h_{mp} = \xi_{mp} \frac{V^2}{2g}, \quad (12.4)$$

де ξ_{mp} – коефіцієнт опору, обумовлений тертям по довжині.

При рівномірному русі рідини на ділянці трубопроводу постійного діаметра d довжиною l цей коефіцієнт опору прямо пропорційний довжині і обернено пропорційний діаметру труби:

$$\xi_{mp} = \lambda \frac{l}{d}, \quad (12.5)$$

де λ – коефіцієнт гідравлічного тертя (інакше його називають коефіцієнт втрат на тертя або коефіцієнт опору тертя).

З цього виразу (12.5) неважко бачити, що значення λ – коефіцієнт тертя ділянки круглої труби, довжина якої дорівнює її діаметру.

З урахуванням останнього виразу (12.5) для коефіцієнта опору втрати напору по довжині виражаються формулою Дарсі:

$$h_{mp} = \lambda \frac{l V^2}{d 2g}. \quad (12.6)$$

Формулу (12.6) можна застосовувати не тільки для циліндричних трубопроводів, але й тоді, коли потрібно виразити діаметр трубопроводу d через гідравлічний радіус потоку R :

$$R = \frac{d}{4} \text{ або } R = \frac{\omega}{\chi}, \quad (12.7)$$

де, нагадаємо, ω – площа живого перерізу потоку, χ – змочений периметр перерізу потоку.

Гідравлічний радіус можна обчислити для потоку з будь-якою формою перерізу, і тоді формула Дарсі (12.6) набуває вигляду:

$$h_{mp} = \frac{\lambda l V^2}{4R 2g}. \quad (12.8)$$

Формула (12.8) справедлива як для ламінарного, так і для турбулентного режимів руху рідини, проте коефіцієнт тертя по довжині λ не є величиною постійною.

Для визначення фізичного смислу коефіцієнта λ розглянемо об'єм рідини довжиною l , який рівномірно рухається по трубі діаметром d зі швидкістю V (рис. 12.2). На цей об'єм діють сили тиску P_1 і P_2 , причому $P_1 > P_2$, і сили тертя цього об'єму об стінки труби, які визначаються напруженням від тертя на стінці труби τ_0 . Умовою рівномірного руху під дією вказаних сил буде така рівність:

$$\pi \frac{d^2}{4} P_1 - \pi \frac{d^2}{4} P_2 - \pi dl \tau_0 = \pi \frac{d^2}{4} \Delta P - \pi dl \tau_0 = 0. \quad (12.9)$$

Якщо врахувати, що:

$$h_{mp} = \frac{\Delta P}{\rho g}, \text{ то } \Delta P = \lambda \frac{l V^2}{d 2g} \rho g, \quad (12.10)$$

і підставити цю величину в рівняння сил (12.9), діючих на розглянутий об'єм, отримаємо:

$$\pi \frac{d^2}{4} \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} \rho g - \pi d l \tau_0 = 0. \quad (12.11)$$

Скоротивши останній вираз (12.11), отримаємо $\left(\frac{1}{4} \lambda \frac{V^2}{2} \rho - \tau_0 = 0 \right)$. Виразивши з нього λ , остаточно будемо мати:

$$\lambda = \frac{4\tau_0}{\rho \frac{V^2}{2}}. \quad (12.12)$$

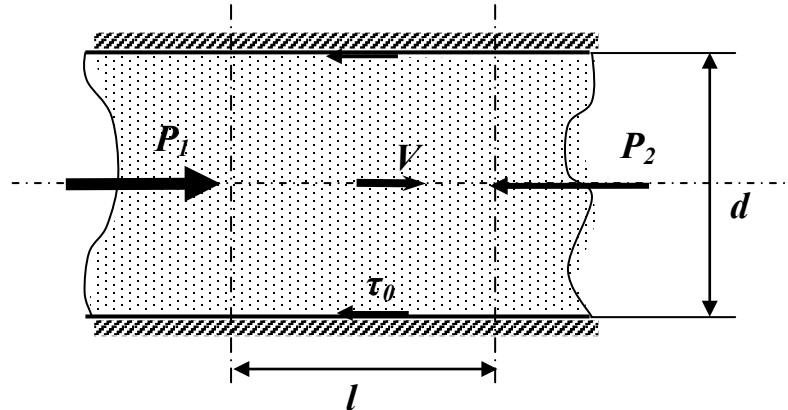


Рисунок 12.2 – Схема для визначення фізичного смислу коефіцієнта тертя λ

З отриманого виразу (12.12) випливає, що коефіцієнт гідравлічного тертя є величина, пропорційна відношенню напруження тертя на стінці труби до гідродинамічного тиску, який порахований за середньою швидкістю потоку. Наведені вище міркування і отримані в результаті них формули справедливі як для ламінарного, так і для турбулентного потоків. Проте коефіцієнт λ не є величиною постійною і залежить від багатьох факторів. Для з'ясування його величини і пов'язаних з ним втрат енергії необхідно детально проаналізувати режими руху рідини.

12.3 Ламінарний потік рідини

Нагадаємо, що ламінарний потік – це впорядкований шаруватий рух, математичний опис якого оснований на законі тертя Ньютона.

Для початку розглянемо усталений ламінарний потік в круглих трубах (рис. 12.3). У трубі діаметром $2r_0$ виділимо циліндричний об'єм рідини між перерізами 1 і 2 довжиною l і діаметром $2r$. Відзначимо, що тиск в перерізах 1 і 2 відповідно дорівнюють P_1 і P_2 . Розподіл швидкостей по перерізу потоку на всій довжині труби однаковий, тому однакове і значення коефіцієнта кінетичної енергії α . На цей об'єм, який рухається зі швидкіс-

ттю V , діють сили тиску (на торцевій поверхні) і сили опору, викликані в'язким тертям τ на бічній поверхні.

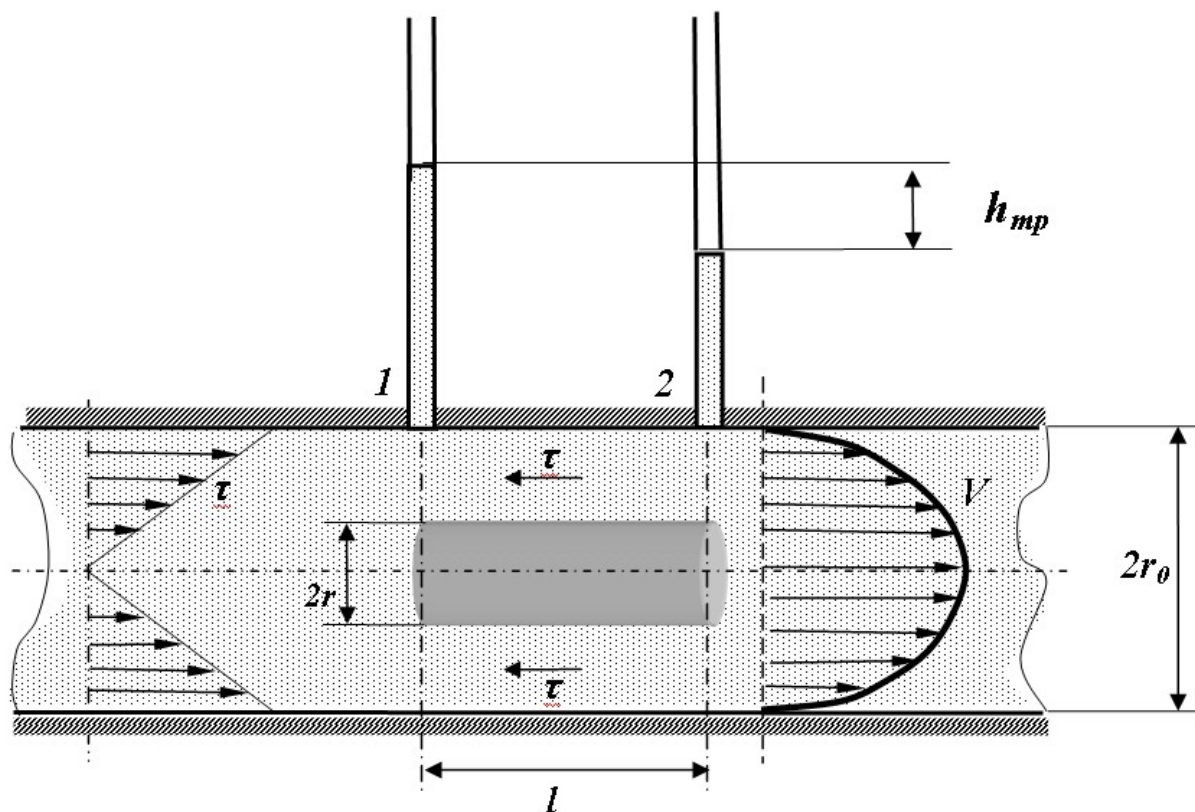


Рисунок 12.3 – Схема для теоретичного дослідження ламінарного руху потоку рідини

Як вже було отримано вище

$$h_{mp} = \frac{\Delta P}{\rho g}, \quad (12.13)$$

а рівняння сил, які діють на виділений об'єм, буде виглядати як:

$$\pi (P_1 - P_2) r^2 = 2\pi r l \tau. \quad (12.14)$$

Виразивши звідси τ , отримаємо:

$$\tau = \frac{h_{mp} \rho g r}{2l}. \quad (12.15)$$

З останньої формули (12.15) випливає, що дотичні напруження тертя лінійно залежать від радіуса потоку. Це показано на рисунку 12.3. З іншого боку, дотичні напруження за законом Ньютона однакові:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

або, в нашому випадку $\tau = -\mu \frac{du}{dr}$, оскільки різниця швидкостей між сусідніми потоками рідини залежить від радіуса r . Знак « $-$ » у формулі означає, що відлік по r направлений від осі до стінки, а при відліку по y – від стінки до осі потоку. Тоді:

$$\tau = \frac{h_{mp} \rho g r}{2l} = -\mu \frac{du}{dr}. \quad (12.16)$$

З даного співвідношення (12.16) можна знайти збільшення швидкості

$$du = -\frac{h_{mp} \rho g}{2\mu l} r dr, \quad (12.17)$$

тобто при збільшенні радіусу швидкість зменшується, що відповідає епюрі швидкостей.

Після інтегрування (12.7), отримаємо:

$$\int du = -\int \frac{h_{mp} \rho g}{2\mu l} r dr = -\frac{h_{mp} \rho g}{2\mu l} \frac{r^2}{2} + C. \quad (12.18)$$

Сталу інтегрування C легко визначити з відомих умов біля стінки труби, тобто при $r=r_0$, $u=0$. З урахуванням цих умов C набуде вигляду

$$C = \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} r_0^2. \text{ І тоді швидкість в ламінарному потоці залежно від радіуса (а}$$

практично це швидкість циліндричного шару рідини, що складається з елементарних цівок, розташованих на одному радіусі в циліндричному потоці) буде описуватися формулою:

$$u = \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} (r_0^2 - r^2), \quad (12.19)$$

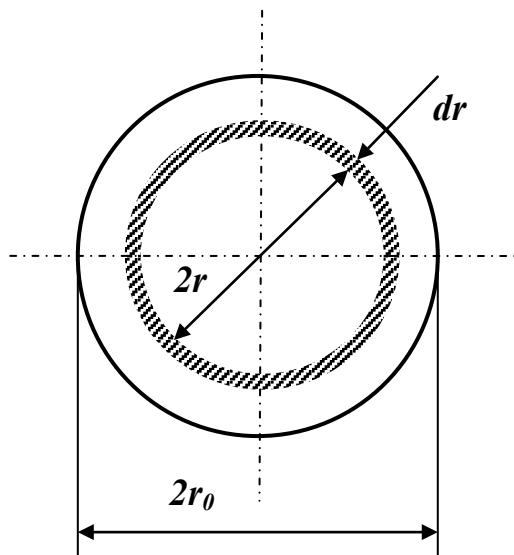


Рисунок 12.4 – Схема визначення товщини шару потоку рідини

яка, з математичної точки зору, є квадратною параболою і окреслює епюру розподілу швидкостей по перерізу потоку. Максимальне значення швидкості досягається в центрі потоку при $r=0$:

$$u_{\max} = \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} r_0^2. \quad (12.20)$$

Використовуючи значення швидкості u (12.19), визначимо величину витрати через кільцеву площу $d\omega_c$ шириною dr , що знаходиться на відстані r від центра труби (рис. 12.4). Вище було відзначено, що швидкість в будь-якій точці цього кільця однакова, і тоді:

$$dQ = u d\omega_c = \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr. \quad (12.21)$$

Проінтегрувавши dQ по всій площі труби (тобто від $r=0$ до $r=r_0$), отримаємо:

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^{r_0} \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} (r_0^2 - r^2) 2 \pi r dr = \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} 2 \pi \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr = \\
&= \frac{h_{mp} \rho g}{2 \mu l} \pi r_0^2 \int_0^{r_0} r dr - \frac{h_{mp} \rho g}{2 \mu l} \pi \int_0^{r_0} r^3 dr = \frac{h_{mp} \rho g}{2 \mu l} \pi \left(r_0^2 \frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^4}{4} \right) = \\
&= \frac{h_{mp} \rho g}{2 \mu l} \pi \frac{r_0^4}{4} = \frac{\pi h_{mp} \rho g}{8 \mu l} r_0^4.
\end{aligned}$$

Середня швидкість в такому потоці буде:

$$V = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{h_{mp} \rho g}{8 \mu l} r_0^2. \quad (12.22)$$

Зауважимо, що середня швидкість потоку з параболічним розподілом швидкостей вдвічі менша максимальної.

З останнього виразу (12.22) легко отримати закон опору потоку рідини, тобто залежність втрат енергії від розмірів і параметрів руху рідини:

$$h_{mp} = \frac{8 \mu l Q}{\pi r_0^4 \rho g}. \quad (12.23)$$

Замінивши в цьому виразі динамічний коефіцієнт в'язкості $\mu = \nu \rho$ кінематичним і виразивши радіус труби r_0 через діаметр d , отримаємо:

$$h_{mp} = \frac{8 \nu \rho l Q}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4 \rho g} = \frac{128 \nu l Q}{\pi d^4 g}. \quad (12.24)$$

Отриманий вираз (12.24) носить назву закону Пуазейля і застосовується для розрахунку втрат енергії з ламінарним потоком.

Цю ж величину втрат на тертя раніше ми виражали формулою Дарсі. Якщо прирівняти праві частини формули Дарсі (12.8) і закону Пуазейля (12.24), отримаємо:

$$h_{mp} = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = \frac{128 \nu l Q}{\pi d^4 g}. \quad (12.25)$$

Замінімо витрати добутком $\frac{\pi d^2}{4} V$ і підставимо в рівність (12.25):

$$h_{mp} = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = \frac{128 \nu l}{\pi d^4 g} \cdot \frac{\pi d^2}{4} V = \frac{64 \nu l}{d^2 g} \frac{V}{2}. \quad (12.26)$$

Штучно помножимо і розділимо чисельник і знаменник (12.26) на V :

$$h_{mp} = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = \frac{64 \nu l}{d^2 g} \frac{V}{2} \frac{V}{V} = 64 \frac{\nu}{V d} \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = 64 \frac{1}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}. \quad (12.26, a)$$

Очевидно, що в такому випадку:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (12.27)$$

Цей вираз (12.27) для коефіцієнта гідравлічного тертя при ламінарному русі рідини добре підтверджується експериментом і використовується на практиці для визначення втрат енергії в потоці при ламінарному режимі руху. Іноді цей коефіцієнт позначається λ_l .

Знаючи отримані вище вирази для швидкості елементарної струйки (12.19) u і для середньої швидкості потоку V , можна обчислити значення коефіцієнта кінетичної енергії α в рівнянні Бернуллі, який є відношенням дійсної кінетичної енергії до кінетичної енергії, обчисленою із застосуванням середньої швидкості:

$$\alpha = \frac{\int u^3 d\omega}{V^3 \omega}. \quad (12.28)$$

Врахуємо, що $\omega = \pi r_0^2$, $d\omega = 2\pi r dr$, а швидкість $V = \frac{h_{mp} \rho g}{8\mu l} r_0^2$ і тоді $u = \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} (r_0^2 - r^2)$. Змінну інтегрування ω (площу живого перерізу) замінимо радіусом. Після підстановки в вираз (12.28) для α отримаємо:

$$\alpha = \frac{\int_r \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) \right)^3 2\pi r dr}{\left(\frac{h_{mp} \rho g}{8\mu l} r_0^2 \right)^3 \pi r_0^2}. \quad (12.29)$$

Розкриємо інтеграл в чисельнику рівняння (12.29):

$$\begin{aligned} \int_r \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) \right)^3 2\pi r dr &= 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^3 \int_r (r_0^2 - r^2)^3 r dr = \\ 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^3 \int_r (r_0^6 - 3r_0^4 r^2 + 3r_0^2 r^4 - r^6) r dr &= \\ 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^3 \left(\int_r r_0^6 r dr - \int_r 3r_0^4 r^2 r dr + \int_r 3r_0^2 r^4 r dr - \int_r r^6 r dr \right) \end{aligned}$$

Проінтегруємо цю функцію в межах від 0 до r_0 , тобто по перерізу потоку:

$$\begin{aligned}
& 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^3 \left(\int_r r_0^6 r dr - \int_r 3r_0^4 r^2 r dr + \int_r 3r_0^2 r^4 r dr - \int_r r^6 r dr \right) = \\
& 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^3 \left(r_0^6 r^2 \frac{1}{2} \Big|_0^{r_0} - \frac{3}{4} r_0^4 r^4 \Big|_0^{r_0} + \frac{3}{6} r_0^2 r^6 \Big|_0^{r_0} - \frac{1}{8} r^8 \Big|_0^{r_0} \right) = \\
& 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^3 \left(\frac{1}{2} r_0^8 - \frac{3}{4} r_0^8 + \frac{3}{6} r_0^8 - \frac{1}{8} r_0^8 \right) = 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^3 r_0^8 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{8} \right) = \\
& 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^3 r_0^8 \left(\frac{1}{8} \right)
\end{aligned} \tag{12.30}$$

Тепер розглянемо знаменник для α :

$$\left(\frac{h_{mp} \rho g}{8\mu l} r_0^2 \right)^3 \pi r_0^2 = \pi \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^3 r_0^8. \tag{12.31}$$

Розділивши отриманий чисельник (12.30) на знаменник у (12.31), будемо мати значення коефіцієнта кінетичної енергії α :

$$\frac{2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^3 r_0^8 \left(\frac{1}{8} \right)}{\pi \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^3 r_0^8} = 16 \left(\frac{1}{8} \right) = 2. \tag{12.32}$$

Це означає, що кінетична енергія ламінарного потоку з параболічним розподілом швидкостей вдвічі перевищує кінетичну енергію того ж потоку з рівномірним розподілом швидкостей.

У деяких випадках зручно знати інший поправковий коефіцієнт, який враховує відміну дійсної кількості руху потоку від його значення, порахувавши із використанням середньої швидкості потоку V . Цей коефіцієнт позначають α_0 і називають коефіцієнтом кількості руху та обчислюють за формулою:

$$\alpha_0 = \frac{\int u^2 d\omega}{V^2 \omega}. \tag{12.33}$$

За аналогією з обчислення коефіцієнта α , підставивши замість u і V , відповідні вирази і після зведення в квадрат і заміни змінної інтегрування отримаємо для чисельника:

$$\begin{aligned}
& \int_r \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} (r_0^2 - r^2) \right)^2 2\pi r dr = 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^2 \int_r (r_0^2 - r^2)^2 r dr = \\
& 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^2 \int_r (r_0^4 - 2r_0^2 r^2 + r^4) r dr = \\
& 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^2 \left(\int_r r_0^4 r dr - \int_r 2r_0^2 r^2 r dr + \int_r r^4 r dr \right)
\end{aligned} \quad (12.34)$$

Після інтегрування в межах від 0 до r_0 , чисельник (12.34) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
& 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^2 \left(\int_r r_0^4 r dr - \int_r 2r_0^2 r^2 r dr + \int_r r^4 r dr \right) = \\
& 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^2 \left(r_0^4 r^2 \frac{1}{2} \Big|_0^{r_0} - \frac{2}{4} r_0^2 r^4 \Big|_0^{r_0} + \frac{1}{6} r^6 \Big|_0^{r_0} \right) = \\
& 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^3 \left(\frac{1}{2} r_0^6 - \frac{1}{2} r_0^6 + \frac{1}{6} r_0^6 \right) = 2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^3 r_0^6 \left(\frac{1}{6} \right)
\end{aligned} \quad (12.35)$$

Знаменник (12.31) виразу для α перепишемо у вигляді:

$$\left(\frac{h_{mp} \rho g}{8 \mu l} r_0^2 \right)^2 \pi r_0^2 = \pi \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^2 r_0^6. \quad (12.36)$$

Після ділення чисельника (12.36) на знаменник (12.35) отримаємо значення коефіцієнта кількості руху α_0 :

$$\alpha_0 = \frac{2\pi \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^2 r_0^6 \left(\frac{1}{6} \right)}{\pi \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^3 r_0^6} = 8 \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{4}{3}. \quad (12.37)$$

Ця величина (12.37) для ламінарного потоку з параболічним розподілом швидкостей, так само як і α , є величиною постійною.

Усі наведені залежності справедливі для ділянок прямих гладких труб постійного перерізу з параболічним розподілом швидкостей по живому перерізу потоку.

13 ТУРБУЛЕНТНИЙ РЕЖИМ ТЕЧІЇ РІДИНИ

Нагадаємо, що турбулентний рух рідини відрізняється інтенсивним вихроутворенням, що призводить до перемішування шарів. У потоці спостерігаються постійні пульсації тиску і швидкостей, як за величиною, так і за напрямком. Турбулентний режим течії має несталий характер, а траєкторії руху частинок рідини постійно і хаотично змінюються. На практиці такий рух зустрічається досить часто при високих швидкостях потоку і малій в'язкості рідини. Внаслідок того, що при турбулентному потоці немає шаруватості, закон тертя Ньютона не застосовується. Через складності турбулентного руху і його аналітичного дослідження, поки немає достатньо точної теорії такої течії. Існує напівемпірична наближена теорія Прандтля, елементи якої будуть розглянуті нижче, при розгляді питання в'язкого тертя в турбулентних потоках.

Втрати енергії (втрати напору на тертя) при турбулентному русі рідини більші, ніж при ламінарному, через значні втрати на вихроутворення, перемішування і зміни траєкторій.

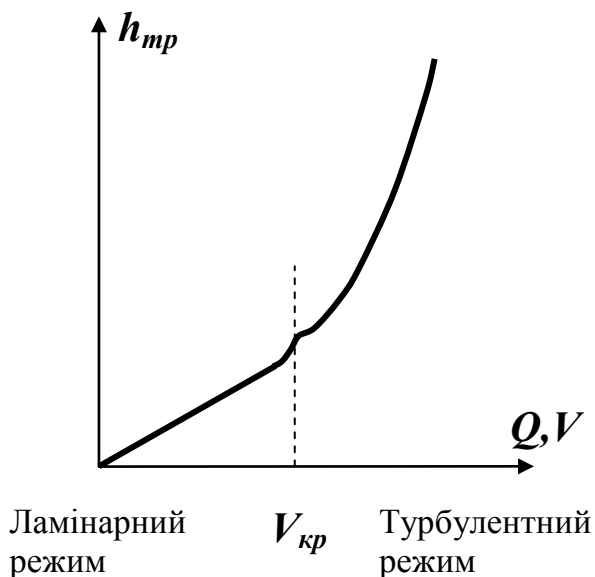


Рисунок 13.1 – Діаграма залежності втрат напору від виду режимів течії рідини

течії, і він істотно відрізняється від $\lambda_l = \frac{64}{Re}$, що використовується при ламінарному русі рідини.

У гідравліці для практичних розрахунків турбулентної течії рідини в трубах використовують експериментальні систематизовані дані, що застосовуються на основі теорії подібності [13, 16]. Основною розрахунковою формулою для визначення втрат напору в круглих трубах є вже відома формула Дарсі:

$$h_{тр} = \lambda_T \frac{l V^2}{d 2g}, \quad (13.1)$$

Проте коефіцієнт λ_T , в цьому випадку коефіцієнт на тертя по довжині при турбулентній

13.1 В'язке тертя при турбулентному русі

Виділимо в турбулентному потоці, що рухається паралельно твердій стінці (рис. 13.2), елементарну площину ΔS і визначимо дотичне напруження τ , яке виникає за рахунок пульсацій швидкостей u'_x, u'_y .

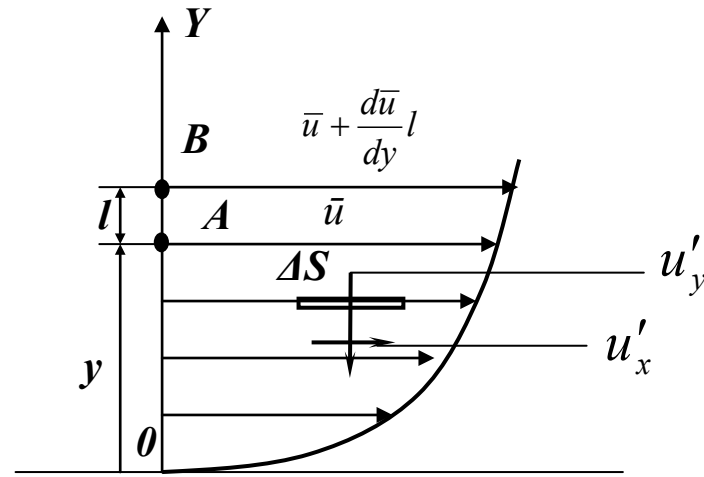


Рисунок 13.2 – Схема визначення в'язкого тертя при турбулентному русі

Через площину в перпендикулярному до потоку напрямку відбувається витрата рідини:

$$\Delta q_y = u'_x \Delta S. \quad (13.2)$$

Маса рідини, яка проходить через площину за час Δt , дорівнює:

$$\Delta m = \rho \Delta q_y \Delta t = \rho u'_y \Delta S \Delta t.$$

За рахунок складової пульсацій швидкості u'_x ця маса отримує збільшення кількості руху:

$$\Delta m u'_x = \rho u'_x u'_y \Delta S \Delta t.$$

Приріст кількості руху дорівнює імпульсу сили, тобто:

$$\Delta m u'_x = \Delta F \Delta t = \rho u'_x u'_y \Delta S \Delta t; \quad (13.3)$$

де сила $\Delta F = \tau \Delta S$, і тоді дотичне напруження буде дорівнювати:

$$\tau \Delta S \Delta t = \rho u'_x u'_y \Delta S \Delta t \Rightarrow \tau = \rho u'_x u'_y, \quad (13.4)$$

а його осереднене за часом значення можна записати у вигляді:

$$\bar{\tau} = \overline{\rho u'_x u'_y}. \quad (13.5)$$

Визначене таким чином дотичне напруження обчислити дуже важко за рахунок невідомих значень u'_x , u'_y , тому найчастіше розглядається наближений розв'язок.

Уявімо, що малий об'єм рідини, який знаходиться в точці A і має швидкість \bar{u} , в результаті турбулентного перемішування перемістився в точку B , розташовану на відстані l від точки A , та набув швидкості $\bar{u} + \frac{d\bar{u}}{dy} l$.

Будемо вважати, що пульсації швидкостей u'_x і u'_y пропорційні приросту швидкості розглянутого об'єму рідини, тобто:

$$u'_x \approx \frac{d\bar{u}}{dy} l, \quad u'_y \approx \frac{d\bar{u}}{dy} l. \quad (13.6)$$

Тоді τ можна подати у вигляді:

$$\tau = \overline{\rho u'_x u'_y} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2, \quad (13.7)$$

де коефіцієнт пропорційності врахований у величині l , знак τ збігається зі знаком похідної $\frac{d\bar{u}}{dy}$. Величина l носить назву шлях перемішування.

Останнє рівняння (13.7) зазвичай перетворюють до вигляду:

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \frac{d\bar{u}}{dy} \right) = C_T \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (13.8)$$

де C_T – коефіцієнт перемішування або коефіцієнт турбулентного обміну, який дорівнює:

$$C_T = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right). \quad (13.9)$$

Отримане рівняння (13.9) аналогічно рівнянню дотичного напруження при ламінарному режимі. Коефіцієнт C_T значно перевищує за величиною динамічну в'язкість μ і залежить від числа Рейнольдса.

13.2 Турбулентна течія в трубах

Незважаючи на те, що в загальному випадку турбулентний рух рідини є нестійким, якщо розглядати деякі усереднені за часом характеристики потоку, середню швидкість, середній розподіл швидкостей по перерізу, середній тиск, середні величини пульсацій, а також середнє значення витрати, то в багатьох випадках вони можуть виявитися постійними. Саме такі характеристики ми і будемо використовувати при описі турбулентних потоків.

Численними дослідженнями встановлено, що турбулентний потік, як правило, не контактує зі стінками труби, а займає лише центральну частину. Між стінками труби і турбулентним потоком існує тонкий шар рідини, рух в якому є ламінарним. Причому зовнішня частина цього шару, що контактує з поверхнею труби, нерухома (має нульову швидкість), а його внутрішня частина, яка безпосередньо взаємодіє з потоком, має швидкість, співрозмірну із середньою швидкістю рідини в цьому перерізі. Таким чином, турбулентний потік рухається ніби в трубі з ламінарним шаром тієї самої рідини. Товщина цього шару дуже мала. Її можна визначити за формулою:

$$\delta = \frac{32,5d}{\text{Re}\sqrt{\lambda_T}}, \quad (13.10)$$

де d – внутрішній діаметр труби, λ_T – коефіцієнт втрат на тертя при турбулентному режимі руху.

Можна вважати, що швидкість рідини всередині цього шару по товщині змінюється за лінійним законом. Треба так само відзначити, що число Рейнольдса $\text{Re}_{\text{лш}}$ (число Рейнольдса для ламінарного шару), обраховане за товщиною шару $\delta_{\text{лш}}$, швидкістю внутрішньої частини ламінарного шару $u_{\text{лш}}$ і кінематичним коефіцієнтом в'язкості ν , є величина постійна.

$$\text{Re}_{\text{лш}} = \frac{u_{\text{лш}} \delta_{\text{лш}}}{\nu} = \text{const}. \quad (13.11)$$

Ця величина має постійне значення для будь-яких турбулентних потоків. Тому при збільшенні швидкості потоку зростає швидкість ламінарного шару, а його товщина зменшується. При великих значеннях Re (великих швидкостях) ламінарний шар практично зникає.

13.3 Турбулентна течія в гладких трубах

Гладкі або точніше технічно гладкі труби – це такі, шорсткість внутрішніх поверхонь яких настільки мала, що практично не впливає на втрати енергії на тертя. До таких труб відносять:

- цільнотянуті труби з кольорових металів,
- труби з алюмінієвих сплавів,
- високоякісні сталеві безшовні труби,
- нові високоякісні чавунні труби,
- нові неоцинковані труби.

Переважно, труби, які використовуються в гідросистемах технологічного обладнання, можна віднести до технічно гладких.

Втрати напору при турбулентній течії рідини, як уже зазначалося раніше, можуть бути визначені за формулою Дарсі:

$$h_{mp} = \lambda_T \frac{l V^2}{d 2g}, \quad (13.12)$$

або у вигляді втрат на тертя:

$$\Delta P_{mp} = \rho \lambda_T \frac{l V^2}{d 2}. \quad (13.13)$$

Проте коефіцієнт втрат на тертя по довжині в цьому випадку буде значно більшим, ніж при ламінарному русі.

Причому сам коефіцієнт λ_T буде істотно залежати від числа Рейнольдса. Цю залежність можна подати у вигляді графіка (рис. 13.3).

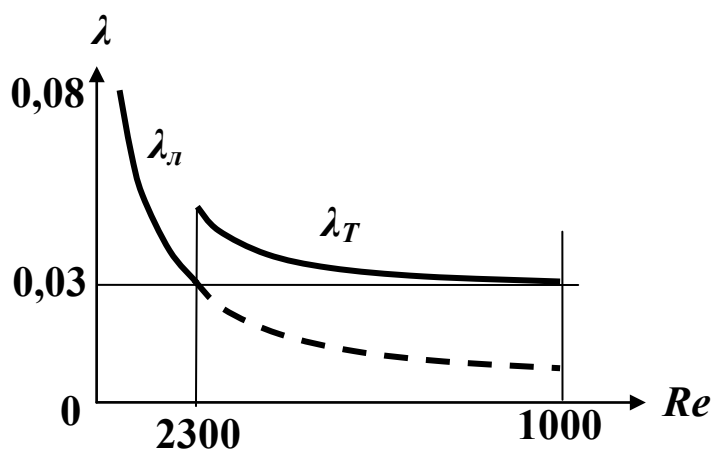


Рисунок 13.3 – Діаграма зміни коефіцієнта λ_T залежно від числа Re

Найбільш застосовуваними формулами для визначення λ_T є такі емпіричні і напівемпіричні залежності:

$$\lambda_T = \frac{1}{(1,8 \lg Re - 1,5)^2},$$

яка застосовується для чисел Рейнольдса в межах $2300 \div$ декілька мільйонів, або

$$\lambda_T = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}},$$

що використовується в інтервалі $2300 \div 100000$.

13.4 Турбулентна течія в шорстких трубах

Дослідження течії рідини в шорстких трубах практично повністю ґрунтуються на експериментальних дослідженнях. На їх результатах основані залежності і розрахункові формули, які застосовуються для визначення втрат енергії в подібних умовах. Основна формула для визначення втрат напора – формула Дарсі. Відмінність полягає лише в коефіцієнті втрат на тертя. На відміну від турбулентних потоків в гладких трубах, де коефіцієнт втрат на тертя повністю визначається числом Рейнольдса Re , для потоків в трубах, які мають шорсткі внутрішні поверхні λ_T , він залежить ще й від розмірів цієї шорсткості. Встановлено, що вирішальне значення має не абсолютна висота нерівностей (абсолютна шорсткість) k , а відношення висоти цих нерівностей до радіуса труби r_0 . Ця величина позначається k/r_0 і називається відносною шорсткістю. Одна і та сама абсолютна шорсткість може

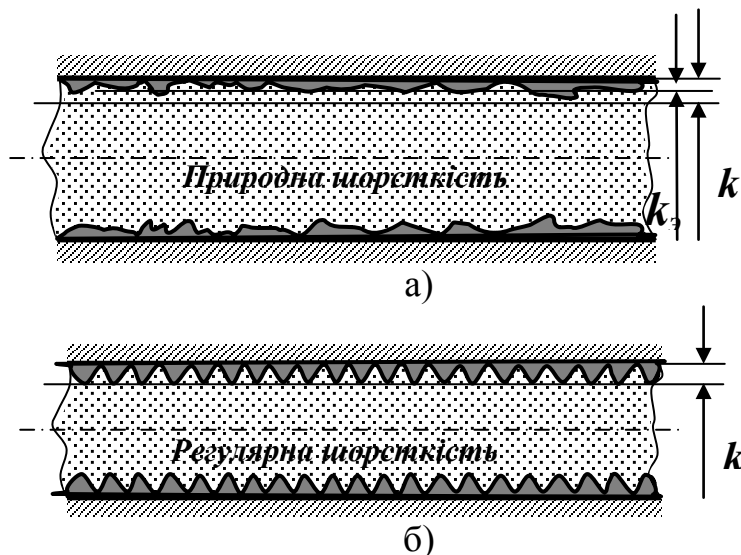


Рисунок 13.4 – Види шорсткостей труб:
а) природна; в) регулярна

регулярна шорсткість створюється штучно і характеризується тим, що має однакову висоту і форму нерівностей по всій довжині труби. Шорсткість такого виду називають рівномірно розподіленою зернистою шорсткістю. Коефіцієнт втрат на тертя в цьому випадку описується функцією:

$$\lambda_T = f\left(Re, \frac{k}{r_0}\right). \quad (13.4)$$

Експериментальним вивченням впливу числа Рейнольдса і відносної шорсткості займався Нікурадзе І. І., який проводив досліди для діапазонів

$$Re=500 \div 1000000 \text{ і } \frac{k}{r_0} = \frac{1}{500} \div \frac{1}{15}.$$

практично не впливати на коефіцієнт тертя в трубах великого діаметра, і істотно збільшувати опір в трубах малого діаметра. Крім того, на опір потоку рідини впливає характер шорсткості. За характером шорсткості поділяють на природну (рис. 13.4, а), при якій величина нерівностей k по довжині труби різна, і регулярну (рис. 13.4, б), при якій розміри нерівностей по всій трубі однакові.

Результати цих досліджень зведені до графіка в логарифмічних координатах (рис. 13.5).

$\lg(1000\lambda)$

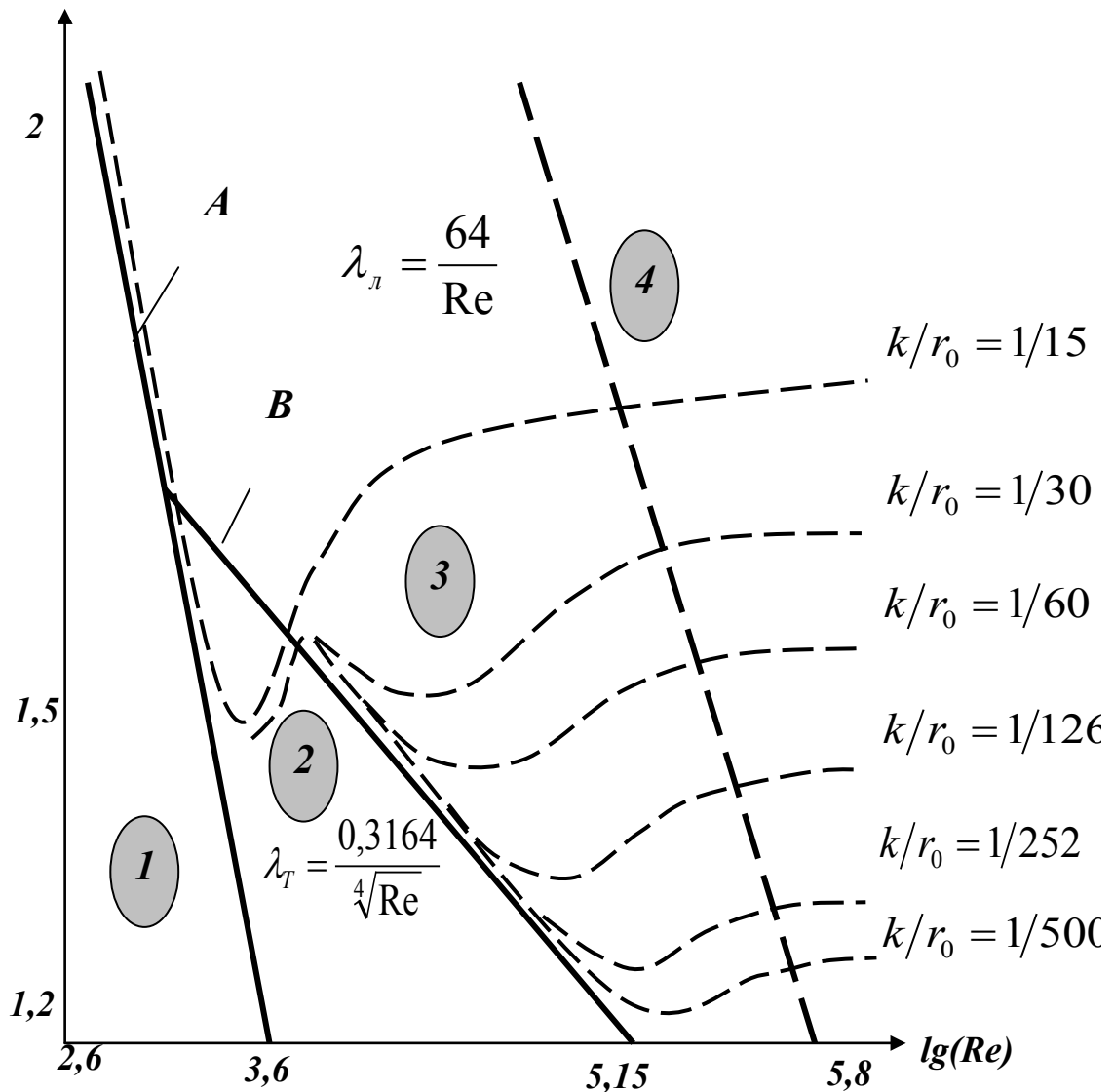


Рисунок 13.5 – Діаграми характеристики впливу числа Рейнольдса і відносної шорсткості

На графіку (див. рис. 13.5) цифрами позначені: 1 – зона ламінарного руху, де коефіцієнт λ_n розраховується за формулою $\lambda_n = \frac{64}{Re}$; 2 – зона турбулентного гладкого пристінного руху, коефіцієнт λ_T розраховується за формулою $\lambda_T = \frac{1}{(1,8 \lg Re - 1,5)^2}$ або $\lambda_T = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}$; 3 – зона так званого доквadraticного руху, де коефіцієнт λ_T обчислюється за формулою

$\lambda_T = 0,11 \left(\frac{K_E}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}$; 4 – зона квадратичного опору, де коефіцієнт λ_T обчислюємо за формулою $\lambda_T = 0,11 \left(\frac{K_E}{d} \right)^{0,25}$.

На практиці для визначення втрат напору в реальних шорстких трубах найчастіше використовують формулу Альдшуля:

$$\lambda_T = 0,1 \left(\frac{0,46 K_E}{d} + \frac{100}{\text{Re}} \right)^{0,25}.$$

У наведених вище формулах K_E еквівалентна абсолютна шорсткість в міліметрах (абсолютна шорсткість, яка еквівалентна регулярній шорсткості і визначається з таблиць), d – діаметр труби.

Із графіків Нікурадзе (див. рис. 13.5) можна зробити такі висновки:

- при ламінарній течії шорсткість практично не впливає на опір. Експеримент практично повністю підтверджується з теоретичних формул;
- критичне число Рейнольдса від шорсткості не залежить (пунктирні криві відхиляються від прямої A в одній точці);
- в області турбулентних течій, при невеликих числах Рейнольдса і малій шорсткості, опір від шорсткості не залежить (пунктирна лінія збігається з прямою B), а зі збільшенням Re опір зростає;
- при великих значеннях чисел Рейнольдса λ_T перестає залежати від Re і стає постійним для певної відносної шорсткості.

14 МІСЦЕВІ ГІДРАВЛІЧНІ ВТРАТИ

14.1 Місцеві гідравлічні опори

Місцевими гідравлічними опорами називаються будь-які ділянки гідравлічної системи, де є повороти, перешкоди на шляху потоку робочої рідини, розширення або звуження, що викликають раптову зміну форми потоку, швидкості або напрямку її руху. У цих місцях інтенсивно втрачається напір [19, 20]. Прикладами місцевих опорів можуть бути викривлення осі трубопроводу, зміни прохідних перерізів будь-яких гідравлічних апаратів, стики трубопроводів тощо. Втрати напору на місцевих опорах Δh_m визначаються за формулою Вейсбаха:

$$\Delta h_m = \xi_m \frac{V^2}{2g}, \quad (14.1)$$

де ξ_m – коефіцієнт місцевого опору.

Коефіцієнт місцевого опору залежить від конкретних геометричних розмірів місцевого опору і його форми. Через складність процесів, які відбуваються при русі рідини через місцеві опори, в більшості випадків його доводиться визначати на підставі експериментальних даних за допомогою формули:

$$\xi_m = \frac{\Delta h_m}{\frac{V^2}{2g}}. \quad (14.2)$$

Проте в деяких випадках величини коефіцієнтів місцевих опорів можна визначити аналітично.

З означення коефіцієнта ξ_m видно, що він враховує усі види втрат енергії потоку рідини на ділянці місцевого опору. Його фізичний зміст полягає в тому, що він показує частку швидкісного напору, що витрачається на подолання цього опору.

Коефіцієнти різних опорів можна знайти в гідравлічних довідниках. У тому випадку, коли місцеві опори знаходяться на відстані, меншій $(25 \div 50)d$ один від одного (d – діаметр трубопроводу, що з'єднує місцеві опори), досить імовірним є їхній взаємний вплив один на одного, а їхні дійсні коефіцієнти місцевих опорів будуть відрізнятися від табличних. Такі опори потрібно розглядати як єдиний складний опір, коефіцієнт ξ_m якого визначається тільки експериментально. Потрібно відзначити, що через взаємовплив місцевих опорів, розташованих один поблизу одного в потоці, в багатьох випадках сумарна втрата напору не дорівнює простій сумі втрат напору на кожному з цих опорів.

Місцеві втрати напору можна виразити як через швидкісний напір, який відповідає швидкості до перешкоди в потоці, так і через швидкісний напір, що підрахований за швидкістю після цієї перешкоди. Зазвичай в формулу Вейсбаха підставляють середню швидкість за перешкодою V_2 і в

довідниках наводять коефіцієнт місцевих опорів відносно швидкісного напору $\frac{V_2^2}{2g}$. Іноді коефіцієнти місцевих втрат подаються в довідниках для

швидкісного напору $\frac{V_1^2}{2g}$, де V_1 – середня швидкість до перешкоди. Цю обставину необхідно врахувати при використанні довідників.

З огляду на умову нерозривності потоку, можна знайти співвідношення між коефіцієнтами місцевих опорів, визначених відносно різних швидкісних напорів (до і після опору). Зрозуміло, що при постійній витраті Q , швидкості в двох перерізах відносяться обернено пропорційно до площ живих перетинів. Тоді, якщо одну і ту саму місцеву втрату напорів виразити через середні швидкості до перешкоди V_1 і після неї V_2 , то отримаємо:

$$\Delta h_M = \xi_M^{до} \frac{V_1^2}{2g} = \xi_M^{після} \frac{V_2^2}{2g}, \quad (14.3)$$

Якщо виразити відношення між по-різному визначеними коефіцієнтами, будемо мати:

$$\frac{\xi_M^{до}}{\xi_M^{після}} = \frac{V_1^2}{V_2^2} \quad \text{або} \quad \frac{\xi_M^{до}}{\xi_M^{після}} = \frac{\left(\frac{Q}{\omega_1}\right)^2}{\left(\frac{Q}{\omega_2}\right)^2} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2, \quad (14.4)$$

де ω_1 і ω_2 – площі живих перерізів до і після перешкод, відповідно.

Відзначимо, що для більшості місцевих опорів їх коефіцієнт ξ_M не залежить від числа Рейнольдса при $Re > 5000$. При менших значеннях числа Re коефіцієнт ξ_M збільшується.

14.2 Види місцевих опорів

14.2.1 Миттєве розширення. Теорема Борда-Карно

У цьому випадку, одному з небагатьох, вираз для втрати напорів можна знайти теоретичним шляхом.

При раптовому розширенні потоку в трубі від перерізу 1 до перерізу 2 рідина не тече по всьому контуру стінок, а рухається по плавних лініях токів (рис. 14.1). Поблизу стінок, де раптово збільшується діаметр труби, утворюється простір, в якому рідина знаходиться в інтенсивному обертальному русі. При такому інтенсивному перемішуванні відбувається дуже активне тертя рідини об тверді стінки труби, об основне русло потоку, а також тертя всередині обертаних потоків, внаслідок чого відбуваються істотні втрати енергії. Крім того, якась частина енергії рідини витрачається на фазовий перехід частинок рідини з основного потоку у обертальний і навпаки. На рисунку 14.1 видно, що показання п'єзометра в другому перерізі білі, ніж в першому. Тоді постає питання,

про які втрати йде мова? Справа в тому, що свідчення п'єзометра залежать не тільки від втрат енергії, а й від величини тиску. А тиск у другому перерізі стає більшим через зменшення швидкісного напору за рахунок розширення потоку і зменшення швидкості. У цьому випадку потрібно враховувати, що якщо б не було втрат напору на місцевому опорі, то висота рідини в другому п'єзометрі була б ще більшою.

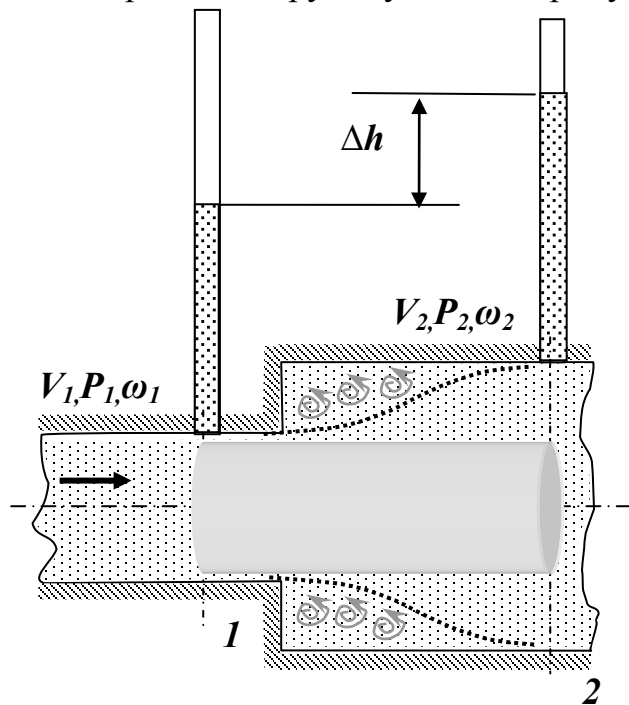


Рисунок 14.1 – Схема визначення втрат напору при миттєвому розширенні потоку

зах, що діють на однакові за розміром торцеві площі $\omega_1 = \omega_2$. (Зміною тиску по висоті потоку в трубі і силами тертя через малі розміри ділянки нехтуємо). Різниця цих сил становить:

$$(P_1 - P_2)\omega_1. \quad (14.5)$$

Цьому імпульсу відповідає секундна зміна кількості руху рідини, що втікає в розглянутий об'єм і витікає з нього. Якщо вважати, що швидкості по перерізах розподілені рівномірно, отримаємо:

$$Q\rho V_2 - Q\rho V_1 = Q\rho(V_2 - V_1). \quad (14.6)$$

Прирівнюємо імпульс сил і зміну кількості руху за теоремою про зміну кількості руху:

$$(P_1 - P_2)\omega_2 = Q\rho(V_2 - V_1). \quad (14.7)$$

Розділимо рівняння (14.7) на ω_2 і врахуємо, що $Q = \omega_2 V_2$:

$$(P_1 - P_2)\frac{\omega_2}{\omega_2} = \frac{\omega_2 V_2}{\omega_2} \rho(V_2 - V_1) = \rho(V_2^2 - V_1 V_2). \quad (14.8)$$

Втрата напору, що виникає при раптовому розширенні, може бути знайдена за допомогою рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини, записаного для перерізів 1 і 2, де рух основного потоку займає весь переріз труби, який матиме вигляд:

$$\Delta h_m = \left(\frac{P_1}{g\rho} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} \right) - \left(\frac{P_2}{g\rho} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} \right)$$

Застосуємо теорему механіки про зміну кількості руху до виділеного циліндричного об'єму, який знаходиться між перерізами 1 і 2, яка дорівнює імпульсу зовнішніх сил, що діють на цей об'єм в напрямку його руху. Цими силами будуть сили тиску P_1 і P_2 у відповідних перері-

Далі зробимо скорочення, замінивши величину V_2^2 сумою $\frac{1}{2}V_2^2 + \frac{1}{2}V_2^2$.

Штучно додамо в праву частину і одразу ж віднімемо величину $\frac{1}{2}V_1^2$:

$$P_1 - P_2 = \rho \left(\frac{1}{2}V_2^2 + \frac{1}{2}V_2^2 - V_1V_2 + \frac{1}{2}V_1^2 - \frac{1}{2}V_1^2 \right). \quad (14.9)$$

Перегрупуємо члени в правій частині рівності (14.9):

$$P_1 - P_2 = \rho \left(\frac{1}{2}V_2^2 - V_1V_2 + \frac{1}{2}V_1^2 \right) + \rho \frac{1}{2}V_2^2 - \rho \frac{1}{2}V_1^2. \quad (14.10)$$

Зауважимо, що величина в дужках (14.10) може бути спрощена:

$$\frac{1}{2}V_2^2 - V_1V_2 + \frac{1}{2}V_1^2 = \frac{1}{2}(V_2^2 - 2V_1V_2 + V_1^2) = \frac{1}{2}(V_2 - V_1)^2. \quad (14.11)$$

Провівши заміну в (14.11), отримаємо:

$$P_1 - P_2 = \rho \frac{1}{2}(V_2 - V_1)^2 + \rho \frac{1}{2}V_2^2 - \rho \frac{1}{2}V_1^2. \quad (14.12)$$

Після перегрупування членів в (14.12) отримаємо:

$$P_1 + \rho \frac{1}{2}V_1^2 = P_2 + \rho \frac{1}{2}V_2^2 + \rho \frac{1}{2}(V_2 - V_1)^2. \quad (14.13)$$

Розділимо всі члени рівності на ρg :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{\rho}{\rho g} \frac{1}{2}V_1^2 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\rho}{\rho g} \frac{1}{2}V_2^2 + \frac{\rho}{\rho g} \frac{1}{2}(V_2 - V_1)^2. \quad (14.14)$$

Остаточну рівняння (14.14) набуде вигляду:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{(V_2 - V_1)^2}{2g}. \quad (14.15)$$

Порівняємо отримане рівняння з вихідним рівнянням для Δh_M , отриманим з рівняння Бернуллі: $\Delta h_M = \left(\frac{p_1}{g\rho} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} \right) - \left(\frac{p_2}{g\rho} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} \right)$.

Якщо допустити, що форма епюр швидкостей в першому і другому перерізах однакова, тобто $\alpha_1 = \alpha_2$ і їх значення наближаються до одиниці, оскільки потік турбулентний, і поміняти місцями V_1 і V_2 , $(V_1 - V_2)^2 = (V_2 - V_1)^2$, то з порівняння останніх рівнянь можна отримати, що:

$$\Delta h_M = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}. \quad (14.16)$$

Назвавши різницю $(V_1 - V_2)$ втраченою швидкістю, можна сказати, що втрата напору при раптовому розширенні дорівнює швидкісному напору, визначеному за втраченою швидкістю. Це твердження називається теоремою Борда-Карно.

Останню формулу можна переписати у вигляді:

$$\Delta h_m = \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g} \quad \text{або} \quad \Delta h_m = \left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g}. \quad (14.17)$$

З урахуванням того, що на основі рівняння нерозривності потоку $\omega_1 V_1 = \omega_2 V_2$, ті самі втрати напору (14.17) можна подати у вигляді:

$$\Delta h_m = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g} \quad \text{або} \quad \Delta h_m = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g}. \quad (14.18)$$

Порівнюючи останні вирази (14.18), за формулою Вейсбаха $\Delta h_m = \xi_m \frac{V^2}{2g}$ можна виділити вирази для коефіцієнта місцевого опору при миттєвому розширенні потоку:

$$\xi_m = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2, \quad \text{якщо } \Delta h_m \text{ визначати за швидкістю } V_1;$$

$$\xi_m = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2, \quad \text{якщо } \Delta h_m \text{ визначати за швидкістю } V_2.$$

14.2.2 Миттєве звуження потоку

При раптовому звуженні, так само як і при раптовому розширенні потоку, створюються об'єми із завихреннями обертаної рідини, які утворюються в пристінному об'ємі широкої частини труби (рис. 14.2). Такі ж завихрення утворюються на початку вузької частини труби за рахунок того, що при вході в неї (вузьку частину) рідина продовжує деякий час рухатися за інерцією в напрямку центра труби, і основне русло потоку ще деякий час продовжує звужуватися. Отже, при миттєвому звуженні потоку виникає ніби два йдучих один за одним місцевих опори – місцевий опір за рахунок звуження основного русла і відразу ж за ним місцеве розширення, вже розглянуте вище. З урахуванням цього втрати напору при миттєвому звуженні набудуть вигляду:

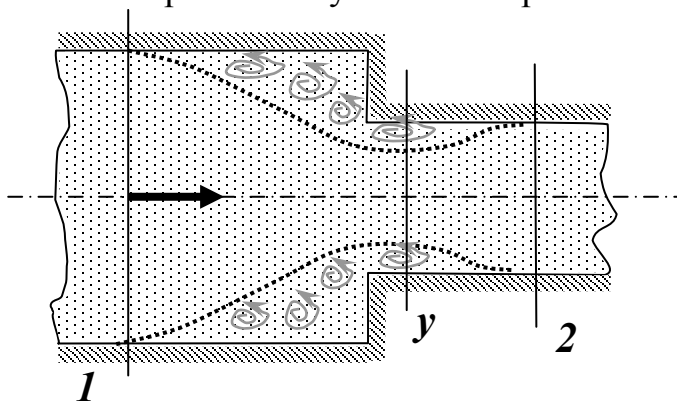


Рисунок 14.2 – Схема визначення втрат напору при миттєвому звуженні потоку

хунок звуження основного русла і відразу ж за ним місцеве розширення, вже розглянуте вище. З урахуванням цього втрати напору при миттєвому звуженні набудуть вигляду:

$$\Delta h_m = \xi'_m \frac{V_y^2}{2g} + \frac{(V_y - V_2)^2}{2g} = \xi_m \frac{V_2^2}{2g}, \quad (14.19)$$

де ξ'_m – коефіцієнт місцевого опору за рахунок звуження потоку, V_y – середня швидкість потоку в найвужчому місці основного русла (в перерізі у), V_2 – середня швидкість потоку в перерізі 2.

Для практичних розрахунків найчастіше користуються такою напівемпіричною формулою:

$$\xi_m = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right), \quad (14.20)$$

де n – ступінь звуження труби.

14.2.3 Поступове розширення потоку

Поступове розширення труби називається дифузором (рис. 14.3). Рух рідини в дифузорі супроводжується зменшенням швидкості та підвищенням тиску. Частинки рідини рухаються вперед, в сторону більш високого тиску, по інерції за рахунок своєї кінетичної енергії, яка зменшується у напрямку руху. Крім того, за рахунок розширення труби частинки рідини рухаються не тільки уздовж осі потоку, але й у напрямку від осі до стінок. В якомусь перерізі інерція рідини зменшується настільки, що її не вистачає для подолання підвищеного тиску. Тоді такі частинки рідини зупиняються або навіть починають рухатися в зворотному напрямку. У результаті виникають вихрові потоки і потоки, які відриваються від стінки.

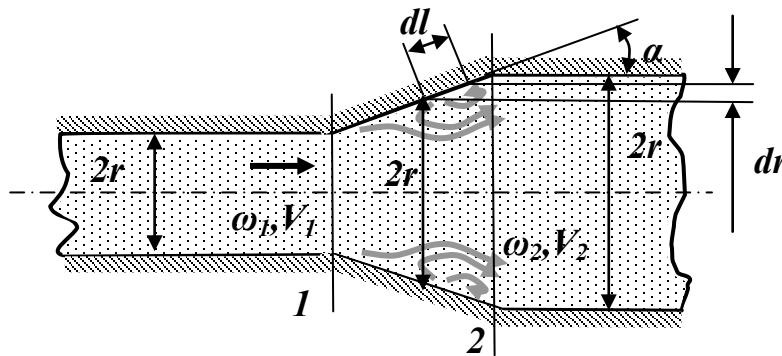


Рисунок 14.3 – Схема визначення втрат напору при поступовому розширенні потоку

Такі явища залежать від швидкості та інтенсивності розширення потоку. Крім того, в дифузорі відбуваються звичайні втрати на тертя, подібні до втрат по довжині в трубах постійного перерізу. Таким чином, втрати енергії в дифузорі складаються з втрат на тертя по довжині і втрат на вихороутворення за рахунок розширення:

$$\Delta h_M = \Delta h_{тр} + \Delta h_{розширення} \quad (14.21)$$

Для визначення цих величин розглянемо круглий дифузор з кутом відхилення стінки від осі α і параметрами, наведеними на рисунку 14.3. Визначимо втрати на тертя на довільній елементарній ділянці дифузора довжиною dl . Збільшення радіуса дифузора на цій ділянці становитиме dr . З урахуванням цього:

$$dl = \frac{dr}{\sin \alpha}. \quad (14.22)$$

Тоді втрати енергії на цій елементарній ділянці за формулою Дарсі будуть:

$$dh_{mp} = \lambda_T \frac{dl}{2dr} \frac{V^2}{2g}. \quad (14.23)$$

З умови сталості витрати можна записати:

$$\omega_1 V_1 = \omega V = \pi r_1^2 V_1 = \pi r^2 V. \quad (14.24)$$

Із (14.24), виразивши V , отримаємо:

$$V = V_1 \left(\frac{r_1}{r} \right)^2, \quad (14.25)$$

де V і r – відповідно швидкість рідини і радіус дифузора на початку довільно обраної ділянки дифузора dl . Їх можна розглядати як поточні значення параметрів.

Підставивши отримані вирази в формулу (14.23) для dh_{mp} , отримаємо:

$$dh_{mp} = \lambda_T \frac{dr}{2r \sin \alpha} \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \frac{V_1^2}{2g} = \lambda_T \frac{dr}{2 \sin \alpha} \frac{V_1^2}{2g} r_1^4 \left(\frac{1}{r^5} \right). \quad (14.26)$$

Після інтегрування за радіусом в межах від r_1 до r_2 будемо мати:

$$\begin{aligned} dh_{mp} &= \lambda_T \frac{1}{2 \sin \alpha} \frac{V_1^2}{2g} r_1^4 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^5} dr = \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \frac{V_1^2}{2g} r_1^4 \frac{1}{r^4} \Big|_{r_1}^{r_2} = \\ &= \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \frac{V_1^2}{2g} r_1^4 \left(-\frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^4} \right) = \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \frac{V_1^2}{2g} r_1^4 \left(-\frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^4} \right) = \\ &= \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \left(1 - \frac{r_1^4}{r_2^4} \right) \frac{V_1^2}{2g} \end{aligned} \quad (14.27)$$

Якщо врахувати, що:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = n, \quad (14.28)$$

де n – ступінь звуження дифузора, то формулу втрат на тертя в дифузори (14.27) можна переписати у вигляді:

$$dh_{mp} = \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \left(1 - \frac{r_1^4}{r_2^4} \right) \frac{V_1^2}{2g} = \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{V_1^2}{2g}. \quad (14.29)$$

Другий доданок у формулі втрат напору в дифузори (14.29) є втрати енергії на розширення потоку. Ці втрати схожі на втрати при раптовому розширенні $\Delta h_m = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2$, проте мають дещо меншу величину, тому в формулу (14.29) для їх визначення вводять поправковий коефіцієнт k .

Числове значення цього коефіцієнта можна визначити за формулою Ідельчика [14, 19, 20]:

$$k = 3,2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}, \quad (14.30)$$

Або приблизно за формулою Флінгера:

$$k = \sin 2\alpha. \quad (14.31)$$

Остаточно формула для визначення втрат напору в дифузорі набуде вигляду:

$$\Delta h_m = \left[\frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + k \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \right] \frac{V_1^2}{2g}. \quad (14.32)$$

Порівнюючи цей вираз з формулою Вейсбаха, легко виявити коефіцієнт втрат на місцевому опорі, який для дифузора буде дорівнювати:

$$\xi_m = \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + k \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2. \quad (14.33)$$

14.2.4 Поступове звуження потоку

Такий опір являє собою конічну трубку зі звуженням – конфузор (рис. 14.4). Течія в конфузорі супроводжується поступовим збільшенням швидкості і одночасним зниженням тиску. З цієї причини умови для вихороутворення на конічній поверхні відсутні. Втрати в цій частині місцевого опору відбуваються тільки за рахунок тертя. Вихороутворення може відбуватися тільки у вузькій частині труби. Його природа аналогічна природі подібного вихору при раптовому звуженні потоку, проте величина істотно менша [4, 8]. У більшості робіт з гідравліки вказується, що ця величина настільки незначна порівняно з втратами на тертя в конічній частині конфузора, що нею можна знехтувати.

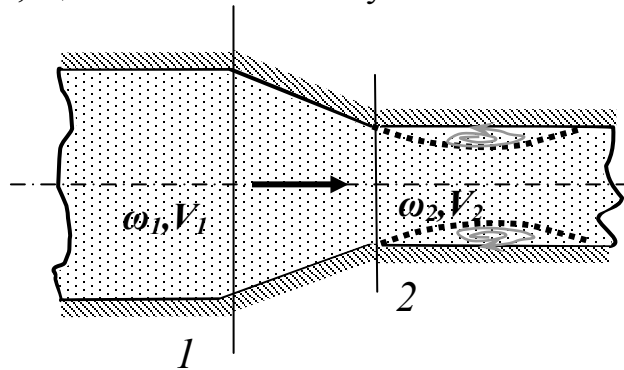


Рисунок 14.4 – Схема визначення втрат напору при поступовому звуженні потоку

З урахуванням сказаного, величину цих втрат можна визначити за формулою, виведення якої аналогічне виведенню формули втрат на тертя в дифузорі (14.33). Вона має вигляд:

$$\Delta h_m = \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{V_2^2}{2g}. \quad (14.34)$$

Вираз для визначення коефіцієнта втрат на тертя в конфузорі матиме вигляд:

$$\xi_{\text{м}} = \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (14.35)$$

14.2.5 Раптовий поворот потоку

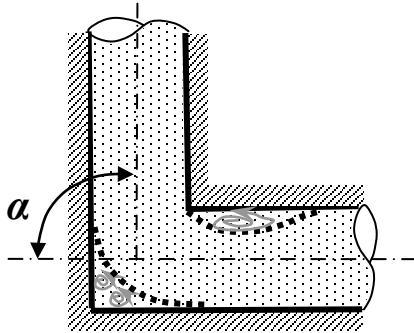


Рисунок 14.5 – Схема визначення втрат напору при раптовому повороті потоку

Такий місцевий опір зазвичай називається коліном і дуже сильно впливає на втрати напору. У ньому відбувається відрив потоку від стінки труби і створюються дві складні вихрові зони, в яких інтенсивно втрачається енергія. Ступінь інтенсивності істотно залежить від кута повороту α . Коефіцієнт місцевого опору значно зростає зі збільшенням кута повороту, і його можна визначити за емпіричною формулою:

$$\xi_{\text{м}} = 0,95 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + 2,05 \sin^4 \left(\frac{\alpha}{2} \right). \quad (14.36)$$

У гідросистемах подібних місцевих опорів рекомендується уникати.

14.2.6 Плавний поворот потоку

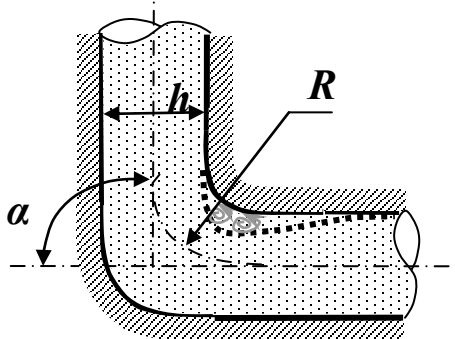


Рисунок 14.6 – Схема визначення втрат напору при плавному повороті потоку

Поступовий поворот труби (відведення або закруглене коліно) значно зменшує вихороутворення і, отже, втрати енергії. Величина втрат істотно залежить від відношення R/d і кута α (рис. 14.6).

Коефіцієнт місцевого опору для плавного повороту можна визначити за експериментальними формулами. Для повороту під кутом 90° і $R/d > 1$ він дорівнює:

$$\xi_{\text{м}}^{90^\circ} = 0,51 + 0,19 \frac{d}{R}; \quad (14.37)$$

для кута повороту більше 100° :

$$\xi_{\text{м}} = \left(0,7 + 0,35 \frac{\alpha^0}{90^0} \right) \xi_{\text{м}}^{90^\circ}; \quad (14.38)$$

для кута повороту менше 70° :

$$\xi_{\text{м}} = 0,9 \sin \alpha \xi_{\text{м}}^{90^\circ}. \quad (14.39)$$

15 КРИТЕРІЇ ПОДІБНОСТІ

У процесі проектування різних гідросистем, трубопроводів, гідротехнічних споруд, гідравлічних і газових систем хімічних та нафтохімічних підприємств нерідко виникає необхідність не тільки математичного, але й натурного моделювання. У такому випадку необхідно, щоб робота гідросистеми діючої моделі відповідала функціонуванню реального об'єкта. Це означає, що різні характеристики потоків рідини, які мають місце в моделі і в реальній системі, мають описуватися однаковими закономірностями, хоча їхні числові значення можуть суттєво відрізнятись. У натурній моделі вони менші (як правило) або більші (зустрічається рідше), ніж в дійсності. Для цього необхідно мати критерії, які дозволяють «масштабувати» реальну систему. Ці критерії встановлюються в теорії подібності потоків рідини.

15.1 Основи теорії подібності, геометрична і динамічна подібність

Гідродинамічна подібність – це подібність потоків нестисливої рідини, що враховує в собі подібність геометричну, кінематичну і динамічну.

З геометрії відомо, що геометрична подібність означає пропорційну подібність розмірів і рівність відповідних кутів. У гідравліці під геометричною подібністю розуміють подібність тих поверхонь, які обмежують потоки рідини. Таким чином, в гідравліці геометрична подібність означає подібність русел або трубопроводів, по яких тече рідина (рис. 15.1).

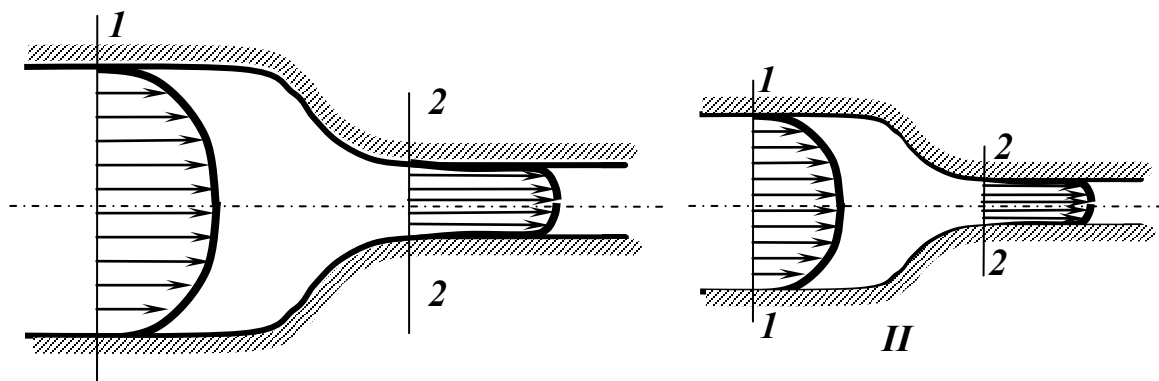


Рисунок 15.1 – Схема геометричної подібності в гідравліці

Кінематична подібність – це подібність ліній струму і пропорційно подібних швидкостей. Це означає, що для кінематичної подібності потоків необхідним є дотримання геометричної подібності.

Динамічна подібність полягає в пропорційності сил, що діють на подібні елементи кінематичних і геометричних подібних потоків, і однаковість кутів, що характеризують напрямок дії цих сил.

У потоках рідин (в нашому випадку в трубопроводах, в гідромашинах тощо) зазвичай діють різні сили – сили тиску, сили в'язкого тертя, сили

тяжіння, інерційні сили. Дотримання пропорційності усіх сил, діючих в потоці, і є гідродинамічною подібністю.

На практиці повна гідродинамічна подібність досягається рідко, тому зазвичай доводиться обмежуватися частинною (неповною) гідродинамічною подібністю, при якій є пропорційність лише основних сил.

Записується подібність таким чином. Наприклад, пропорційність сил тиску P і сил тертя T , що діють в потоках I і II , можна записати у вигляді:

$$\left(\frac{P}{T}\right)_I = \left(\frac{P}{T}\right)_{II}. \quad (15.1)$$

15.2 Критерії подібності для потоків нестисливої рідини

15.2.1 Критерії подібності Ньютона

У подібних потоках сили, з якими потік впливає на перешкоди – тверді стінки, лопаті гідромашин, тіла, що обтікаються потоком, та інші перешкоди, мають бути пропорційними. Цими силами є сили інерції рухомої рідини, які пропорційні добутку динамічного тиску $\frac{\rho V^2}{2}$ на перешкоду при площі взаємодії S .

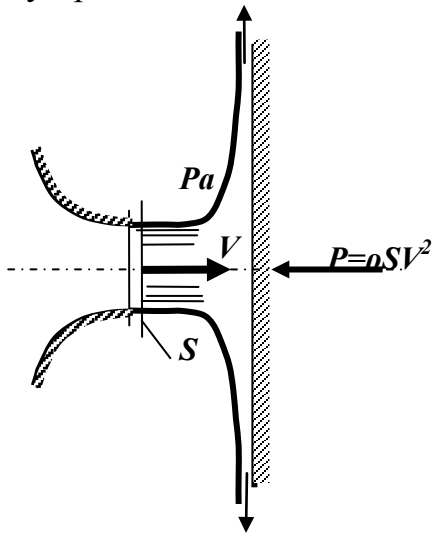


Рисунок 15.2 – Розрахункова схема потоку рідини, який взаємодіє із стінкою

Розглянемо, як потік рідини наштовхується на безмежну стінку, встановлену нормально до нього, і в результаті, розтікаючись по ній, змінює свій напрямок на 90° (рис. 15.2). На основі теореми механіки про кількість руху секундний імпульс сили I_F , з якого потік діє на стінку, дорівнює:

$$I_F = \rho QV = \rho V^2 S, \quad (15.2)$$

де ρ – густина рідини, Q – секундна витрата рідини, V – середня швидкість рідини, S – площа впливу струменя на перешкоду.

Це і є сила взаємодії із перешкодою. Для подібних потоків I і II має виконуватися така рівність:

$$\frac{F_I}{F_{II}} = \frac{(\rho V_{cp}^2 S)_I}{(\rho V_{cp}^2 S)_{II}}, \quad (15.3)$$

або

$$\left(\frac{F}{(\rho V_{cp}^2 S)}\right)_I = \left(\frac{F}{(\rho V_{cp}^2 S)}\right)_{II} = Ne. \quad (15.4)$$

Останнє співвідношення однакове для подібних потоків і називається числом Ньютона, позначається Ne .

15.2.2 Критерії подібності Ейлера

Спочатку розглянемо найбільш простий випадок – напірний рух ідеальної рідини, тобто такий рух, при якому відсутні сили в'язкості. Для заданого випадку рівняння Бернуллі для перерізів 1–1 і 2–2 буде мати вигляд:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}. \quad (15.5)$$

З умови нерозривності потоку витрати в перерізах 1–1 і 2–2 із відповідними площами ω_1 і ω_2 однакові, а це означає, що:

$$V_1 \omega_1 = V_2 \omega_2, \quad (15.6)$$

звідки

$$V_1 = V_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (15.7)$$

Підставивши останнє співвідношення (15.7) в рівняння Бернуллі, після перенесення членів отримаємо:

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{1}{2g} \left(V_2^2 - V_2^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \right). \quad (15.8)$$

Після очевидних перетворень і скорочень в (15.6) прийдемо до рівняння виду:

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho \frac{V_2^2}{2}} = 1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}. \quad (15.9)$$

Якщо два потоки геометрично подібні, то праві частини рівняння для обох мають одне і те саме значення, отже, ліві частини теж однакові, тобто різниці тисків в перетинах 1–1 і 2–2 пропорційні динамічним тискам:

$$\left(\frac{\Delta P}{\rho V^2} \right)_I = \left(\frac{\Delta P}{\rho V^2} \right)_{II}. \quad (15.10)$$

Таким чином, при напірному русі ідеальної нестисливої рідини для забезпечення гідродинамічної подібності достатньо однієї геометричної подібності [13–18]. Безрозмірна величина, що являє собою відношення різниці тисків до динамічного тиску (або різниці п'єзометричних висот до швидкісної висоти), називається коефіцієнтом тиску або числом Ейлера і позначається Eu .

У разі напірного руху в наведених рівняннях P_1 , P_2 , ΔP можна розуміти як повний тиск (на рідину діє також сила тяжіння, але в напірних потоках її дія проявляється через тиск, тобто вона зводиться лише до відповідної зміни тиску за рахунок глибини потоку), тому що при високому тиску величина тиску, що залежить від глибини потоку, неспіврозмірно мала, і ве-

личина гідростатичного напору практично повністю визначається надлишковим тиском. Отже, для Eu можна записати:

$$Eu = 2 \frac{g(\Delta P)}{\rho g V^2} = 2 \frac{g \Delta H_{cm}}{V^2}, \quad (15.11)$$

де ΔH_{cm} – різниця статичних напорів.

15.2.3 Критерії подібності Рейнольдса

Подивимося, яку умову мають задовольняти ті самі геометрично і кінематично подібні потоки для того, щоб було забезпечено їх гідродинамічну подібність за наявності сил в'язкості, а, отже, і втрат енергії, тобто за якої умови числа Eu будуть однаковими для цих потоків.

Рівняння Бернуллі для цього випадку набуде вигляду:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \xi \frac{V_2^2}{2g} \quad (15.12)$$

або за аналогією з попередніми міркуваннями, врахувавши, що $V_i = \frac{Q_i}{\omega_i}$,

можна записати:

$$\frac{(P_1 - P_2)}{\rho \frac{V_2^2}{2}} = Eu = \alpha_2 - \alpha_1 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + \xi. \quad (15.13)$$

Як видно з останнього рівняння (15.13), числа Eu матимуть однакові значення для розглянутих потоків, а самі потоки будуть подібні один одному гідродинамічно за умови рівності коефіцієнтів опору (рівність коефіцієнтів α_1 і α_2 для подібних перерізів двох потоків впливає із їх кінематичної подібності). Таким чином, коефіцієнти опорів ξ в подібних потоках мають бути однаковими, а це означає, що втрати напору для подібних ділянок пропорційні швидкісному напору.

$$\left(\frac{h_{1-2}}{V_2^2} \right)_I = \left(\frac{h_{1-2}}{V_2^2} \right)_{II}. \quad (15.14)$$

Розглянемо дуже важливий в гідравліці випадок руху рідини – рух з тертям в циліндричній трубі, для якого коефіцієнт тертя можна описати формулою:

$$\xi = \lambda \frac{l}{d}. \quad (15.15)$$

Для геометрично подібних потоків співвідношення l/d однакове, отже, умовою гідродинамічної подібності в такому випадку є однакове значення

для цих потоків коефіцієнта λ . Він виражається через напруження тертя τ_0 на стінці і динамічний тиск, як було встановлено раніше, в такий спосіб:

$$\lambda = \frac{4\tau_0}{\rho \frac{V^2}{2}}. \quad (15.16)$$

Отже, для двох подібних потоків I і II можна записати:

$$\left(\frac{\tau_0}{\rho V^2} \right)_I = \left(\frac{\tau_0}{\rho V^2} \right)_{II} = k, \quad (15.17)$$

тобто напруження тертя пропорційні динамічним тискам.

З огляду на закон тертя Ньютона і той факт, що в останніх рівняннях $V = V_{cp}$, попередні відношення, які дорівнюють k , можна виразити:

$$k = \frac{\mu \left(\frac{dV}{dy} \right)_{y=0}}{\rho V_{cp}^2}, \quad (15.18)$$

де індекс $y=0$ означає, що похідна взята при $y=0$, тобто біля стінки труби. При цьому зауважимо, що закон тертя Ньютона можна застосовувати лише при ламінарному потоці. Проте, як було показано вище, при турбулентному потоці в трубах поблизу стінок утворюється тонкий ламінарний шар, всередині якого справедливий закон тертя Ньютона. Тому напруження тертя τ_0 на стінці може визначатися за цим законом також і при турбулентному русі.

Після множення і ділення на діаметр труби d та перегрупування множників отримаємо:

$$k = \left(\frac{dV}{dy} \right)_{y=0} \frac{d}{V_{cp}} \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{V_{cp} d} = \left[\frac{d \left(\frac{V}{V_{cp}} \right)}{d \left(\frac{y}{d} \right)} \right]_{y=0} \frac{v}{V_{cp} d} = C \frac{v}{V_{cp} d}. \quad (15.19)$$

У виразі (15.19) літерою C позначено вираз в квадратних дужках, що являє собою безрозмірний градієнт швидкості поблизу стінки.

Для кінематично подібних потоків величина C однакова, тому після скорочення на C вираз (15.19) умову динамічної подібності потоків перепишемо у вигляді:

$$\left(\frac{v}{V_{cp} d} \right)_I = \left(\frac{v}{V_{cp} d} \right)_{II}. \quad (15.20)$$

або, переходячи до обернених величин:

$$\text{Re}_I = \text{Re}_{II}. \quad (15.21)$$

У цьому полягає критерій подібності Рейнольдса, який можна сформулювати таким чином: для гідродинамічної подібності геометрично і кінематично подібних потоків з урахуванням сил в'язкості необхідна однаковість чисел Рейнольдса, підрахованих для будь-якої пари подібних перерізів цих потоків.

15.2.4 Критерій подібності Фруда

У тих випадках, коли рух рідини є безнапірним і відбувається під дією різниці нівелірних висот, умова подібності потоків описується інакше, за допомогою іншого критерію подібності – числа Фруда. Цей критерій враховує пропорційність у відношеннях сил інерції до сил тяжіння. Проте для переважної більшості задач, які нас цікавлять в галузі машинобудування, цей критерій не має значення і розглядатися не буде.

15.2.5 Висновок про подібність напірних потоків

Отже, в подібних напірних потоках маємо рівність безрозмірних коефіцієнтів і чисел α , ζ , λ , Eu , Re , Ne . Зміна Re означає, що змінюється співвідношення основних сил в потоці, через що зазначені коефіцієнти можуть також дещо змінюватись. Тому всі коефіцієнти потрібно розглядати як функції Re хоча в деяких інтервалах Re вони можуть залишатись постійними).

16 ВИТІКАННЯ РІДИНИ З ОТВОРІВ І НАСАДОК

Витікання рідини з отворів і насадок (коротких трубок різної форми і перерізів) характерно тим, що у такому процесі потенціальна енергія рідини на дуже короткій відстані і за дуже короткий час перетворюється на кінетичну енергію потоку (або крапель у загальному випадку). При цьому відбуваються деякі, великі або не дуже, втрати напору. Подібні режими течії рідини виникають при витіканні рідини з резервуарів, баків, котлів в атмосферу або простір, заповнений рідиною. Аналогічні явища відбуваються при протіканні рідини через малі отвори і щілини в напрямної, контрольної та регулювальної апаратури різних гідравлічних систем.

Основне питання, на яке необхідно знайти відповідь, полягає в тому, як визначити витрату і швидкість витікання через отвори або насадки різної форми.

16.1 Стиснення потоку

При витіканні рідини з резервуара через отвір у тонкій стінці, діаметр якого значно менший розмірів резервуара, а краї отвору мають прямокутну форму, діаметр витікаючого струменя буде меншим за розміри діаметра отвору (рис. 16.1). Це відбувається тому, що рідина, яка витікає з резервуара, потрапляє в отвір з усіх напрямків, а після проходження отвору напрямок руху усіх частинок рідини стає однаковим. Зміна напрямку руху частинок рідини через їхню інерційність миттєво відбутися не може. Тому

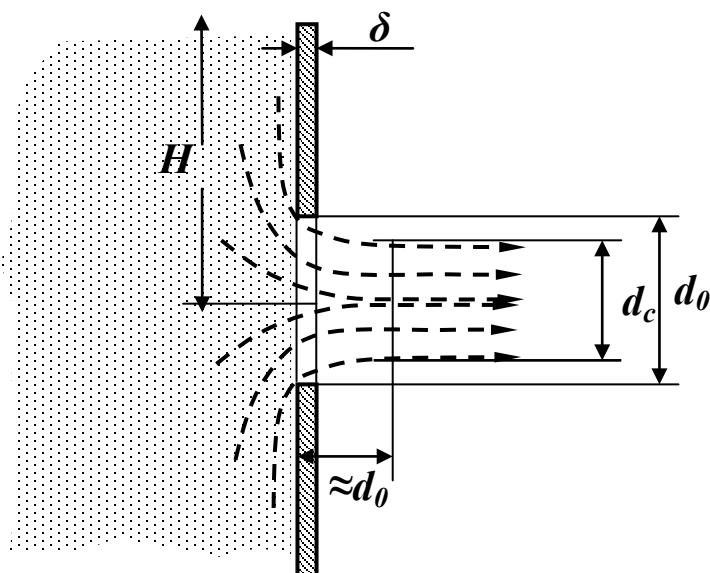


Рисунок 16.1 – Схема витікання рідини через отвір у тонкій стінці

стиснення струменя обумовлено необхідністю поступової зміни напрямку руху рідини під час проходження отворів. Оскільки розміри резервуара набагато більші за розміри отвору, бічні поверхні і вільна поверхня не можуть впливати на напрямок входження рідини в отвір, то в цьому випадку спостерігається ідеальне стиснення струменя. Таке стиснення є найбільшим, і воно досягається на відстані, що приблизно дорівнює діаметру отвору.

Ступінь стиснення виражається коефіцієнтом стиснення ϵ :

$$\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega_0} = \left(\frac{d_c}{d_0} \right)^2, \quad (16.1)$$

де ω_0 , d_0 – площа і діаметр отвору, ω_c , d_c – площа і діаметр ідеально стиснутого струменя.

У тому випадку, коли витікання відбувається з резервуара такої форми, що його стінки впливають на траєкторію руху частинок при вході в отвір (рис. 16.2), спостерігається недосконале стиснення струменя.

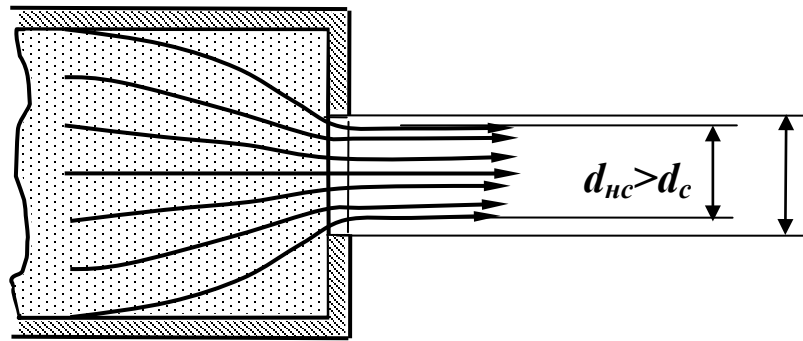


Рисунок 16.2 – Схема витікання рідини через отвір у тонкій торцевій стінці труби

Внаслідок того, що бічні стінки резервуара перед отвором формують напрямок руху рідини, струмінь після отвору стискається менше, ніж при витіканні з практично нескінченного резервуара.

З цієї причини змінюється коефіцієнт стиснення струменя. Формули для визначення цього стиснення для різних рідин і різних умов витікання – емпіричні. Наприклад, для круглого центрального отвору в тонкій торцевій стінці труби (рис. 16.2) і для малов'язких рідин коефіцієнт стиснення ε_1 можна знаходити за такою емпіричною формулою в частках від коефіцієнта стиснення ε при ідеальному стисненні струменя:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = 1 + \frac{0,37}{\varepsilon} n^2, \quad (16.2)$$

де $n = \frac{\omega_0}{\omega_{\text{резервуара}}}$, а ω_0 – площа отвору, $\omega_{\text{резервуара}}$ – площа перерізу резервуара (у наведеному прикладі площа поперечного перерізу труби).

16.2 Витікання через малий отвір у тонкій стінці

Розглянемо великий резервуар з рідиною, з якого через малий отвір в бічній стінці витікає цівка. Терміни «великий резервуар» і «малий отвір» означає, що ці розміри не позначаються на зміні висоти рідини (напору) в резервуарі при витіканні з нього рідини. Термін «тонка стінка» означає, що після стиснення струмінь витікаючої рідини не дотикається до циліндричної поверхні отвору.

Розглянемо два перерізи в цьому резервуарі (рис. 16.3), позначені індексами 0 і c . Запишемо рівняння Бернуллі для цих умов:

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \alpha_0 \frac{V_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\rho g} + \alpha_c \frac{V_c^2}{2g} + \xi \frac{V_c^2}{2g}. \quad (16.3)$$

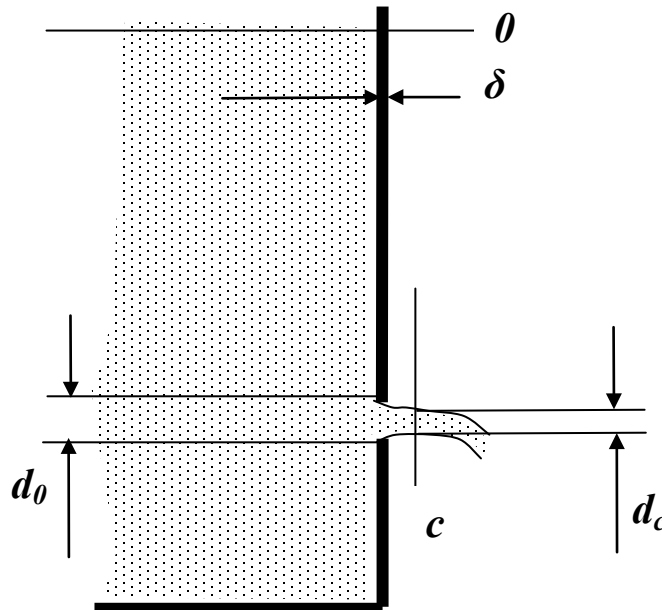


Рисунок 16.3 – Схема витікання рідини через малий отвір у тонкій стінці

Для небезпечних умов можна вважати, що рух рідини в перерізі 0 відсутній, отже, швидкісний напір дорівнює нулю. Різницею нівелірних висот, через їх малий вплив, можна знехтувати.

Коефіцієнтом ξ в такому випадку позначено опір отвору. Цей коефіцієнт враховує втрати енергії рідини на стиск струменя і тертя в цівках рідини поблизу отворів при формуванні витікаючого струменя. З урахуванням цього рівняння (16.3) набуде вигляду:

$$\frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_c}{\rho g} + \alpha_c \frac{V_c^2}{2g} + \xi \frac{V_c^2}{2g}. \quad (16.4)$$

Після перегрупування членів отримаємо:

$$\frac{p_0 - p_c}{\rho g} = (\alpha_c + \xi) \frac{V_c^2}{2g}. \quad (16.5)$$

Виразимо з рівняння (16.5) швидкість:

$$V_c = \sqrt{\frac{p_0 - p_c}{\rho g (\alpha_c + \xi)} 2g}. \quad (16.6)$$

Замінімо швидкість співвідношенням витрати до площі живого перерізу потоку і знову перегрупуємо:

$$Q_c = \omega_c \sqrt{\frac{p_0 - p_c}{\rho g (\alpha_c + \xi)} 2g} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha_c + \xi)}} \omega_c \sqrt{\frac{2g}{\rho g} (p_0 - p_c)}. \quad (16.7)$$

Проаналізуємо отриманий вираз (16.7). Зауважимо, що індекс «с» відноситься до струменя, і це єдиний індекс, який відноситься до рідини, що рухається «на виході» розглянутого прохідного перерізу (визначення наведено нижче). Опустимо цей індекс. Величина $\frac{1}{\sqrt{(\alpha_c + \xi)}} = \varphi$ називається

коефіцієнтом швидкості. Якщо вважати розподіл швидкостей в потоці рівномірним ($\alpha=1$), а рідину ідеальною, в якій немає втрат на тертя, тоді коефіцієнт $\xi=0$. А коефіцієнт швидкості $\varphi=1$.

Звідси стає зрозумілим фізичний зміст коефіцієнта швидкості. Він виражає відношення дійсної витрати через прохідний переріз до теоретичної витрати. Дійсною витратою називають витрату, яка насправді проходить через прохідний переріз. Теоретична витрата – це така, яка могла б протікати через прохідний переріз за відсутності втрат. Врахуємо, що $\omega_c = \omega_0 \varepsilon$, де ε – коефіцієнт стиснення струменя. Після підстановки цих позначень в коефіцієнт перед знаком кореня отримаємо

$\frac{1}{\sqrt{(\alpha_c + \xi)}} \omega_c = \varphi \omega_0 \varepsilon$. Добуток $\varphi \varepsilon = \mu$ носить назву коефіцієнт витрати.

Остаточно матимемо формулу:

$$Q = \omega_0 \mu \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta P}, \quad (16.8)$$

або в іншій формі, з урахуванням того, що $\rho g = \gamma$:

$$Q = \omega_0 \mu \sqrt{\frac{2g}{\gamma} \Delta P}. \quad (16.9)$$

У цих формулах (16.8), (16.9) ΔP – різниці тисків до перехідного перерізу і після нього.

За допомогою отриманого виразу (16.9) розв'язується задача визначення витрати для всіх випадків течії рідини під дією різниці тисків. Крім того, з цього виразу (16.9) видно, що причиною течії рідини є різниця тисків. Рідина завжди рухається з області високого тиску в область низького тиску. Фактично, наведений вираз можна вважати інженерною формою рівняння Бернуллі.

При проходженні рідини через малий отвір відбувається «зминання» струменя. На німецькій мові «зминання» – «drosseln». Тому в техніці витікання через малий отвір називають дроселюванням. Гідравлічний апарат, призначений для дроселювання, називається дроселем, а отвір в цьому гідроапараті називається прохідним перерізом.

Найбільш складним завданням практичного застосування цього рівняння є визначення коефіцієнта μ , значення якого залежить від ступеня стиснення струменя і режиму його течії, структури розподілу швидкостей поблизу прохідного перерізу, яка також залежить від форми входу в прохідний переріз. Цей коефіцієнт визначений експериментально. Він, як і

коефіцієнти φ і ε , залежить від числа Рейнольдса і ці залежності можна подати за допомогою графіка (рис. 16.4).

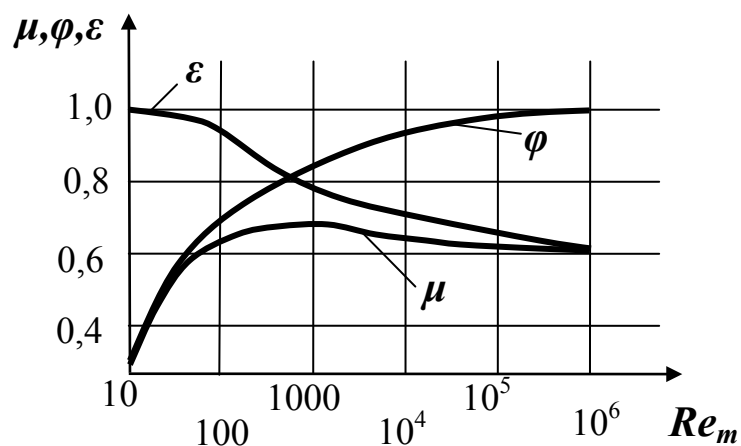


Рисунок 16.4 – Діаграми зміни коефіцієнтів μ , φ , ε від числа Рейнольдса

На графіку (рис. 16.4) буквами Re_m позначено число Рейнольдса, яке пораховане за теоретичною швидкістю, що відповідає теоретичній витраті.

Зі збільшенням швидкості витікання і пов'язаним з цим збільшенням Re_m коефіцієнт швидкості φ швидко зростає і при $Re_m \rightarrow \infty$ прагне до значення $\varphi=1,0$. Це свідчить про значне зменшення гідравлічного опору отвору за рахунок зниження впливу в'язкості.

Коефіцієнт стиснення струменя ε зі збільшенням Re_m зменшується і при $Re_m \rightarrow \infty$ прагне до значення $\varepsilon=0,6$.

Коефіцієнт витрати μ , будучи добутком коефіцієнтів φ і ε , на першому етапі зростає, досягаючи максимального значення $\mu=0,69$ при $Re_m \approx 350$, а потім плавно зменшується до $\mu \approx 0,6$.

Таким чином, тільки за рахунок коефіцієнта μ величина витрат зменшується на 30–40% відносно теоретично можливої.

16.3 Витікання через насадки

Насадкою називається коротка трубка довжиною від двох до шести діаметрів, приєднана до виходу отвору, через який витікає рідина. Роль насадки може виконувати і отвір у товстій стінці, коли діаметр отвору значно менший за її товщину. Насадки відрізняються формою і розмірами. Найбільш істотні відмінності між насадками полягають у формі вхідного отвору, що, як вже зазначалося вище, може істотно впливати на величину витрат при тій самій площі прохідного перерізу [9–14]. Найпростішою насадкою є циліндрична насадка. Течія в ній може відбуватися в двох різних режимах (рис. 16.5). У першому випадку на гострих вхідних кромках насадки відбувається ідеальне стиснення струменя і далі він рухається, не дотикаючись стінок насадки. У цьому випадку витікання нічим не

відрізняється від витікання через малий отвір у тонкій стінці. Швидкість при цьому витіканні висока, а витрата мінімальна.

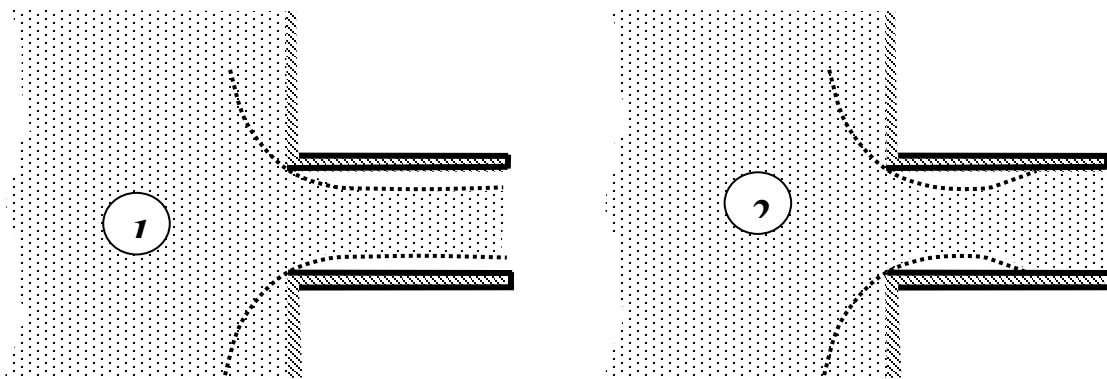


Рисунок 16.5 – Конструктивні схеми насадок

У другому випадку (рис.16.5), як і при витіканні через отвір у тонкій стінці, струмінь рідини спочатку стискається на деякому віддаленні від вхідного перерізу, утворюючи вихреву зону, тиск в цьому перерізі струменя стає меншим атмосферного. Далі струмінь поступово розширюється і заповнює весь переріз насадки. Через те, що стиснення на виході насадки немає ($\varepsilon=1,0$), коефіцієнт витрати через таку насадку дорівнює:

$$\mu = \varphi \approx 0,8. \quad (16.10)$$

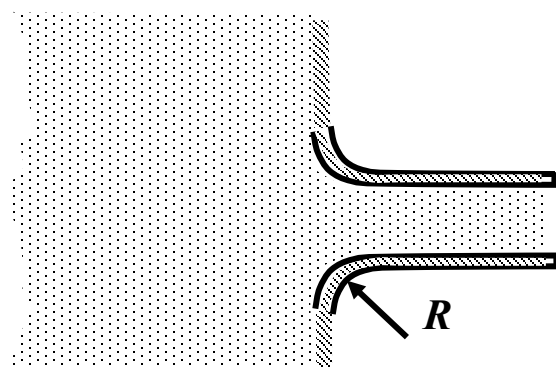


Рисунок 16.6 – Конструктивна схема тороїдальної насадки

При цьому витрати рідини через насадки при інших рівних умовах перевищує витрату в першому випадку, а швидкість рідини стає меншою через більш високий опір.

Ще кращі умови витікання спостерігаються при русі рідини через так звані тороїдальні насадки (рис. 16.6), які забезпечують більш високий коефіцієнт витрати. Його значення, залежно від збільшення радіуса заокруглення кромки, доходить до $\mu=0,95$.

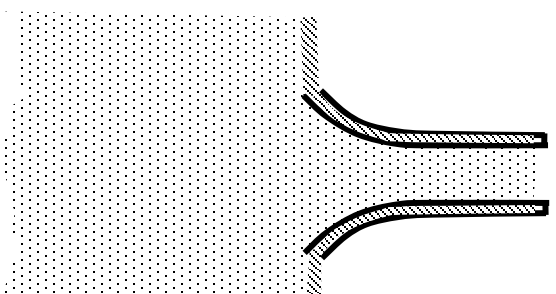


Рисунок 16.6 – Конструктивна схема коноїдальної насадки

Коли радіус кривизни стає більшим довжини насадки, насадка стає коноїдальною (рис. 16.7). Коефіцієнт витрати в таких умовах витікання наближається до значення $\mu=0,98$.

17 ГІДРАВЛІЧНИЙ РОЗРАХУНОК ТРУБОПРОВОДІВ

Рідина рухається по трубопроводу завдяки тому, що її енергія на початку трубопроводу (у джерела гідравлічної енергії) більша, ніж в кінці. Цей перепад (різниця) рівнів енергії може бути створений тим чи іншим способом: роботою насоса, за рахунок різниці рівнів рідини, тиском газу.

Найважливішим завданням, яке виникає при проектуванні безлічі гідросистем різного призначення, є задача визначення енергетичних характеристик джерела гідравлічної енергії [16–21]. До таких систем відносяться гідросистеми цехового технологічного обладнання, мобільні гідрофіковані машини, системи водопостачання та опалення тощо. Джерелами енергії таких гідросистем є насосні станції, газобалонні системи, водонапірні башти. Енергетичні характеристики джерела енергії – подача (витрата) і тиск – мають бути такими, щоб забезпечувалися необхідні витрати і тиск на виході системи – гідродвигуна, водопровідного крана тощо.

Рідше трапляється обернена задача, коли при відомих енергетичних характеристиках джерела енергії необхідно взнати, якими будуть максимально можлива витрата і тиск на виході гідросистеми.

У машинобудуванні доводиться мати справу найчастіше з такими трубопроводами, рух рідини в яких створюється роботою насоса. У гідротехніці і водопостачанні, а також у допоміжних пристроях подача рідини відбувається, як правило, за рахунок різниці рівнів тисків (різниці нівелірних висот).

17.1 Прості трубопроводи постійного перерізу

Усі трубопроводи можуть бути розділені на прості і складні. До простих трубопроводів відносять трубопроводи без розгалужень, а до складних – трубопроводи, які мають хоча б одне розгалуження (або місце з'єднання труб).

Нехай простий трубопровід постійного перерізу розташований довільно в просторі (рис. 17.1), має загальну довжину l , діаметр d і містить ряд місцевих опорів ξ_i . У початковому перерізі (1–1) має нівелірну висоту Z_1 і надлишковий тиск P_1 , а в кінцевому (2–2) – відповідно Z_2 і P_2 . Швидкість потоку в цих перерізах внаслідок постійного діаметра труби однакова і дорівнює V .

Запишемо рівняння Бернуллі для перерізів 1–1 і 2–2:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum_l \Delta h. \quad (17.1)$$

У цьому виразі $\sum_l \Delta h$ – сумарні втрати на тертя по довжині і на місцевих опорах на ділянці труби довжиною l . Втрати довжини відповідно до формули Дарсі будуть:

$$h_{mp} = \frac{\lambda l V^2}{d 2g}. \quad (17.2)$$

Втрати на місцевих опорах відповідно до формули Вейсбаха становитимуть:

$$\Delta h_m = \xi_m \frac{V^2}{2g}. \quad (17.3)$$

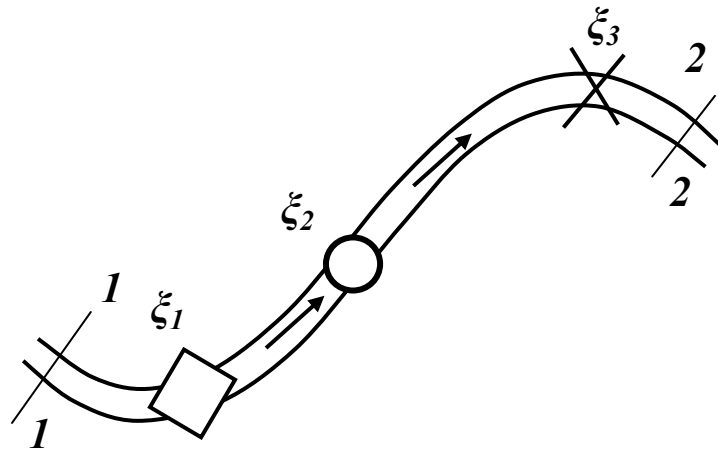


Рисунок 17.1 – Розрахункова схема для простого трубопровода постійного перерізу

Враховуючи рівняння нерозривності потоку і постійність діаметра труби, тобто $V_1=V_2$ і $\alpha_1 = \alpha_2$, швидкісні напори в обох частинах можна скоротити. Крім того, величини Z_1 і Z_2 , що виражають питому потенціальну енергію положення, для гідросистем технологічного обладнання, як вже не раз зазначалось, набагато менші потенціальної енергії стиснення $\frac{p}{\rho g}$, і відрізняються вони між собою на дуже незначну величину. З цієї причини в подальшому їх можна не врахувати. Тоді рівняння Бернуллі набуде вигляду:

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{\lambda l}{d} \frac{V^2}{2g} + \sum \xi_m \frac{V^2}{2g}, \quad (17.4)$$

або

$$\Delta P = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\lambda l}{d} + \sum \xi_m \right) V^2. \quad (17.5)$$

Виразивши величину V через витрату Q :

$$V = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}}, \quad (17.6)$$

і, підставивши її у попередній вираз (17.5), отримаємо

$$\Delta P = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\lambda l}{d} + \sum \xi_m \right) \frac{16Q^2}{\pi^2 d^4}. \quad (17.7)$$

Введемо позначення:

$$k_T = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\lambda l}{d} + \sum_l \xi_m \right) \frac{16}{\pi^2 d^4}. \quad (17.8)$$

Величину k_T – будемо називати гідравлічним опором трубопроводу. З урахуванням цього отримаємо:

$$\Delta P = k_T Q^2. \quad (17.9)$$

Останній вираз (17.9) називається характеристикою трубопроводу. Ця характеристика являє собою залежність (рис. 17.2) сумарних втрат тиску (напору) від витрати в трубопроводі $\Delta P = f(Q)$ ($\Delta h = f(Q)$).

Якщо в трубопроводі встановлено гідравлічні апарати, що мають свої опори, то їх необхідно додати до коефіцієнта опору трубопроводу і в результаті буде отримано сумарний гідравлічний опір.

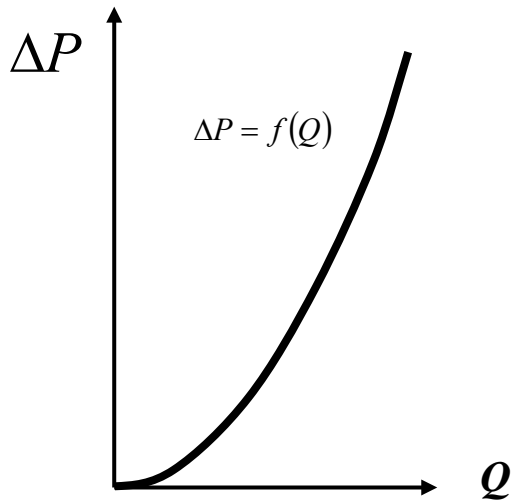


Рисунок 17.2 – Характеристика трубопроводу

17.2 Послідовне з'єднання трубопроводів

Послідовний трубопровід складається з декількох труб різної довжини і різного діаметра, з'єднаних між собою (рис. 17.3).

У кожному з цих трубопроводів можуть бути свої місцеві опори. Течія рідини в такій трубі підпорядковується таким умовам:

– витрата на всіх ділянках трубопроводу однаковий, тобто $Q_1 = Q_2 = Q_3$;

– втрата тиску (напору) в усьому трубопроводі ΔP дорівнює сумі втрат на кожній ділянці ΔP_i : $\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3$.

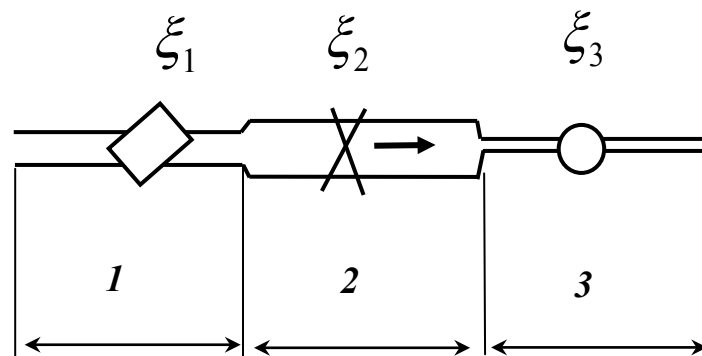


Рисунок 17.3 – Розрахункова схема послідовно з'єднаних трубопроводів

З урахуванням сказаного вище неважко отримати рівняння для визначення сумарних втрат тиску, яке набуде вигляду:

$$\Delta P = k_{1T} Q^2 + k_{2T} Q^2 + k_{2T} Q^2 = (k_{1T} + k_{2T} + k_{2T}) Q^2 = k_{\Sigma T} Q^2, \quad (17.10)$$

де k_{1T} , k_{2T} , k_{2T} – гідравлічний опір відповідно першої, другої і третьої ділянок трубопроводу; $k_{\Sigma T}$ – сумарний гідравлічний опір всього трубопроводу.

Величина сумарного опору з урахуванням раніше отриманої формули для простих трубопроводів (17.8) становитиме.

$$\begin{aligned} k_{\Sigma T} &= \frac{\rho}{2} \left(\frac{\lambda_1 l_1}{d_1} + \sum_{i_1} \xi_{1,m} \right) \frac{16}{\pi^2 d_1^4} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\lambda_2 l_2}{d_2} + \sum_{i_2} \xi_{2,m} \right) \frac{16}{\pi^2 d_2^4} + \\ &\frac{\rho}{2} \left(\frac{\lambda_3 l_3}{d_3} + \sum_{i_3} \xi_{3,m} \right) \frac{16}{\pi^2 d_3^4} = \\ &\frac{\rho}{2} \frac{16}{\pi^2} \left(\left(\frac{\lambda_1 l_1}{d_1^5} + \frac{\sum_{i_1} \xi_{1,m}}{d_1^4} \right) + \left(\frac{\lambda_2 l_2}{d_2^5} + \frac{\sum_{i_2} \xi_{2,m}}{d_2^4} \right) + \left(\frac{\lambda_3 l_3}{d_3^5} + \frac{\sum_{i_3} \xi_{3,m}}{d_3^4} \right) \right). \end{aligned} \quad (17.11)$$

У загальному випадку вираз, що описує сумарний гідравлічний опір складного трубопроводу, буде мати такий вигляд:

$$k_{\Sigma T} = \rho \frac{8}{\pi^2} \sum_i \left(\frac{\lambda_i l_i}{d_i^5} + \frac{\sum \xi_{i,m}}{d_i^4} \right). \quad (17.12)$$

Отримане рівняння (17.12), що визначає сумарні втрати тиску, являє собою характеристику складного трубопроводу, яка є сумою характеристик простих трубопроводів.

Це рівняння дозволяє дізнатися, які енергетичні характеристики мають бути у джерела енергії, щоб рідина могла протікати по всьому трубопроводу. Проте в кінцевій точці цієї труби енергія рідини буде дорівнює нулю. Якщо в кінці труби необхідно мати якийсь тиск $P_{нав}$ (наприклад, щоб подолати навантаження) до величини ΔP необхідно додати цю величину (рис. 17.4). Крім того, оскільки у загальному випадку величина швидкісного напору на початку $\frac{V_{поч}^2}{2g}$ і в кінці $\frac{V_{кін}^2}{2g}$ трубопроводу через різні діаметри різні, необхідно додати і цю різницю ΔP . Таким чином енергія, необхідна для джерела, має становити:

$$\Delta P = k_{\Sigma T} Q^2 + P_{нагр} + \frac{V_{нач}^2 - V_{кон}^2}{2g}. \quad (17.13)$$

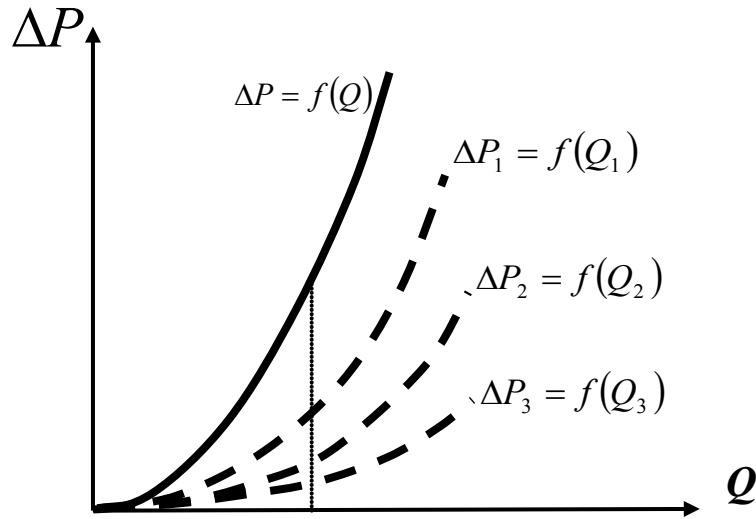


Рисунок 17.4 – Характеристика трубопроводу

Якщо переписати рівняння (17.13), замінивши швидкість рідини відношенням витрати до площі живого перерізу $\frac{Q}{\omega_i}$, отримаємо:

$$\Delta P = k_{\Sigma T} Q^2 + P_{нагр} + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q^2}{\omega_{нач}} - \frac{Q^2}{\omega_{кон}} \right) = k_{\Sigma T} Q^2 + k_V Q^2 + P_{нагр}, \quad (17.14)$$

де коефіцієнт $k_V = \frac{1}{2g} \left(\frac{1}{\omega_{нач}} - \frac{1}{\omega_{кон}} \right)$.

Остаточну характеристику складного трубопроводу можна записати у вигляді:

$$\Delta P = (k_{\Sigma T} + k_V) Q^2 + P_{нагр}. \quad (17.15)$$

Сума $k_{\Sigma T} + k_V$ в цьому виразі – загальний гідравлічний опір складного трубопроводу.

17.3 Паралельне з'єднання трубопроводів

Відмінною особливістю таких трубопроводів є те, що потік рідини ділиться в одній точці на кілька самостійних потоків, які пізніше сходяться в іншій точці. Кожен з цих потоків може містити свої місцеві опори. Найчастіше виникає задача, яка пов'язана із розрахунком таких трубопроводів, є визначення витрати в кожній ланці. Розглянемо рух рідини цими трубопроводами (рис. 17.5), вважаючи, що потенціальна енергія положення Z набагато менша потенціальної енергії стиснення, яка визначається тиском, і нею можна знехтувати. Якщо вважати, що в місцях розгалуження і з'єднання трубопроводів, позначених буквами n і k , витрати Q однакові, а тиски дорівнюють P_n і P_k , то можна записати:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3, \quad (17.16)$$

$$i \quad \Delta P = P_n - P_k = \Delta P_1 = \Delta P_2 = \Delta P_3, \quad (17.17)$$

де 1, 2, 3 – номери паралельних гілок трубопроводу; Q_1, Q_2, Q_3 – втрати у відповідних гілках; $\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3$ – втрати тиску у відповідних ланках.

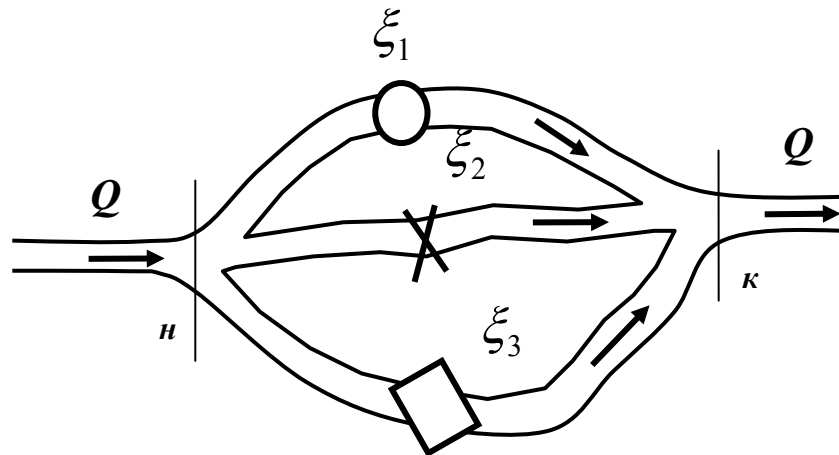


Рисунок 17.5 – Розрахункова схема паралельно з'єднаних трубопроводів

Подаючи кожен з паралельних гілок як простий трубопровід, можна записати характеристику кожної ланки:

$$\Delta P = k_{1T} Q_1^2, \quad \Delta P = k_{2T} Q_2^2, \quad \Delta P = k_{3T} Q_3^2. \quad (17.18)$$

На основі цих рівностей (17.18) можна отримати рівняння виду:

$$k_{1T} Q_1^2 = k_{2T} Q_2^2, \quad k_{2T} Q_2^2 = k_{3T} Q_3^2, \quad k_{1T} Q_1^2 = k_{3T} Q_3^2. \quad (17.19)$$

Додамо до цих рівнянь (17.18–17.19) умову рівності витрат на початку і в кінці розгалужених трубопроводів і будемо мати:

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ k_{1T} Q_1^2 = k_{2T} Q_2^2 \\ k_{2T} Q_2^2 = k_{3T} Q_3^2 \end{cases}. \quad (17.20)$$

У результаті ми отримали систему рівнянь (17.20), з якої при відомій подачі рідини від джерела енергії і відомих гідравлічних опорах паралельно з'єднаних трубопроводів можна визначити витрати в кожному з них. Подібну систему рівнянь можна записати для будь-якого числа паралельно з'єднаних труб.

З наведених рівнянь (17.20) випливає таке важливе правило: для побудови характеристик паралельного з'єднаних декількох трубопроводів (рис. 17.6) необхідно додати абсциси (витрати) характеристик кожного з цих трубопроводів при однакових ординатах (втрати тиску).

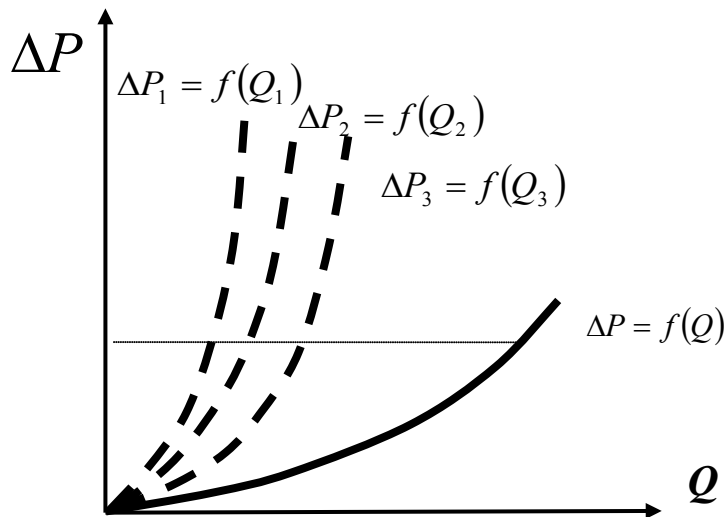


Рисунок 17.6 – Характеристика трубопроводу

17.4 Розгалужені трубопроводи

Розгалужені трубопроводи відрізняються тим, що вони мають одну спільну точку, з якої розходяться різні потоки, або загальну точку, в якій кілька різних потоків сходяться. Цей варіант найбільш часто зустрічається в гідросистемах технологічного обладнання, де від однієї насосної станції живиться відразу кілька одночасно працюючих споживачів. Для розгалужених трубопроводів (рис. 17.7), так само як і для паралельних, можна записати рівняння витрат:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3, \quad (17.21)$$

де Q_1, Q_2, Q_3 – витрати у відповідних ланках.

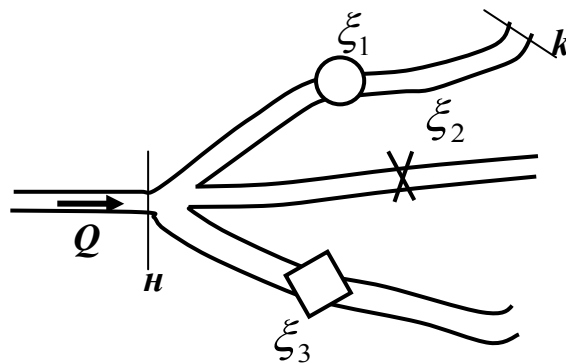


Рисунок 17.7 – Розрахункова схема для розгалужених трубопроводів

Складемо також рівняння Бернуллі для будь-якої з ланок. Будемо вважати: тиск в трубопроводі такий, що нівелірною висотою можна знехтувати. Вважатимемо також, що тиск в кінці кожної ланки (в перерізі k), необхідний для подолання навантаження, також $P_{\text{нав}}$. Рівняння Бернуллі для перерізів n і k буде виглядати таким чином:

$$\frac{P_n}{\rho g} + \alpha_n \frac{V_n^2}{2g} = \frac{P_{нагр}}{\rho g} + \alpha_k \frac{V_k^2}{2g} + \frac{\Delta P}{\rho g}, \quad (17.22)$$

де i – індекс, що відповідає кожній ланці.

Якщо вважати, що розглянута система трубопроводів належить гідро-системі технологічної машини, в якій тиск в різних ланках, як правило, становить кілька мегапаскалів, а швидкість течії рідини по трубах найчастіше невисока (до 5 м/с), швидкісним напором можна знехтувати. Справді, наприклад, при швидкості 1 м/с і коефіцієнті кінетичної енергії $\alpha = 2$, величина швидкісного напору становитиме 0,1 м, що при переводі на одиницю тиску дорівнює 0,001МПа. З урахуванням цього і після звичайних перетворень отримаємо

$$P_H = P_{нагр} + \Delta P. \quad (17.23)$$

Величина ΔP , в цьому випадку, є характеристикою простого трубопроводу і дорівнює $k_T Q^2$. Таким чином, для кожної ланки розгалуженого трубопроводу можна написати подібне рівняння. Якщо додати до них рівняння витрат, то можна отримати систему рівнянь виду:

$$\begin{cases} P_n = P_{нагр} + k_{1T} Q_1^2 \\ P_n = P_{нагр} + k_{2T} Q_2^2 \\ P_n = P_{нагр} + k_{3T} Q_3^2 \\ Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \end{cases}. \quad (17.24)$$

Подібну систему рівнянь (17.24) можна записати для будь-якого числа ланок розгалуженого трубопроводу. Розв'язуючи її, можна визначити, яка витрата і який тиск має забезпечувати джерело гідравлічної енергії, щоб на виході трубопроводів виходив заданий тиск при заданій витраті.

17.5 Трубопроводи з насосною подачею рідини

У більшості гідравлічних систем технологічного обладнання як джерела енергії використовуються насоси різного принципу дії. Найважливішим завданням, яке виникає при проектуванні кожної гідросистеми, є узгодження роботи насосної станції і системи трубопроводів, гідроапаратів та гідромашин, що входять до її складу. Це різноманітні і складні задачі, які детально розглядаються в курсах, пов'язаних з вивченням гідропривода. Тут ми ознайомимося лише з загальним принципом таких розрахунків.

Для цього розглянемо найбільш простий випадок трубопроводу, по якому насос перекачує рідину з гідробака в ємність або порожнину із заданими величинами тиску і витрати (рис. 17.8). До таких ємностей можна віднести, наприклад, гідроциліндр. Нівелірними висотами, як і в попередніх випадках, знехтуємо через їхню малу величину.

Запишемо спочатку рівняння Бернуллі 2 і 3:

$$\frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} = \frac{P_{нагр}}{\rho g} + \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g} + \frac{\Delta P_{2-3}}{\rho g}, \quad (17.25)$$

де ΔP_{2-3} – сумарні втрати тиску в напірному трубопроводі (характеристика напірного трубопроводу).

Тепер запишемо рівняння Бернуллі для перерізів 0 і 1:

$$\frac{P_0}{\rho g} = \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \frac{\Delta P_{0-1}}{\rho g}, \quad (17.26)$$

де ΔP_0 – атмосферний тиск, ΔP_{0-1} – сумарні втрати тиску у всмоктувальному трубопроводі (характеристика всмоктувального трубопроводу).

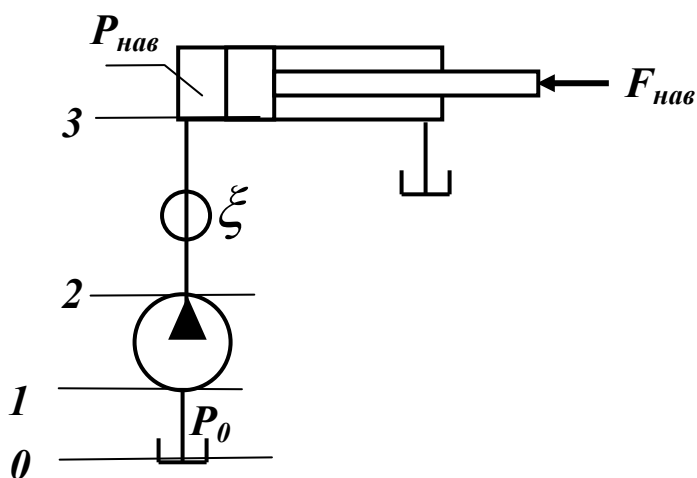


Рисунок 17.8 – Гідравлічна схема гідропривода

З другого рівняння (17.26) визначимо загальний напір (енергію), який має рідина при вході в насос. Тоді друге рівняння (17.26) набуде вигляду:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_0}{\rho g} - \frac{\Delta P_{0-1}}{\rho g}. \quad (17.27)$$

У процесі своєї роботи насос передає рідині додаткову енергію $H_{насоса}$, в результаті чого загальний напір рідини в перерізі 2 буде дорівнювати:

$$\frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}, \quad (17.28)$$

Тобто можна записати :

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + H_{насоса} &= \frac{P_0}{\rho g} - \frac{\Delta P_{0-1}}{\rho g} + H_{насоса} = \\ \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} &= \frac{P_{нагр}}{\rho g} + \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g} + \frac{\Delta P_{2-3}}{\rho g} \end{aligned} \quad (17.29)$$

Виділимо з отриманої рівності (17.29) величину $H_{насоса}$:

$$H_{насоса} = \frac{P_{нагр}}{\rho g} + \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g} + \frac{\Delta P_{2-3}}{\rho g} - \frac{P_0}{\rho g} + \frac{\Delta P_{0-1}}{\rho g}. \quad (17.30)$$

Перегрупуємо члени в цьому виразі:

$$H_{насоса} = \left(\frac{P_{нагр}}{\rho g} - \frac{P_0}{\rho g} \right) + \left(\alpha_3 \frac{V_3^2}{2g} \right) + \left(\frac{\Delta P_{2-3}}{\rho g} + \frac{\Delta P_{0-1}}{\rho g} \right) =$$

$$\left(\frac{P_{нагр} - P_0}{\rho g} \right) + \left(\alpha_3 \frac{V_3^2}{2g} \right) + \left(\frac{\Delta P_{0-1} + \Delta P_{2-3}}{\rho g} \right). \quad (17.31)$$

Якщо вважати, що:

- у першому доданку (17.31) атмосферний тиск P_0 дорівнює 0;
- другий доданок (17.31) (швидкісний напір на виході з напірного трубопроводу) можна переписати через витрату і подати у вигляді, $k_c Q^2$, де $k_c = \alpha \frac{1}{\omega^2 2g}$ можна вважати коефіцієнтом швидкісного напору (в даному виразі ω – площа перерізу трубопроводу);
- третій доданок (17.31) можна записати у вигляді сумарної характеристики всмоктувального і напірного трубопроводу.

Тоді останній вираз (17.31) набуде вигляду:

$$H_{насоса} = \frac{P_{нагр}}{\rho g} + k_c Q^2 + k_{\Sigma T} Q^2. \quad (17.32)$$

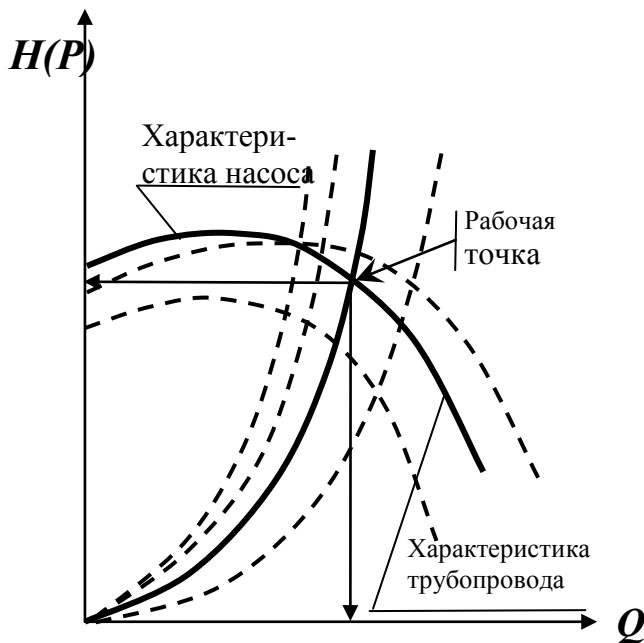


Рисунок 17.9 – Робоча характеристика гідроприводу

Останній вираз (17.32) являє собою робочу характеристику насоса (рис. 17.9). Побудувавши характеристику трубопроводу $\Delta P = k_T Q^2$ і характеристику насоса, можна знайти так звану робочу точку, як точку перетину характеристик насоса і трубопроводу. Це означає, що при відповідному тиску і витраті, які відповідають цій точці, буде забезпечуватися робота насоса з необхідними характеристиками. Щоб отримати іншу

робочу точку необхідно або змінити робочу характеристику насоса або характеристику трубопроводу. Це можна зробити різними способами, наприклад, змінивши опір трубопроводу або режим роботи насоса.

18 ГІДРАВЛІЧНИЙ УДАР В ТРУБОПРОВОДАХ

Теоретичне і експериментальне дослідження гідравлічного удару в трубопроводах вперше було проведено відомим російським ученим Миколою Єгоровичем Жуковським в 1899 році. Це явище пов'язано з тим, що при швидкому закритті трубопроводу, по якому тече рідина, або швидкому його відкритті (тобто з'єднанні тупикового трубопроводу з джерелом гідравлічної енергії) виникає різка, неодночасна по довжині трубопроводу зміна швидкості і тиску рідини. Якщо в такому трубопроводі вимірювати швидкість рідини і тиск, то виявиться, що швидкість змінюється як за величиною, так і за напрямком, а тиск – як у бік збільшення, так і в бік зменшення відносно початкового. Це означає, що в трубопроводі виникає коливальний процес, який характеризується періодичним підвищенням і зниженням тиску. Такий процес дуже швидкоплинний і обумовлений пружними деформаціями стінок труби і самої рідини.

Детально розглянемо його картину для випадку повного і прямого гідравлічного удару.

Будемо вважати, що в початковому стані трубопровід відкритий. Рідина рухається по трубі зі швидкістю $V > 0$ (рис. 18.1).

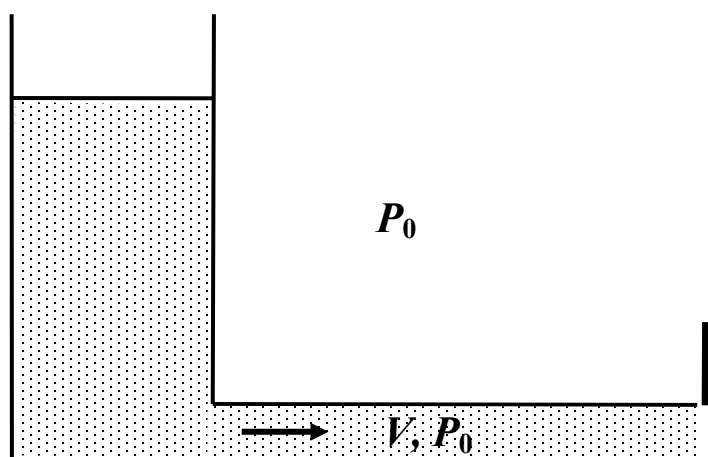


Рисунок 18.1 – Схема початкового стану трубопроводу

Тиск в рідині дорівнює P_0 . Трубопровід миттєво закривається (рис. 18.2). Шари рідини, натрапивши на заслінку крана, зупиняються. Кінетична енергія рідини переходить в деформацію стінок труби (труба біля заслінки розширяться) і рідини (тиск біля заслінки підвищиться на величину ΔP). На шар рідини, який зупинився, набігатимуть наступні шари, викликаючи стиснення рідини і зростання тиску, який буде з деякою швидкістю поширюватися в сторону, протилежну напрямку швидкості руху рідини. Перехідна область в перерізі $A-A$ називається ударною хвилею. Швидкість переміщення перерізу $A-A$ (фронт хвилі) називається швидкіс-

тю поширення ударної хвилі і позначається буквою a . Такий процес відбувається в період часу $0 < t < \frac{L}{a}$.

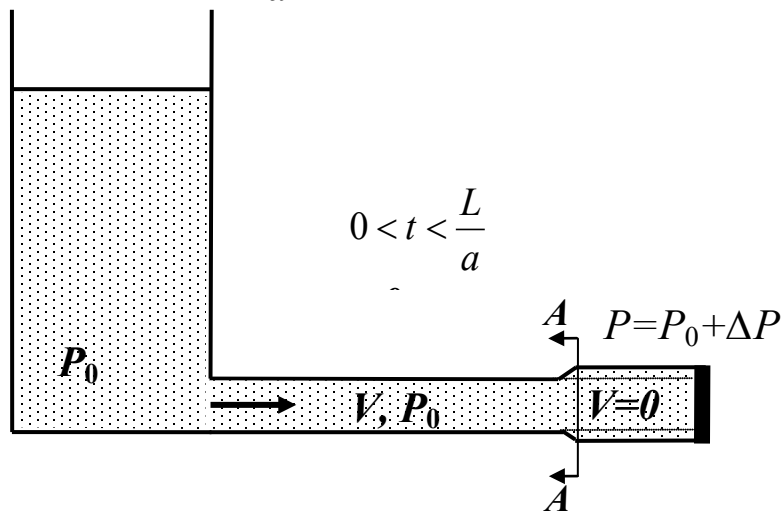


Рисунок 18.2 – Схема стану трубопроводу у момент часу $0 < t < L/a$

У момент часу $t < \frac{L}{a}$ весь трубопровід виявиться розширеним (рис. 18.3), а рідина – стислою і нерухомою. Але такий стан нерівномірний. Оскільки у джерела тиск P_0 , а у трубі $P = P_0 + \Delta P$, то рідина почне рухатись в бік меншого тиску, тобто з труби в резервуар.

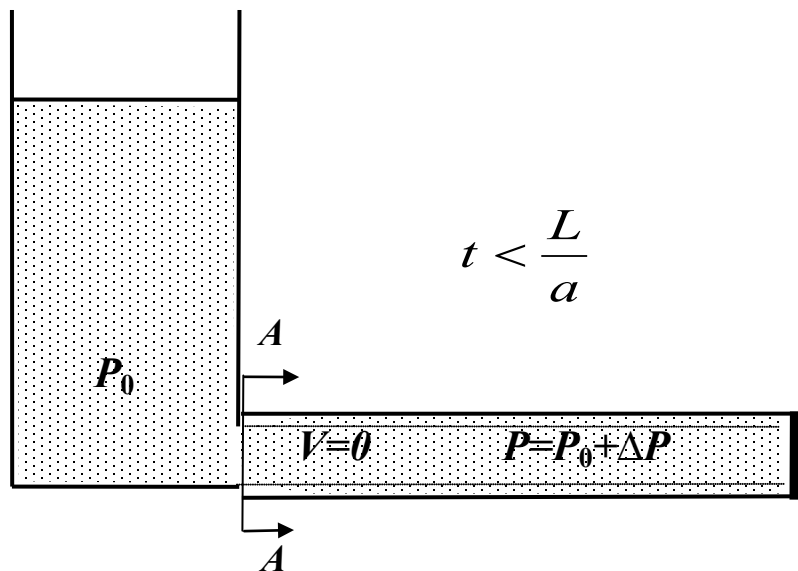


Рисунок 18.3 – Схема стану трубопроводу у момент часу $t < L/a$

Цей процес починається від початку труби. Рідина буде витікати з труби в резервуар з деякою швидкістю V (рис. 18.4). Переріз $A-A$ (ударна хвиля) почне переміщуватися до кінця труби зі швидкістю a . При цьому тиск в трубі буде знижуватися до P_0 .

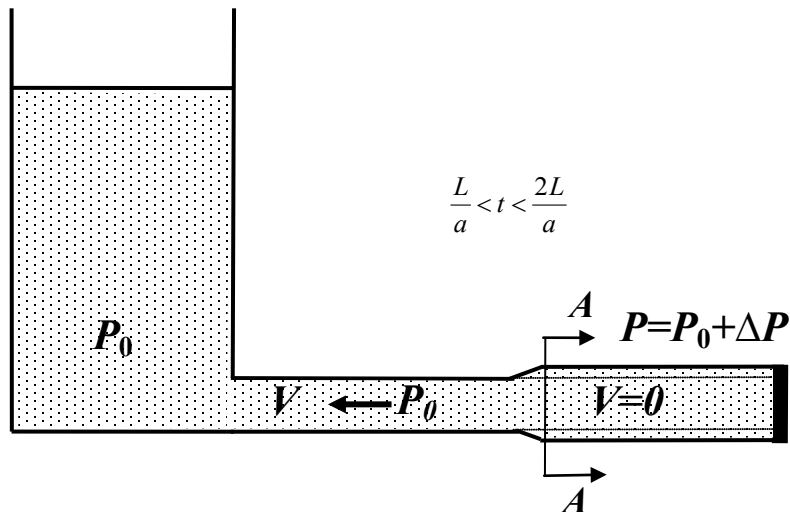


Рисунок 18.4 – Схема стану трубопроводу у момент часу $L/a < t < (2L)/a$

Енергія деформації рідини переходить в кінетичну енергію і рідина набуває деякої швидкості V , але спрямованої в протилежну сторону. У всьому трубопроводі встановлюється тиск P_0 . За інерцією рідина продовжує рухатися до початку труби і на ній виникає деформація на розтяг, що призводить до зменшення тиску поблизу заслінки (рис. 18.5).

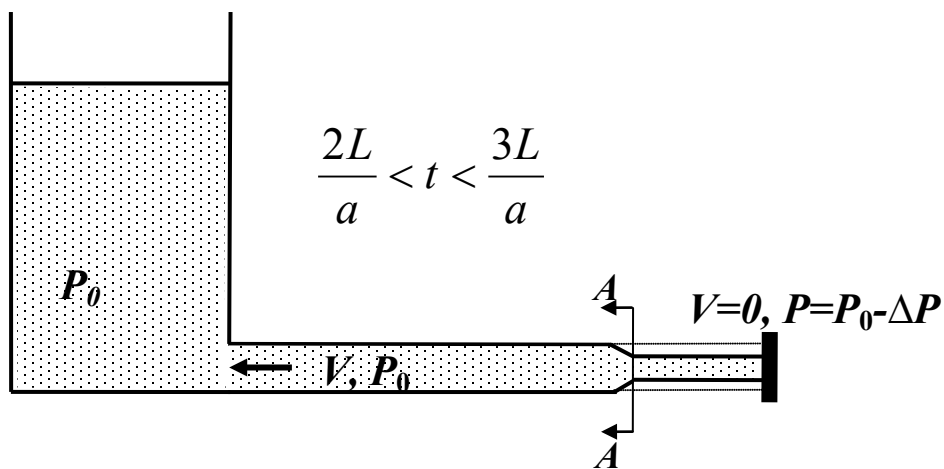


Рисунок 18.5 – Схема стану трубопроводу у момент часу $(2L)/a < t < (3L)/a$

Виникає від'ємна ударна хвиля, яка рухається від кінця труби до початку зі швидкістю a , і за фронтом хвилі залишається стиснена труба. Кінетична енергія знову перетворюється на енергію деформації (стиснення) (рис. 18.6). У момент часу $t = \frac{3L}{a}$ вся труба буде стисненою, а хвиля досягне початку труби. Тиск поблизу джерела більший, ніж у фронті. Через це шари рідини під дією перепаду тиску почнуть рухатися до кінця труби (до заслінки) з деякою швидкістю $V > 0$, а тиск піднімається до значення P_0 .

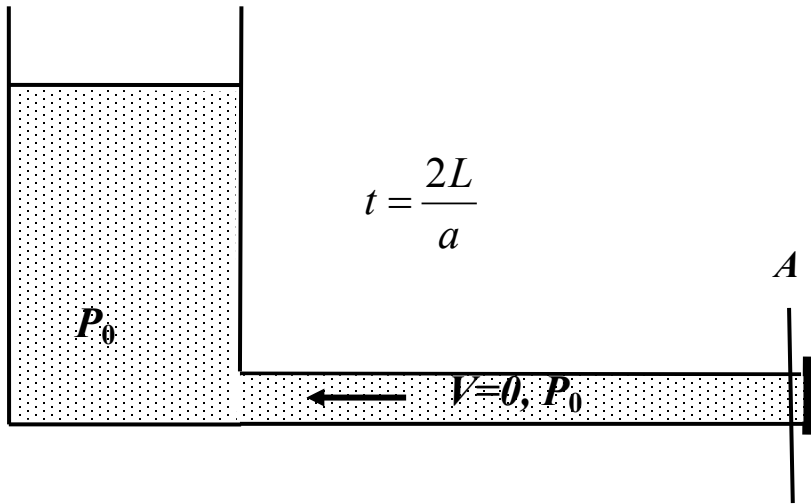


Рисунок 18.6 – Схема стану трубопроводу у момент часу $t=(2L)/a$

Тому період часу $\frac{3L}{a} < t < \frac{4L}{a}$ відбувається процес вирівнювання тиску в трубопроводі. При цьому відбувається рух ударної хвилі зі швидкістю a від початку труби до її кінця (рис. 18.7).

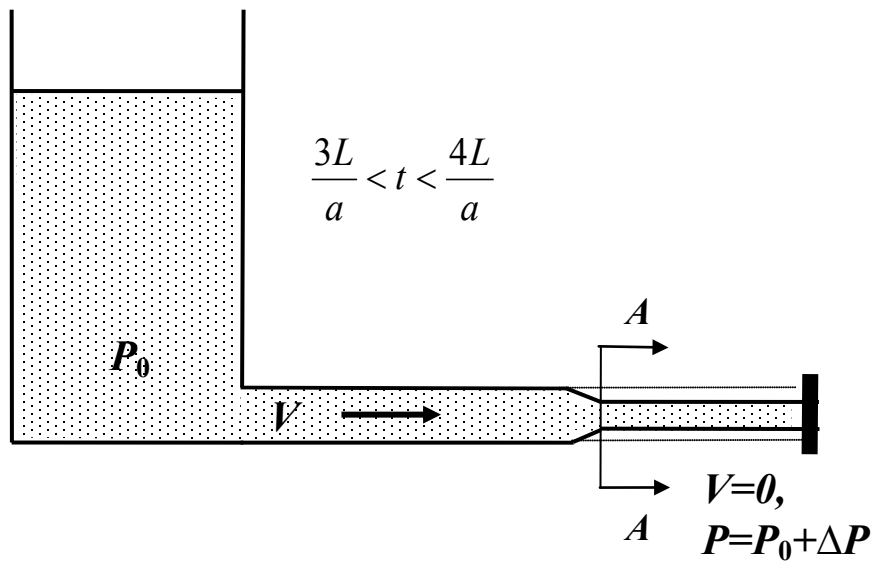


Рисунок 18.7 – Схема стану трубопроводу у момент часу $(3L)/a < t < (4L)/a$

У момент часу $t = \frac{4L}{a}$ ударна хвиля досягає кінця труби (рис. 18.8).

Далі весь процес починається спочатку. При дослідженні цього процесу виникає три основних питання. Перший – з якою швидкістю відбувається цей коливальний процес і від чого він залежить? Друге питання – як сильно змінюється тиск в трубопроводі за рахунок описаного процесу? І третій – як довго може протікати цей процес?

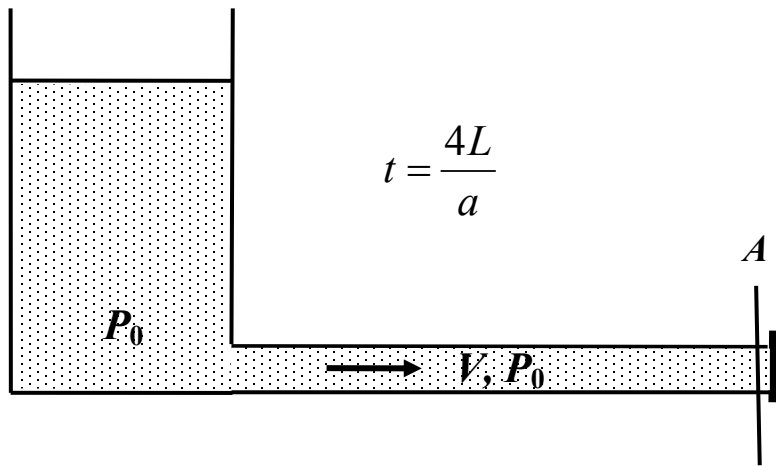


Рисунок 18.8 – Схема стану трубопроводу у момент часу $t=(4L)/a$

18.1 Швидкість поширення гідравлічної ударної хвилі в трубопроводі

Зміна тиску і швидкості потоку в трубопроводах відбуваються не миттєво через пружність твердих стінок труби і стиснення робочого середовища, а з деякою кінцевою швидкістю, зумовленою необхідністю компенсації пружних деформацій рідини і труби. Розглянемо випадок, коли в трубопроводі довжиною L і площею перерізу ω під тиском P знаходиться рідина, густина якої ρ (рис. 18.9). Припустимо, що в момент часу t в перерізі 1–1 тиск підвищиться на величину dp . Це підвищення викликає збільшення густини на величину $d\rho$, а також розширення внутрішнього діаметра труби. Отже, площа прохідного перерізу збільшиться на величину $d\omega$. У результаті збільшиться об'єм W ділянки труби на величину dW . За рахунок цього відбудеться збільшення маси рідини, яка знаходиться в трубі на ділянці довжиною L . Маса збільшиться за рахунок збільшення, по-перше, густини рідини, по-друге, за рахунок збільшення об'єму W .

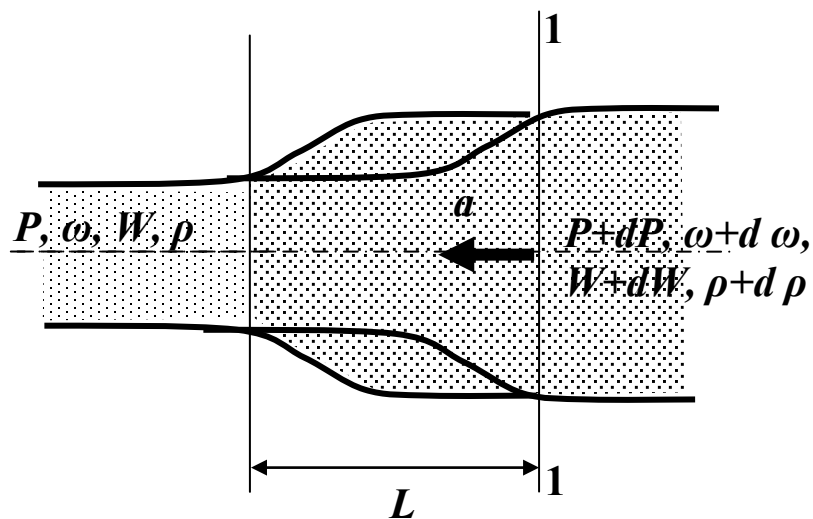


Рисунок 18.9 – Розрахункова схема швидкості поширення гідравлічної ударної хвилі в трубопроводі

Ця ситуація розглядалася при виведенні рівняння нерозривності потоку в диференціальній формі, з тією лише різницею, що там розглядалося лише зміна маси в часі, без урахування причин, які викликали цю зміну $\frac{dM}{dt} = W \frac{d\rho}{dt} + \frac{dW}{dt} \rho$. За аналогією з наведеним рівнянням запишемо вираз, що описує зміну маси за рахунок зміни тиску:

$$\frac{dM}{dP} = W \frac{d\rho}{dP} + \frac{dW}{dP} \rho = 0. \quad (18.1)$$

Рідина під дією зазначеного підвищення тиску направиться з деякою швидкістю a в шари з меншим тиском, в яких також буде підвищуватися густина і збільшиться напруження в стінках трубопроводу, що сприяє збільшенню площі трубопроводу. Через це необхідно буде деякий час на поширення цих деформацій уздовж трубопроводу.

З іншого боку, переміщення маси dm за час dt відбувається під впливом результувальної F_p сил тиску, що діють уздовж лінії руху на торцевій поверхні циліндричного об'єму довжиною L :

$$F_p = \omega(P + \Delta P) - \omega P. \quad (18.2)$$

У такому випадку рівняння імпульсу сили може бути записано в такому вигляді:

$$\omega dP dt = dma. \quad (18.3)$$

Звідси:

$$\frac{dm}{dP} = \frac{\omega dt}{a}. \quad (18.4)$$

Маючи на увазі, що $dt = \frac{L}{a}$, і підставивши це в попередній вираз (18.4), отримаємо:

$$\frac{dm}{dP} = \frac{\omega L}{a^2}. \quad (18.5)$$

Зауважимо, що вираз:

$$\omega L = W. \quad (18.6)$$

Прирівняємо обидва вирази (18.5) і (18.6) до $\frac{dm}{dP}$ та отримаємо:

$$\frac{W}{a^2} = W \frac{d\rho}{dP} + \rho \frac{dW}{dP}. \quad (18.7)$$

Виразимо з останньої рівності (18.7) величину a^2 :

$$a^2 = \frac{W}{W \frac{d\rho}{dP} + \rho \frac{dW}{dP}}. \quad (18.8)$$

Розділимо чисельник і знаменник (18.8) на W , а перший доданок в знаменнику штучно помножимо і розділимо на ρ :

$$a^2 = \frac{1}{\rho \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} + \rho \frac{1}{W} \frac{dW}{dP}}. \quad (18.9)$$

Звернемо увагу на те, що $W = \omega L$, а $dW = d\omega L$. Після підстановки цих формул в останній вираз (18.9) і добування кореня отримаємо вираз для швидкості поширення ударної хвилі, яка, фактично, є швидкістю поширення пружних деформацій рідини в трубі:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} + \frac{1}{\omega L} \frac{d\omega L}{dP} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} + \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dP} \right)}}. \quad (18.10)$$

Тут перший доданок під коренем характеризує пружні властивості рідкого середовища (рідини), а – друга пружні сили матеріалу труби.

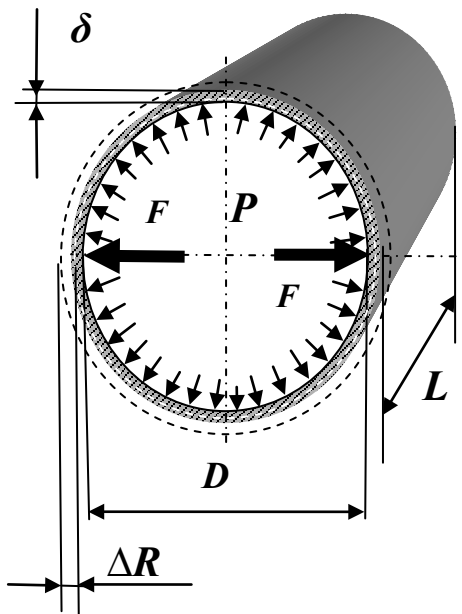


Рисунок 18.10 – Розрахункова схема трубопроводу під дією гідравлічної ударної хвилі

Розглянемо докладніше складові формули (18.10). Як відомо з гідростатики, сила, що діє на циліндричну поверхню, дорівнює добутку тиску на проекцію площі цієї поверхні в напрямку дії сили. На цю ділянку труби з товщиною стінок δ , довжиною L і діаметром D діє із середини тиск P . Внаслідок цього виникає розривна сила F , яка дорівнює

$$F = PDL. \quad (18.11)$$

У стінках труби виникає сила опору F_c , яка дорівнює добутку площі перерізу стінок труби $2(\delta L)$ на внутрішнє напруження σ_m в матеріалі стінок труби, тобто:

$$F_c = 2(\delta L)\sigma_m. \quad (18.12)$$

Якщо прирівняти цих дві сили із

(18.11) і (18.12) отримаємо рівність:

$$\sigma_m 2(\delta L) = PDL, \quad (18.13)$$

з якої знайдемо вираз, який визначає внутрішнє напруження в стінках труби σ_m :

$$\sigma_m = \frac{PD}{2\delta}. \quad (18.14)$$

Вважаючи, що відносне збільшення діаметра труби дорівнює $\frac{2\Delta R}{D}$, прямо пропорційне напруженню в стінках труби, тоді можна записати:

$$\sigma_m = E_m \frac{2\Delta R}{D}, \quad (18.15)$$

де E_m – коефіцієнт пропорційності, який є модулем пружності матеріалу труби.

З двох останніх виразів (18.14) і (18.15) випливає, що абсолютне збільшення радіуса перерізу труби може бути виражено формулою

$$\Delta R = \frac{D\sigma}{2E_m} = \frac{D}{2E_m} \frac{PD}{2\delta} = \frac{D^2}{4E_m\delta} P. \quad (18.16)$$

Запишемо вираз, що визначає збільшення площі перерізу труби:

$$\begin{aligned} \omega - \omega_p &= \pi \left(\frac{D}{2} + \Delta R \right)^2 - \pi \frac{D^2}{4} = \pi \frac{D^2}{4} - 2\pi \frac{D}{2} \Delta R \\ &+ \pi \Delta R^2 - \pi \frac{D^2}{4} = \pi D \Delta R + \pi \Delta R^2, \end{aligned} \quad (18.17)$$

де ω – початкова площа перерізу труби, ω_p – площа перерізу труби під тиском P .

Нехтуючи малою величиною вищого порядку ΔR^2 і підставивши вираз для ΔR , отримаємо:

$$\omega - \omega_p = \pi D \frac{D^2}{4E_m\delta} P = \frac{\pi D^3}{4E_m\delta} P. \quad (18.18)$$

Продиференціювавши вираз (18.8) за P і розглядаючи ω як функцію, яка залежить від P , отримаємо:

$$\frac{d\omega}{dP} = \frac{\pi D^3}{4E_m\delta}. \quad (18.19)$$

У результаті доданок, що описує пружні властивості матеріалу труби у виразі для швидкості поширення ударної хвилі, можна подати в такому вигляді:

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dP} = \frac{1}{\pi \frac{D^2}{4}} \frac{\pi D^3}{4E_m\delta} = \frac{D}{E_m\delta}. \quad (18.20)$$

Тепер розглянемо доданок із (18.10), який описує пружність рідини $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP}$.

Раніше при розгляді властивостей рідини було встановлено, що якщо зміна об'єму відбувається за рахунок зміни густини, то можна визначити коефіцієнт стисливості рідини β_w :

$$\beta_w = \frac{\frac{M}{d\rho} \frac{1}{dP}}{\frac{M}{\rho} \frac{1}{dP}} = \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{dP}. \quad (18.21)$$

Часто цей коефіцієнт виражають через обернену величину, яка називається модулем пружності рідини E_p , тобто:

$$\beta_w = \frac{1}{E_p}. \quad (18.22)$$

Звідси випливає, що другий доданок (18.10), який характеризує пружні властивості робочого середовища, може бути записано у вигляді:

$$\frac{1}{\rho_a} \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{E_p}. \quad (18.23)$$

Таким чином, остаточно вираз для швидкості поширення ударної хвилі в пружному трубопроводі можна переписати в такому вигляді:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{D}{E_m \delta} + \frac{1}{E_p} \right)}} = \frac{\sqrt{\frac{E_p}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{D E_p}{E_m \delta}}}, \quad (18.24)$$

де ρ – густина рідини, D – діаметр трубопроводу, δ – товщина стінки трубопроводу, E_m – об'ємний модуль пружності матеріалу труби, E_p – об'ємний модуль пружності рідини.

З формули (18.24) випливає, що швидкість поширення ударної хвилі залежить від стисливості рідини і пружних деформацій матеріалу трубопроводу.

18.2 Ударний тиск

Для з'ясування величини підйому тиску ΔP застосуємо теорему про збереження кількості руху (імпульсу сили). Для цього розглянемо елементарне переміщення ділянки рідини довжиною dL за час dt . Врахуємо, що при прямому гідроударі кінетична енергія ударної хвилі повністю перетворюється в потенціальну, тобто швидкість рідини V стає нульовою.

Імпульс сили, під дією якого відбувається цей рух, дорівнює:

$$(\omega(P + \Delta P) - \omega P) dt = \omega \Delta P dt. \quad (18.25)$$

Зміна кількості руху розглянутого об'єму довжиною dL буде:

$$(\omega dL \rho V) - (\omega dL \rho 0) = \omega dL \rho V, \quad (18.26)$$

Повторимося: швидкість у других дужках дорівнює нулю, тому що розглянутий об'єм рідини зупиняється.

Прирівнюючи ці вирази за теоремою про збереження кількості руху, отримаємо:

$$\omega \Delta P dt = \omega dL \rho V . \quad (18.27)$$

З (18.27) виразимо величину підвищення тиску ΔP :

$$\Delta P = \rho V \frac{dL}{dt} . \quad (18.28)$$

Після заміни дроби швидкістю a , остаточно будемо мати:

$$\Delta P = \rho V a , \quad (18.29)$$

де V – швидкість рідини в трубопроводі до виникнення гідроудару, ρ – густина рідини, a – швидкість поширення ударної хвилі.

Якщо в цю формулу (18.29) підставити вираз, який описує a , то прийдемо до формули, яка носить назву формули Жуковського:

$$\Delta P = \rho V \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{D}{E_m \delta} + \frac{1}{E_{жс}} \right)}} . \quad (18.30)$$

18.3 Протікання процесу гідравлічного удару в часі

Розглянутий раніше процес поширення ударної хвилі в трубопроводі не відбувається нескінченно довго. У дослідах Жуковського було зареєстровано по 12 повних циклів. При цьому величина ударного тиску ΔP поступово зменшувалася.

Зменшення тиску викликано тертям в трубі і розсіюванням енергії в резервуарі, що забезпечує вихідний напір. На графіку (рис. 18.11) суцільною заштрихованою областю показано теоретичну зміну тиску при гідроударі. Пунктирною лінією показано приблизний вигляд дійсної картини зміни тиску.

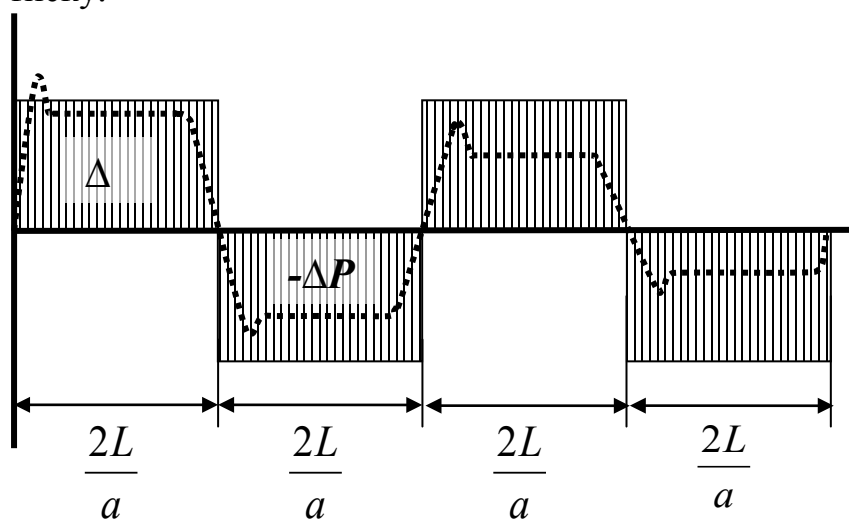


Рисунок 18.11 – Діаграма змінити тиску в трубопроводі при гідравлічному ударі

18.4 Різновиди гідроудару

Якщо трубопровід перекрити не повністю, то швидкість рідини зміниться не до нуля, а до значення V_1 . У цьому випадку може виникнути неповний гідроудар, при якому величина підвищення тиску (ударний тиск) буде меншою, ніж у першому випадку, а формула Жуковського (18.30) набуде вигляду $\Delta P = \rho(V - V_1)a$.

Наведені формули справедливі тільки в тому випадку, коли час закриття крана $t_{зак}$ менший фази гідравлічного удару $\frac{2L}{a}$, тобто $t_{зак} < \frac{2L}{a}$. У тому

випадку, якщо $t_{зак} > \frac{2L}{a}$, виникає непрямий гідроудар. Для нього характерно те, що відбита від резервуара на початку труби ударна хвиля повертається до заслінки крана раніше, ніж він буде повністю закритий. Величина ΔP в цьому випадку буде меншою, ніж при прямому гідроударі. Її наближено (вважаючи, що зміна P в трубопроводі відбувається за лінійним законом) можна визначити за формулою:

$$\Delta P = \rho V \left(\frac{2L}{t_{зак}} \right). \quad (18.31)$$

У гідроприводах технологічних машин, верстатів тощо дуже часто виникає так званий гідроудар в тупиковому трубопроводі. У цьому випадку можливе збільшення ударного тиску в два рази. Пояснити це можна таким рисунком 18.12.

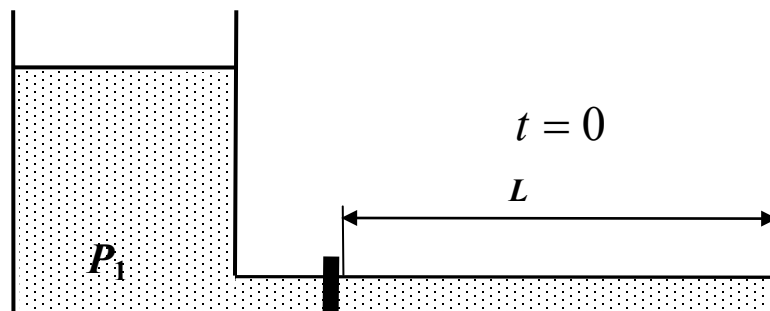


Рисунок 18.12 – Схема трубопроводу при гідравлічному ударі при $t=0$

Трубопровід з низьким початковим тиском відділений від джерела гідравлічної енергії високого тиску. При миттєвому (в реальних гідросистемах 0,008–0,001 с) відкритті заслінки крана тиск на початку трубопроводу раптово зростає на величину $\Delta P = P_1 - P_0$.

Виникає хвиля підвищеного тиску, яка рухається до кінця трубопроводу зі швидкістю a . Швидкість же руху рідини стає $V = \frac{\Delta P}{\rho a}$, а

тиск відрізняється від P_0 на величину ΔP . У момент часу $t = \frac{L}{a}$ хвиля досягне тупика, і вся труба виявиться розширеною (рис. 18.13).

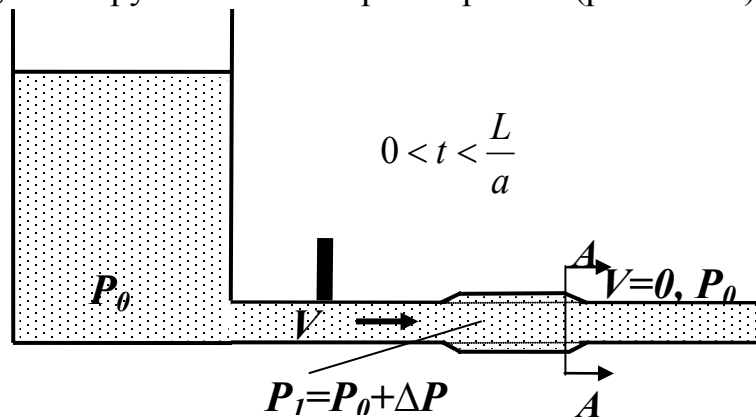


Рисунок 18.13 – Схема трубопроводу при гідравлічному ударі при $0 < t < L/a$

Оскільки подальший рух рідини неможливий, то передні її шари зупиняться, а наступні за інерцією набігатимуть на них (рис. 18.14). Це викличе додаткове підвищення тиску в кінці труби на величину ΔP . Виникне друга, відбита хвиля, яка рухається до початку трубопроводу зі швидкістю a . Тиск за фронтом ударної хвилі стає $P_2 = P_0 + 2\Delta P$, а швидкість рідини $V = 0$.

Далі весь процес триває як у випадку повного гідроудару, але коливання тиску відбуваються відносно величини $P_1 = P_0 + 2\Delta P$, а не відносно P_0 .

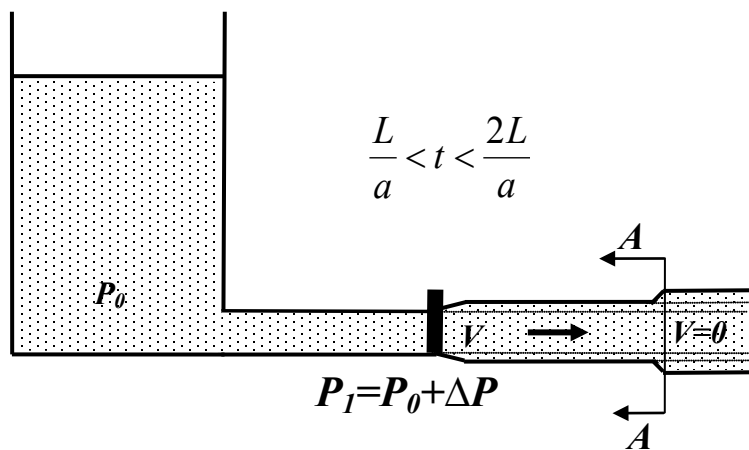


Рисунок 18.14 – Схема трубопроводу при гідравлічному ударі при $L/a < t < (2L)/a$

19 ОСОБЛИВІ ВИПАДКИ ЛАМІНАРНОЇ ТЕЧІЇ

19.1 Ламінарний потік в зазорах

19.1.1 Ламінарний потік в плоских зазорах

Розглянуті вище залежності, як уже зазначалося, дійсні для труб круглого перерізу, але вони потребують уточнення, якщо форма перерізу потоку відрізняється від форми кола. Такі потоки мають місце в каналах і прохідних щілинах гідроапаратури, в гідромашинах і в багатьох інших пристроях.

Спочатку розглянемо ламінарний потік в плоскому зазорі з нерухомими стінками, відстань між якими дорівнює a (рис. 19.1).

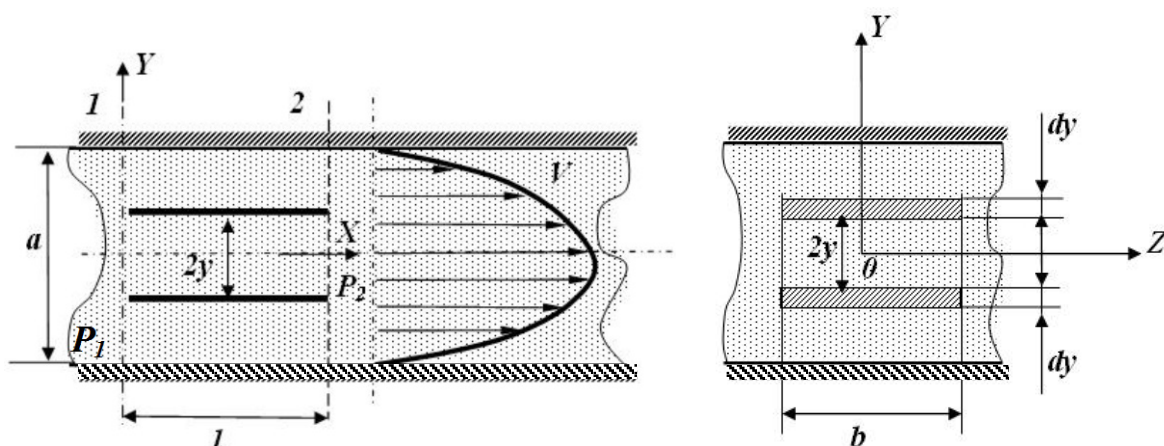


Рисунок 19.1 – Розрахункова схема ламінарного потоку в плоскому зазорі

Початок системи координат для простоти розмістимо в середині зазору. У цьому зазорі розглянемо два поперечних перерізи потоку 1 і 2, які знаходяться на відстані l один від одного. Ширину цієї частини потоку позначимо b . На ділянці l виділимо об'єм рідини в формі прямокутного паралелепіпеда, який має розміри $l \times 2y \times b$, симетрично розташованого в зазорі. Умовою рівномірного руху паралелепіпеда буде однаковість сил тиску і сил в'язкого тертя, які діють в напрямку руху:

$$(P_1 2yb - P_2 2yb) - \mu \left(-\frac{du}{dy}\right) 2lb = 0. \quad (19.1)$$

Знак « \rightarrow » перед силою в'язкого тертя означає, що вона спрямована проти руху. Знак « \leftarrow » перед градієнтом швидкості означає, що похідна $\frac{du}{dy}$ від'ємна, тобто із зростанням y , в прийнятій системі відліку, швидкість шару рідини зменшується. За аналогією із залежностями для труби круглого перерізу прийемо $\Delta P = h_{mp} \rho g$, тому збільшення швидкості можна записати у вигляді:

$$du = -\frac{h_{mp} \rho g}{\mu l} y dy. \quad (19.2)$$

Після інтегрування (19.2) за y отримаємо:

$$u = -\frac{h_{mp}\rho g}{\mu l} \int_y y dy = -\frac{h_{mp}\rho g}{\mu l} \frac{y^2}{2} + C. \quad (19.3)$$

Сталу інтегрування C із (19.3) визначимо з умов руху рідини біля верхніх стінок, де $y = \frac{a}{2}$, а $u = 0$. Тоді:

$$C = \frac{h_{mp}\rho g b}{2\mu l} \frac{a^2}{4}. \quad (19.4)$$

Після підстановки C у вираз для швидкості елементарного шару рідини u (19.3) набуде вигляду:

$$u = -\frac{h_{mp}\rho g}{\mu l} \frac{y^2}{2} + \frac{h_{mp}\rho g}{2\mu l} \frac{a^2}{4} = \frac{h_{mp}\rho g}{2\mu l} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right). \quad (19.5)$$

Остання формула (19.5) визначає те, як пов'язана швидкість рідини з відстанню від середини потоку, тобто від положення шару рідини в зазорі. Знаючи це, неважко визначити витрату рідини в зазорі. Для цього визначимо спочатку елементарну витрату dQ через елементарну площину висотою (товщиною) dy і шириною b , яка буде дорівнювати:

$$dQ = u dy = \frac{h_{mp}\rho g b}{2\mu l} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) dy. \quad (19.6)$$

Після інтегрування за y в межах половини висоти щілини від $y = 0$ до $y = \frac{a}{2}$, отримаємо половину витрат через щілину:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2} = u dy &= \frac{h_{mp}\rho g b}{2\mu l} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) dy = \\ &= \frac{h_{mp}\rho g b}{2\mu l} \left(\frac{a^2}{4} y \Big|_0^{\frac{a}{2}} - \int_0^{\frac{a}{2}} y^2 dy \right) = \\ &= \frac{h_{mp}\rho g b}{2\mu l} \left(\frac{a^3}{8} - \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\frac{a}{2}} \right) = \frac{h_{mp}\rho g b}{2\mu l} \left(\frac{a^3}{8} - \frac{a^3}{24} \right) = \\ &= \frac{h_{mp}\rho g b a^3}{2\mu l} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} \right) = \frac{h_{mp}\rho g b a^3}{2\mu l} \left(\frac{1}{12} \right). \end{aligned} \quad (19.8)$$

Тоді повна витрата через щілину буде в два рази більшою:

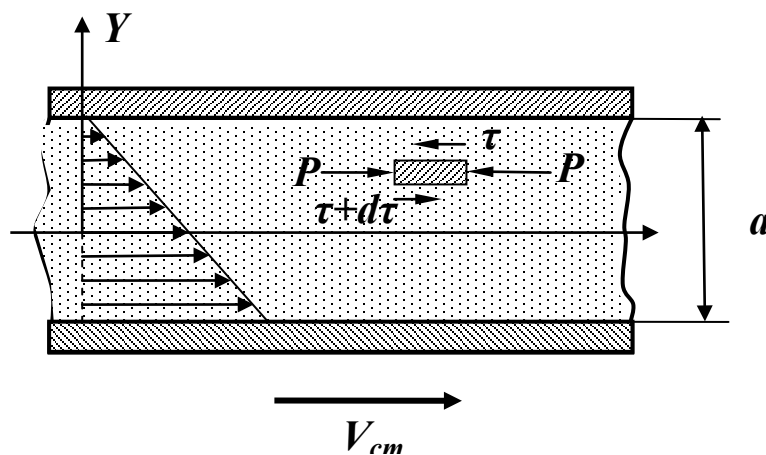
$$Q = \frac{h_{mp}\rho g b a^3}{12\mu l}. \quad (19.9)$$

Якщо врахувати, що середня швидкість в щілині буде $V = \frac{Q}{ab}$, то втрати напору в щілині з плоскими стінками становитимуть:

$$h_{mp} = \frac{Q12\mu l}{\rho g b a^3} = \frac{V a b 12 \mu l}{\rho g b a^3} = \frac{12 V \mu l}{\rho g a^2}. \quad (19.20)$$

19.1.2 Ламінарний потік в плоских зазорах з рухомою стінкою

У процесі роботи гідроапаратів і гідромашин може зустрітися ситуація, коли одна з плоских поверхонь, яка утворює зазор, переміщується паралельно іншій попутно або зустрічно напрямку потоку рідини. Рухома поверхня за рахунок сил в'язкого тертя підхоплює за собою рідину. Якщо при цьому тиск в рідині постійний, то виникає так званий фрикційний безнапірний рух. Епюра розподілу швидкостей в цьому випадку набуде трикутного вигляду (рис. 19.2), причому потрібно зауважити, що швидкості відносного руху в прилеглих до стінок шарах рідини дорівнюють нулю.



Рисунк 19.2 – Розрахункова схема ламінарного потоку в плоских зазорах з рухомою стінкою

У середині потоку рідини виділимо певний об'єм прямокутного перерізу і розглянемо діючі на нього сили. У прийнятих умовах на торцеві поверхні діє однаковий тиск, отже, однаковими будуть і сили. Тоді для досягнення рівноваги розглянутого об'єму необхідна рівність дотичних напружень на його нижній і верхній поверхнях. Звідси випливає, що $d\tau=0$ и τ – величина постійна. Отже, згідно із законом рідинного тертя Ньютона

$\tau = -\mu \frac{du}{dy} = C$. У цьому виразі C – стала, а знак « \leftarrow » означає, що при збільшенні dy приріст швидкості du стає від'ємним (швидкість зменшується). У такому випадку вираз для швидкості набуде вигляду:

$$du = -\frac{C dy}{\mu}. \quad (19.21)$$

Після інтегрування (19.21), отримаємо:

$$\int du = -\int \frac{C dy}{\mu} \Rightarrow u = -\frac{C}{\mu} y + C_1. \quad (19.22)$$

Сталі інтегрування C і C_1 знайдемо з умов на межах потоку, де при $y = \frac{a}{2}$ $u = 0$, а при $y = -\frac{a}{2}$ $u = V_{cm}$ (V_{cm} – швидкість руху стінки).

Підставивши ці значення у вираз для швидкості (19.22), отримаємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{C a}{\mu 2} + C_1 \\ V_{cm} = \frac{C a}{\mu 2} + C_1. \end{cases} \quad (19.23)$$

Виразивши з першого рівняння $C_1 = \frac{C a}{\mu 2}$, після підстановки його в друге рівняння системи (19.23) запишемо:

$$V_{cm} = \frac{C a}{\mu 2} + \frac{C a}{\mu 2} = \frac{C a}{\mu}. \quad (19.24)$$

Звідси стала C набуде вигляду $C = \frac{V_{cm} \mu}{a}$. Підставивши це у вираз для C_1 , будемо мати значення сталої інтегрування $C_1 = \frac{V_{cm} \mu a}{a \mu 2} = \frac{V_{cm}}{2}$.

Після визначення значень для сталих C і C_1 із рівняння (19.22) отримаємо формулу швидкості u :

$$u = V_{cm} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right). \quad (19.25)$$

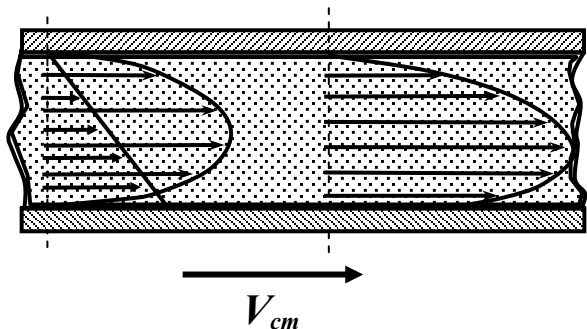


Рисунок 19.3 – Епюра розподілу швидкостей

Середня швидкість такого фрикційного потоку рідини становить половину швидкості рухомої поверхні, що неважко бачити на епюрі розподілу швидкостей по перерізу зазора (рис. 19.3):

$$V = \frac{V_{cm}}{2}, \quad (19.26)$$

а величину витрати можна обчислити за формулою:

$$Q = \frac{V_{cm}}{2} ab. \quad (19.27)$$

Аналізуючи вищесказане, можна прийти до висновку, що в проміжку між рухомою і нерухою поверхнями навіть за відсутності різниці тиску завжди буде потік рідини, швидкість якого визначається відносними швидкостями поверхонь.

Якщо фрикційний рух відбувається при перепаді тисків, то швидкості руху шарів в такому потоці складаються зі швидкостей, зумовлених фрик-

ційним рухом, і швидкостей, зумовлених напором. Величина швидкості напірного руху рідини в плоскій щілині була отримана в (19.20) і виглядає таким чином:

$$u = \frac{h_{mp} \rho g}{2 \mu l} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right). \quad (19.28)$$

Швидкість рухомої поверхні щілини V_{cm} може бути спрямована попутно або назустріч фрикційному потоку (рис. 19.4). У цьому випадку швидкості шарів рідини визначаються додаванням або обчисленням швидкостей, зумовлених фрикційним рухом, і швидкостей, зумовлених напором.

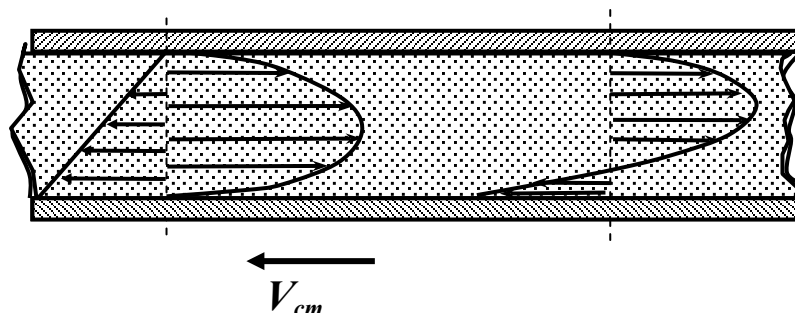


Рисунок 19.4 – Епюра розподілу швидкостей

При попутному русі:

$$u = \frac{h_{mp} \rho g}{2 \mu l} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) + V_{cm} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right), \quad (19.29)$$

при зустрічному:

$$u = \frac{h_{mp} \rho g}{2 \mu l} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) - V_{cm} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right). \quad (19.30)$$

Витрата рідини через плоску щілину при напірно-фрикційному русі складається із суми витрат при двох рухах окремо і становить:

$$Q = \frac{h_{mp} \rho g b a^3}{12 \mu l} \pm \frac{V_{cm}}{2} a b. \quad (19.31)$$

Перший доданок у формулі (19.31) називається напірною витратою, а другий – фрикційним, який додається або віднімається при попутному або зустрічному напрямку руху рухомої стінки щілини.

19.1.3 Ламінарний потік в кільцевих зазорах

Зазори у вигляді циліндричного кільця зустрічаються практично в кожному конструктивному елементі гідросистем: в будь-яких гідравлічних апаратах, гідромашинах, гідравлічної арматури. Ці зазори можуть бути як з рухомими, так і з нерухомими поверхнями. Усі міркування і отримані формули можуть бути застосовані до руху рідини в кільцевих зазорах (за умови, що цей рух направлено вздовж осей поверхонь, які утворюють за-

зор) для тих випадків, коли товщина зазору малá порівняно з радіусами поверхонь, що утворюють зазор, і не змінюється в напрямку руху рідини. Усі наведені міркування цілком можна застосувати до зазорів, які утворені поверхнями, розташованими ексцентрично.

Розглянемо загальний випадок (рис. 19.5), коли поверхні, що утворюють зазор, розташовані з ексцентриситетом e і, отже, величина зазора змінна і залежить від кута β .

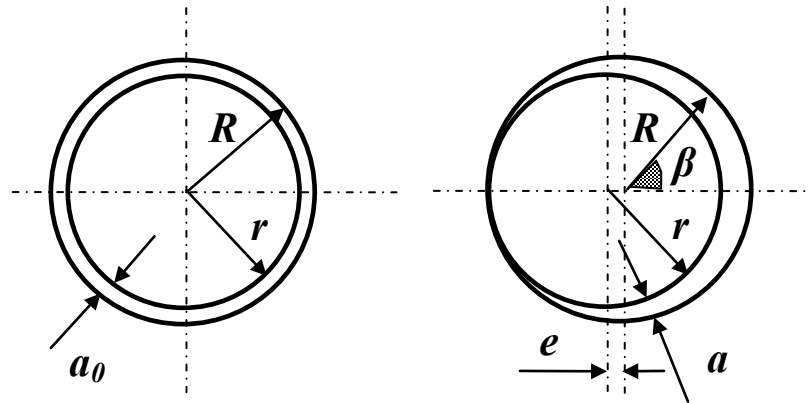


Рисунок 19.5 – Розрахункова схема кільцевого зазора

Якщо позначити відносний ексцентриситет $\varepsilon = \frac{e}{a_0}$ і врахувати, що $a_0 = R - r$, то величина зазору буде описуватися виразом:

$$a = R + e \cos \beta - r = a_0 (1 + \varepsilon \cos \beta). \quad (19.32)$$

Розглядаючи кільцевий зазор як плоску щілину шириною $rd\beta$ (якщо радіус r уявити великим катетом прямокутного трикутника, то ширину щілини можна визначити як $r \cdot \operatorname{tg} \beta$, а при малих кутах $r \cdot \beta$), можна отримати такий вираз для елементарної витрати:

$$dQ = \frac{h_{mp} \rho g a^3}{12 \mu l} rd\beta = \frac{h_{mp} \rho g a_0^3}{12 \mu l} (1 + \varepsilon \cos \beta)^3 rd\beta. \quad (19.33)$$

У результаті інтегрування (19.33) по колу отримаємо:

$$Q = \frac{h_{mp} \rho g a_0^3}{12 \mu l} r \int_0^{2\pi} (1 + \varepsilon \cos \beta)^3 d\beta = \frac{2\pi r h_{mp} \rho g a_0^3}{12 \mu l} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2\right). \quad (19.34)$$

Величина $\frac{2\pi r h_{mp} \rho g a_0^3}{12 \mu l}$ є витратою через кільцевий зазор при однаковій ширині по колу a_0 .

Це означає, що при максимально відносному ексцентриситеті $\varepsilon = 1$ (і при тій самій площі), величина витрат в 2,5 раза більша, ніж при концентричному зазорі a_0 .

19.1.4 Ламінарний потік в трубах прямокутного перерізу

Для визначення втрат енергії в таких трубах використовують формулу

Дарсі (нагадаємо $h_{mp} = \lambda_n \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}$) за умови, що коефіцієнт втрат на тертя λ_n

буде обчислюватися за формулою $\lambda_n = k \frac{64}{Re}$. Коефіцієнт k в такому виразі

є функція, яка залежить від співвідношення сторін труби $\left(\frac{a}{b}\right)$. Його зна-

чення можна визначити за таблицею 19.1:

Таблиця 19.1 – Коефіцієнти втрат енергії на тертя

$\frac{a}{b}$	1	1,5	2	3	4	5	6	∞
k	0,89	0,92	0,97	1,07	1,14	1,19	1,32	1,5

Число Рейнольдса для цього випадку потрібно підраховувати за збільшеним учетверо відношенням площі поперечного перерізу до його периметра:

$$Re = \frac{2abV}{(a+b)v}, \quad (19.35)$$

а замість d у формулі Дарсі використовувати величину $\frac{2ab}{a+b}$. Наведені ви-

рази для Re і d пояснюються тим, що залежність $\lambda_n = \frac{64}{Re}$, яка отримана з

формули Пуазейля, характеризує втрати в трубі круглого перерізу. Число

Рейнольдса в цьому випадку підраховується за формулою $Re = \frac{Vd}{\nu}$, а його

критичне значення становить 2300. Число Рейнольдса для некруглих труб

прийнято визначати за відношенням до площі живого перерізу до довжини змоченого периметра $Re = \frac{V\omega}{\chi}$, а його критичне значення становить 580,

тобто чверть від значення 2300. Тому це відношення необхідно поділити на чотири для того, щоб привести у відповідність коефіцієнт втрат λ_n для труб круглого і прямокутного перерізів.

З урахуванням перерахованої формула Дарсі для труб прямокутного перерізу набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
h_{mp} &= \lambda_n \frac{l V^2}{d 2g} = k \left(\frac{64}{2abV} \right) \left(\frac{l}{2ab} \right) \frac{V^2}{2g} = \\
&= k \frac{64lV^2}{8a^2b^2Vg} = k \frac{8lV(a+b)^2 v}{a^2b^2g}.
\end{aligned}
\tag{19.36}$$

19.1.5 Мастильний шар у підшипнику

Особливим випадком ламінарного руху рідини в кільцевому зазорі є відносно обертання двох циліндричних поверхонь, що утворюють кільцеву щілину між обертанням цапфи і нерухомого вкладиша [21].

За рахунок обертання цапфи і прилипання до її поверхні рідини утворюється гідравлічний клин, в якому розвивається гідродинамічний тиск, який породжує силу, що врівноважує сили навантаження, які діють на цапфу. Такі пристрої широко застосовуються в техніці і називаються підшипниками ковзання. Математичний опис, що застосовується для плоских щілин, до цього випадку не підходить, тому що величина зазору у напрямку руху непостійна, а рух рідини в підшипнику описується значно складнішими рівняннями. Тому в рамках реального курсу ми торкнемся лише основних результатів теорії підшипників ковзання рідинного тертя. Вона оснований на гідродинамічній теорії мастила, яка була розроблена російським ученим Петровим Н. П. в 1883 р. [14, 16]. Йому ж належить перша теоретична формула для коефіцієнта тертя підшипника ковзання.

У результаті спільного розв'язку шести рівнянь рівноваги для в'язкої рідини, рівняння нерозривності і трьох рівнянь руху, з урахуванням ряду припущень, отримано основне диференціальне рівняння гідродинамічної теорії мастил:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right] + 6 \frac{\mathcal{G}_{окр}}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0,
\tag{19.37}$$

де P – гідродинамічний тиск, μ – динамічна в'язкість, h – товщина плівки рідини, r – радіус цапфи, $\mathcal{G}_{окр}$ – кругова швидкість цапф, θ – поточне значення кута, в якому визначається тиск, z – координата, рахується від середини вкладиша в осьовому напрямку.

Розрахункова схема підшипника ковзання показана на рисунку 19.6, де використано такі позначення: D – діаметр цапфи, d – діаметр вкладиша, e – ексцентриситет між осями цапфи і вкладиша, $h_{хв}$ – мінімальна товщина плівки рідини, h_0 – товщина плівки рідини в області максимального

тиску, φ – кутова координата, θ_1 і θ_2 – значення кутів початку і кінця епюри тиску щодо відносно лінії центрів.

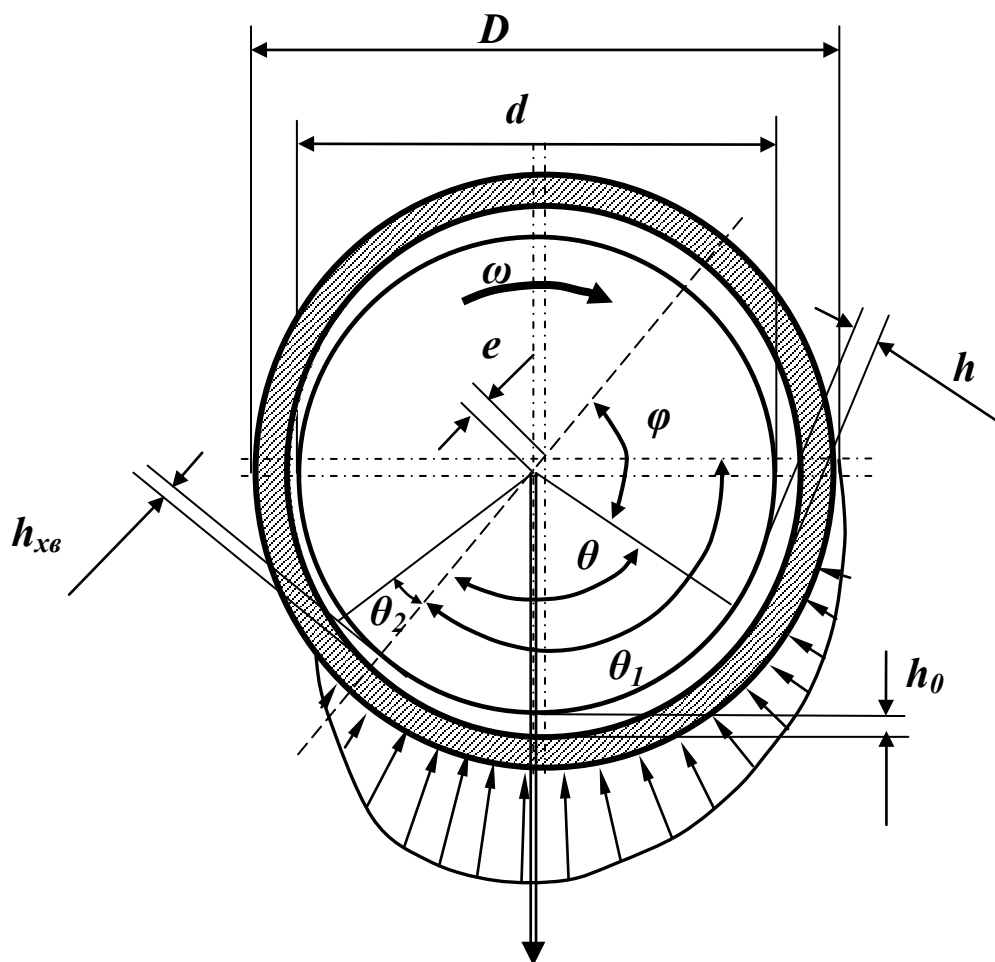


Рисунок 19.6 – Розрахункова схема підшипника ковзання

Без урахування торцевих витоків рідини основне рівняння гідродинамічної теорії мастила (19.37) спрощується і набуває вигляду:

$$\frac{\partial P_0}{\partial \theta} = 6\mu \vartheta_{\text{окр}} r \frac{h_0 - h}{h^3}, \quad (19.38)$$

де P_0 – тиск в будь-якій точці щілини для нескінченно довгого підшипника.

Для підшипника кінцевої довжини справедливим є рівняння, що визначає тиск φ :

$$P = P_0 c \left[1 - \left(\frac{2z}{l} \right)^2 \right]. \quad (19.39)$$

Дотичне напруження на цапфі τ дорівнює:

$$\tau = \mu \frac{\vartheta_{\text{окр}}}{h} - \frac{h}{2r} \frac{\partial P}{\partial \theta}. \quad (19.40)$$

Несуча здатність (вантажопідйомність) W підшипника:

$$W = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} P \cos(\theta - \varphi) d\theta dz. \quad (19.41)$$

Сила тертя F_{mp} і витрата рідини q_V визначається рівняннями:

$$F_{mp} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau r d\theta dz, \quad q_V = \frac{1}{6} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} d\theta. \quad (19.42)$$

Розв'язання останніх рівнянь (19.42) ускладнено залежностями зміни тиску в шарі рідини за кутом і за довжиною цапфи для певних геометричних розмірів підшипника.

На практиці для розрахунку підшипників ковзання використовують діаграми безрозмірних коефіцієнтів:

$$\zeta = f_1(\lambda, \chi), \varepsilon = f_2(\lambda, \chi), q = f_3(\lambda, \chi), \quad (19.43)$$

де ζ – коефіцієнт навантаженості підшипника,

$$\zeta = \frac{W\psi^2}{ld\omega\mu}; \quad (19.44)$$

де ε – коефіцієнт опору цапфи обертанню,

$$\varepsilon = \frac{N2\psi}{ld^2\omega^2\mu}; \quad (19.45)$$

де N – втрата потужності на подолання сил опору обертанню цапфи в підшипнику;

q – коефіцієнт торцевої витрати,

$$q = \frac{q_V}{0,5\psi\omega ld^2}; \quad (19.46)$$

де ψ – відносний зазор,

$$\psi = \frac{D-d}{d}; \quad (19.47)$$

де λ – відносна довжина підшипника,

$$\lambda = \frac{l}{d}; \quad (19.48)$$

де χ – відносний ексцентриситет,

$$\chi = \frac{e}{\delta_0}; \quad (19.49)$$

де δ_0 – середній зазор,

$$\delta_0 = \frac{D-d}{2}; \quad (19.50)$$

де ω – кутова швидкість обертання цапфи.

20 ОСОБЛИВИ РЕЖИМИ ТЕЧІЇ РІДИНИ

Крім досить докладно розглянутих видів руху рідини: ламінарного і турбулентного, руху рідини під час проходження різних опорів, витікань через насадки та інших, існують ще інші різновиди течії. Вони описуються набагато складнішим математичним апаратом або не описуються взагалі, або потребують складного експериментального вивчення. Нижче розглянемо основні з них, які нерідко виявляються в гідросистемах технологічного обладнання.

20.1 Кавітаційні течії

У деяких випадках при русі рідини виникають явища, пов'язані зі зміною її агрегатного стану, а саме, з перетворенням деяких її частинок в газоподібний стан.

Наприклад, при течії рідини через місцеве звуження труби відбувається збільшення швидкості і спад тиску. Якщо абсолютний тиск при цьому зменшується до значення, що дорівнює пружності насичених парів цієї рідини при заданій температурі, або до тиску, при якому починається інтенсивне виділення з неї газів, то в цьому місці потоку починається інтенсивне пароутворення і виділення газів. У розширеній частині потоку швидкість зменшується, а тиск зростає, і виділення парів та газів припиняється; пари, які виділилися, частково або повністю конденсуються, а гази поступово розчиняються.

Це місцеве порушення суцільності течії з утворенням парових і газових бульбашок (каверн), обумовлене місцевим спадом тиску в потоці, називається кавітацією.

Якщо в прозорій трубці, діаметр якої спочатку плавно зменшується, а потім ще більш плавно збільшується, тече потік рідини, швидкість якого регулюється, то можна візуально спостерігати такі явища (рис. 20.1).

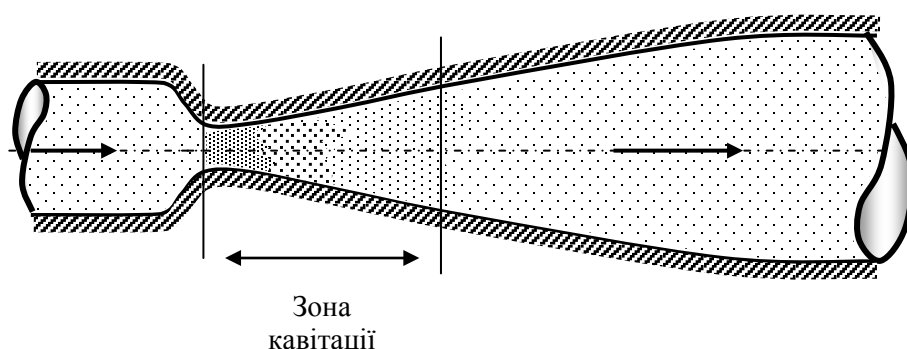


Рисунок 20.1 – Типова схема виникнення явища кавітації

При малій швидкості рідини спад тиску у вузькому місці трубки незначний, потік цілком прозорий. При збільшенні швидкості в трубці аб-

солотний тиск відповідно до рівняння Бернуллі буде спадати і при деякому значенні:

$$P_{abc} = P_{nn}, \quad (20.1)$$

де P_{nn} – тиск насичених парів, в трубі з’являється чітко видиме помутніння рідини, обумовлене появою пухирців газу. Це і є зона кавітації.

При подальшому збільшенні швидкості розміри зони кавітації зростають. Кавітація супроводжується характерним шумом, а при тривалому її впливі також і ерозійним руйнуванням твердих, як правило, металевих стінок. Останнє пояснюється тим, що конденсація бульбашок пари (і стиснення бульбашок газу) відбувається зі значною швидкістю, частинки рідини, що заповнюють порожнину конденсованих бульбашок, спрямовуються до його центра і в момент завершення конденсації викликають місцевий гідравлічний удар, тобто значне місцеве підвищення тиску. Руйнування матеріалу при кавітації відбувається не там, де виділяються бульбашки, а там, де вони конденсуються внаслідок тривалого впливу знакозмінних сил.

Кавітація в звичайних випадках явище небажане. При кавітації також зростає опір трубопроводів і, отже, зменшується їхня пропускна здатність.

Кавітація може виникати у всіх пристроях, де потік зазнає місцеве звуження з подальшим розширенням, наприклад, в кранах, вентилях, засувках, діафрагмах, жиклерах тощо. В окремих випадках виникнення кавітації можливо також і без розширення потоку слідом за його звуженням, а також в трубах постійного перерізу при збільшенні нівелірної висоти і гідравлічних втрат.

Кавітація може мати місце в гідромашинах (насосах і гідротурбінах), а також на лопатях швидкообертальних гребних гвинтів. У цих випадках наслідком кавітації є різке зниження коефіцієнта корисної дії машини і потім поступове руйнування її деталей, які піддаються впливу кавітації. У гідросистемах кавітація може виникати в трубопроводах низького тиску – у всмоктувальних трубопроводах. У цьому випадку область кавітації поширюється на значну частину всмоктувального трубопроводу або навіть на всю його довжину. Потік в трубопроводі при цьому стає двофазним, що складається з рідкої і парової фаз.

У початковій стадії паровиділення парова фаза може бути у вигляді дрібних бульбашок, розподілених по об’єму рідини, яка рухається приблизно рівномірно. При подальшому парогазовиділенні відбувається укрупнення бульбашок, які через горизонтальне розташування труби рухаються переважно у верхній частині її перерізу.

Надалі можливі випадки повного розділення парогазової і рідкої фаз та руху їх самостійними потоками, перша фаза – у верхній, друга – в нижній частині перерізу трубопроводу. При невеликих діаметрах трубопроводу можливе утворення парогазових пробок і рух фаз, рідкої і газової, що чергуються стовпчиками.

Зі збільшенням парогазової фази пропускна здатність трубопроводу значно зменшується. Конденсація виділених парів і розчинених газів відбувається в насосах, де тиск значно підвищується, і в напірних трубопроводах, по яких рідина рухається під високим тиском від насоса до споживача.

Кавітація, спричинена виділенням парів рідини, відбувається по-різному в однокомпонентних (простих) і багатокомпонентних (складних) рідинах. Для однокомпонентної тиск рідини, відповідає початку кавітації і цілком визначається пружністю насичених парів, які залежать тільки від температури, а кавітація протікає так, як було описано вище.

Багатокомпонентна рідина складається з легких і важких фракцій. Перші мають великі значення пружності парів, ніж другі, тому при кавітації спочатку закипають легкі фракції, а потім важкі. Конденсація же парів відбувається в зворотному порядку, спочатку випадають важкі фракції, потім – легкі.

За наявності легких фракцій багатокомпонентні рідини більш схильні до кавітації, і парова фаза в них утримується довше, але процес кавітації виражений менш різко, ніж у однокомпонентних рідин.

Для характеристики течії з кавітацією застосовується безрозмірний критерій χ , який називається числом кавітації і дорівнює:

$$\chi = \frac{P - P_n}{\rho V^2}, \quad (20.2)$$

де P – абсолютний тиск, P_n – тиск пароутворення, V – швидкість потоку.

Зазвичай число кавітації χ визначають на вході в той чи інший агрегат, всередині якого можливе виникнення кавітації.

Значення χ , при якому в агрегаті починається кавітація, називається критичним числом кавітації. При $\chi > \chi_{кр}$ коефіцієнт агрегата ζ від χ не залежить, а при $\chi < \chi_{кр}$ зростає зі зменшенням χ .

Зазвичай прагнуть до того, щоб кавітацію в гідросистемах не допускали. Але можна відзначити, що іноді це явище виявляється корисним. Його використовують в кавітаційних регуляторах витрати, що забезпечують практично постійну витрату через зону кавітації. На принципі використання гідравлічних мікроударів, що відбуваються при кавітації, побудовані пристрої для регенерації (очищення від забруднень) очищення елементів фільтрів.

20.2 Течія із облітерацією

При протіканні рідини через капіляри, а також малі зазори спостерігається явище, яке не можна пояснити законами гідравліки. Це явище полягає в тому, що витрата рідини через капіляр або зазор з часом зменшується, незважаючи на те, що перепад тиску, при якому відбувається

рух рідини, і її фізичні властивості залишаються незмінними. Причина цього явища криється в тому, що за певних умов відбувається ніби засмічення (заростання) каналу твердими частинками, причому в зазорах і капілярних каналах розміром, меншим 0,01 мм, може статися повне заростання прохідного перерізу і зменшення витрат до нуля. Цей процес носить назву облітерації і полягає в тому, що на поверхні розділу твердого тіла і рідини відбувається під дією молекулярних та електромагнітних сил, що виникають між стінкою і рідиною, адсорбція, тобто ущільнення рідини до практично твердого стану на поверхні стінки.

Ступінь облітерації залежить від молекулярної структури рідини, причому це явище більшою мірою проявляється в складних, високомолекулярних рідинах типу масляної суміші на газовій основі, яка застосовується в силових гідросистемах. Товщина адсорбційного шару для рідин такого типу становить кілька мікрометрів. Тому при протіканні через капіляри і малі зазори цей шар може істотно зменшити площу поперечного перерізу каналу або навіть повністю його перекрити.

З підвищенням температури інтенсивність адсорбції, а отже, і облітерації, знижується. Підвищення перепаду тиску, під яким відбувається рух рідини через зазор або капіляр, навпаки, збільшує ступінь облітерації.

Якщо одна зі стінок, що утворюють зазор, приводиться в рух, тобто відбувається зрушення, то утворені адсорбційні шари руйнуються, облітерація усувається і відновлюється початкова витрата рідини через зазор. Проте для такого зсуву звичайно необхідне значне зусилля. У зазорах між рухомою і нерухомою стінками облітерації не відбувається.

Для уникнення облітерації каналів жиклерів і дроселів рекомендується їх отвори виконувати не менше 0,2–0,4 мм. Для усунення облітерації через дросельований отвір пропускають стрижень, що переміщується зворотно-поступально і забезпечує автоматичне очищення отвору (руйнування адсорбційного шару).

20.3 Течія з теплообміном

У розглянутих вище випадках ламінарної течії не враховувалась зміна температури і, отже, зміна в'язкості рідини як в межах поперечного перерізу, так і вздовж потоку, тобто приймалась сталість температури у всіх точках потоку. Подібний рух називають ізотермічним. У загальному випадку, звичайно, рух рідини по гідросистемі супроводжується зміною температури.

Очевидно, що якщо по трубопроводу рухається рідина, температура якої значно вища за температуру навколишнього середовища, то такий потік супроводжується теплопередачею через стінку труби в навколишнє середовище і, отже, охолодженням рідини. Коли ж температура рідини, що рухається, нижча температури навколишнього середовища, тоді

відбувається притік тепла через стінку труби. У результаті рідина в процесі течії нагрівається.

В обох зазначених випадках при течії рідини здійснюється теплообмін із навколишнім середовищем. При цьому температура і в'язкість рідини не постійні, а рух не ізотермічний.

Тому ті залежності, які були отримані в припущенні постійності в'язкості по перерізу потоку, при течії зі значним теплообміном потребують поправок. При течії рідини, що супроводжується її охолодженням, шари рідини, які безпосередньо прилягають до стінки, мають температуру нижчу, а в'язкість вищу, ніж в основній частині потоку. Внаслідок цього гальмування рідини в пристінних шарах більш інтенсивне, а градієнт швидкості біля стінки менший за градієнт швидкості в основній частині потоку.

При течії, яка супроводжується нагріванням рідини, обумовленим притоком тепла через стінку, пристінні шари рідини будуть мати більш високу температуру і меншу в'язкість, внаслідок чого градієнт швидкості біля стінки буде більшим, ніж в основній частині потоку. Таким чином, внаслідок теплообміну через стінку труби між рідиною і зовнішнім середовищем відбувається порушення параболічного закону розподілу швидкостей по перерізу потоку.

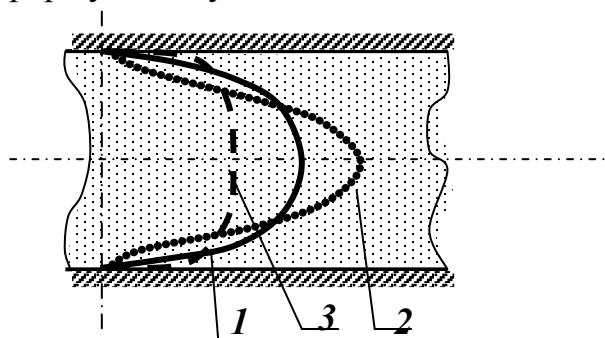


Рисунок 20.2 – Епюра розподілу швидкостей

На рисунку 20.2 показано порівняльні епюри розподілу швидкостей при ізотермічній течії (лінія 1), при течії з охолодженням рідини (лінія 2) і при течії з її нагріванням (лінія 3). З рис. 20.2 видно, що охолодження рідини тягне за собою збільшення нерівномірності розподілу швидкостей, а нагрівання – зменшення, порівняно із звичайним параболічним розподілом швидкостей.

Зміна профілю швидкостей при відхиленні від ізотермічної течії викликає зміну закону опору потоку рідини.

При ламінарній течії в'язких рідин в трубах з теплообміном (охолодженням) опір виходить більшим, а при течії з притоком тепла (нагріванням) меншим, ніж при ізотермічній течії.

З огляду на те, що точний розв'язок задачі про течію рідини з теплообміном досить складний, оскільки доводиться враховувати зміну температури і в'язкості рідини у поперечному перерізі і уздовж труби, а також розглядати теплові потоки в різних перерізах труби, для практичних розрахунків користуються наближеною формулою для визначення коефіцієнта втрат на тертя з урахуванням теплообміну:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}_{\text{ср.жс}}} \sqrt{\frac{\nu_{\text{ср.тсн}}}{\nu_{\text{ср}}}}, \quad (20.3)$$

де $\text{Re}_{\text{ср.р}}$ – число Рейнольдса, підраховане за середньою в'язкістю рідини, $\nu_{\text{ср.тсн}}$ – в'язкість рідини, яка відповідає середній температурі стінки, $\nu_{\text{ср}}$ – середня в'язкість рідини.

20.4 Течія при великих перепадах тиску

У високонапірних гідромашинах, наприклад гідравлічних пресах, може відбуватися ламінарний потік рідини через малі зазори при великих перепадах тисків порядку декілька десятків і навіть сотень мегапаскалів.

Досвід показує, що в таких випадках спад напору уздовж потоку виявляється суттєво нелінійним, а закон Пуазейля дає помітну похибку.

При таких течіях необхідно враховувати нагрівання рідини, яке веде до зменшення її в'язкості, причому ступінь впливу цього фактора буде зростати уздовж потоку рідини. З іншого боку, зі збільшенням тиску в'язкість рідин зростає. Таким чином, в'язкість рідини змінна уздовж потоку і, як результат одночасної дії двох зазначених факторів, повздовжній градієнт тиску $\frac{dP}{dl}$, обумовлений тертям, виявляється непостійним.

Зазначені фактори впливають і на витрату: підвищення температури сприяє її збільшення, а високий тиск в рідині – її зменшення, порівняно зі значенням, визначеним законом Пуазейля. Таким чином, вплив цих двох факторів на витрату є протилежним.

Розглянемо задачу про ламінарну течію в зазорі з товщиною a , довжиною l і шириною b з урахуванням впливу на в'язкість тиску і температури (рис. 20.3). При цьому допускаємо, що густина рідини не залежить від тиску і температури, а розміри зазору такі, що його товщина значно менша ширини.

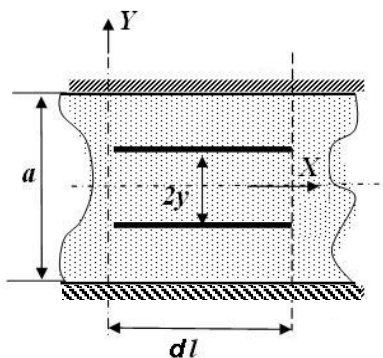


Рисунок 20.3 –
Розрахункова схема
ламінарної течії рідини в
зазорі

Раніше було встановлено, що витрата через плоску щілину становить:

$$Q = \frac{h_{\text{мп}} \rho g b a^3}{12 \mu l} = \frac{h_{\text{мп}} \rho g}{l} \times \frac{b a^3}{12 \mu}. \quad (20.4)$$

Фізична суть першого множника в цьому добутку (20.4) – втрати на тертя по довжині щілини. Він показує, як швидко втрачається енергія за ходом течії рідини. Причому втрати на тертя $h_{\text{мп}} \rho g$ є ніщо інше, як зменшення тиску по довжині щілини l . Якщо врахувати сказане і перейти до межі, цю величину можна характеризувати спадом тиску по довжині зазору у вигляді:

$$-\frac{dP}{dl}. \quad (20.5)$$

Знак « \rightarrow » у формулі (20.5) показує, що тиск по довжині зазору зменшується.

З урахуванням останнього і в перерахунку на одиничну ширину зазору ($b=1$) витрату через щілину (20.4) можна записати у вигляді:

$$Q = -\frac{dP}{dl} \frac{a^3}{12\mu}. \quad (20.6)$$

При розгляді властивостей рідини згадувалися формули, які враховують зміну коефіцієнта динамічної в'язкості μ від температури:

$$\mu_t = \mu_0 e^{-k_t(T-T_0)} \quad (20.7)$$

і тиску:

$$\mu_p = \mu_0 e^{k_p(P-P_0)}. \quad (20.8)$$

Для одночасного врахування впливу на в'язкість рідини, тиск і температуру можна взяти:

$$\mu = \mu_0 e^{k_p(P-P_0) - k_t(T-T_0)}. \quad (20.9)$$

У наведених формулах, нагадаємо, використано такі позначення: μ_t – динамічний коефіцієнт в'язкості при заданій температурі; μ_p – динамічний коефіцієнт в'язкості при заданому тиску; T_0 , P_0 , μ_0 – температура, тиск і динамічний коефіцієнт в'язкості рідини на початку зазору; T , P , μ – температура, тиск і динамічний коефіцієнт в'язкості рідини в кінці зазору; k_t – коефіцієнт, для мінеральних мастил дорівнює 0,02–0,03; k_p – коефіцієнт, для мінеральних мастил дорівнює 0,002–0,003; e – основа натурального логарифма, яка дорівнює 2,718282.

Тепер запишемо рівняння теплової енергії. Рівність між витратою енергії на тертя, яка перетворилася на тепло, і приростом теплової енергії рідини за одиницю часу:

$$Q\rho C(T - T_0) = k(P_0 - P)Q,$$

де C – теплоємність рідини; k – коефіцієнт, що враховує частку роботи сил в'язкості, яка йде на нагрівання рідини.

При $k=1$ тепловіддача в стінку відсутня, і вся витрачена енергія, обумовлена в'язким тертям, йде на нагрівання рідини. При $k=0$ відбувається максимальна тепловіддача в стінку, в результаті чого підвищення температури рідини не відбувається (ізотермічний рух).

З останньої рівності (20.9) можна отримати:

$$T - T_0 = \frac{k}{\rho C} (P_0 - P). \quad (20.10)$$

Після підстановки цієї рівності (20.10) у вираз степеня формули (20.9) для μ отримаємо:

$$\mu = \mu_0 e^{k_p(P-P_0) - k_t \left(\frac{k}{\rho C} (P_0 - P) \right)} = \mu_0 e^{(P_0 - P) \left(k_p + \frac{k_t k}{\rho C} \right)}. \quad (20.11)$$

Виконаємо поділ змінних в рівнянні витрати через зазор (20.6):

$$\frac{12Q}{a^3} dl = -\frac{dP}{\mu}. \quad (20.12)$$

Використовуємо отриманий зв'язок між μ і P і виконаємо підстановку:

$$\frac{12Q}{a^3} dl = -\frac{dP}{\mu_0 e^{(P_0 - P) \left(k_p + \frac{k_t k}{\rho C} \right)}}. \quad (20.13)$$

Зробимо алгебраїчні перетворення: домножимо обидві частини (20.13) на μ_0 і змінимо знак степеня при e ($x^y = \frac{1}{x^{-y}}$):

$$\frac{12Q\mu_0}{a^3} dl = -e^{(P-P_0) \left(k_p + \frac{k_t k}{\rho C} \right)} dP. \quad (20.14)$$

Проінтегруємо останній вираз (20.14):

$$\int \frac{12Q\mu_0}{a^3} dl = -\int e^{(P-P_0) \left(k_p + \frac{k_t k}{\rho C} \right)} dP. \quad (20.15)$$

Результатом інтегрування (20.15) буде рівність:

$$\frac{12Q\mu_0}{a^3} l = \frac{1}{k_p + \frac{k_t k}{\rho C}} e^{(P-P_0) \left(k_p + \frac{k_t k}{\rho C} \right)} + C_1. \quad (20.16)$$

Постійним інтегрування C_1 знайдемо, враховуючи, що в початковому перерізі потоку при $l=0$, $P=P_0$. Отже отримаємо:

$$C_1 = -\frac{1}{k_p + \frac{k_t k}{\rho C}}. \quad (20.17)$$

Підставивши сталу інтегрування C_1 , отримаємо:

$$\frac{12Q\mu_0}{a^3} l = \frac{1}{k_p + \frac{k_t k}{\rho C}} \left(e^{(P-P_0) \left(k_p + \frac{k_t k}{\rho C} \right)} - 1 \right). \quad (20.18)$$

Виразивши з (20.18) Q :

$$Q = \frac{a^3}{12\mu_0 l} \left(\frac{1}{k_p + \frac{k_t k}{\rho C}} \left(e^{(P-P_0) \left(k_p + \frac{k_t k}{\rho C} \right)} - 1 \right) \right). \quad (20.19)$$

Наведену формулу (20.19) можна аналізувати з різних позицій. Ми подивимося на неї тільки з однієї точки зору. Порівняємо її з формулою витрати через щілину, отриману на підставі закону Пуазейля. Витрата за законом Пуазейля лінійно змінюється при зміні тиску. Остання ж формула

(20.19), що враховує зміну в'язкості при зміні тиску і теплообмін в потоці, що має місце, коли рідина рухається з великими швидкостями і при великих перепадах тиску, описує зв'язок тиску і витрати степеневою функцією. При цьому чим вищий тиск, тим більше відхилення витрати від лінійної залежності, яка відповідає закону Пуазейля. Пояснюється це тим, що витрата рідини при ламінарній течії пропорційна перепаду тиску ΔP , а величина втраченої енергії, яка дорівнює добутку $\Delta P \cdot Q$, пропорційна квадрату перепаду тиску. З цієї причини втрата енергії на одиницю витрати рідини зростає пропорційно перепаду тиску.

ЛІТЕРАТУРА

1. Башта Т. М. Гидравлика, гидравлические машины и гидравлические приводы / Башта Т. М. – М. : Машиностроение, 1970. – 504 с.
2. Башта Т. М. Машиностроительная гидравлика / Башта Т. М. – М. : Машиностроение, 1971. – 672 с.
3. Іскович-Лотоцький Р. Д. Математичне моделювання зусилля на робочому органі вібратора з гідроімпульсним приводом / Р. Д. Іскович-Лотоцький, І. В., Я. В. Іванчук, Є. І. Івашко // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини : зб. наук. пр. / Київ. нац. ун-т буд-ва і архіт. – Київ, 2018. – № 91 (2018). – С. 5 – 12. doi: 10.26884/gbdmm1891.0101 (BAK).
4. Rostislav D. Iskovych-Lototsky, Yaroslav V. Ivanchuk, Natalia R. Veselovska, Wojciech Surtel, Samat Sundetov. "Automatic system for modeling vibro-impact unloading bulk cargo on vehicles", Proc. SPIE 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments 2018, 1080860 (1 October 2018). doi: 10.1117/12.2501526.
5. Орлов Ю. М. Механика жидкости, гидравлические машины и основы гидропривода агрегатов ракетных комплексов : учебное пособие / Орлов Ю. М. – М. : ООО «Пресс-мастер», 2001. – 379 с.
6. Rostislav D. Iskovych-Lototsky, Yaroslav V. Ivanchuk, Yaroslav P. Veselovsky, Konrad Gromaszek, Ayaulym Oralbekova. "Automatic system for modeling of working processes in pressure generators of hydraulic vibrating and vibro-impact machines", Proc. SPIE 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments 2018, 1080850 (1 October 2018). doi: 10.1117/12.2501532.
7. Иванов В. И., Навроцкий В. К., Сазанов И. И., Трифонов О. Н. Гидравлика и объемный гидропривод : [учебное пособие] / В. И. Иванов, В. К. Навроцкий, И. И. Сазанов, О. Н. Трифонов. – М. : ИЦ МГТУ «СТАНКИН», 2003. – 154 с.
8. Іскович-Лотоцький Р. Д. Моделювання руху двомасового вібраційного живильника на базі гідроімпульсного приводу / Р. Д. Іскович-Лотоцький, І. В. Коц, Я. В. Іванчук, Є. І. Івашко // Збірник наукових праць Кіровоградського національного технічного університету. Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація. – вип. 31. – Кропивницький: КНТУ, 2018. – С. 3 – 9.
9. Шейпак А. А. Гидравлика и гидропневмопривод. Ч1. Основы механики жидкости и газа. : учебное пособие / Шейпак А. А. – [2-е изд. перераб. и доп.]. – М. : МГИУ, 2003. – 192 с.
10. Іскович-Лотоцький Р. Д. Моделювання робочих процесів гідроімпульсного приводу з однокаскадним клапаном пульсатором / Р. Д. Іскович-Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський // Вібрації в техніці та технологіях. – Вінниця, 2017. – № 3(86). – С. 10–19.
11. Схиртладзе А. Г. Гидравлические и пневматические системы /

Схиртладзе А. Г., Иванов В. И., Кареев В. Н. – М. : ИЦ МГТУ «Станкин», Янус-К, 2003. – 544 с.

12. Іскович-Лотоцький Р. Д. Математичне моделювання робочих процесів інерційного вібропрес-молота з електрогідравлічною системою керування гідроімпульсного привода для формоутворення заготовок з порошкових матеріалів // Р. Д. Іскович-Лотоцький, В. П. Міськов, Я. В. Іванчук // Вісник Хмельницького національного університету. Серія: Технічні науки. – 2016. – №3 (237). – С. 176 – 180.

13. Іскович-Лотоцький Р. Д. Оптимізація конструктивних параметрів інерційного вібропрес-молота // Р. Д. Іскович-Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський // Вісник машинобудування та транспорту. – 2016. – № 2. – С. 43 – 50.

14. Іскович-Лотоцький Р. Д. Підвищення ефективності розвантаження матеріалів під дією періодичних ударних імпульсів / Р. Д. Іскович-Лотоцький, Я. В. Іванчук // Вібрації в техніці і технологіях. – 2008. – № 2(51). – С. 8 – 11.

15. Избаш С. В. Основы гидравлики / Избаш С. В. – М. : Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1952. – 423 с.

16. Іскович-Лотоцький Р. Д. Застосування гібридного моделювання при розробці установок для утилізації відходів. / Р. Д. Іскович-Лотоцький, Я. В. Іванчук, Д. В. Тесовський, Я. П. Веселовський // Технологічні комплекси. Науковий журнал – Луцьк, 2012. – № 1, 2 (5, 6). – С. 122 – 126.

17. Чугаев Р. Р. Гидравлика : учебник для вузов / Чугаев Р. Р. – [4-е изд. доп. и перераб.]. – Л. : Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1982. – 672 с.

18. Іскович-Лотоцький Р. Д. Визначення робочих параметрів гідроімпульсного вібропреса для потокового віброударного зневоднення вологих дисперсних матеріалів / Р. Д. Іскович-Лотоцький, І. В. Севостьянов, Я. В. Іванчук, В. С. Любин // Промислова гідравліка і пневматика (Вінницький державний аграрний університет, Асоціація спеціалістів промислової гідравліки і пневматика). – 2012. – № 4(38). – С. 57 – 65

19. Іскович-Лотоцький Р. Д. Аналіз використання гідроімпульсних вібророзвантажувальних пристроїв на автомобільному транспорті // Р. Д. Іскович-Лотоцький, Я. В. Іванчук // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2011, – № 6. – С. 228 – 231.

20. Іскович-Лотоцький Р. Д. Застосування вібраційного гідроімпульсного привода в будівельних і дорожніх машинах / Р. Д. Іскович-Лотоцький, Я. В. Іванчук // Збірник наукових праць Харківської державної академії залізничного транспорту. – Харків, 2008. – № 88. – С. 48 – 54.

21. Іскович-Лотоцький Р. Д. Дослідження динаміки процесу роботи універсального гідравлічного віброударного привода для розвантаження транспортних засобів / Р. Д. Іскович-Лотоцький, Я. В. Іванчук // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямом «Інженерна механіка»)– Луцьк, 2007. – № 20. – С. 184 – 187.

Навчальне видання

**Іванчук Ярослав Володимирович
Іскович-Лотоцький Ростислав Дмитрович**

**ГІДРАВЛІКА, ГІДРО- ТА ПНЕВМОПРИВОДИ
ЧАСТИНА 1
ОСНОВНІ ЗАКОНИ, РІВНЯННЯ І ВИЗНАЧЕННЯ**

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *Я. Іванчуком*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовлено *О. Ткачуком*

Підписано до друку 22.07.2019.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 11,16.
Наклад 50 (1-й запуск 1–21) пр. Зам. № 2019-102.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.