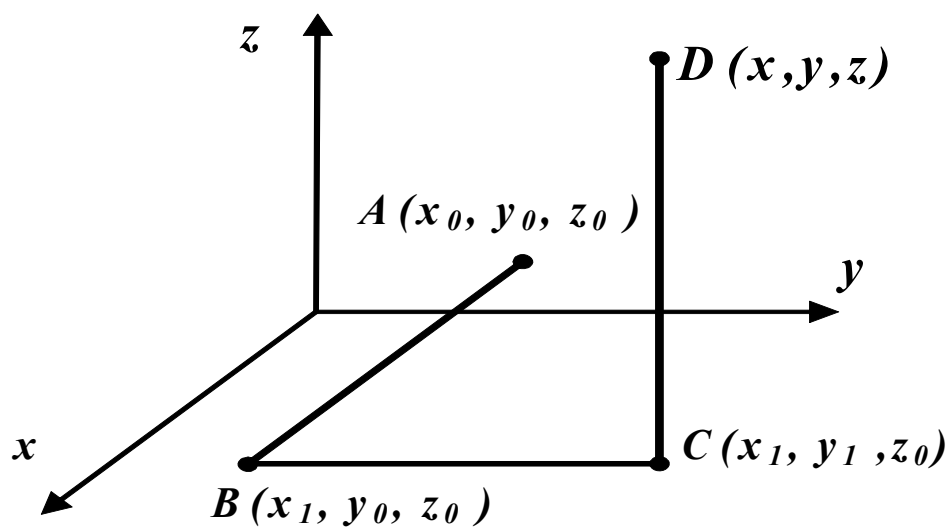


Н. В. Сачанюк-Кавецька, М. Б. Ковальчук

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ.

Основні поняття, формули та алгоритми для самостійної роботи студентів



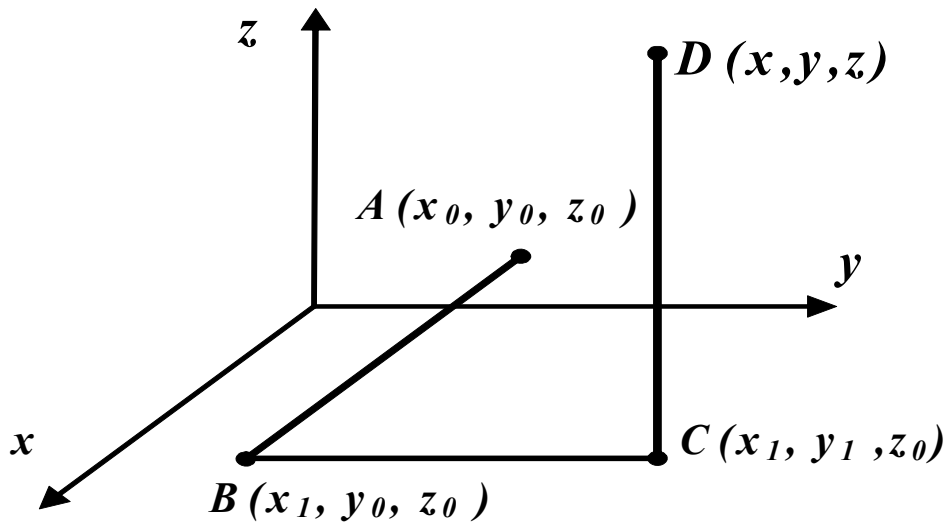
Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Н. В. Сачанюк-Кавецька, М. Б. Ковальчук

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ.

Основні поняття, формули та алгоритми для самостійної роботи студентів.

Навчальний посібник



Вінниця
ВНТУ
2019

УДК 612.623

С 22

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № від .05. 2019 р.)

Рецензенти:

Плакса С. А., доктор фізико-математичних наук, професор

Іванченко Є. А., доктор педагогічних наук, професор

Петрук В. А., доктор педагогічних наук, професор

Сачанюк-Кавецька Н. В.

С 22 Вища математика. Елементи теорії поля. Основні поняття, формули та алгоритми для самостійної роботи студентів: навч. посіб. / Сачанюк-Кавецька Н. В., Ковальчук М. Б. – Вінниця: ВНТУ, 2019. – 112с.

Сучасне суспільство вимагає від вищої школи підготовку фахівця, що володіє новим типом мислення, спроможний здобувати знання протягом всього життя та вміє творчо й якісно вирішувати професійні та життєві завдання та проблеми. Процеси глобалізації у розвитку науки висувають відмінні від традиційних вимоги до підготовки інженерів, що мають підвищений рівень фундаментальної математичної підготовки з посиленням її прикладної спрямованості.

В посібнику розглянуто поняття скалярного та векторного полів, їх основні характеристики; спеціальні типи полів. Наведена достатня кількість прикладів та задач, в тому числі і прикладного характеру. Розглянуті приклади вдало доповнюють текстовий матеріал, зрозумілі і легко сприймаються.

До кожної теми розроблені питання для самоперевірки та розглянуто вправи для самостійної роботи. Перевірити рівень засвоєння знань можна за допомогою розроблених тестів та кросвордів.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей, аспірантів.

УДК 612.623

© Н. В. Сачанюк-Кавецька,
М. Б. Ковальчук
2019

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
ТЕМА 1 СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ ТА ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ. ПОНЯТТЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ	8
1.1. Локальні характеристики скалярного поля	13
1.2. Просторові інтеграли	20
Питання для самоперевірки	23
Вправи для самостійної роботи	23
ТЕМА 2 ПОНЯТТЯ ПОТОКУ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ	25
2.1. Потік векторного поля	25
2.2. Поверхневі інтеграли другого роду. Обчислення потоку векторного поля	28
2.3. Алгоритм обчислення потоку векторного поля	32
2.4. Формула Остроградського-Гаусса	38
Питання для самоперевірки	40
Вправи для самостійної роботи	41
ТЕМА 3 ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ	42
3.1. Дивергенція (розбіжність) векторного поля. Обчислення дивергенції векторного поля в декартовій системі координат	42
3.2. Циркуляція векторного поля та її обчислення	45
3.3. Проекція ротора векторного поля на вектор нормалі та ротор векторного поля	49
3.4. Формула Стокса	52
3.5. Оператор Гамільтона	54
3.6. Диференціальні операції другого порядку	56
Питання для самоперевірки	61
Вправи для самостійної роботи	62
ТЕМА 4 СПЕЦІАЛЬНІ ТИПИ ПОЛІВ	64
4.1. Потенціальні векторні поля	64
4.2. Соленоїдні (трубчасті) поля	71
4.3. Гармонічне поле	74
4.4. Рівняння Максвелла	76
Питання для самоперевірки	78
Вправи для самостійної роботи	78
ПЕРЕВІР СЕБЕ	79
5.1. Розв'яжіть тестові завдання	79
5.2. Розгадайте кросворди	108
ЛІТЕРАТУРА	114

ПЕРЕДМОВА

Сучасне суспільство вимагає від вищої школи підготовку фахівця, що володіє новим типом мислення, спроможний здобувати знання протягом всього життя та вміє творчо й якісно вирішувати професійні та життєві завдання та проблеми. Процеси глобалізації у розвитку науки висувають відмінні від традиційних вимоги до підготовки інженерів, що мають підвищений рівень фундаментальної математичної підготовки з посиленням її прикладної спрямованості.

Сучасні тенденції організації навчального процесу вищої школи передбачають впровадження кредитно-модульної системи навчання. Традиційно, має місце гонитва за кількістю балів та відсутнє розуміння сутності методологічного принципу такого підходу який передбачає переорієнтацію організації навчального процесу з суто лекційно-інформаційно-практичної форми на індивідуально-диференційовану та особистісно-орієнтовану. Ідеологія освіти нинішнього етапу спрямована на суспільство знань і вимагає готовності молоді до щоденної організації самоосвіти. Розроблені останнім часом державні стандарти вищої освіти передбачають в основу навчання покласти самостійну, творчу роботу студентів. У самій структурі навчання студента індивідуальна робота розглядається як один із основних чинників добування знань і повинна займати близько половини його навчального навантаження. Традиційне методичне забезпечення не в змозі забезпечити мотивацію такого навчання. Тому актуальною є необхідність створення навчальних посібників, що забезпечують підготовку самодостатніх фахівців.

Першим математизував фізичні знання І. Н'ютон у «Математичних початках натуральної філософії». Такий підхід не втратив своєї актуальності і нині. Тому фахова підготовка майбутніх інженерів має забезпечити формування у майбутніх фахівців математичних компетенцій.

Формування математичних компетенцій дослідження природних явищ у студентів технічного вузу відбувається при вивченні курсу вищої математики. Зокрема таких розділів, як диференціальні рівняння, теорія поля, рівняння математичної фізики і ін. Теорія поля є теоретичною основою таких фундаментальних курсів, як «Теоретичні основи електротехніки», «Теоретичні основи радіотехніки», «Рівняння математичної фізики» й ін.

Згідно робочої навчальної програми з «Вищої математики» структура розділу «Теорія поля» така:

Таблиця 1

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	денна форма						Заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	с.р.		л	п	лаб	інд	с.р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Модуль 5												
Змістовий модуль 9. Теорія поля												
Тема 44. Скалярне поле та його характеристики. Векторне поле. Орієнтовані та неорієнтовані поверхні. Поняття поверхневого інтеграла.	7	1	-			6	7	1	-			6
Тема 45. Потік векторного поля через орієнтовану поверхню, його властивості, фізичний зміст та обчислення.	10	2	2			6	7	0,5	0,5			6
Тема 46. Дивергенція векторного поля. Формула Остроградського-Гаусса.	9	1	1			7	7	0,5	0,5			6
Тема 47. Робота силового поля. Циркуляція векторного поля. Криволінійні інтеграли та їх обчислення. Теорема Стокса. Проекція ротора на напрямок нормалі, ротор векторного поля, його властивості та обчислення в декартових координатах.	9	3	3			7	7	0,5	0,5			6
Тема 48. Диференціальні операції другого порядку. Спеціальні типи полів.	9	1	1			3	7	0,5	0,5			6
Разом	44	8	7			29	35	3	2			30

При цьому, співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної і індивідуальної роботи становить близько 66% для денної форми навчання і 86% для заочної форми.

Для забезпечення в повному обсязі самостійної роботи студентів з теоретичним матеріалом ми пропонуємо вивчати теорію поля за розробленою нами програмою (див. табл. 2).

Таблиця 2

Модуль 5 Змістовий модуль 9. Криволінійні та поверхневі інтеграли (№, назва теми, зміст матеріалу)
Тема 44. <i>Скалярне поле і моделі фізичних систем.</i> Скалярне поле. Лінії рівня. Похідна скалярного поля за напрямком. Градієнт скалярного поля. Векторне поле градієнта. Аналітичне означення вектора. Орієнтовані та неорієнтовані поверхні. Поняття поверхневого інтеграла.
Тема 45. <i>Векторне поле.</i> Потік векторного поля через орієнтовану поверхню, його властивості, фізичний зміст та обчислення. <i>Приклади фізичних задач:</i> знаходження густини середовища, стаціонарне поле швидкостей.
Тема 46. <i>Характеристики векторного поля.</i> Дивергенція векторного поля. Фізичний зміст дивергенції векторного поля. Оператор набла. Приклади розрахунку дивергенції. Формула Остроградського-Гаусса.
Тема 47. <i>Характеристики векторного поля.</i> Робота силового поля. Циркуляція векторного поля. Криволінійні інтеграли та їх обчислення Теорема Стокса. Проекція ротора на напрямок нормалі, ротор векторного поля, його властивості та обчислення в декартових координатах.
Тема 48. <i>Диференціальні операції другого порядку.</i> Оператор Гамільтона, оператор Лапласа. Диференціальні операції другого порядку. <i>Спеціальні типи полів.</i> потенціальні, соленоїдні та гармонічні поля.

Практичні вміння та навички студентів формуються під час виконання індивідуальних завдань з «Теорії поля», що мають на меті перевірити вміння студента самостійно розв'язувати різноманітні задачі (як математичні, так і фізичні, технічні), аналогічні до тих, що були розглянуті під час практичних занять.

Підготовка до практичних занять буде ефективною, коли студенти самостійно перевіряють свої знання за допомогою серії запитань для самоконтролю, або розгляду переліку тестових запитань. За результатами вивчення даного розділу студенти повинні оволодіти цінною математичною базою до вивчення природних явищ (див. табл.3).

Таблиця 3

знати	<p><i>Поняття:</i> скалярне поле, поверхні рівня, лінії рівня, похідна за напрямом, градієнт, векторне поле градієнта, векторне поле, векторні лінії, потік векторного поля через замкнену поверхню, ротор векторного поля, циркуляція вектора по замкненому контуру, вихор вектора навколо певного напрямку в даній точці, циркуляція векторного поля, дивергенція, ротор векторного поля, оператор Гамільтона, оператор Лапласа, диференціальні операції другого порядку</p> <p><i>Формули:</i> Остроградського-Гаусса, Гріна, Стокса, обчислення поверхневих інтегралів, зв'язу значення потоку з поверхневим інтегралом, знаходження дивергенції, ротора, градієнта та похідної за напрямом.</p>
вміти	<p><i>задавати</i> аналітично скалярне поле; <i>знаходити:</i> похідну скалярного поля за напрямом, градієнт, оператор «набла», дивергенцію векторного поля, ротор; <i>обчислювати:</i> потік векторного поля безпосередньо та за формулою Остроградського-Гаусса, циркуляцію векторного поля уздовж замкненого контуру безпосередньо та за формулою Стокса; <i>визначати:</i> джерела, стоки, типи полів.</p>

Це не тільки навчальний посібник, який допоможе студентам оволодіти необхідними теоретичними знаннями, але й коротке керівництво до розв'язування задач. Основи теорії, викладені в навчальному посібнику, супроводжуються великою кількістю задач (в тому числі і фізичного змісту), які наводяться з розв'язуванням та вправами для самостійної роботи. Вправи для самостійної роботи та питання для самоперевірки розглядаються в кінці кожної теми.

Істотною особливістю даного посібника є розгляд алгоритмів розв'язування типових задач з «Елементів теорії поля», які покликані активізувати пізнавальну діяльність студентів і розвивати в них вміння самостійно опрацьовувати теоретичний та практичний матеріал. До особливостей посібника слід віднести наведення цікавих прикладів при роз'ясненні основних понять з даного розділу та розділ «Перевір себе», який є органічним доповненням основної частини посібника. Запропоновані тести і кросворди спонукають читача до самоаналізу в аспекті набутих знань та сприяють їх узагальненню та систематизації. Даний посібник може бути використаний студентами як денної, так і заочної форм навчання.

ТЕМА 1 СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ ТА ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ. ПОНЯТТЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Для розгляду даної теми, нагадаємо деякі необхідні поняття. По-перше, *скаляр*. Досить часто цей термін помилково ототожнюють з числом. Однак, скаляр – це величина, кожне значення якої може бути виражено лише одним числом. У фізиці прикладів безліч: довжина, ширина, площа, об’єм, густина, температура, маса і ін. Все це скалярні величини. По-друге, *вектор*. З алгебраїчної точки зору векторний простір – набір елементів (векторів) для яких визначені операції додавання і множення на число. Типовий вектор виражається двома або більшою кількістю чисел (своїми координатами). І навіть для одновимірного вектора лише одного числа мало з тієї причини, що у вектора є ще напрямок. І точка прикладання, якщо вектор не вільний. Чому вільний? Тому що в ході вирішення завдань ви можете «прилаштувати» той чи інший вектор в будь-яку, потрібну вам, точку площини або простору. Отже, вільний вектор – це безліч однаково напрямлених відрізків. Шкільне визначення вектора: «Вектором називається напрямлений відрізок», має на увазі *конкретний* напрямлений відрізок, взятий з даної множини, який прив’язаний до певної точки площини або простору. Слід зазначити, що з точки зору фізики поняття вільного вектора в загальному випадку некоректне, і точка прикладання вектора має значення. (Дійсно, прямий удар однакової сили по носі або по лобі спричинює різні наслідки). Далі, якщо не обумовлюється інше, мова піде тільки про вільні вектори. Векторами характеризують силові фізичні поля, швидкість і багато інших величин.

Якщо в кожній точці плоскої або просторової області задано функцію координат точки, то цю функцію називають *скалярним полем* і позначають символом

$$f(M) = f(x, y) \text{ або } f(M) = f(x, y, z). \quad (1.1)$$

Приклад 1.1 Розглянемо перпендикулярний промінь світла, що виходить із землі. Які скалярні поля можна задати на цьому промені?

- 1) Поле висоти – коли кожній точці променя поставлена у відповідність його висота над рівнем землі.
- 2) Поле атмосферного тиску – кожній точці променя відповідає числове значення атмосферного тиску в даній точці.

Приклад 1.2 Підійдемо до озера і подумки проведемо над його поверхнею площину. Які скалярні поля можна задати на цій поверхні? Найпростіша відповідь дає два варіанти. 1) Поле, яке кожній точці «водного» фрагменту площини ставить у відповідність глибину озера. 2) Поле температури поверхні води в кожній точці озера.

Найважливішою властивістю скалярного поля є його *інваріантність* щодо системи координат. Зрозуміло, з якого б боку ми на промінь/озеро не подивилися – скалярне поле (висота, глибина, температура і т.д.) від цього не зміниться. Більше того, скалярне поле, скажімо, глибини, можна задати і на іншій поверхні, наприклад, на півсфері, або безпосередньо на самій водній поверхні.

Важливою характеристикою скалярного поля, що дає загальне уявлення про характер зміни поля, є *поверхні* або *лінії рівня*.

Поверхня, в кожній точці якої поле зберігає одне і те ж значення, називається *поверхнею рівня*. Згідно з означенням рівняння поверхні рівня таке:

$$f(x, y, z) = \text{const} . \quad (1.2)$$

У випадку, коли поле задано на площині, поверхні рівня вироджуються в *лінії рівня*:

$$f(x, y) = \text{const} . \quad (1.3)$$

Прикладом ліній рівня є лінії постійної висоти гір або постійної глибини морів на географічних картах.

Слід зауважити, що числа і функції задають скалярні поля далеко не завжди! Наприклад, розглянемо геометричний вектор площини в деякій афінній системі координат. Що станеться, якщо перейти до нового базису? У загальному випадку даний вектор змінить координати. Координати вектора – це числа, але скалярними величинами вони не є, оскільки скаляри не залежать від системи координат. Більше того, координати векторів можна задати і функціями – і ці функції не будуть породжувати скалярне поле!

Якщо в кожній точці простору задано вектор

$$\vec{a}(a_x(M), a_y(M), a_z(M)),$$

де $a_x(M), a_y(M), a_z(M)$ є функції точки M , то кажуть, що задано *векторне поле* $\vec{a}(M)$.

Зрозуміло, що елементи векторного поля «не вільні», а «прив'язані» до точок. Наприклад, якщо провести відомий зі школи дослід з магнітом на столі: чим ближче до магніту піднести залізяку, тим сильніше вона притя-

гується. І ця сила в тій чи іншій точці поверхні столу якраз характеризується вектором напруженості магнітного поля. Чим сильніше тяжіння, тим довший вектор і його вістря вказує напрям дії сили. Але набагато частіше векторні поля розглядають в тривимірному просторі. Наприклад гравітаційне поле Землі. Чим далі від поверхні, тим менша сила тяжіння і тим коротші відповідні силові вектори, спрямовані до центру нашої планети.

Велику групу векторних полів утворюють так звані *поля швидкостей*. Подивіться на поле (яке з травичкою) і подумки окресліть над ним довільну просторову область. Уявіть, що над полем дме вітер – невеликий такий ураганчик для більшої наочності. Тепер зафіксуємо деякий момент часу і кожній точці побудованої області поставимо у відповідність «зв'язаний» вектор, який характеризує:

- а) напрямок руху вітру в даній точці;
- б) швидкість його руху в даній точці – чим вища швидкість, тим довший вектор. Якщо в якійсь точці штиль, то їй співставляється нульовий вектор. Безліч цих векторів і утворює *векторне поле швидкості вітру* в даний момент часу.

Аналогічно влаштовано поле швидкостей течії рідини. Так, наприклад, кожній точці річки в певний момент часу можна поставити у відповідність вектор, який вказує напрямок і швидкість течії в цій точці.

Зрозуміло, що скалярні і векторні поля можна визначити в усьому просторі. Однак з відповідними фізичними прикладами не все однозначно, оскільки таких понять, як *температура*, *гравітація* (або інших) *десь* може і зовсім не існувати. Наприклад, всередині каменів вітер, як правило, не дме.

Слід зазначити, що деякі векторні поля (ті ж поля швидкостей) з плином часу швидко змінюються, і тому в багатьох фізичних моделях розглядають додаткову незалежну змінну t . Те ж саме стосується і скалярних полів – температура ж, справді, теж не «застигла» в часі. Однак в рамках математики ми обмежимося трійкою x, y, z , і будемо мати на увазі деякий фіксований момент часу або час, за який поле не встигло змінитися.

Одними з важливих характеристик векторного поля є *векторні лінії*.

Векторною, називається лінія, в кожній точці якої дотична до неї паралельна вектору поля. Позначимо через $\vec{\tau}(dx, dy, dz)$ вектор дотичної. Тоді рівняння векторної лінії таке

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \quad (1.4)$$

Напевно, багато хто пам'ятає цей шкільний дослід. Під аркуш паперу кладуть магніт, а на папір висипають металеві ошурки, які розташовують-

ся вздовж ліній поля: кожна точка векторної лінії є початком вектора поля, який лежить на дотичній в даній точці (рис. 1.1)

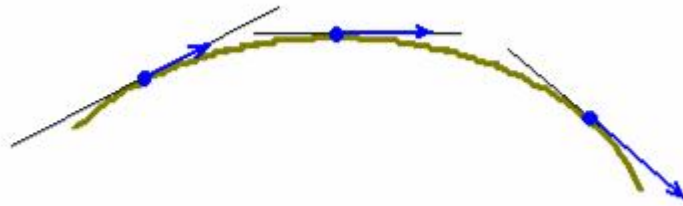


Рисунок 1.1

Зрозуміло, вектори в загальному випадку мають різну довжину. Так, на рис. 1.1, при переміщенні зліва направо їх довжина зростає (тут можна припустити, що ми наближаємося, наприклад, до магніту). У силових фізичних полях векторні лінії так і називають – *силовими лініями*. Інший, більш простий приклад – це гравітаційне поле Землі: його силові лінії являють собою промені з початком у центрі планети, причому вектори сили тяжіння розташовані на самих променях.

Якщо векторне поле задано ненульовою функцією $\vec{a} = a_x(x, y)\vec{i} + a_y(x, y)\vec{j}$, то його силові лінії можна знайти за диференціальним рівнянням $a_y(x, y)dx = a_x(x, y)dy$. Розв'язок $a(x, y) = C$ даного рівняння задає сімейство векторних ліній на площині XOY .

Для простого векторного поля $\vec{a} = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$ силові лінії визначаються співвідношеннями $\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}$. Тут потрібно розв'язати

систему двох диференціальних рівнянь і отримати два сімейства $a_1(x, y, z) = C_1$, $a_2(x, y, z) = C_2$ просторових поверхонь. Лінії перетину цих сімейств і будуть просторовими векторними лініями. Якщо всі компоненти векторного поля відмінні від нуля, то існує кілька технічних способів розв'язання. Розглянемо випадки, коли одна з компонент векторного поля дорівнює нулю.

1) Якщо $a_x(x, y, z) = 0$, то потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} dx = 0 \\ \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)} \end{cases}.$$

2) Якщо $a_y(x, y, z) = 0$, то потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} dy = 0 \\ \frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)} \end{cases}.$$

3) Якщо $a_z(x, y, z) = 0$, то потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} dz = 0 \\ \frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} \end{cases}.$$

Приклад 1.3 Знайти силові лінії поля $\bar{a} = x\bar{i} + 2z\bar{k}$

Розв'язування. В даній задачі $a_y(x, y, z) = 0$, то формуємо і розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} dy = 0 \\ \frac{dx}{x} = \frac{dz}{2z} \end{cases}$$

Звідки $\int dy = C_1$, ($C_1 = const$), $y = C_1$ – сімейство площин, паралельних координатній площині XOZ .

З другого рівняння маємо:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{2z} \Rightarrow 2 \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{z} \Rightarrow \ln|z| = 2 \ln|x| + \ln|C_2| \Rightarrow \ln|z| = \ln|C_2 x^2|$$

$$\Rightarrow z = C_2 x^2, (C_2 = const) \text{ – сімейство параболічних циліндрів, паралельних осі } OY.$$

Таким чином, силовими лініями є:
$$\begin{cases} y = C_1 \\ z = C_2 x^2 \end{cases}$$

Увага! Спробуйте самостійно знайти силові лінії поля $\bar{a} = 4y\bar{i} - 9x\bar{j}$. Від-

повідь:
$$\begin{cases} z = C_1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = C_2 \end{cases}.$$

1.1. Локальні характеристики скалярного поля

Похідна за напрямом

Нехай задано скалярне поле $f(x, y, z)$. Візьмемо в ньому точку $M(x, y, z)$ і проведемо з цієї точки вектор \vec{s} , напрямні косинуси якого $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ (косинуси кутів, які вектор утворює з координатними осями) (рис. 1.1).

На векторі \vec{s} на відстані Δs від його початку візьмемо точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

$$\text{Тоді } \Delta s = MM_1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

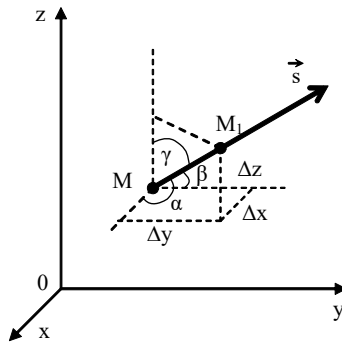


Рисунок 1.1

Обчислимо тепер приріст $\Delta_s f$ функції $f(x, y, z)$ при переході від точки M до точки M_1 в напрямі вектора \vec{s} :

$$\Delta_s f = f(M_1) - f(M).$$

Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta_s f}{\Delta s}$ при $\Delta s \rightarrow 0$, то цю границю називають *похідною функції $f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора \vec{s}* і позначають $\frac{\partial f}{\partial s}$, тобто

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta_s f}{\Delta s}. \quad (1.5)$$

Формула для обчислення похідної за напрямом така:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma. \quad (1.6)$$

З формули (1.6) випливає, що частинні похідні є окремими випадками похідної за напрямом. Дійсно, якщо \bar{s} збігається з одним із ортів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, то похідна за напрямом \bar{s} збігається з відповідною частинною похідною. Наприклад, якщо $\bar{s} = \bar{i}$, то $\alpha = 0, \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, тому

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos 0 + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Подібно до того, як частинні похідні характеризують швидкість зміни функції в напрямі осей координат, так і похідна $\frac{\partial f}{\partial s}$ показує швидкість зміни скалярного поля $f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора \bar{s} .

Абсолютна величина похідної $\left| \frac{\partial f}{\partial s} \right|$ відповідає значенню швидкості, а знак похідної визначає характер зміни функції $f(x, y, z)$ в напрямі \bar{s} (зростання чи спадання).

Очевидно, що похідна за напрямом, протилежним напрямку \bar{s} , дорівнює похідній за цим напрямом, взятій з протилежним знаком.

Фізичний зміст цього результату такий: зміна напрямку на протилежний не впливає на значення швидкості зміни поля, а тільки на характер цієї зміни.

Приклад 1.4 Знайти похідну скалярного поля $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3} + 3z$ в точці $M_1(1, 0, 1)$ в напрямі точки $M_2(3, 2, 2)$.

Розв'язування. Похідну скалярного поля $f(x, y, z)$ в точці M_1 обчислимо за формулою (1.6).

Для цього знайдемо частинні похідні скалярного поля за кожною змінною та обчислимо значення цих похідних в точці M_1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} (x^3 + y^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}, \quad \frac{\partial f(M_1)}{\partial x} = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} (x^3 + y^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3y^2 = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}, \quad \frac{\partial f(M_1)}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3, \quad \frac{\partial f(M_1)}{\partial z} = 3.$$

Обчислимо напрямні косинуси вектора $\vec{s} = \overline{M_1 M_2} (2, 2, 1)$. Нагадаємо, якщо маємо деякий вектор $\vec{s} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k}$, то його напрямні косинуси обчислюємо за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{s_x}{|\vec{s}|}, \quad \cos \beta = \frac{s_y}{|\vec{s}|}, \quad \cos \gamma = \frac{s_z}{|\vec{s}|}, \quad |\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}. \quad (1.7)$$

Оскільки $|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$, то $\cos \alpha = \cos \beta = \frac{2}{3}$, $\cos \gamma = \frac{1}{3}$.

Отже, $\frac{\partial f(M_1)}{\partial s} = 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$, тобто $\frac{\partial f(M_1)}{\partial s} = \frac{5}{3}$.

Градiєнт

Нехай задано поле $f(x, y, z)$ і точку. У якому напрямі похідна $\frac{\partial f}{\partial s}$ має найбільше значення? Відповідь на це запитання має важливе практичне значення і дається на основі поняття *градієнта поля*.

Вектор, координати якого є значення частинних похідних функції $f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$, називають *градієнтом функції* в цій точці і позначають $\text{grad } f$. Отже,

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.8)$$

Зв'язок між градiєнтом та похідною в даній точці за довільним напрямом показує така теорема.

Теорема. Похідна функції $f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора \vec{s} дорівнює проекції градiєнта функції в цій точці на вектор \vec{s} , тобто

$$\frac{\partial f}{\partial s} = n_{\vec{s}} \text{grad } f. \quad (1.9)$$

Зазначимо деякі *властивості градiєнта*.

1. Похідна в даній точці за напрямом вектора має найбільше значення, якщо напрям цього вектора збігається з напрямом градiєнта, причому

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_{\max} = |\text{grad } f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}. \quad (1.10)$$

Таким чином, швидкість зростання скалярного поля в довільній точці є максимальною у напрямі градієнта. Зрозуміло, що у напрямі, протилежному напрямку градієнта, поле найшвидше зменшуватиметься.

2. Похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю. Іншими словами, скалярне поле залишається сталим у напрямі, перпендикулярному до градієнта.

3. Вектор-градієнт у кожній точці поля $f(x, y, z)$ перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку.

4. Справедливі рівності:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} (u + v) &= \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v; \\ \operatorname{grad} (cu) &= c \operatorname{grad} u; \quad c = \text{const}; \\ \operatorname{grad} (uv) &= v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v; \\ \operatorname{grad} \frac{u}{v} &= \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}; \\ \operatorname{grad} f(u) &= \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u. \end{aligned}$$

Знаходження *векторної функції* градієнтів – є популярний і поширений спосіб отримати з скалярного поля – векторне.

Наприклад, якщо функція $f(x, y)$ задає скалярне поле глибини озера, то відповідна векторна функція $\operatorname{grad} f(x, y)$ визначає безліч зв'язаних векторів, кожен з яких вказує напрямом найшвидшого підйому дна в тій чи іншій точці і швидкість цього підйому. Якщо $f(x, y, z)$ задає скалярне поле температури деякої області простору, то відповідне векторне поле $\operatorname{grad} f(x, y, z)$ характеризує напрямом найшвидшого прогрівання в кожній точці цієї області.

Приклад 1.5 Дано скалярне поле $f = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$ і точка $M_0(-1, 1, 1)$ потрібно:

но:

а) скласти градієнтну функцію скалярного поля;

б) знайти градієнт поля в точці M_0 і обчислити його довжину;

в) обчислити похідну за напрямом нормального вектора до поверхні $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$ в точці M_0 , що утворює з додатнім напрямом осі OZ тупий кут.

Зауваження! 1) Нагадаємо, що нормаль до поверхні в точці – це пряма, що проходить через дану точку перпендикулярно дотичній площині.

2) Дотична площина до поверхні в точці – це площина, яка містить дотичні до всіх кривих, що належать даній поверхні і проходять через дану точку.

Розв'язування.

а) Знаходимо частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x} \right)_x = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{x} \right) = \frac{1}{y} \cdot 1 + 0 - z \cdot \left(\frac{z}{x} \right) = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x} \right)_y = x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{x} \right) = -\frac{1}{y^2} \cdot x + \frac{1}{z} \cdot 1 - 0 = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x} \right)_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{x} \right) = 0 - \frac{1}{z^2} \cdot y - \frac{1}{x} \cdot 1 = -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}$$

Складемо функцію, яка визначає векторне поле градієнтів:

$$\mathit{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k} = \left(\frac{1}{y} + \frac{z}{x^2} \right) \bar{i} + \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} \right) \bar{j} - \left(-\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x} \right) \bar{k}.$$

Отримана векторна функція кожній точці області визначення скалярного поля ставить у відповідність вектор $\mathit{grad} f$, який вказує напрямок і максимальну швидкість зміни функції $f = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$ в даній точці.

б) Обчислимо значення частинних похідних в точці $M_0(-1, 1, 1)$. Для цього підставимо значення координат даної точки у знайдені в п.а) похідні:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \frac{1}{1} + \frac{1}{(-1)^2} = 2;$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = -\frac{-1}{1^2} + \frac{1}{1} = 2;$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = -\frac{1}{1^2} - \frac{1}{-1} = 0.$$

Таким чином $\mathit{grad} f(M_0) = 2\bar{i} + 2\bar{j}$. Цей вектор виходить з точки M_0 , і переміщувати його нікуди не можна, оскільки він характеризує напрямок

найшвидшого зростання скалярного поля саме в цій точці. Мірилом цієї максимальної швидкості є довжина градієнта:
 $\|grad f(M_0)\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$.

в) Переконаємося, що точка $M_0(-1, 1, 1)$ належить поверхні $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$: $(-1)^2 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 1 \Rightarrow 1 = 1$. Нас не цікавить, що це за поверхня, нам важливий її нормальний вектор, який утворює з додатнім напрямом осі OZ тупий кут.

Якщо поверхню задано рівнянням $\varphi(x, y, z) = 0$, то її вектор нормалі

$$\bar{n} = \{\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z\}, \quad (1.11)$$

а одиничний вектор нормалі:

$$\bar{n}^0 = \pm \frac{\varphi'_x \bar{i} + \varphi'_y \bar{j} + \varphi'_z \bar{k}}{\sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 + (\varphi'_z)^2}}, \quad (1.12)$$

В нашому випадку $\varphi = x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 1$,

$$\varphi'_x = 2x, \quad \varphi'_x(M_0) = 2(-1) = -2$$

$$\varphi'_y = -4y, \quad \varphi'_y(M_0) = -4 \cdot 1 = -4$$

$$\varphi'_z = 4z, \quad \varphi'_z(M_0) = 4 \cdot 1 = 4$$

$$\bar{n}(-2; -4; 4).$$

Для того, щоб з'ясувати кут, який знайдений вектор утворює з додатнім напрямом осі OZ , обчислимо скалярний добуток вектора нормалі до заданої поверхні з напрямним вектором додатного напрямку даної осі $\bar{k}(0, 0, 1)$: $\bar{n} \cdot \bar{k} = -2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4 > 0$. Отже кут між цими векторами гострий, що нас не влаштовує. Тому потрібно брати протилежно спрямований нормальний вектор $-\bar{n}(2; 4; -4)$

Зауваження! Нормальні вектори на відміну від градієнтів – вільні, їх завдання лише вказати напрямок.

Обчислимо напрямні косинуси даного напрямку. Оскільки за формулою (1.12) одиничний вектор нормалі

$$\bar{n}^0 = \frac{2\bar{i} + 4\bar{j} - 4\bar{k}}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}, \text{ тоді}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3}$$

Зауваження! Правильність знаходження напрямних косинусів перевіряють виконанням рівності $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Таким чином, шукана похідна за напрямом:

$\frac{\partial f(M_0)}{\partial s} = 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 2$, що характеризує швидкість зростання скалярного поля в точці $M_0(-1, 1, 1)$ в напрямі вектора $\bar{n}(-2; -4; 4)$. Це число не може перевищувати $|\text{grad } f(M_0)| = 2\sqrt{2}$ (максимальної швидкості зміни в даній точці).

Увага! Спробуйте самостійно знайти кут між градієнтами скалярних полів $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$ та $u = \frac{yz^2}{x^2}$ в точці $M_0\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$.

Приклад 1.6 Знайти величину і напрям градієнта скалярного поля $f(M) = \arctg \frac{3y}{x} + 2z^2$ в точці $M_0(1, 0, 1)$.

Розв'язування. Градієнт скалярного поля обчислимо за формулою (1.9). Для цього знайдемо частинні похідні скалярного поля за кожною змінною:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{9y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{3y}{x^2}\right) = \frac{-3y}{x^2 + 9y^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{9y^2}{x^2}} \cdot \frac{3}{x} = \frac{3x}{x^2 + 9y^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4z.$$

Обчислимо значення частинних похідних в точці $M_0(1, 0, 1)$, дістанемо:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = 4.$$

Отже,

$$\text{grad } f(M_0) = 0\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k},$$

або

$$\text{grad } f(M_0) = 3\bar{j} + 4\bar{k}.$$

Обчислимо величину градієнта скалярного поля за формулою (1.11), маємо:

$$|\text{grad } f(M_0)| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Таким чином, найбільша швидкість зростання скалярного поля $f(M)$ в точці M_0 досягається у напрямі вектора $\text{grad } f(M_0) = 3\bar{j} + 4\bar{k}$ і дорівнює $|\text{grad } f(M_0)| = 5$.

1.2. Просторові інтеграли

Поверхня $\sigma: \varphi(x, y, z) = 0$ називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина, положення якої неперервно змінюється разом із точкою дотику. Гладкими є, наприклад, площина, сфера, еліпсоїд, параболоїди. Поверхня називається *кусково-гладкою*, якщо вона складається зі скінченного числа гладких частин, що примикають одна до одної по кусково-гладких або просто гладких лініях. Найпростіший приклад кусково-гладкої поверхні – поверхня будь-якого многогранника.

Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена і неперервна на гладкій обмеженій поверхні σ . Розіб'ємо вказану поверхню на n частин $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, площі яких відповідно позначимо через $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. На кожній частині $\sigma_i, i = \overline{1, n}$ довільно виберемо по одній точці $M_i(x_i, y_i, z_i)$ і складемо інтегральну суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta\sigma_i. \quad (1.13)$$

Поверхневим інтегралом I роду від функції $f(x, y, z)$ по поверхні σ називається границя інтегральних сум (1.13) за умови, що найбільший з діаметрів $d(\sigma_i)$ елементарної частини прямує до нуля, тобто

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\max d(\sigma_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta\sigma_i. \quad (1.14)$$

Ця границя не залежить ні від способу розбиття поверхні на частини, ні від вибору точок у кожній з них. В цьому випадку функція $f(x, y, z)$ називається інтегрованою по поверхні σ , а саму поверхню – областю інтегрування.

Основні властивості поверхневого інтегралу першого роду, по суті, повторюють властивості подвійного інтегралу. Тому обчислення поверхневого інтегралу першого роду зводиться до обчислення подвійного інтегралу. Нехай поверхня σ задана рівнянням $z = z(x, y)$ (будь-яка пряма, паралель-

на осі OZ , перетинає поверхню не більше ніж в одній точці) і нехай проекцією поверхні σ на площину XOY є область D_{xy} . Якщо функція $z(x, y)$ і її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ неперервні в області D_{xy} , то елемент площі поверхні визначається формулою

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (1.15)$$

і поверхневий інтеграл I роду перетворюється на подвійний інтеграл

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (1.16)$$

Аналогічно записуються формули, що виражають за відповідних умов інтеграл по поверхні σ через подвійні інтеграли за її проекціями на інші координатні площини.

Якщо поверхня задана рівнянням $y = y(x, z)$ і проектується на площину XOZ в область D_{xz}

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz. \quad (1.17)$$

Якщо поверхня задана рівнянням $x = x(y, z)$ і проектується на площину YOZ в область D_{yz}

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz. \quad (1.18)$$

Приклад 1.7 Обчислити інтеграл $\iint_S xyz dS$, де S частина площини $z = 2 - 2x$, яка обмежена площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 3$.

Розв'язування. Застосуємо формулу (1.16). Для цього, спочатку, побудуємо поверхню (рис. 1.2а) та її проекцію на площину XOY (рис. 1.2б).

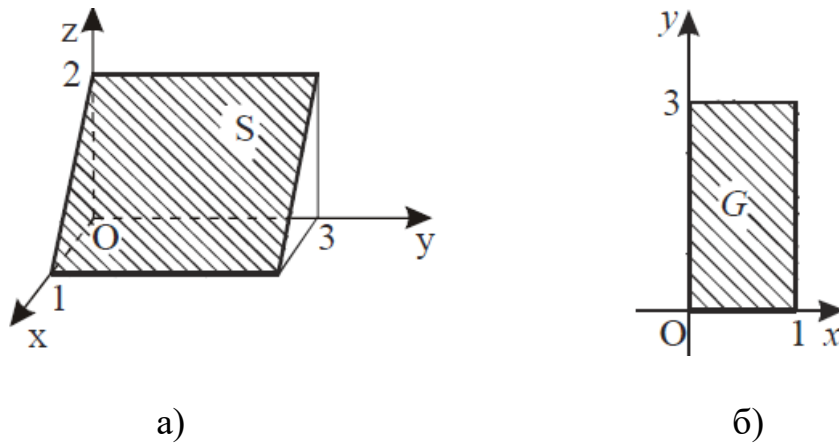


Рисунок 1.2

Використовуючи рівняння поверхні S , знаходимо потрібні нам частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad dS = \sqrt{1 + (-2)^2 + 0^2} dx dy = \sqrt{5} dx dy.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \iint_S xyz dS &= \iint_G xy(2-2x)\sqrt{5} dx dy = 2\sqrt{5} \iint_G xy(1-x) dx dy = \\ &= 2\sqrt{5} \int_0^1 dx \int_0^3 xy(1-x) dy = 2\sqrt{5} \int_0^1 \left(x(1-x) \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^3 \right) dx = 9\sqrt{5} \int_0^1 (x-x^2) dx = \frac{3\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 1.8 Обчислити інтеграл $\iiint_{\sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) d\sigma$, де σ – частина площини $6x + 4y + 3z = 12$, що лежить в I октанті.

Розв’язування. Проекцією даної поверхні на площину XOY є прямокутний трикутник з катетами, рівними 2 та 3.

Перетворимо рівняння поверхні σ до вигляду $z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$ і знайдемо частинні похідні даної функції: $\frac{\partial z}{\partial x} = -2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4}{3}$.

Тепер обчислимо елемент площі поверхні $d\sigma$ за формулою (1.15):

$$d\sigma = \sqrt{1 + 4 + \frac{16}{9}} dx dy = \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy.$$

Тоді:

$$\iint_{\sigma} \left(\left(4 - 2x - \frac{4}{3}y \right) + 2x + \frac{4}{3}y \right) \cdot \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \iint_{D_{xy}} dx dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 4\sqrt{61}$$

Питання для самоперевірки

1. Що називають скалярним полем?
2. Наведіть приклади скалярних полів.
3. Дайте означення похідної за напрямом.
4. Виведіть формулу для похідної за напрямом.
5. У чому полягає фізичний зміст похідної за напрямом?
6. Дайте означення градієнта скалярного поля.
7. Доведіть теорему про зв'язок градієнта і похідної за напрямом.
8. Сформулюйте і доведіть властивості градієнта.
9. У чому полягає фізичний зміст градієнта?
10. Як визначають напрямні косинуси вектора?
11. Дайте означення поверхонь та ліній рівня.
12. Дайте визначення скалярного добутку векторів та сформулюйте його властивості.
13. Яка поверхня називається гладкою?
14. Що називають поверхневим інтегралом першого роду?
15. Як обчислюють поверхневі інтеграли?
16. Що називають векторним полем?
17. Наведіть приклади векторних полів.
18. Що називають векторними лініями?
19. Що таке силові лінії векторного поля?
20. Як знайти силові лінії?

Вправи для самостійної роботи

Вправа 1

1. Знайти похідну скалярного поля $U = x^2 + y^2 - 3 \cdot x + 2 \cdot y$ в точці $M_1(0;0;0)$ в напрямі, що йде від цієї точки до точки $M_2(3;4;0)$.
2. Знайти швидкість зміни скалярного поля $U = xyz$ в точці $M_1(5;1;-8)$ в напрямі, що йде від цієї точки до точки $M_2(9;4;4)$.
3. Знайти похідну скалярного поля $U = x^2 + y^2$ в точці $M_1 = (3;2)$ в напрямі, що утворює з віссю Ox кут $\alpha = 45^\circ$.

4. Знайти похідну скалярного поля $U = x^2 - x \cdot y + y^2$ в точці $M_1(2;-1)$ в напрямі, що утворює з віссю Ox кут $\alpha = 120^\circ$.
5. Знайти похідну скалярного поля $U = x^2 - 3xy - y^2$ в точці $M_1(3;1)$ в напрямі від цієї точки до точки $M_2(6;5)$.
6. Знайти похідну скалярного поля $U = \arctg xy$ в точці $M_1(2;2)$ в напрямі бісектриси першого координатного кута.
7. Знайти похідну скалярного поля $U = x^2 y^2 - xy^3 - 3y$ в точці $M_1(2;1)$ в напрямі від цієї точки до початку координат.
8. Знайти похідну скалярного поля $U = x^2 + y^2 + z^2 - x + y + z + 1$ в точці $M_1(1;-2;3)$ в напрямі від цієї точки до початку координат.
9. Знайти похідну скалярного поля $U = y^2 z - 2xyz + z^2$ в точці $M_1(3;1;1)$ в напрямі вектора \vec{a} , який утворює з осями координат кути α, β, γ , причому $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $\beta = \frac{\pi}{4}$.
10. Знайти похідну скалярного поля $U = x^2 + y^2 - 3 \cdot x + 2 \cdot y$ в точці $M_1(0;0;0)$ в напрямі від цієї точки до точки $M_2(3;4;0)$.

Вправа 2

Знайти величину і напрям градієнта скалярного поля U в точці M_1

- | | | | |
|-----------------------------------|------------|------------------------------------|------------|
| 1. $U = \ln(x^2 + 4y^2)$, | $M_1(2;1)$ | 6. $U = x^2 + y^2 - 3x + 2y + 1$, | $M_1(1;1)$ |
| 2. $U = \sqrt{x^2 + y^2}$, | $M_1(3;4)$ | 7. $U = \arcsin \frac{x}{x+y}$, | $M_1(1;1)$ |
| 3. $U = \arctg xy$, | $M_1(1;1)$ | 8. $U = \ln \frac{y}{x}$, | $M_1(1;1)$ |
| 4. $U = \frac{x}{y} + \sqrt{y}$, | $M_1(3;1)$ | 9. $U = \ln(x^2 + 4y^2)$, | $M_1(6;4)$ |
| 5. $U = x - 3y + \sqrt{3xy}$, | $M_1(3;4)$ | 10. $U = \arcsin \frac{y^2}{x}$, | $M_1(2;1)$ |

ТЕМА 2 ПОНЯТТЯ ПОТОКУ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Ще однією особливою характеристикою векторного поля є *потік векторного поля*.

2.1. Потік векторного поля

Нехай $\vec{a}(M)$ – поле швидкостей рухомої рідини, а σ – деяка гладка

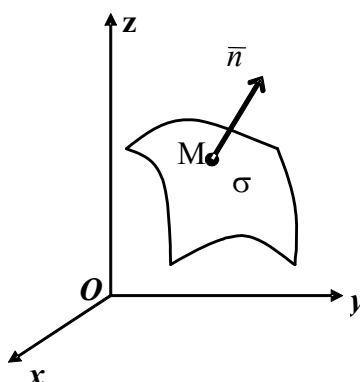


Рисунок 2.1

Введемо поняття сторони поверхні. Візьмемо на гладкій поверхні σ довільну точку M , проведемо в цій точці нормаль до поверхні \vec{n} певного напрямку і розглянемо на даній поверхні довільний замкнений контур, який виходить з точки M і повертається в цю ж точку, не перетинаючи при цьому межі поверхні σ . Переміщатимемо точку по замкненому контуру разом з вектором \vec{n} так, щоб цей вектор весь час залишався нормальним до даної поверхні. При обході заданого контуру ми можемо повернутися в точку з тим самим або протилежним напрямом нормалі. Якщо у довільну точку M поверхні σ після обходу довільного замкненого контуру, розміщеного на цій поверхні, який не перетинає її межю, ми повертаємось з початковим напрямом нормалі \vec{n} , то таку поверхню називають *двосторонньою*. Прикладами таких поверхонь є площина та сфера. Якщо при обході деякого контуру поверхні σ напрям нормалі змінюється на протилежний, то таку поверхню називають *односторонньою*. Прикладом односторонньої поверхні є так званий *лист Мебіуса*. Модель цієї поверхні можна дістати, якщо прямокутну смужку паперу $ABCD$, перекрутивши один раз склеїти так, щоб точка A збігалась з точкою C , а точка B – з D . Двосторонню поверхню називають *орієнтованою*, а вибір певної її сторони *орієнтацією поверхні*. Спрямувавши в кожній точці замкненої поверхні нормаль всередину об'єму, обмеженого поверхнею, дістанемо внутрішню сторону поверхні, а спрямувавши нормаль зовні поверхні – зовнішню її сторону. Надалі

розглядатимемо двосторонні поверхні. Односторонні поверхні неорієнтовані.

Поставимо задачу обчислення кількості рідини, що протікає через поверхню σ за одиницю часу. Якщо вектор $\vec{a}(a_x(M), a_y(M), a_z(M))$ в кожній точці поверхні σ має однаковий напрям та модуль, то кількість рідини, що протікає через цю поверхню за одиницю часу, визначається за формулою:

$$P = |\vec{a}| \cdot S_\sigma \cdot \cos \alpha, \quad (2.1)$$

де S_σ – площа поверхні σ ,

α – кут між вектором \vec{a} і нормаллю до поверхні σ .

Формулу (2.1) можна подати у вигляді:

$$P = np_n^- \vec{a} \cdot S_\sigma, \quad (2.2)$$

де $np_n^- \vec{a}$ – проекція вектора \vec{a} на напрям нормалі до поверхні σ .

У випадку криволінійної поверхні та змінного вектора \vec{a} обчислити кількість рідини, що протікає через поверхню σ за одиницю часу, за формулами (2.1) або (2.2) неможливо.

Для обчислення кількості рідини, що протікає через поверхню σ за одиницю часу, розіб'ємо цю поверхню неперервними кривими на n досить малих частин так, щоб зміною вектора \vec{a} та напрямку нормалі усередині кожної частини можна було б знехтувати.

Позначимо через ΔS_i площу i -ої частини $\Delta \sigma_i$, яку вважаємо частиною площини з напрямом нормалі $\vec{n}(M)$. Виберемо усередині цієї частини довільну точку M_i та будемо вважати, що в усіх точках цієї частини вектор \vec{a} дорівнює $\vec{a}(M_i)$. Тоді кількість рідини, що протікає через i -у частину за одиницю часу, можна обчислити за наближеною формулою:

$$\Delta P_i \approx np_{n(M_i)}^- \vec{a}(M_i) \cdot \Delta S_i,$$

а кількість рідини, що протікає через всю поверхню σ за одиницю часу, дорівнює:

$$P \approx \sum_{i=1}^n \Delta P_i.$$

Тоді одержуємо наближену формулу

$$P \approx \sum_{i=1}^n n p_{n(M_i)}^- \bar{a}(M_i) \cdot \Delta S_i. \quad (2.3)$$

Похибка цієї наближеної формули прямує до нуля при необмеженому зменшенні діаметрів усіх частин, на які розбита поверхня σ . Позначивши через λ максимальний діаметр ΔS_i , перейдемо в рівності (2.3) до границі при $\lambda \rightarrow 0$. Тоді маємо:

$$P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n n p_{n(M_i)}^- \bar{a}(M_i) \cdot \Delta S_i. \quad (2.4)$$

Якщо границя (2.4) існує і не залежить ні від способу розбиття поверхні σ на частини, ні від способу вибору точок M_i , то її називають *поверхневим інтегралом* і позначають символом:

$$\iint_{\sigma} n p_n^- \bar{a}(M) d\sigma, \quad \text{тобто}$$

$$\iint_{\sigma} n p_n^- \bar{a}(M) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n n p_{n(M_i)}^- \bar{a}(M_i) \cdot \Delta S_i. \quad (2.5)$$

Якщо підінтегральна функція у формулі (2.5) є проекцією вектора \bar{a} на напрям нормалі до поверхні σ , то такий поверхневий інтеграл *називається потоком векторного поля \bar{a} через поверхню σ* , причому

$$P = \iint_{\sigma} n p_n^- \bar{a}(M) d\sigma. \quad (2.6)$$

Підінтегральний вираз у формулі (2.5) може бути записаний у векторній формі. Введемо вектор $d\bar{s}$, напрям якого збігається з напрямом нормалі, а модуль дорівнює елементарній площі поверхні ds , тоді

$$n p_n^- \bar{a}(M) d\sigma = \bar{a} \cdot d\bar{s},$$

тому потік

$$P = \iint_{\sigma} \bar{a} \cdot d\bar{s}. \quad (2.7)$$

Відмітимо основні *властивості потоку* векторного поля.

1. Якщо $n p_n^- \bar{a} = c = const$, то

$$\iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{ds} = c \cdot S_{\sigma},$$

де S_{σ} – площа поверхні σ .

2. При зміні напрямку нормалі потік змінює лише знак.

$$3. \iint_{\sigma} (\bar{a} + \bar{b}) \bar{ds} = \iint_{\sigma} \bar{a} \bar{ds} + \iint_{\sigma} \bar{b} \bar{ds}.$$

$$4. \iint_{\sigma} c \bar{a} \cdot \bar{ds} = c \cdot \iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{ds}, \text{ де } c = \text{const.}$$

5. Якщо поверхня σ розбита деякою кривою на дві частини σ_1 та σ_2 , то

$$\iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \iint_{\sigma_1} \bar{a} \cdot \bar{ds} + \iint_{\sigma_2} \bar{a} \cdot \bar{ds}.$$

2.2. Поверхневі інтеграли другого роду. Обчислення потоку векторного поля

Зрозуміло, що $\bar{ds} = \{ \cos(\bar{n}^0, \bar{i}) d\sigma, \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) d\sigma, \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) d\sigma \}$, де \bar{n}^0 – одиничний вектор нормалі до поверхні σ .

Оскільки $\cos(\bar{n}^0, \bar{k}) d\sigma = dxdy$, $\cos(\bar{n}^0, \bar{i}) d\sigma = dydz$, $\cos(\bar{n}^0, \bar{j}) d\sigma = dxdz$, то

$$\Pi = \iint_{\sigma} (a_x \cos(\bar{n}^0, \bar{i}) + a_y \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) + a_z \cos(\bar{n}^0, \bar{k})) d\sigma = \iint_{\sigma} a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy,$$

де $\iint_{\sigma} a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy$ – поверхневий інтеграл II – го роду.

Поверхневі інтеграли II роду також можна обчислювати за допомогою подвійних інтегралів. Нехай функція $a_z(x, y, z)$ неперервна в усіх точках поверхні σ , яка задана рівнянням $z = z(x, y)$. Точки $(x, y) \in D_{xy}$, де область D_{xy} – проекція даної поверхні на координатну площину Oxy . Виберемо верхню сторону поверхні σ , де нормаль до поверхні утворює з віссю Oz гострий кут. Тоді

$$\iint_{\sigma} a_z dxdy = \iint_{D_{xy}} a_z \Big|_{z=z(x,y)} dxdy. \quad (2.8)$$

При обчисленні $\iint_{D_{xy}} a_z dx dy$ в функції $a_z(x, y, z)$ змінну z необхідно виразити через змінні y та x , використовуючи рівняння поверхні σ . Отже, маємо:

$$\iint_{\sigma} a_z(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} a_z(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (2.9)$$

Формула (2.10) виражає поверхневий інтеграл за змінними y та x через подвійний. Якщо вибрати нижню сторону поверхні (нормаль до поверхні утворює тупий кут з віссю Oz), то одержаний подвійний інтеграл беруть із знаком «мінус», тому

$$\iint_{\sigma} a_z(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} a_z(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (2.10)$$

Аналогічно

$$\iint_{\sigma} a_x(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} a_x(x(y, z), y, z) dy dz; \quad (2.11)$$

$$\iint_{\sigma} a_y(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{xz}} a_y(x, y(x, z), z) dx dz. \quad (2.12)$$

В загальному випадку для обчислення потоку можна скористатися формулою:

$$\iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \pm \iint_{D_{yz}} a_x \Big|_{x=x(y,z)} dy dz \pm \iint_{D_{xz}} a_y \Big|_{y=y(x,z)} dx dz \pm \iint_{D_{xy}} a_z \Big|_{z=z(x,y)} dx dy, \quad (2.13)$$

де D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} – проекції поверхні σ на відповідні координатні площини.

Правильність вибору знаків перед подвійними інтегралами формули (2.13) можна перевірити за допомогою координат одиничного нормального вектора до поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$. Знак перед подвійним інтегралом збігається із знаком відповідного напрямного косинуса нормалі \bar{n} :

$$\cos(\bar{n}, \overline{Ox}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{i}; \quad \cos(\bar{n}, \overline{Oy}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{j}; \quad \cos(\bar{n}, \overline{Oz}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{k}. \quad (2.14)$$

Якщо поверхня σ неоднозначно проектується на яку-небудь координатну площину, то цю поверхню розбивають на частини, а інтеграл, який міститься у лівій частині рівності (2.13) – на суму інтегралів по одержаних частинах поверхні.

Для обчислення потоку векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхню σ можна використовувати також одну із формул:

$$P = \iint_{D_{xy}} \frac{\vec{a}n^0}{\left| \cos(n^0, \vec{k}) \right|} \Bigg|_{z=z(x,y)} dx dy ,$$

$$P = \iint_{D_{yz}} \frac{\vec{a}n^0}{\left| \cos(n^0, \vec{i}) \right|} \Bigg|_{x=x(y,z)} dy dz ,$$

$$P = \iint_{D_{xz}} \frac{\vec{a}n^0}{\left| \cos(n^0, \vec{j}) \right|} \Bigg|_{y=y(x,z)} dx dz .$$

Термін «потік векторного поля» має фізичне походження. Вкажемо приклади фізичних величин, які обчислюються за допомогою формули (2.13):

а) Якщо векторне поле розглядати як поле швидкостей рухомої рідини, то її потік через поверхню σ дорівнює кількості рідини, що протікає через цю поверхню за одиницю часу у напрямку зовнішньої нормалі. Якщо потік через замкнену поверхню додатний, то це означає, що з частини простору, обмеженого цією поверхнею, витікає більше рідини, ніж затікає в неї. Такий результат пояснюється тим, що всередині закритої поверхні існують джерела, що виділяють рідину. Якщо потік від'ємний, то всередину поверхні затікає більше рідини, ніж витікає з неї. Такий результат означає, що всередині поверхні є стоки, які поглинають рідину.

б) Потік тепла має напрям і є векторною величиною. Довжина вектора потоку тепла вимірює кількість тепла, що протікає через одиницю площі за одиницю часу. Повний тепловий потік назовні через поверхню σ також визначається за формулою (2.13)

Приклад 2.1 Обчислити інтеграл

$$I = \iint_{\sigma} \left(x - y + \frac{3}{2}z \right) dy dz + x dx dz - z dx dy ,$$

якщо σ – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $2x - 2y + z - 2 = 0$ з координатними площинами (рис. 2.2а)

Розв'язування. За формулою (2.13) знайдемо проєкції поверхні σ на координатні площини:

$$D_{xy} = \{x-1 \leq y \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 1\} \text{ (рис. 2.2, б);}$$

$$D_{xz} = \{0 \leq z \leq 2-2x, \quad 0 \leq x \leq 1\} \text{ (рис. 2.2, в);}$$

$$D_{yz} = \{0 \leq z \leq 2-2y, \quad -1 \leq y \leq 0\} \text{ (рис. 2.2, г).}$$

Визначимо нормальний вектор до поверхні σ :

$\varphi(x, y, z) = 2x - 2y + z - 2$; $\varphi'_x = 2$, $\varphi'_y = -2$, $\varphi'_z = 1$, $\bar{n}^0 = \frac{2}{3}\bar{i} - \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{1}{3}\bar{k}$. Оскільки за формулами (2.14)

$$\cos(\bar{n}, \overline{Ox}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{i} = \frac{2}{3} > 0, \quad \cos(\bar{n}, \overline{Oy}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{j} = -\frac{2}{3} < 0, \quad \cos(\bar{n}, \overline{Oz}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{k} = \frac{1}{3} > 0,$$

то перед подвійними інтегралами у формулах (2.10) і (2.11) треба брати знак «плюс», а перед подвійним інтегралом у формулі (2.12) – знак «мінус».

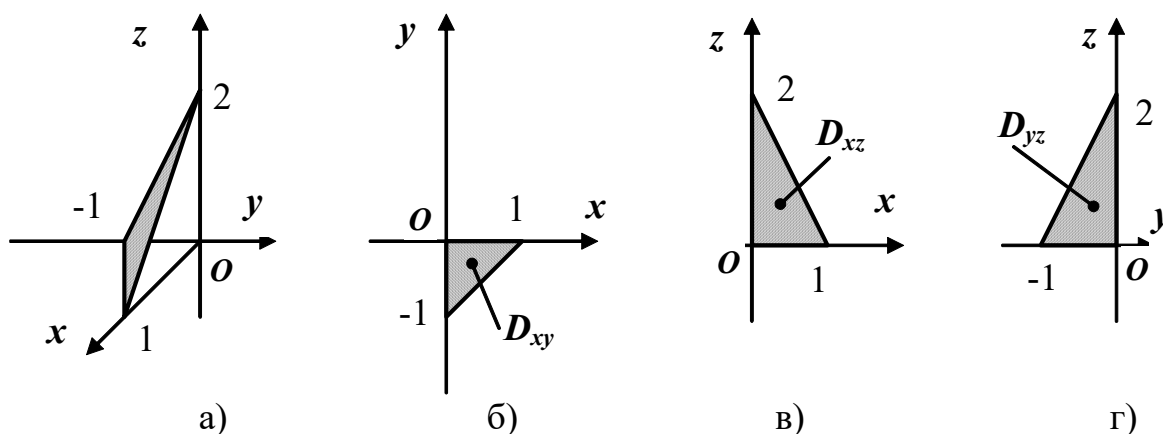


Рисунок 2.2

Отже,

$$I = \int_{-1}^0 dy \int_0^{2-2y} \left(\frac{1}{2}(2-z+2y) - y + \frac{3z}{2} \right) dz - \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} x dz + \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (2x-2y-2) dy = 7.$$

Приклад 2.2 Обчислити потік вектора $\bar{a}(2x-y+z, 0, 0)$ через поверхню $z = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Розв'язування. В даному випадку $\text{пр}_{\vec{n}} \vec{a}$ не є постійною на усій поверхні, тому для обчислення потоку застосуємо формулу (2.14). Оскільки $a_y = a_z = 0$, то формула (2.14) набуває вигляду:

$$\Pi = \pm \iint_{D_{yz}} a_x|_{x=x(y,z)} dydz = \pm \iint_{D_{yz}} (2x - y + z)|_{x=\sqrt{z}} dydz,$$

де D_{yz} – проекція поверхні $z = x^2$ на координатну площину Oyz .

Побудуємо задану поверхню та її проекцію на площину Oyz (рис. 2.6).

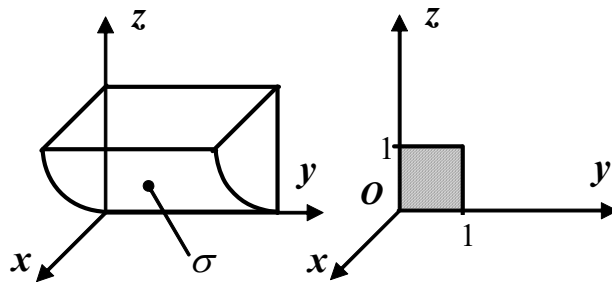


Рисунок 2.3

Визначимо нормальний вектор до поверхні σ :

$$\varphi(x, y, z) = x^2 - z; \quad \varphi'_x = 2x, \quad \varphi'_y = 0, \quad \varphi'_z = -1, \quad \vec{n}^0 = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \vec{k}.$$

Оскільки за формулами (2.14) $\cos(\vec{n}, \vec{Ox}) = \vec{n}^0 \cdot \vec{i} = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} > 0$ для всіх $0 \leq x \leq 1$, то при обчисленні потоку перед подвійним інтегралом ставимо знак «плюс».

Тоді,

$$\Pi = \iint_{D_{yz}} (2x - y + z) dydz = \iint_{D_{yz}} (2\sqrt{z} - y + z) dydz = \int_0^1 dy \int_0^1 (2\sqrt{z} - y + z) dz = \frac{4}{3}.$$

2.3. Алгоритм обчислення потоку векторного поля

Нехай потрібно знайти потік векторного поля $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ через повну поверхню піраміди, утвореної площиною $P: Ax + By + Cz + D = 0$ і координатними площинами. Тоді дотримуємося такої послідовності дій.

1. Зображуємо піраміду, утворену площиною P і координатними площинами. Визначаємо координати вершин, які знаходяться на координатних осях: $A\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$, $B\left(0, -\frac{D}{B}, 0\right)$, $C\left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$, $O(0, 0, 0)$.
2. Визначаємо зовнішню (внутрішню) сторони піраміди.
3. Потік через повну поверхню піраміди обчислюють за формулою:

$$P = P_{ABC} + P_{OBC} + P_{OAC} + P_{OAB}$$

де P_{ABC} – потік векторного поля через верхню сторону трикутника ABC ,
 P_{OBC} – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OBC ,
 P_{OAC} – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OAC ,
 P_{OAB} – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OAB .

4. Для обчислення потоку через верхню сторону трикутника ABC потрібно:

4.а. Визначаємо нормаль до площини $P: \vec{n} = \{A, B, C\}$ і шукаємо його довжину $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

- 4.б. Визначаємо координати одиничного вектора нормалі:

$$\vec{n}^0 = \left\{ \frac{A}{|\vec{n}|}, \frac{B}{|\vec{n}|}, \frac{C}{|\vec{n}|} \right\}.$$

4.в. Шукаємо скалярний добуток векторного поля на одиничний вектор нормалі: $\vec{a} \cdot \vec{n}^0 = a_x \frac{A}{|\vec{n}|} + a_y \frac{B}{|\vec{n}|} + a_z \frac{C}{|\vec{n}|}$.

4.г. Обираємо координатну площину, на яку будемо проектувати трикутник ABC . Наприклад, для простоти, проектуємо на площину XOY . Тоді $z = -\frac{1}{C}(D + Ax + By)$, $\left| \cos(\vec{n}^0, \vec{k}) \right| = \frac{C}{|\vec{n}|}$.

- 4.д. Обчислюємо подвійний інтеграл:

$$P = \iint_{D_{xy}} \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}^0}{|\vec{n}|} \Bigg|_{z = -\frac{1}{C}(D + Ax + By)} dx dy = \int_0^{-\frac{D}{A}} dx \int_0^{-\frac{1}{B}(D + Ax)} \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}^0}{|\vec{n}|} dy,$$

де D_{xy} – проекція трикутника ABC на площину XOY

5. Для обчислення потоку через верхню сторону площини трикутника OBC потрібно:

5.а. $\vec{n}_1 = \vec{i} = \{1,0,0\}$ або $\vec{n}_1 = -\vec{i} = \{-1,0,0\}$, оскільки рівняння площини OBC $x=0$.

5.б. $\left| \cos(\vec{n}^0, \vec{k}) \right| = 1$.

5.в. Шукаємо скалярний добуток векторного поля на вектор нормалі:
 $\vec{a} \cdot \vec{n}_1 = a_x$ або $\vec{a} \cdot \vec{n}_1 = -a_x$.

5.г. Обчислюємо повторний інтеграл:

$$P = \int_0^{\frac{D}{B}} dx \int_0^{-\frac{1}{C}(D+By)} \left| \vec{a} \cdot \vec{n}_1 \right|_{x=0} dz.$$

6-7. Потоки через верхню сторону площин трикутників AOC та AOB шукаємо аналогічно. Зауважимо, що для площини трикутника AOC : $y=0$, нормаль $\vec{n}_2 = \vec{j} = \{0,1,0\}$ або $\vec{n}_2 = -\vec{j} = \{0,-1,0\}$; а для площини трикутника AOB : $z=0$, нормаль $\vec{n}_3 = \vec{k} = \{0,0,1\}$ або $\vec{n}_3 = -\vec{k} = \{0,0,-1\}$.

8. Формуємо відповідь.

Приклад 2.3 Знайти потік векторного поля $\vec{a} = (2x+y)\vec{i} + (x+3z)\vec{j}$ через повну поверхню піраміди, утвореної площиною $P: x+2y+z=2$ і координатними площинами.

Розв'язування. Зробимо схематичний рисунок (рис. 2.4).

Обчислимо потік векторного поля через верхню сторону трикутника ABC , утвореного при перерізі площини $P: x+2y+z=2$ з координатними площинами (σ).

Оскільки поверхня σ взаємно однозначно проектується на площину xOy в область D_{xy} , то обчислення потоку векторного поля \vec{a} через дану поверхню зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy} за формулою :

$$P_{ABC} = \iint_{\sigma_{ABC}} \vec{a} d\sigma = \iint_{\sigma_{ABC}} \vec{a} n^0 d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\vec{a} n^0}{\left| \cos(\vec{n}^0, \vec{k}) \right|} \right|_{z=z(x,y)} dx dy. \quad (2.15)$$

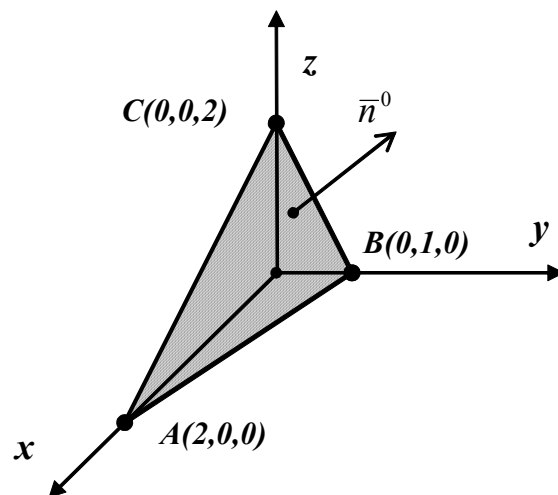


Рисунок 2.4

Знайдемо одиничний вектор нормалі до поверхні $\varphi(x, y, z) = x + 2y + z - 2 = 0$: $\vec{n} = \{1, 2, 1\}$, $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$, тоді $\vec{n}^0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}$.

Обчислимо скалярний добуток векторів \vec{a} та \vec{n}^0 , заданих своїми декартовими координатами:

$$\vec{a}\vec{n}^0 = (2x + y) \frac{1}{\sqrt{6}} + (x + 3z) \frac{2}{\sqrt{6}} + 0 \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{4x + y + 6z}{\sqrt{6}},$$

тобто $\vec{a}\vec{n}^0 = \frac{4x + y + 6z}{\sqrt{6}}$, при цьому $\cos(\vec{n}^0, \vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Тоді

$$\frac{dxdy}{|\cos(\vec{n}^0, \vec{k})|} = \sqrt{6}dxdy.$$

Спроектуємо даний трикутник на площину XOY (див. рис. 2.5)

Отже,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_{ABC}} \vec{a}\vec{n}^0 d\sigma &= \iint_{D_{xy}} \frac{4x + y + 6z}{\sqrt{6}} \Big|_{z=2-x-2y} \sqrt{6}dxdy = \iint_{D_{xy}} (4x + y + 12 - 6x - 12y)dxdy = \\ &= \iint_{D_{xy}} (12 - 2x - 11y)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{2-2y} (12 - 2x - 11y)dx = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (12(2-2y) - (2-2y)^2 - 11y(2-2y)) dy = 24 \int_0^1 (1-y) dy - 4 \int_0^1 (1-y)^2 dy -$$

$$- 22 \int_0^1 (y-y^2) dy = -24 \frac{(1-y)^2}{2} \Big|_0^1 + 4 \frac{(1-y)^3}{3} \Big|_0^1 - 22 \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 + 22 \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = 7,$$

тобто $\Pi_{ABC} = 7$.

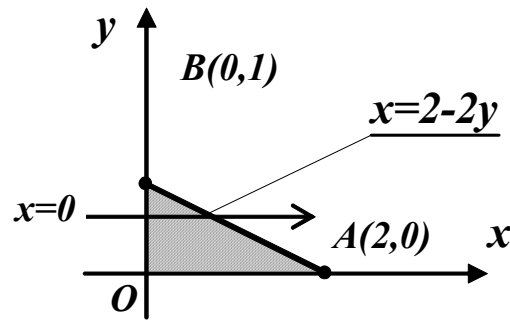


Рисунок 2.5

Обчислимо потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OBC . Рівняння площини OBC : $x = 0$, одиничний вектор нормалі \bar{n}_2 до цієї площини паралельний осі Ox , але має напрям, протилежний напрямку вектора \bar{i} . Тому за умовою колінеарності векторів $\bar{n}_2 = -\bar{i} = \{-1, 0, 0\}$. Тоді

$$\Pi_{OBC} = \iint_{\sigma_{OBC}} \overline{an_2} d\sigma = \iint_{D_{yz}} \left| \frac{\overline{an_2}}{\cos(\bar{n}_2, \bar{i})} \right|_{x=x(y,z)} dydz,$$

причому $\cos(\bar{n}_2, \bar{i}) = -1$, $\overline{an_2} = (2x+y) \cdot (-1) + 0 \cdot (x+3z) + 0 \cdot 0 = -2x-y$.

Зобразимо проєкцію даного трикутника на площину YOZ (рис. 2.6):

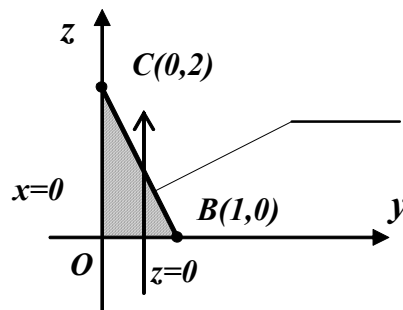


Рисунок 2.6

Маємо:

$$\iint_{\sigma_{ABC}} \overline{an_2} d\sigma = \iint_{D_{yz}} (-2x - y) \Big|_{x=0} dy dz = - \iint_{D_{yz}} y dy dz = - \int_0^1 y dy \int_0^{2-2y} dz = - \int_0^1 yz \Big|_0^{2-2y} dy =$$

$$= \int_0^1 2y^2 dy - \int_0^1 2y dy = 2 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3}. \text{ Тобто } \Pi_{OBC} = -\frac{1}{3}.$$

Обчислимо потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OAC . Рівняння площини OAC : $y = 0$, одиничний вектор нормалі $\overline{n_3}$ до цієї площини паралельний осі Oy , але має напрям, протилежний напрямку вектора \overline{j} , тому $\overline{n_3} = \{0, -1, 0\}$. Тоді

$$\Pi_{OAC} = \iint_{\sigma_{AOC}} \overline{an_3} d\sigma = \iint_{D_{xz}} \left| \frac{\overline{an_3}}{\cos(\overline{n_3}, \overline{j})} \right|_{y=y(x,z)} dx dz,$$

причому $\cos(\overline{n_3}, \overline{j}) = -1$, $\overline{an_3} = (2x + y) \cdot 0 + (-1) \cdot (x + 3z) + 0 \cdot 0 = -x - 3z$.

Маємо (рис. 2.7):

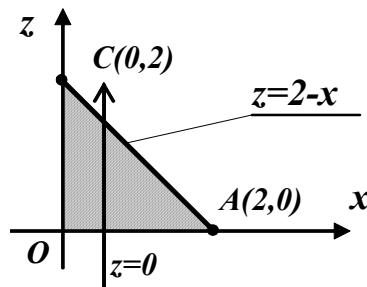


Рисунок 2.7

$$\iint_{\sigma_{AOC}} \overline{an_3} d\sigma = \iint_{D_{xz}} (-x - 3z) \Big|_{y=0} dx dz = - \iint_{D_{xz}} (x + 3z) dx dz = - \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x + 3z) dz =$$

$$= - \int_0^2 \left(xz \Big|_0^{2-x} + 3 \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^{2-x} \right) dx = \int_0^2 \left(-2x + x^2 - \frac{3}{2} (2-x)^2 \right) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{(2-x)^3}{3} \Big|_0^2 =$$

$$= -\frac{4}{3} - 4 = -\frac{16}{3}, \text{ тобто } \Pi_{AOC} = -\frac{16}{3}.$$

Обчислимо потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OAB . Рівняння цієї площини: $z = 0$, одиничний вектор нормалі

\bar{n}_4 до цієї площини паралельний осі Oz , але має напрям, протилежний напрямку вектора \bar{k} , тому $\bar{n}_4 = \{0, 0, -1\}$.

Оскільки $\overline{an}_4 = (2x + y) \cdot 0 + 0 \cdot (x + 3z) + 0 \cdot (-1) = 0$, то

$$П_{AOB} = \iint_{\sigma_{OAB}} \overline{an}_4 d\sigma = 0.$$

Таким чином, $П = 7 - \frac{1}{3} - \frac{16}{3} = \frac{4}{3}$.

2.4. Формула Остроградського-Гаусса

Формула Остроградського-Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею.

Розглянемо деяке векторне поле $\bar{a}(a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z))$. Нехай в просторі задано правильну область V , обмежену замкненою поверхнею σ , проекцією якої на координатну площину Oxy є правильна область D (рис. 2.8).

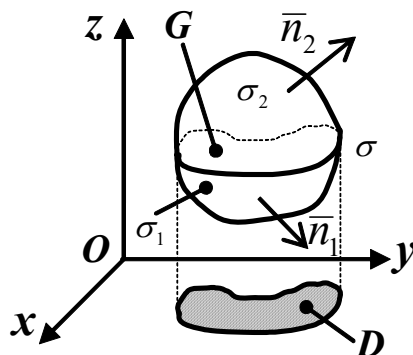


Рисунок 2.8

Поверхня σ може бути розбита на нижню поверхню σ_1 , яка задається рівнянням $z = f_1(x, y)$, верхню поверхню σ_2 , яка задається рівнянням $z = f_2(x, y)$, та бічну циліндричну поверхню σ_3 з твірною, паралельною осі Oz .

Тоді потрійний інтеграл по області V функції $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ дорівнює поверхневому інтегралу векторного поля $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ по поверхні σ . Тобто,

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV = \iint_{\sigma} (a_x \cos(\bar{n}^0, \bar{i}) + a_y \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) + a_z \cos(\bar{n}^0, \bar{k})) d\sigma, \quad (2.16)$$

або

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} a_x dy dz + a_y dx dz + a_z dx dy. \quad (2.17)$$

Формули (2.16), (2.17) називають формулою *Остроградського-Гаусса*.

Наведемо **алгоритм обчислення потоку векторного поля** $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ через повну поверхню піраміди, утвореної площиною $P: Ax + By + Cz + D = 0$ і координатними площинами **за формулою Остроградського-Гаусса:**

1. Зображуємо піраміду, утворену площиною P і координатними площинами. Визначаємо координати вершин, які знаходяться на координатних осях:

$$A \left(-\frac{D}{A}, 0, 0 \right), B \left(0, -\frac{D}{B}, 0 \right), C \left(0, 0, -\frac{D}{C} \right), O(0, 0, 0).$$

2. Обчислюємо $\frac{\partial a_x}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial y}, \frac{\partial a_z}{\partial z}$ та значення виразу $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$.

3. Обчислюємо інтеграл:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_0^{\frac{D}{A}} dx \int_0^{\frac{D}{B}} dy \int_0^{-\frac{1}{C}(D+Ax+By)} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dz.$$

Зауваження! Якщо $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = const$, то потік дорівнює об'єму піраміди, в основі якої лежить прямокутний трикутник.

Приклад 2.4 Обчислити потік з прикладу 2.3 за формулою Остроградського-Гаусса.

Розв'язування. Обчислимо потік векторного поля через повну поверхню піраміди в напрямі її зовнішньої нормалі за формулою Остроградського-Гаусса.

Обчислимо спочатку вираз $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$, маємо:

$$\frac{\partial(2x+y)}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial(x+3z)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial 0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 2.$$

$$P = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = 2 \iiint_V dx dy dz = 2V_{\text{піраміди}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення односторонньої поверхні.
2. Дайте означення двосторонньої поверхні.
3. Яка поверхня називається орієнтованою?
4. Дайте означення поверхневого інтеграла.
5. Що називають потоком векторного поля?
6. Як обчислюється поверхневий інтеграл?
7. У чому полягає зв'язок між поверхневими та подвійними інтегралами?
8. Сформулюйте властивості потоку векторного поля \vec{a} через поверхню σ .
9. Запишіть та доведіть формулу Остроградського-Гаусса.
10. Як визначити одиничний нормальний вектор до поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$?
11. Як обчислити потік векторного поля \vec{a} через поверхню σ , яка неоднозначно проектується на будь-яку координатну площину?
12. Дайте означення поверхневого інтегралу II-го роду.
13. Як обчислюють поверхневі інтеграли II-го роду?
14. Що називають векторними лініями?
15. Наведіть приклади векторних полів.
16. Що називають векторним полем?

Вправи для самостійної роботи

Обчислити потік векторного поля через повну поверхню піраміди, утвореної площиною P і координатними площинами:

а) безпосередньо;

б) за формулою Остроградського-Гаусса.

1. $\vec{a} = (2x + y)\vec{i} + (2z - x)\vec{j} + (2y - z)\vec{k}$,
 $P: 2x + y + z = 2$.

9. $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{j} + (3z + xy)\vec{k}$,
 $P: x - y + z = 1$.

2. $\vec{a} = (3x - y)\vec{i} + (z + 3y)\vec{j} + (z + x)\vec{k}$,
 $P: 3x + 2y - z = 6$.

10. $\vec{a} = 2xy\vec{i} + z\vec{j} + xz\vec{k}$,
 $P: x + 2y + z = 2$.

3. $\vec{a} = x^2\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$,
 $P: 2x + y + z = 2$.

11. $\vec{a} = (y + 3z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (2y + z)\vec{k}$,
 $P: x + y + 2z = 2$.

4. $\vec{a} = 2yz\vec{i} + (x^2 + 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$,
 $P: 3x + 2y - z = 6$.

12. $\vec{a} = 3xz\vec{j} + 2yz\vec{k}$,
 $P: x + y + z = 2$.

5. $\vec{a} = zy^2\vec{i} + (x^2 - 2z)\vec{j}$,
 $P: 2x - 2y - z = 2$.

13. $\vec{a} = y^2z\vec{i} + (xy + 3z)\vec{k}$,
 $P: 2x + y + 2z = 2$.

6. $\vec{a} = x^2\vec{j} + (xy - 2y)\vec{k}$,
 $P: x + y - z = 2$.

14. $\vec{a} = x^2y\vec{j} + (2xy + 3z)\vec{k}$,
 $P: 2x + y + 2z = 4$.

7. $\vec{a} = 3xy\vec{i} + x\vec{k}$,
 $P: x - y + z = 1$.

15. $\vec{a} = (x + 2y)\vec{i} + (x - 2z)\vec{j} + (2y + z)\vec{k}$,
 $P: x - y + z = 3$.

8. $\vec{a} = 3yzi + (x + y^2)\vec{j} + xy\vec{k}$,
 $P: x + y + 3z = 3$.

ТЕМА 3 ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

3.1. Дивергенція (розбіжність) векторного поля. Обчислення дивергенції векторного поля в декартовій системі координат

Нехай дано векторне поле $\vec{a}(M)$. Виберемо довільну точку M в просторі та обведемо її деякою гладкою (або кусково-гладкою) замкненою поверхнею σ . Тоді потік векторного поля через цю поверхню у напрямі зовнішньої нормалі дорівнює

$$\oiint_{\sigma} \vec{a} ds.$$

Позначимо через ΔV об'єм тіла, обмеженого поверхнею σ . Тоді $\frac{\oiint_{\sigma} \vec{a} ds}{\Delta V}$ характеризує питому продуктивність джерел, що містяться усередині поверхні σ (*питома потужність джерел*).

Будемо стягувати поверхню σ в точку M . Границя, до якої при цьому прямує середня потужність джерел, називається *дивергенцією векторного поля* $\vec{a}(M)$ в точці M і позначається символом $\text{div} \vec{a}(M)$, тобто

$$\text{div} \vec{a}(M) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\sigma} \vec{a} ds}{\Delta V}. \quad (3.1)$$

Обчислення дивергенції за означенням пов'язане з необхідністю граничного переходу, що ускладнює викладки. Однак слід відмітити, що за допомогою цієї формули ми можемо визначити *джерела* та *стоки*: ті точки, в яких дивергенція додатна, називаються джерелами, а ті, в яких вона від'ємна, називаються стоками.

Розглянемо векторне поле $\vec{a}(M)$:

$$\vec{a}(M) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k},$$

де $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$, $a_z(x, y, z)$ – проекції вектора на координатні осі, неперервні функції.

Тоді,

$$\operatorname{div} \bar{a}(M_0) = \frac{\partial a_x(M_0)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_0)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_0)}{\partial z}. \quad (3.2)$$

Приклад 3.1 Визначити, в яких точках векторне поле $\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c}$ має джерела, а в яких – стоки, якщо $\bar{b} = y\bar{i} + xz\bar{j} - yz\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$, $M_3(-5,1,2)$.

Розв'язування. Знайдемо векторне поле $\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c}$:

$$\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ y & xz & -yz \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-xz + 2yz)\bar{i} - (-y + yz)\bar{j} + (2y - xz)\bar{k}.$$

Тобто

$$\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c} = z(-x + 2y)\bar{i} - y(-1 + z)\bar{j} + (2y - xz)\bar{k}.$$

Знайдемо дивергенцію даного векторного поля. Оскільки

$$a_x = z(2y - x), \quad a_y = -y(z - 1), \quad a_z = 2y - xz,$$

то

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = -z, \quad \frac{\partial a_y}{\partial y} = -z, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = -x.$$

Таким чином, дивергенція даного векторного поля за формулою (3.2) набуває такого вигляду:

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \frac{\partial a_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M)}{\partial z} = -2z - x.$$

Обчислимо дивергенцію векторного поля в заданих точках, маємо:

$$\operatorname{div} \bar{a}(M_1) = \frac{\partial a_x(M_1)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_1)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_1)}{\partial z} = -2 \cdot 1 - 1 = -3;$$

$$\operatorname{div} \bar{a}(M_2) = \frac{\partial a_x(M_2)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_2)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_2)}{\partial z} = -2 \cdot (-1) - 0 = 2;$$

$$\operatorname{div} \bar{a}(M_3) = \frac{\partial a_x(M_3)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_3)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_3)}{\partial z} = -2 \cdot 2 - (-5) = 1.$$

Оскільки $\operatorname{div} \bar{a}(M_1) = -3 < 0$, а $\operatorname{div} \bar{a}(M_2) = 2 > 0$ і $\operatorname{div} \bar{a}(M_3) = 1 > 0$, то в точці M_1 векторне поле $\bar{a} = z(-x + 2y)\bar{i} - y(-1 + z)\bar{j} + (2y - xz)\bar{k}$ має стік, а в точках M_2 і M_3 – джерела.

Приклад 3.2 Напруженість \bar{E} поля точкового електричного заряду e на відстані r від цього заряду

$$\bar{E} = \frac{e}{r^3} \bar{r},$$

де \bar{r} – радіус-вектор, проведений з заряду у довільну точку A . Визначити потік вектора \bar{E} через довільну замкнену поверхню, яка не охоплює заряд e .

Розв’язування. Для обчислення потоку вектора \bar{E} через довільну замкнену поверхню, яка не охоплює заряд e , скористаємось формулою Остроградського-Гаусса, записаною з використанням поняття дивергенції векторного поля. Маємо:

$$\iiint_V \operatorname{div} \bar{a} \, dV = \iint_{\sigma} (a_x \cos(\bar{n}^0, \bar{i}) + a_y \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) + a_z \cos(\bar{n}^0, \bar{k})) \, d\sigma.$$

Вважатимемо, що заряд e розмішений у початку координат, а точка A має координати x, y та z . Тоді радіус-вектор $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, а його модуль $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Тому рівність $\bar{E} = \frac{e}{r^3} \bar{r}$ набуває вигляду:

$$\bar{E} = \frac{e}{r^3} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}),$$

а

$$E_x = \frac{e}{r^3} x, \quad E_y = \frac{e}{r^3} y, \quad E_z = \frac{e}{r^3} z.$$

Знайдемо тепер $\frac{\partial E_x}{\partial x}$, $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ та $\frac{\partial E_z}{\partial z}$.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = e \frac{r^3 - 3r^2 x \cdot \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6},$$

але $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$.

Тому

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = e \frac{r^3 - 3r^2 x \cdot \frac{x}{r}}{r^6} = e \frac{r^3 - 3rx^2}{r^6} = e \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = e \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = e \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

Таким чином, дивергенція векторного поля \vec{E} така:

$$\operatorname{div} \vec{E} = e \frac{(r^2 - 3x^2) + (r^2 - 3y^2) + (r^2 - 3z^2)}{r^5} = e \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = e \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0.$$

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV = \iiint_V 0 \, dV = 0.$$

3.2. Циркуляція векторного поля та її обчислення.

Нехай маємо векторне поле $\vec{a}(M) = \{a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z)\}$ і σ – деяка гладка поверхня. Виберемо в просторі деякий плоский замкнений контур L і позначимо через \vec{n} – вектор нормалі до площини, в якій лежить цей контур. Криволінійний інтеграл

$$\oint_L \vec{a} \, d\vec{l} \tag{3.3}$$

називається *циркуляцією векторного поля $\vec{a}(M)$ уздовж контура L* і позначають його $C(\vec{a})$. Для розуміння фізичної суті поняття циркуляції розглянемо поняття *криволінійного інтеграла* та методи його обчислення.

Нехай точка рухається уздовж деякої лінії L від точки M до точки N . Тоді робота, що її виконує сила $\vec{F} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$ при переміщенні точки $P(x, y, z)$ уздовж лінії L , називається криволінійним інтегралом і обчислюється за формулою:

$$A = \int_L \vec{F} \, d\vec{l} = \int_L X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz =$$

$$= \int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz . \quad (3.4)$$

При цьому напрям від точки M до точки N називається напрямом інтегрування.

Зауваження. Для позначення криволінійного інтеграла вздовж замкнутого контура (точка початку збігається з точкою кінця) використовують символ \oint_L , тобто

$$\oint_L \overline{F} \overline{dl} = \oint_L X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz .$$

Слід відмітити, що замкнутий контур вважається додатно орієнтованим, якщо при його обході область, обмежена цим контуром, залишається зліва.

Обчислити криволінійні інтеграли можна шляхом зведення їх до визначених інтегралів, і вони мають аналогічні властивості.

Нехай крива L (від точки M до точки N) задана параметричним рівнянням $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, де функції $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t)$, $y'(t)$ і $z'(t)$. Точці M відповідає значення параметра α , а точці N – β . Тоді

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} (X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt . \quad (3.5)$$

Приклад 3.3 Обчислити інтеграл $I = \int_L ydx + xdy$, де L – частина кола $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, що знаходиться у першому квадранті.

Розв'язування. Для обчислення даного інтеграла використаємо формулу (3.5). Знайдемо відповідні похідні

$$x'(t) = -r \sin t, \quad y'(t) = r \cos t .$$

Тоді

$$I = \int_L ydx + xdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \sin t \cdot (-r \sin t) + r \cos t \cdot r \cos t)dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{r^2}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 .$$

Зокрема, якщо крива L (від точки M до точки N) задана рівнянням $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, де функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, то з формули (3.5) дістанемо

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_a^b (X(x, f(x)) + Y(x, f(x))f'(x))dx. \quad (3.6)$$

Приклад 3.4 Обчислити інтеграл $I = \int_L (x + y)dx - y^2 dy$, де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(1,1)$.

Розв'язування. Оскільки $y' = 2x$, то за формулою (3.6) маємо:

$$I = \int_L (x + y)dx - y^2 dy = \int_0^1 (x + x^2 - x^4 \cdot 2x)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Зауваження. Якщо $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$, то

$$\int_L \bar{F} \bar{dl} = \int_{L_1} \bar{F} \bar{dl} + \int_{L_2} \bar{F} \bar{dl} + \dots + \int_{L_n} \bar{F} \bar{dl}. \quad (3.7)$$

Зв'язок між подвійними та криволінійними інтегралами встановлює *формула Гріна* (виведення формули та її застосування див [8]).

Нехай є векторне поле $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$. Необхідно знайти циркуляцію даного поля вздовж контура L , що обмежує трикутник ABC , утворений при перерізі площини $P: Ax + By + Cz + D = 0$ з координатними площинами. Наведемо **алгоритм обчислення циркуляції**.

1. Будуємо трикутник $ABC: A\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right), B\left(0, -\frac{D}{B}, 0\right), C\left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$ і задаємо додатний напрям обходу. Тоді циркуляцію будемо обчислювати за формулою:

$$Ц(\bar{a}) = \oint_{AB} \bar{a} \bar{dl} + \oint_{BC} \bar{a} \bar{dl} + \oint_{CA} \bar{a} \bar{dl}.$$

2. Шукаємо скалярний добуток $\bar{a} \cdot \bar{dl}$, де $\bar{dl} = \{dx, dy, dz\}$: $\bar{a} \cdot \bar{dl} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$.

3. Обчислюємо криволінійні інтеграли по кожній прямій. Наприклад, по прямій $AB: z = 0, dz = 0$, з рівняння площини P знаходимо

$$y = -\frac{1}{B}(D + Ax), \quad \text{тоді} \quad dy = -\frac{A}{B}dx, \quad x \in \left[-\frac{D}{A}, 0\right]. \quad \text{Одже,}$$

$$\mathcal{C}_{AB} = \int_{\frac{D}{A}}^0 \left(a_x + a_y \left(-\frac{A}{B} \right) \right) \Big|_{z=0}^{y=-\frac{1}{B}(D+Ax)} dx.$$

По прямій BC : $x=0$, $dx=0$, з рівняння площини P знаходимо $z = -\frac{1}{C}(D + By)$, тоді $dz = -\frac{B}{C}dy$, $y \in \left[-\frac{D}{B}, 0\right]$. Одже

$$\mathcal{C}_{BC} = \int_{\frac{D}{C}}^0 \left(a_y + a_z \left(-\frac{B}{C} \right) \right) \Big|_{x=0}^{z=-\frac{1}{C}(D+By)} dy. \quad \text{По прямій } CA \text{ міркування аналогіч-}$$

ні.

4. Формуємо відповідь.

Приклад 3.5 Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (2x + y)\vec{i} + (x + 3z)\vec{j}$ вздовж контура L , що обмежує трикутник ABC , утворений при перерізі площини P : $x + 2y + z = 2$ з координатними площинами.

Розв'язування. Обчислимо циркуляцію векторного поля безпосередньо (рис. 3.1):

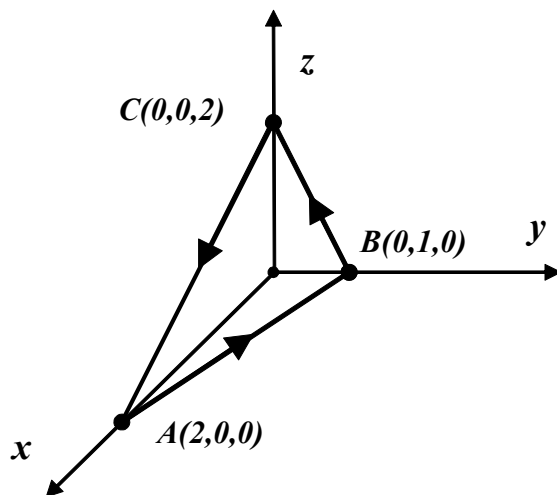


Рисунок 3.1

$$\mathcal{C}(\vec{a}) = \oint_{AB} \vec{a} d\vec{l} + \oint_{BC} \vec{a} d\vec{l} + \oint_{CA} \vec{a} d\vec{l},$$

де $\vec{a} d\vec{l} = (2x + y)dx + (x + 3z)dy$.

На прямій AB $z = 0, dz = 0, y = 1 - \frac{x}{2}, dy = -\frac{1}{2}dx, x \in [0,2]$. Інтегрування здійснюється від 2 до 0. Тоді

$$\oint_{AB} \bar{a} dl = \int_2^0 \left(2x + 1 - \frac{x}{2} + (x + 3 \cdot 0) \left(-\frac{1}{2} \right) \right) dx = \int_2^0 (x + 1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_2^0 = -2 - 2 = -4.$$

На прямій BC $x = 0, dx = 0, z = 2 - 2y, dz = -2dy, y \in [0,1]$. Інтегрування здійснюється від 1 до 0. Тоді

$$\oint_{BC} \bar{a} dl = \int_1^0 3(2 - 2y) dy = \left(6y - 3y^2 \right) \Big|_1^0 = 3(0 - 2 - 0 + 1) = -3.$$

На прямій CA $y = 0, dy = 0, z = 2 - x, dz = -dx, x \in [0,2]$. Тоді

$$\oint_{CA} \bar{a} dl = \int_0^2 2x dx = x^2 \Big|_0^2 = 4.$$

$$\text{Таким чином, } \mathcal{C}(\bar{a}) = \oint_{AB} \bar{a} dl + \oint_{BC} \bar{a} dl + \oint_{CA} \bar{a} dl = -4 - 3 + 4 = -3.$$

3.3. Проекція ротора векторного поля на вектор нормалі та ротор векторного поля

Візьмемо в руки пір'їнку і акуратно відправимо її в плавання по річці. Для чистоти експерименту будемо вважати, що вона є однорідною і симетричною щодо свого центру. Вісь OZ спрямована вгору. Розглянемо векторне поле швидкості течії, і деяку точку водної поверхні, над якою знаходиться центр пера.

Якщо в даній точці перо обертається проти годинникової стрілки, то поставимо їй у відповідність вихідний вектор, спрямований вгору. При цьому, чим швидше обертається перо, тим довший цей вектор. Якщо обертання відбувається за годинниковою стрілкою, то вектор «дивиться» вниз. Якщо ж перо не обертається зовсім, то вектор нульовий. Цей вектор називають *вектором ротора* векторного поля швидкості, він характеризує напрям «завихрення» рідини в даній точці і кутову швидкість обертання пера (*але не напрямом і не швидкістю пересування!*).

Цілком зрозуміло, що роторний вектор є у всіх точках річки (в тому числі і тих, які «під водою»), таким чином, для векторного поля швидкості течії ми визначили нове векторне поле!

Позначимо ΔS площу поверхні, обмеженої контуром L . Виберемо у середині отриманої плоскої фігури довільну точку і шляхом неперервної деформації будемо стягувати контур L в цю точку, не змінюючи напрям нормалі \bar{n} . Тоді

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{a} d\bar{l}}{\Delta S} \quad (3.8)$$

називається проекцією ротора векторного поля в точці M у напрямі нормалі \bar{n} і позначається $np_{\bar{n}} \text{rot} \bar{a}(M)$, тобто:

$$np_{\bar{n}} \text{rot} \bar{a}(M) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{a} d\bar{l}}{\Delta S}. \quad (3.9)$$

Загалом, $np_{\bar{n}} \text{rot} \bar{a}(M)$ характеризує густину циркуляції векторного поля. У випадку поля швидкостей рухомої рідини проекція ротора векторного поля в точці M у напрямі нормалі характеризує інтенсивність обертального руху. Зокрема, якщо рух ламінарний, то $np_{\bar{n}} \text{rot} \bar{a}(M)$ у кожній точці дорівнює нулю. Вектор, у напрямі якого $np_{\bar{n}} \text{rot} \bar{a}(M)$ досягає максимального значення і модуль якого дорівнює цьому максимальному значенню, називають *ротором (вихором)* векторного поля і позначають $\text{rot} \bar{a}(M)$.

Модуль та напрям ротора в загальному випадку змінюються при переході від однієї точки простору до іншої. Формула для обчислення ротора в декартових координатах має вигляд:

$$\text{rot} \bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k}. \quad (3.10)$$

Приклад 3.6 Обчислити ротор векторного поля $\bar{a} = 3x\bar{i} + yz\bar{j} + y^2\bar{k}$.

Розв'язування.

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{a}(M) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x & yz & y^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y^2)}{\partial y} - \frac{\partial(yz)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(3x)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(yz)}{\partial x} - \frac{\partial(3x)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= (2y - y)\bar{i} - (0 - 0)\bar{j} + (0 - 0)\bar{k} = y\bar{i}. \text{ Тобто } \text{rot} \bar{a}(M) = \{y, 0, 0\}. \end{aligned}$$

Приклад 3.7 Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля $\bar{a} = x^2 y^3 \bar{i} - yz^2 \bar{j} - x^2 z \bar{k}$ в точці $M_0(2,1,3)$.

Розв'язування. Знайдемо ротор векторного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{a}(M) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y^3 & -yz^2 & -x^2 z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(-zx^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-yz^2)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(-x^2 z)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial z} \right) \bar{j} \\ &+ \left(\frac{\partial(-yz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial y} \right) \bar{k} = (0 + 2yz) \bar{i} - (-2xz - 0) \bar{j} + (0 - 3x^2 y^2) \bar{k}, \end{aligned}$$

тобто $\operatorname{rot} \bar{a}(M) = \{2yz, 2xz, -3x^2 y^2\}$ і обчислимо його значення в точці $M_0(2,1,3)$. Маємо $\operatorname{rot} \bar{a}(M_0) = \{6, 12, -12\}$.

Найбільша густина циркуляції векторного поля $\bar{a} = x^2 y^3 \bar{i} - yz^2 \bar{j} - x^2 z \bar{k}$ в точці $M_0(2,1,3)$ досягається в напрямі $\operatorname{rot} \bar{a}(M_0)$ і дорівнює $|\operatorname{rot} \bar{a}(M_0)|$, тобто

$$|\operatorname{rot} \bar{a}(M_0)| = \sqrt{6^2 + 12^2 + (-12)^2} = \sqrt{324} = 18.$$

Наведемо **властивості ротора** векторного поля.

1. Якщо \bar{c} – сталий вектор, то $\operatorname{rot} \bar{c}(M) = 0$.

2. (Властивість лінійності). Якщо \bar{a}_1 і \bar{a}_2 – векторні поля, C_1 і C_2 – числа, то

$$\operatorname{rot} (C_1 \bar{a}_1 + C_2 \bar{a}_2) = C_1 \operatorname{rot} \bar{a}_1 + C_2 \operatorname{rot} \bar{a}_2.$$

3. Для будь-якого векторного поля $\bar{a}(M)$ $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{a}) = 0$.

4. Нехай U – скалярне поле, $\bar{a}(M)$ – векторне поле. Побудуємо векторне поле $U \cdot \bar{a}(M)$, тоді $\operatorname{rot}(U \cdot \bar{a}(M)) = U \operatorname{rot} \bar{a}(M) + \operatorname{grad}(U \times \bar{a}(M))$.

Зауваження. Якщо вектор $\bar{a}(M)$ – постійний, то $\operatorname{rot}(U \cdot \bar{a}(M)) = \operatorname{grad} U \times \bar{a}(M)$.

5. Нехай $\bar{a}_1 = \{a_{x_1}(x, y, z), a_{y_1}(x, y, z), a_{z_1}(x, y, z)\}$ і $\bar{a}_2 = \{a_{x_2}(x, y, z), a_{y_2}(x, y, z), a_{z_2}(x, y, z)\}$, тоді $\operatorname{div}(\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = \bar{a}_2 \operatorname{rot} \bar{a}_1 - \bar{a}_1 \operatorname{rot} \bar{a}_2$.

3.4. Формула Стокса

Нехай координати вектора $\bar{a}(M)$ мають неперервні частинні похідні першого порядку, а L – замкнений, гладкий (або кусково-гладкий) контур. Натягнемо на контур гладку (або кусково-гладку) поверхню σ , яка задається рівнянням $z = z(x, y)$. Виберемо верхню сторону даної поверхні (рис. 3.2).

Тоді буде мати місце таке співвідношення:

$$\text{Ц}(\bar{a}) = \oint_L \bar{a} d\bar{l} = \iint_{\sigma} \text{rot} \bar{a} d\bar{s}, \quad (3.11)$$

яке називають *формулою Стокса*. Виведення формули можна розглянути [6, 8].

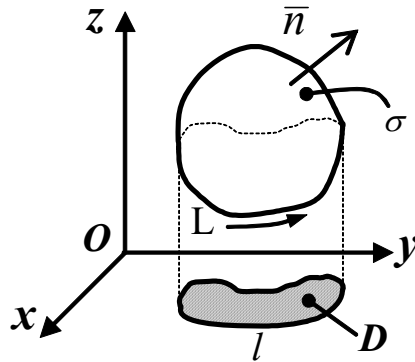


Рисунок 3.2

Нехай є векторне поле $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$. Необхідно знайти циркуляцію даного поля вздовж контура L , що обмежує трикутник ABC , утворений при перерізі площини $P: Ax + By + Cz + D = 0$ з координатними площинами за формулою Стокса. Наведемо відповідний **алгоритм обчислення циркуляції**.

1. Будуємо трикутник $ABC: A\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right), B\left(0, -\frac{D}{B}, 0\right), C\left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$ та знаходимо проекцію цього трикутника на площину XOY – D_{xy} .
2. Обчислюємо ротор векторного поля за формулою (3.10).
3. Визначаємо координати одиничного вектора нормалі до площини P :

$$\bar{n}^0 = \left\{ \frac{A}{|\bar{n}|}, \frac{B}{|\bar{n}|}, \frac{C}{|\bar{n}|} \right\}, \text{ де } |\bar{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

4. Знаходимо скалярний добуток $\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0$.

5. Визначаємо $\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right| = \frac{C}{|\bar{n}|}$.

6. Обчислюємо циркуляцію:

$$\Gamma(\bar{a}) = \int_0^{\frac{D}{A}} dx \int_0^{-\frac{1}{B}(D+Ax)} \frac{\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\frac{C}{|\bar{n}|}} \Bigg|_{z=-\frac{1}{C}(D+Ax+By)} dy.$$

Зауваження! Якщо $\frac{\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\frac{C}{|\bar{n}|}} = k = \text{const}$, то

$$\Gamma(\bar{a}) = k \iint_{D_{xy}} dx dy = k S_{D_{xy}} = k \frac{1}{2} \left(-\frac{D}{A} \right) \left(-\frac{D}{B} \right) = \frac{k D^2}{A \cdot B}.$$

Приклад 3.8 Обчислити циркуляцію векторного поля з прикладу 3.5. за формулою Стокса.

Розв'язування. Обчислимо $\text{rot} \bar{a}$:

$$\text{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+y & x+3z & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial(x+3z)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial(2x+y)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(x+3z)}{\partial x} - \frac{\partial(2x+y)}{\partial y} \right) \bar{k} = -3\bar{i}.$$

Контур трикутника ABC має додатну орієнтацію і лежить у площині $P: x+2y+z=2$, $\bar{n}^0 \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$ – вектор нормалі до даної поверхні.

Тоді

$$\Gamma(\bar{a}) = \iint_{\sigma} \text{rot} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \iint_{D_{xy}} \frac{\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right|} \Bigg|_{z=z(x,y)} dx dy.$$

Оскільки $rot \bar{a} \cdot \bar{n}^0 = -\frac{3}{\sqrt{6}}$, $\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right| = \frac{1}{\sqrt{6}}$, то

$$\iint_{D_{xy}} \frac{rot \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right|} \Big|_{z=z(x,y)} dx dy = -3 \iint_{D_{xy}} dx dy = -3 S_{\Delta OAB} = -3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = -3.$$

3.5. Оператор Гамільтона

Векторно-диференціальний оператор $\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$ називають *оператором Гамільтона* і позначають символом $\bar{\nabla}$ (набла), тобто

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}. \quad (3.12)$$

Оператор $\bar{\nabla}$ має властивості як вектора, так і оператора диференціювання. Дія оператора на скалярне поле U та довільний вектор \bar{a} здійснюється так:

$$\bar{\nabla} U = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k} = grad U, \quad (3.13)$$

$$\bar{\nabla} \bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \bar{k} = div \bar{a}, \quad (3.14)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = rot \bar{a}. \quad (3.15)$$

При застосуванні оператора $\bar{\nabla}$ потрібно користуватись правилами векторної алгебри та правилами диференціювання. Наприклад,

$$rot(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{\nabla} \times (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{\nabla} \times \bar{a} + \bar{\nabla} \times \bar{b} = rot \bar{a} + rot \bar{b},$$

$$grad(\lambda U) = \bar{\nabla}(\lambda U) = \lambda \bar{\nabla} U = \lambda grad U, \quad (\lambda = const), \quad (3.16)$$

оскільки множення на скаляр та диференціювання мають властивість лінійності. В той же час у формулі (3.18) не можна вважати, що λ є скалярним полем, оскільки тоді ми винесли змінну величину за знак похідної. В загальному випадку маємо:

$$\text{grad}(UV) = U\bar{\nabla}V + V\bar{\nabla}U = U\text{grad}V + V\text{grad}U.$$

Приклад 3.9 Задано скалярне поле $U = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$. Визначити ротор і дивергенцію векторного поля $\bar{a} = \text{grad}U$.

Розв'язування. Знайдемо координати вектора $\bar{a} = \text{grad}U$:

$$\begin{aligned} \bar{a} = \text{grad}U &= \frac{\partial(\ln\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial(\ln\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial(\ln\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial z}\bar{k} = \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2}\bar{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\bar{j} + 0\bar{k}. \end{aligned}$$

Обчислимо ротор векторного поля:

$$\begin{aligned} \text{rot}\bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{y}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (0 - 0)\bar{i} - (0 - 0)\bar{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \right) \bar{k} = \\ &= \left(\frac{-y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \bar{k} = 0, \text{ тобто } \text{rot}\bar{a} = 0. \end{aligned}$$

Обчислимо дивергенцію векторного поля:

$$\begin{aligned} \text{div}\bar{a} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) + 0 = \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

3.6. Диференціальні операції другого порядку

Після застосування диференціальних операцій до поля одержуємо нове поле, до якого можна знову застосовувати ці операції. Звичайно, не всі комбінації диференціальних операцій мають сенс. Наприклад, не має сенсу комбінація $\text{div div } \bar{a}$, оскільки $\text{div } \bar{a}$ утворює скалярне поле, від якого вже не можна взяти дивергенцію. За допомогою комбінації операцій grad , div , rot можна одержати п'ять диференціальних операцій другого порядку:

$$\text{div grad}U, \text{rot grad}U, \text{grad div}\bar{a}, \text{div rot}\bar{a}, \text{rot rot}\bar{a}. \quad (3.17)$$

Почнемо з другої комбінації. Її можна записати у вигляді $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla}U)$. Але для вектора та скаляра $\bar{a} \times (\bar{a}U) = 0$. Це означає, якщо замість \bar{a} в ліву частину останньої рівності підставити його розвинення за декартовими осями координат і здійснити обчислення за формальними правилами векторної алгебри, то ми одержимо нуль. Але обчислення комбінації $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla}U)$ відбувається за тими ж формальними правилами, тільки замість a_x, a_y, a_z потрібно взяти $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. Це означає, що у будь-яких випадках

$$\text{rot grad}U = 0. \quad (3.18)$$

Аналогічно перевіряємо, що завжди

$$\text{div rot}\bar{a} = 0. \quad (3.19)$$

Ця проста властивість має важливий наслідок: для довільного поля \bar{a} поряд із векторними лініями можна розглядати *вихрові лінії*, тобто векторні лінії поля $\text{rot}\bar{a}$. Однак дивергенція будь-якого векторного поля дорівнює густині джерел векторних ліній цього поля. Тому формула (3.19) показує, що вихрові лінії не можуть мати ні джерел, ні стоків, тобто вони не можуть ні починатися, ні закінчуватися.

Першу комбінацію (3.17) можна записати у вигляді $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}U = (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla})U = \bar{\nabla}^2 U$, де $\bar{\nabla}^2$ – скалярний диференціальний оператор другого порядку

$$\bar{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

який називається *оператором Лапласа (лапласіаном)* і іноді позначається символом Δ . Тобто

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (3.20)$$

Нарешті, розглянемо останню комбінацію (3.12). Використовуючи формулу для векторно-векторного добутку та розташувавши множники так, щоб набли діяли на поле, одержимо

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a} = \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{a}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{a}) - (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla})\bar{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a} - \bar{\nabla}^2 \bar{a}. \quad (3.21)$$

Приклад 3.10 Обчислити $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a}$, якщо $\bar{a} = 3x^2 y \bar{i} - 6y^2 z \bar{j} - 2xz^2 \bar{k}$.

Розв'язування. *1-ий спосіб.* Обчислимо ротор векторного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 y & -6y^2 z & -2xz^2 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(-2xz^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-6y^2 z)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(-2xz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2 y)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(-6y^2 z)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2 y)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= (0 + 6y^2) \bar{i} - (-2z^2 - 0) \bar{j} + (0 - 3x^2) \bar{k} = 6y^2 \bar{i} + 2z^2 \bar{j} - 3x^2 \bar{k}. \end{aligned}$$

Обчислимо $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a}$ за формулою:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6y^2 & 2z^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(-3x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(2z^2)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(-3x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(6y^2)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(2z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(6y^2)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= (0 - 4z) \bar{i} - (-6x - 0) \bar{j} + (0 - 12y) \bar{k} = -4z \bar{i} + 6x \bar{j} - 12y \bar{k}. \end{aligned}$$

2-ий спосіб. Використаємо формулу (3.16). Для цього знайдемо спочатку $\text{div} \bar{a}$, маємо:

$$\text{div} \bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(-6y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(-2xz^2) = 6xy - 12yz - 4xz. \text{ Тоді}$$

$$\begin{aligned} \text{grad} \text{div} \bar{a} &= \frac{\partial}{\partial x}(6xy - 12yz - 4xz)\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}(6xy - 12yz - 4xz)\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(6xy - 12yz - 4xz)\bar{k} = \\ &= (6y - 4z)\bar{i} + (6x - 12z)\bar{j} + (-12y - 4x)\bar{k}. \end{aligned}$$

Оскільки $\nabla^2 \bar{a} = 6y\bar{i} - 12z\bar{j} - 4x\bar{k}$, маємо:

$$\begin{aligned} \text{rot} \text{rot} \bar{a} &= \text{grad} \text{div} \bar{a} - \nabla^2 \bar{a} = (6y - 4z)\bar{i} + (6x - 12z)\bar{j} + (-12y - 4x)\bar{k} - \\ &- 6y\bar{i} + 12z\bar{j} + 4x\bar{k} = -4z\bar{i} + 6x\bar{j} - 12y\bar{k}. \end{aligned}$$

Приклад 3.11 Обчислити циркуляцію векторного поля

$$\bar{a} = 2zy\bar{i} + 6(x^2 + 1)\bar{j} + 3xy\bar{k}$$

вздовж замкненого контура L , що є перерізом сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ з площиною $z = 3$ і з координатними площинами у першому октанті (обхід контуру додатний) (рис. 3.3):

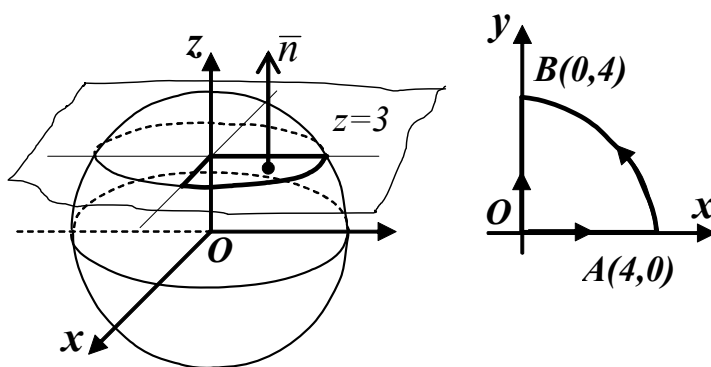


Рисунок 3.3

- а) безпосередньо;
- б) за формулою Стокса.

Розв'язування.

а) Обчислимо циркуляцію векторного поля $\bar{a} = 2zy\bar{i} + 6(x^2 + 1)\bar{j} + 3xy\bar{k}$ безпосередньо:

$$\mathcal{C}(\bar{a}) = \int_{OA} \bar{a} d\bar{l} + \int_{AB} \bar{a} d\bar{l} + \int_{BO} \bar{a} d\bar{l}, \text{ де } \bar{a} d\bar{l} = 2yzdx + 6(x^2 + 1)dy + 3xydz.$$

На прямій OA : $y = 0$, $dy = 0$, $z = 3$, $dz = 0$, $x \in [0, 4]$. Тоді

$$\int_{OA} \bar{a} d\bar{l} = \int_0^4 0 dx = 0.$$

На дузі AB : $x^2 + y^2 = 16$. Задамо коло параметрично: $x = 4 \cos t$, $y = 4 \sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Тоді $dx = -4 \sin t dt$, $dy = 4 \cos t dt$, $z = 3$, $dz = 0$.

Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned} \int_{AB} \bar{a} d\bar{l} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \cdot 3 \cdot 4 \sin t \cdot (-4 \sin t) + 6 \cdot (16 \cos^2 t + 1) \cdot 4 \cos t \right) dt = \\ &= -96 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt + 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16 \cos^3 t + \cos t) dt = -48 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt + 384 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos^2 t dt + \\ &+ 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = -48 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 384 \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 24 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -48 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + 384 \left(1 - \frac{1}{3} \right) + 24 = -24\pi + 280. \text{ Тобто, } \int_{AB} \bar{a} d\bar{l} = 280 - 24\pi. \end{aligned}$$

На прямій BO : $x = 0$, $dx = 0$, $z = 3$, $dz = 0$, $y \in [0, 4]$. Інтегрування здійснюється за змінною y від 4 до 0. Тоді

$$\int_{BO} \bar{a} d\bar{l} = \int_4^0 6 dy = 6y \Big|_4^0 = -24.$$

Таким чином,

$$\mathcal{C}(\bar{a}) = \int_{OA} \bar{a} d\bar{l} + \int_{AB} \bar{a} d\bar{l} + \int_{BO} \bar{a} d\bar{l} = 280 - 24\pi - 24 = 256 - 24\pi.$$

б) Обчислимо циркуляцію векторного поля $\bar{a} = 2zy\bar{i} + 6(x^2 + 1)\bar{j} + 3xy\bar{k}$ за формулою Стокса:

$$\iint_{\sigma} \text{rot} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right|} \right|_{z=z(x,y)} dxdy,$$

де

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2yz & 6(x^2 + 1) & 3xy \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(3xy)}{\partial y} - \frac{\partial(6(x^2 + 1))}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(3xy)}{\partial x} - \frac{\partial(2yz)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(6(x^2 + 1))}{\partial x} - \frac{\partial(2yz)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= 3x\bar{i} - y\bar{j} + (12x - 2z)\bar{k}. \end{aligned}$$

Поверхня σ – це площина $z = 3$, причому одиничний вектор нормалі \bar{n}^0 колінеарний вектору \bar{k} : $\bar{n}^0 = \{0, 0, 1\}$ та співнаправлений з ним. Тоді

$$\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0 = 3x \cdot 0 + (-y) \cdot 0 + (12x - 2z) \cdot 1 = 12x - 2z, \quad \left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right| = 1,$$

$$\iint_{\sigma} \text{rot} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right|} \right|_{z=z(x,y)} dxdy = \iint_{D_{xy}} (12x - 2z) \Big|_{z=3} dxdy = \iint_{D_{xy}} (12x - 6) dxdy.$$

Перейдемо до полярної системи координат за допомогою перетворення:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow \rho = 4, \quad \rho \in [0, 4],$$

$$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \quad dxdy = \rho d\rho d\varphi. \quad \text{Маємо:}$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} (12x - 6) dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^4 (12\rho \cos \varphi - 6) \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(12 \cos \varphi \frac{\rho^3}{3} - 6 \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^4 d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (256 \cos \varphi - 48) d\varphi = (256 \sin \varphi - 48\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 256 - 48\pi. \end{aligned}$$

Таким чином, $C(\bar{a}) = 256 - 48\pi$.

При конкретному обчисленні градієнта, розбіжності та проекції ротора на напрям нормалі доводиться застосовувати ту чи іншу координатну систему. Звичайно, можна постійно використовувати прямокутну декартову систему координат. Однак у багатьох випадках це пов'язано із великими технічними труднощами. Аналогічне положення зустрічається, наприклад, при обчисленні кратних інтегралів. Тому досить часто доцільно використовувати криволінійні координати (наприклад, *циліндричні* чи *сферичні*).

Розгляньте питання обчислення градієнта, дивергенції та ротора векторного поля в криволінійних координатах самостійно [8, 7, 12].

Відмітимо, що *циліндричні координати* використовуються в теоретичній електротехніці при дослідженні явищ поверхневого ефекту (відтиснення змінного струму від центра до зовнішньої поверхні) у циліндричних проводах, а сферичні координати використовують при розгляді питання випромінювання та розповсюдження електромагнітних хвиль.

Питання для самоперевірки

1. Що називають дивергенцією векторного поля?
2. Охарактеризуйте фізичний зміст дивергенції.
3. Виведіть формулу для обчислення дивергенції в декартових координатах.
4. Як визначити, в яких точках векторне поле має стоки, а в яких – джерела?
5. Що називають проекцією ротора векторного поля на напрямок нормалі?
6. Що називають ротором векторного поля?
7. Вкажіть фізичний зміст проекції ротора векторного поля на напрямок нормалі.
8. Запишіть формулу обчислення ротора векторного поля в декартових координатах.
9. Який оператор називають оператором Гамільтона? Вкажіть властивості цього оператора.
10. Які ви знаєте диференціальні операції другого порядку? Охарактеризуйте їх.
11. Перерахуйте властивості ротора векторного поля.
12. Доведіть, що $rot(f(r) \cdot \bar{c}) = \frac{f'(r)}{r} (\bar{r} \times \bar{c})$, де \bar{c} – сталий вектор.
13. Що називають циркуляцією векторного поля?
14. Що називають криволінійним інтегралом?
15. Як обчислюють криволінійні інтеграли?
16. Запишіть формулу Гріна.

17. Сформулюйте та доведіть умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.
18. Виведіть формулу Стокса.
19. Які координати визначають положення точки M в циліндричній та сферичній системах координат?
20. Як виконуються операції векторного аналізу в криволінійних координатах?
21. Запишіть формули обчислення основних характеристик векторного поля в циліндричних та сферичних координатах.

Вправи для самостійної роботи

Вправа 1. Обчислити циркуляцію векторного поля

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

вздовж замкненого контура, який обмежує трикутник ABC , утвореного при перетині площини P з координатними площинами:

- а) безпосередньо;
- б) за формулою Стокса (обхід контура додатний).

- | | |
|--|--|
| 1. $\vec{a} = 3yz\vec{i} + (x + y^2)\vec{j} + xy\vec{k},$
$P: x + y + 3z = 3.$ | 6. $\vec{a} = y^2z\vec{i} + (xy + 3z)\vec{k},$
$P: 2x + y + 2z = 2.$ |
| 2. $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{j} + (3z + xy)\vec{k},$
$P: x - y + z = 1.$ | 7. $\vec{a} = x^2y\vec{j} + (2xy + 3z)\vec{k},$
$P: 2x + y + 2z = 4.$ |
| 3. $\vec{a} = 2xy\vec{i} + z\vec{j} + xz\vec{k},$
$P: x + 2y + z = 2.$ | 8. $\vec{a} = (x + 2y)\vec{i} + (x - 2z)\vec{j} + (2y + z)\vec{k},$
$P: x - y + z = 3.$ |
| 4. $\vec{a} = (y + 3z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (2y + z)\vec{k},$
$P: x + y + 2z = 2.$ | 9. $\vec{a} = xy\vec{i} + xz\vec{j},$
$P: x - 2y + z = 2.$ |
| 5. $\vec{a} = 3xz\vec{j} + 2yz\vec{k},$
$P: x + y + z = 2.$ | 10. $\vec{a} = 2xy\vec{i} + xz\vec{j} + 3x\vec{k},$
$P: x - y + z = 1.$ |

Вправа 2.

Обчислити циркуляцію векторного поля

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

вздовж замкненого контура L (обхід контура в додатному напрямі):

- а) безпосередньо;
 б) за формулою Стокса.

1. $\vec{a} = y^2\vec{i} + 2x\vec{j}$, L – перетин сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ з координатними площинами в другому октанті.
2. $\vec{a} = -2xy\vec{i} + \vec{k}$, L – перетин циліндра $x^2 + y^2 = 4$ з площиною $z = 2$.
3. $\vec{a} = y^2\vec{i} + 2zy\vec{j}$, L – перетин параболоїда $z = 25 - x^2 - y^2$ з координатними площинами в четвертому октанті.

Вправа 3.

1. Обчислити дивергенцію векторного поля $\vec{a} = \vec{r} \times \vec{c}$, де \vec{r} – радіус-вектор довільної точки $M(x; y; z)$, \vec{c} – сталий вектор.
2. Визначити, в яких точках векторне поле \vec{a} має джерела, якщо $\vec{a} = 3 \cdot x^2 \cdot \vec{i} - 5 \cdot x \cdot y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(1; 5; -3)$, $M_3(2; 0; -1)$, $M_4(1; 0; 3)$.
3. Довести, що $\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b}$, де

$$\begin{aligned} \vec{a} &= P_1(x; y; z)\vec{i} + Q_1(x; y; z)\vec{j} + R_1(x; y; z)\vec{k}, \\ \vec{b} &= P_2(x; y; z)\vec{i} + Q_2(x; y; z)\vec{j} + R_2(x; y; z)\vec{k}. \end{aligned}$$

4. Визначити, в яких точках векторне поле $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$ не має ні джерел, ні стоків, якщо $\vec{b} = y^2 \cdot z^2 \cdot \vec{i} - x^2 \cdot z^2 \cdot \vec{j} + x^2 \cdot y^2 \cdot \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$, $M_1(0; -1; 1)$, $M_2(1; 0; 1)$, $M_3(1; -1; 0)$, $M_4(-1; 0; -1)$.
5. Визначити, в яких точках векторне поле \vec{a} має стоки, якщо $\vec{a} = x \cdot y \cdot z \cdot \vec{i} - 2 \cdot y^2 \cdot z \cdot \vec{j} + y \cdot z^2 \cdot \vec{k}$, $M_1(0; 1; 2)$, $M_2(1; -1; 1)$, $M_3(-1; -1; 1)$, $M_4(2; -1; 1)$.
6. Обчислити дивергенцію векторного поля $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{r}$, якщо $\vec{b} = y \cdot z \cdot \vec{i} + x \cdot z \cdot \vec{j} + x \cdot y \cdot \vec{k}$, $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$.

Вправа 4.

1. Визначити ротор векторного поля $\vec{a} = U \cdot \vec{b}$, де $U = \sin(x + 2y + 3z)$, $\vec{b} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

2. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля $\vec{a} = 3xyzi + x^3\vec{j} + y^3\vec{k}$ у точці $M_0(1; 1; 1)$.
3. Визначити ротор векторного поля $\vec{a} = (\vec{r} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{r}$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
4. Визначити ротор векторного поля $\vec{a} = \frac{\vec{b}}{r}$, де $\vec{b} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Вправа 5.

1. Обчислити $\text{div grad } U$, якщо $U = x^3y + y^2z^2$.
2. Обчислити $\text{grad div } \vec{a}$, якщо $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$.
3. Обчислити $\text{rot rot } \vec{a}$, якщо $\vec{a} = xy\vec{i} - yz\vec{j} + xz\vec{k}$.
4. Довести, що $\text{rot grad } U = 0$, якщо $U = x^2(y^2 + z^2)$.
5. Обчислити $\text{div grad } U$, якщо $U = \ln(2x^2 + y^2)$.
6. Довести, що $\text{div rot } \vec{a} = 0$, якщо $\vec{a} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + x^2z\vec{k}$.
7. Обчислити $\text{grad div } \vec{a}$, якщо $\vec{a} = x^2y\vec{i} - y^2z\vec{j} + xz^2\vec{k}$.
8. Довести, що $\text{div rot } \vec{a} = 0$, якщо $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$.
9. Довести, що $\text{rot grad } U = 0$, якщо $U = x^2y + xz^2$.
10. Обчислити $\text{rot rot } \vec{a}$, якщо $\vec{a} = \vec{b}U$, де $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $U = xyz$.

ТЕМА 4 СПЕЦІАЛЬНІ ТИПИ ПОЛІВ

4.1. Потенціальні векторні поля

«Потенціальне» ..., на думку тут приходить потенціальна енергія, потенціальні можливості. Так, цеглу, що лежить на підвіконні, потенційно можна скинути вниз, і вм'ятина на землі продемонструє нам ту саму потенціальну енергію. Гравітаційне поле Землі – це один з яскравих прикладів потенціального векторного поля.

Нагадаємо його характерну ознаку, скинувши з підвіконня нашого будинка ..., пір'їнку. З точки A до точки B вона може пролетіти по безлічі траєкторій (через вітер, внаслідок опору повітря і т.д.). Але в усіх випадках гравітаційне поле Землі виконає *одну і ту ж роботу* по переміщенню

пір'їни між цими точками. Різні траєкторії – це вже «внесок» інших сил, які теж можна описати векторними полями.

Примітка. Можливо, тут у вас виникло питання: «Але вітер же може піднімати перо, і тоді робота повинна збільшуватися!». Нічого подібного. Фізичне поняття роботи не має на увазі, що хтось або щось «працює». Якщо вітер піднімає перо вгору, то він просто зменшує абсолютну величину роботи сили тяжіння.

Векторне поле $\vec{a}(M) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ називається *потенціальним*, якщо існує така скалярна функція $U(M)$, що скрізь виконується рівність:

$$\vec{a}(M) = \text{grad } U(M). \quad (4.1)$$

При цьому, функцію $U(M)$ називають *потенціалом* поля або *потенціальною* функцією.

Звертаємо увагу на те, що досить часто потенціал визначається формулою $\vec{a}(M) = -\text{grad } U(M) = \text{grad}(-U(M))$. Іноді, для відокремлення цих двох підходів, застосовують терміни «потенціал» і «потенціальна функція», однак така термінологія не є загальноприйнятою. Тому при прочитанні роботи, у якій застосовують потенціали, необхідно уточнювати, в якому з цих двох сенсів застосовується дане поняття.

Робота потенціального векторного поля по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B не залежить від траєкторії руху і знаходиться таким криволінійним інтегралом:

$$A_{AB} = \int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz = U(B) - U(A).$$

Іншими словами, в потенціальному полі має значення лише початкова і кінцева точки маршруту. І якщо ці точки співпадають, то сумарна робота сил по замкнутому контуру дорівнює нулю.

Дійсно, якщо підніmemo пір'їнку із землі і помістимо її у вихідну точку, то при цьому траєкторія нашого руху знову довільна. Можна навіть кинути перо і знову його підняти і т. д.

Чому підсумковий результат нульовий? Пір'їна впала з точки A в точку B ? Впала. Сила тяжіння виконала роботу A_{AB} . Пір'їна потрапила назад в точку A ? Потрапила. А це означає, що було виконано точно таку ж роботу $-A_{AB}$ проти сил тяжіння, причому не важливо з якими «пригодами» і якими силами. Зауважимо, що у фізиці знак «мінус» символізує протилежний зміст. Таким чином, сумарна робота сил дорівнює $A_{AB} - A_{AB} = 0$.

Оскільки градієнт постійного скалярного поля дорівнює нулю, то потенціал довільного поля, якщо він існує, визначений із точністю до постійного доданка. Підбираючи цей доданок, можна пронормувати потенціал, наприклад, зробивши це значення рівним нулю в деякій заданій точці. Най-

частіше потенціал нормують умовою рівності нулю на безмежності – якщо там потенціал має скінченне значення.

Прикладами потенціальних полів є:

- 1) магнітне поле, створене рухомим прямолінійним провідником;
- 2) поле тяжіння заданої маси до нерухомого центра (гравітаційне поле);
- 3) електричне поле напруженості точкового заряду.

Відмітимо деякі **властивості потенціальних полів**.

1. $\text{rot } \bar{a}(M) = 0$.

Прикладом потенціального поля є гравітаційне поле. Для ілюстрації цього факту добре підійде будь-який досить важкий і однорідний предмет, наприклад, цеглина. Затисніть її торці руками, підніміть вгору і акуратно відпустіть у вільне падіння. Крутитися вона не буде. А якщо і буде, то це вже ваші «особисті зусилля» або цегла трапилась «неправильна». *Не полінуйтеся і перевірте цей факт! Тільки не кидайте нічого з вікна, це вже не пір'їна.*

2. Циркуляція векторного поля вздовж довільного замкненого контура дорівнює нулю, тобто

$$\oint_L \bar{a} d\bar{l} = 0.$$

3. Криволінійний (лінійний) інтеграл векторного поля уздовж лінії AB не залежить від форми лінії, а визначається лише положенням точок A та B .

4. Вираз

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz = dU$$

є повним диференціалом потенціала поля $U(x, y, z)$. При цьому $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$, $a_z(x, y, z)$ – координати вектора $\bar{a}(M)$ (проекції цього вектора на координатні осі).

Приклад 4.1 Показати, що векторне поле $\bar{a}(M) = (3x + yz)\bar{i} + (3y + xz)\bar{j} + (3z + xy)\bar{k}$ потенціальне.

Розв'язування. Знайдемо ротор даного поля:

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x + yz & 3y + xz & 3z + xy \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(3z + xy)}{\partial y} - \frac{\partial(3y + xz)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(3z + xy)}{\partial x} - \frac{\partial(3x + yz)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(3y + xz)}{\partial x} - \frac{\partial(3x + yz)}{\partial y} \right) \bar{k} = \end{aligned}$$

$$= (x - x)\bar{i} - (y - y)\bar{j} + (z - z)\bar{k} = 0.$$

Отже, задане поле потенціальне.

Функцію $U = u(x, y, z)$ зазвичай знаходять одним із таких способів.

1-й спосіб.

Потенціал векторного поля обчислюють за формулою:

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} a_x(x, y, z)dx + a_y(x, y, z)dy + a_z(x, y, z)dz. \quad (4.1)$$

Криволінійний інтеграл обчислюється вздовж ламаної L , ланки якої паралельні осям координат (рис. 4.1).

За початкову точку беруть точку $A(x_0, y_0, z_0)$, а за кінцеву – точку $D(x, y, z)$. В цьому випадку

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz + \int_{BC} a_x dx + a_y dy + a_z dz + \int_{CD} a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

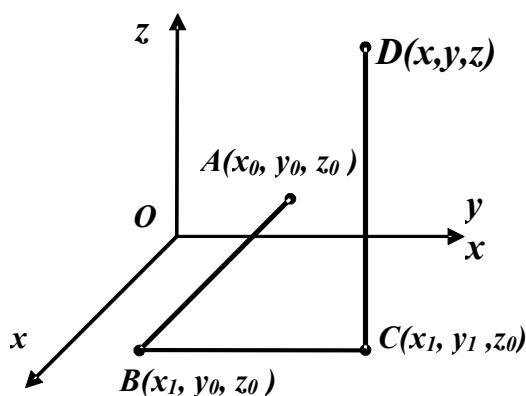


Рисунок 4.1

На відрізку AB , який паралельний осі Ox , $y = y_0, z = z_0, dy = 0, dz = 0, x \in [x_0, x]$. Тоді

$$\int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{x_0}^x a_x(x, y_0, z_0) dx.$$

На відрізку BC , який паралельний осі Oy , $x = x, z = z_0, dx = 0, dz = 0, y \in [y_0, y]$. Тоді

$$\int_{BC} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{y_0}^y a_y(x, y, z_0) dy.$$

На відрізку CD , який паралельний осі Oz , $x = x, y = y_0, dx = 0, dy = 0, z \in [z_0, z]$. Тоді

$$\int_{CD} a_x dx + a_y dy + a_z dz = .$$

Таким чином,

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x a_x(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y a_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z a_z(x, y, z) dz. \quad (4.2)$$

Зауваження. Якщо функції $a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z)$ неперервні в точці $(0, 0, 0)$, то за початкову точку $A(x_0, y_0, z_0)$ можна взяти початок координат.

Приклад 4.2 Перевірити, чи векторне поле

$$\bar{a} = (3x - yz)\bar{i} + (3y - xz)\bar{j} + (3z - xy)\bar{k}$$

є потенціальним і знайти його потенціал.

Розв'язування. Умовою потенціальності полів є рівність: $\text{rot} \bar{a}(M) = 0$. Обчислимо ротор векторного поля:

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x - yz & 3y - xz & 3z - xy \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(3z - xy)}{\partial y} - \frac{\partial(3y - xz)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(3z - xy)}{\partial x} - \frac{\partial(3x - yz)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(3y - xz)}{\partial x} - \frac{\partial(3x - yz)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= (-x + x)\bar{i} - (-y + y)\bar{j} + (-z + z)\bar{k} = 0. \end{aligned}$$

Отже, дане векторне поле є потенціальним.

Знайдемо його потенціал за формулою (4.2). Маємо

$$\begin{aligned}
U(x, y, z) &= \int_{x_0}^x a_x(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y a_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z a_z(x, y, z) dz = \\
&= \int_{x_0}^x (3x - y_0 z_0) dx + \int_{y_0}^y (3y - x z_0) dy + \int_{z_0}^z (3z - xy) dz = \left(\frac{3}{2} x^2 - xy_0 z_0 \right) \Big|_{x_0}^x + \\
&+ \left(\frac{3}{2} y^2 - xyz_0 \right) \Big|_{y_0}^y + \left(\frac{3}{2} z^2 - xyz \right) \Big|_{z_0}^z = \frac{3}{2} x^2 - xy_0 z_0 - \frac{3}{2} x_0^2 + x_0 y_0 z_0 + \\
&+ \frac{3}{2} y^2 - xyz_0 - \frac{3}{2} y_0^2 + xy_0 z_0 + \frac{3}{2} z^2 - xyz - \frac{3}{2} z_0^2 + xyz_0 = \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2) - xyz - \\
&- \frac{3}{2} (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) + x_0 y_0 z_0,
\end{aligned}$$

тобто

$$U(x, y, z) = \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2) - xyz + C, \text{ де } C = x_0 y_0 z_0 - \frac{3}{2} (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2).$$

2-ий спосіб знаходження потенціалу потенціального векторного поля розглянемо на прикладі.

Приклад 4.3 Знайти потенціал векторного поля з прикладу 4.1.

Розв'язування. З формули (4.1) випливає, що $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x + yz$, $\frac{\partial U}{\partial y} = 3y + xz$,

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 3z + xy.$$

Подальший алгоритм нагадує розв'язування диференціального рівняння в повних диференціалах, тільки з більшою кількістю кроків.

З рівності $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x + yz$ випливає, що

$$U = \int (3x + yz) dx = \frac{3}{2} x^2 + xyz + f(y, z),$$

де $f(y, z)$ – невідома функція. Диференціюючи отриманий результат за y , маємо:

$U'_y = \left(\frac{3}{2}x^2 + xyz + f(y, z) \right)'_y = 0 + xz + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y}$. Але з іншого боку,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3y + xz. \text{ Тому}$$

$$xz + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = 3y + xz \rightarrow \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = 3y \rightarrow f(y, z) = 3 \int y dy = \frac{3}{2}y^2 + h(z) \rightarrow$$

$$U = \frac{3}{2}x^2 + xyz + \frac{3}{2}y^2 + h(z).$$

Диференціюємо одержаний результат за змінною z :

$$U'_z = \left(\frac{3}{2}x^2 + xyz + \frac{3}{2}y^2 + h(z) \right)'_z = xy + \frac{dh}{dz}. \quad \text{Оскільки} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 3z + xy,$$

то маємо: $xy + \frac{dh}{dz} = xy + 3z \rightarrow \frac{dh}{dz} = 3z \rightarrow h(z) = 3 \int z dz = \frac{3}{2}z^2 + C$, де $C = const$.

Остаточно маємо: $U = \frac{3}{2}x^2 + xyz + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + C$ – шукана потенціальна функція.

Для перевірки знайдемо частинні похідні першого порядку одержаної функції за кожною змінною:

$$U'_x = \left(\frac{3}{2}x^2 + xyz + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + C \right)'_x = 3x + yz,$$

$$U'_y = \left(\frac{3}{2}x^2 + xyz + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + C \right)'_y = 3y + xz,$$

$$U'_z = \left(\frac{3}{2}x^2 + xyz + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + C \right)'_z = 3z + xy,$$

які збіглися з відповідними компонентами вихідного поля $\vec{a}(M) = (3x + yz)\vec{i} + (3y + xz)\vec{j} + (3z + xy)\vec{k}$.

4.2. Соленоїдні (трубчасті) поля

Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається *соленоїдним*, якщо існує таке поле $\vec{b}(M)$, що

$$\vec{a}(M) = \text{rot} \vec{b}(M).$$

При цьому вектор $\vec{b}(M)$ називають *векторним потенціалом* поля $\vec{a}(M)$.

Прикладами соленоїдних полів є:

- 1) поле швидкостей твердого тіла, що обертається навколо деякої осі;
- 2) магнітне поле, створене прямолінійним провідником, вздовж якого тече електричний струм.

Відмітимо деякі **властивості соленоїдних полів**.

1. $\text{div} \vec{a}(M) = 0$.

2. Розглянемо в області D , в якій задано векторне поле \vec{a} , довільну площадку σ . Тоді *векторною трубкою* буде сукупність векторних ліній, що проходять через межу цієї площадки. В соленоїдному полі потік вектора \vec{a} через довільний переріз векторної трубки зберігає сталі значення, яке називається *інтенсивністю трубки*.

3. Потік вектора $\vec{a}(M)$ через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю.

4. Векторні лінії соленоїдного поля замкнені.

5. Соленоїдне поле не має ні джерел, ні стоків.

Розглянемо центрально-симетричне поле в просторі, визначене формулою

$$\vec{a} = f(r) \cdot \vec{r}^0 = \frac{f(r)}{r} \cdot \vec{r}, \quad (4.3)$$

де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$, $\vec{r}^0 = \frac{\vec{r}}{r}$.

З означення дивергенції легко знайти, що $\text{div} \bar{a} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r^2 \cdot f(r))$. Зокрема, такі поля без джерел поза початком координат характеризуються тим, що $r^2 \cdot f(r) = C = \text{const}$, звідки $f(r) = \frac{C}{r^2}$, $\bar{a} = \frac{C}{r^3} \bar{r}$.

Це так званий закон Кулона, який застосовується в теорії електричних та магнітних взаємодій. Потік такого поля через довільну сферу з центром в початку координат дорівнює $\frac{C}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi C$, тобто, не залежить від \bar{r} . Іншими словами, в початку координат у даному випадку починаються $4\pi C$ векторних ліній, що йдуть у безмежність.

Однак точкове джерело $Q = 4\pi C$ має густину $Q\delta(r) = Q \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$, тобто ми одержуємо важливу формулу

$$\text{div} \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \bar{r} \right) = Q \cdot \delta(r).$$

Аналогічний розгляд плоского центрально-симетричного поля виду (4.3) з $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$ дає, що якщо в початку координат немає джерел, то

$$f(r) = \frac{C}{r}, \quad Q = 2\pi C, \quad \text{div} \left(\frac{Q}{2\pi r^2} \bar{r} \right) = Q \cdot \delta(x) \cdot \delta(y).$$

В результаті ми одержуємо картину, яку можна тлумачити як точкове джерело векторних ліній Q на площині, або як джерело, розповсюджене у просторі вздовж осі Oz з густиною Q на одиницю довжини.

Диполь одержується накладанням джерела і стоку однакової густини, розташованих у нескінченній близькості один від одного. Однак якщо при цьому густина джерела та стоку залишаються скінченними, то їх поля взаємно знищуються. Тому вказані густини повинні бути настільки великими, щоб добуток густини джерела на відстань між джерелом та стоком (цей добуток називається моментом диполя) залишався скінченним. Слід відмітити, що диполь має вісь, яка проходить через джерело та стік у напрямі від останнього до першого.

Розглянемо векторне поле для випадку диполя (рис. 4.2), де l – вісь диполя.

При достатньо малому h в будь-якій точці M будемо мати

$$\bar{a} = \frac{Q}{4\pi r_1^3} \bar{r}_1 - \frac{Q}{4\pi r^3} \bar{r} = Qh \cdot \frac{\frac{\bar{r}_1}{r_1} - \frac{\bar{r}}{r}}{h} = m \frac{d}{dl} \left(\frac{\bar{r}}{4\pi r^3} \right), \quad (4.4)$$

де m – момент диполя.

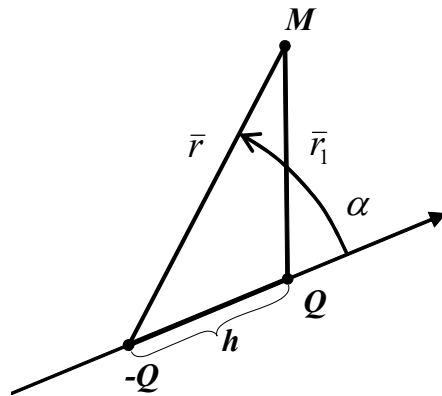


Рисунок 4.2

Спростуючи праву частину (4.4) отримуємо

$$\bar{a} = \frac{m}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} \cdot \frac{dr}{dl} - \frac{3\bar{r}}{r^4} \cdot \frac{dr}{dl} \right) = \frac{m}{4\pi r^3} \left(3 \frac{\bar{r}}{r} \cos \alpha - \bar{l}^0 \right).$$

Аналогічно, розгляд диполя плоского поля дає результат

$$\bar{a} = \frac{m}{2\pi r^2} \left(2 \frac{\bar{r}}{r} \cos \alpha - \bar{l}^0 \right).$$

Якщо для простоти вважати, що вісь l збігається з віссю Ox , то поле в декартових координатах набуває вигляду

$$\bar{a} = \frac{m}{2\pi(x^2 + y^2)} \left(2 \frac{x\bar{i} + y\bar{j}}{x^2 + y^2} x - \bar{i} \right).$$

Інтегрування рівняння $\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y}$ для векторних ліній дає $x^2 + y^2 = C$

(рис. 4.3).

Приклад 4.4 Перевірити, чи векторне поле $\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r})$, де $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$, є соленоїдним.

Розв'язування. Умовою соленоїдності векторного поля є рівність: $\text{div} \bar{a}(M) = 0$. Знайдемо координати вектора $\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r})$.

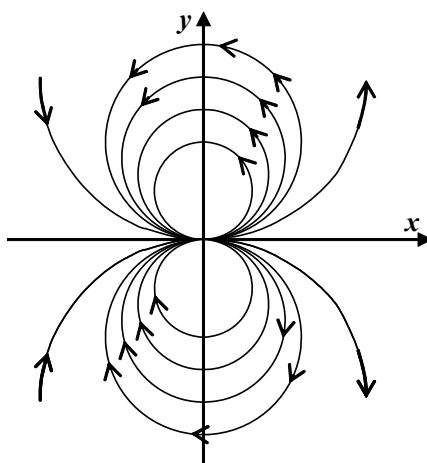


Рисунок 4.3

Маємо

$$\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r}) = r \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = r((-2z + 2y)\bar{i} - (z + 2x)\bar{j} + (y + 2x)\bar{k}), \text{ де}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Обчислимо дивергенцію векторного поля $\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r})$:

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial(r(2y - 2z))}{\partial x} + \frac{\partial(r(-2x - z))}{\partial y} + \frac{\partial(r(y + 2x))}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x}(2y - 2z) + r \frac{\partial(2y - 2z)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial r}{\partial y}(-2x - z) + r \frac{\partial(-2x - z)}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}(y + 2x) + r \frac{\partial(y + 2x)}{\partial z} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(2y - 2z) +$$

$$+ 0 \cdot r + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(-2x - z) + 0 \cdot r + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(y + 2x) + 0 \cdot r =$$

$$= \frac{1}{r}(2xy - 2xz - 2xy - yz + yz + 2xz) = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0.$$

Отже, векторне поле $\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r})$ є соленоїдним.

4.3. Гармонічне поле

Векторне поле $\bar{a}(M)$, яке є одночасно потенціальним (безвихровим) і соленоїдним (трубчастим), називається *гармонічним*. Оскільки поле потенціальне, то його можна записати у вигляді:

$$\bar{a}(M) = \text{grad } U(M),$$

де $U = U(x, y, z)$ – потенціал векторного поля.

Умова соленоїдності означає, що

$$\text{div} \bar{a}(M) = 0.$$

Таким чином, $\text{div} \bar{a}(M) = \text{div grad } U(M) = 0$, але

$$\begin{aligned} \text{div grad } U(M) &= \bar{\nabla}(\bar{\nabla}U) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U. \end{aligned}$$

Функція $U = U(x, y, z)$, яка задовольняє умову

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (4.5)$$

називається *гармонічною*.

Прикладами гармонічних полів є :

- 1) електричне поле точкового заряду;
- 2) поле лінійних швидкостей стаціонарного безвихрового потоку рідини за відсутності в ньому джерел і стоків.

Приклад 4.5 Перевірити, чи дане векторне поле $\bar{a} = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$ є

- а) потенціальним,
- б) соленоїдним.

У випадку потенціальності поля знайти його потенціал.

Розв'язування. Знайдемо $\text{rot} \bar{a}(M)$:

$$\text{rot} \bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(xy)}{\partial y} - \frac{\partial(xz)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(xz)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial y} \right) \bar{k} =$$

$$= (x-x)\bar{i} - (y-y)\bar{j} + (z-z)\bar{k} = 0.$$

Отже, векторне поле є потенціальним. Знайдемо $\text{div}\bar{a}(M)$:

$$\text{div}\bar{a}(M) = \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} = 0.$$

Отже, векторне поле є соленоїдним. Знайдемо потенціал векторного поля:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_{x_0}^x a_x(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y a_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z a_z(x, y, z) dz = \\ &= \int_{x_0}^x y_0 z_0 dx + \int_{y_0}^y x z_0 dy + \int_{z_0}^z x y dz = (y_0 z_0 x) \Big|_{x_0}^x + (y z_0 x) \Big|_{y_0}^y + (y z x) \Big|_{z_0}^z = \\ &= y_0 z_0 x - y_0 z_0 x_0 + y z_0 x - y_0 z_0 x + y z x - y z_0 x = x y z - y_0 z_0 x_0 = x y z + C, \end{aligned}$$

де $C = -y_0 z_0 x_0$.

4.4. Рівняння Максвелла

Нехай в деякій частині простору створено електричне поле, що характеризується векторами електричної і магнітної напруженості \bar{E} та \bar{H} . В загальному випадку ці вектори залежать не тільки від заданої точки, а і від часу, тобто є функціями $\bar{E} = \bar{E}(x, y, z, t)$, $\bar{H} = \bar{H}(x, y, z, t)$. Середовище, в якому відбуваються електричні і пов'язані з ними магнітні явища характеризуються величинами γ – провідність, ε – діелектрична проникність та μ – проникність. В однорідному середовищі ці величини будуть сталими, але в загальному випадку вони також будуть функціями координат точки та часу. Нехай \bar{i} – вектор густини електричного струму, чисельно рівний кількості електрики, що протікає за одиницю часу крізь одиничну площадку (тобто, рівний похідній від кількості електрики за часом), що перпендикулярна напрямку руху електрики. Причому вектор \bar{i} напрямлений в бік цього руху. Вектор густини складається зі струму провідності $\gamma \bar{E}$ (закон Ома) і току зміщення, що виникає внаслідок індукції в діелектриках, він дорівнює $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\varepsilon \bar{E})}{\partial t}$.

Таким чином,

$$\bar{i} = \gamma \bar{E} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\varepsilon \bar{E})}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Розглянемо довільну замкнену криву L , що обмежує поверхню σ . Закон електромагнітної індукції Фарадея свідчить: циркуляція електричного вектора \overline{E} (електрорушійна сила) вздовж L дорівнює похідній за часом вектора магнітної індукції $\mu\overline{H}$ через поверхню σ взятій із знаком «мінус»

$$\oint_L \overline{E} dr = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\sigma} \mu\overline{H} d\sigma \rightarrow \oint_L \overline{E} dr = -\iint_{\sigma} \frac{\partial(\mu\overline{H})}{\partial t} d\sigma.$$

За теоремою Стокса:

$$\iint_{\sigma} \text{rot} \overline{E} d\sigma = -\iint_{\sigma} \frac{\partial(\mu\overline{H})}{\partial t} d\sigma. \quad (4.7)$$

Формула (4.7) справедлива до довільної поверхні σ . А це можливо лише тоді, коли підінтегральні функції співпадають:

$$\text{rot} \overline{E} = -\frac{\partial(\mu\overline{H})}{\partial t}. \quad (4.8)$$

Рівняння (4.8) – друге рівняння Максвела у векторній формі. Перше рівняння Максвела у векторній формі спробуйте вивести самостійно [6, 10].

Щоб мати можливість вимірювати величини, пов'язані з електричними або магнітними полями, в абсолютних електростатичних і електромагнітних одиницях, в праві частини рівнянь Максвела доводиться вводити множник $\frac{1}{c}$, де $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с – швидкість світла у вакуумі. Тоді рівняння Максвела набувають вигляду

$$\text{rot} \overline{H} = \frac{4\pi}{c} \left(\gamma \overline{E} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\epsilon \overline{E})}{\partial t} \right), \quad (4.9)$$

$$\text{rot} \overline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu\overline{H})}{\partial t}. \quad (4.10)$$

До цих двох рівнянь додають ще два додаткових:

$$\text{div} \epsilon \overline{E} = 4\pi\rho, \quad \text{div} \mu\overline{H} = 0. \quad (4.11)$$

Питання для самоперевірки

1. Яке векторне поле називається потенціальним?
2. Що називають потенціалом поля?
3. Поясніть відмінність термінів «потенціал» та «потенціальна функція».
4. Вкажіть властивості потенціальних полів.
5. Наведіть приклади потенціальних полів.
6. Виведіть формулу знаходження потенціалу поля.
7. Яке поле називають соленоїдним?
8. Що таке векторний потенціал поля?
9. Вкажіть властивості соленоїдних полів.
10. Що таке диполь?

11. Проаналізуйте центрально-симетричне поле $\vec{a} = f(r) \cdot \vec{r}^0 = \frac{f(r)}{r} \cdot \vec{r}$,

де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$, $\vec{r}^0 = \frac{\vec{r}}{r}$.

12. Яке поле називається гармонічним?
13. Запишіть умову гармонічності поля.
14. Перевірити, чи векторне поле $\vec{a} = r(\vec{c} \times \vec{r})$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$, є соленоїдним.
15. Перевірити, чи векторне поле $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ є гармонічним, знайти його потенціал.

Вправи для самостійної роботи

Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ потенціальним і соленоїдним. У випадку потенціальності поля \vec{a} обчислити його потенціал:

1. $\vec{a} = (yz - 2x)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$.
2. $\vec{a} = 2x^2 y\vec{i} + (\frac{2}{3}x^3 + 3z)\vec{j} + 3y\vec{k}$.
3. $\vec{a} = (8x - 5yz)\vec{i} - (8y - 5xz)\vec{j} + (8z - 5xy)\vec{k}$.
4. $\vec{a} = (2yz + 3x)\vec{i} + (3y + 2xz)\vec{j} + 2xy\vec{k}$.
5. $\vec{a} = 6xy\vec{i} + (3x^2 + 2z)\vec{j} + 2y\vec{k}$.
6. $\vec{a} = (6x + 7yz)\vec{i} + (6y + 7xz)\vec{j} + (6z + 7xy)\vec{k}$.
7. $\vec{a} = (4x + 5zy)\vec{i} + (2y + 5xz)\vec{j} + 5xy\vec{k}$.

8. $\vec{a} = 5xy\vec{i} + \left(\frac{5}{2}x^2 - 3z\right)\vec{j} - 3y\vec{k}$.
9. $\vec{a} = (2yz - x)\vec{i} + (2xz + y)\vec{j} + 2xy\vec{k}$.
10. $\vec{a} = (7zy - 5x)\vec{i} + (3y + 7xz)\vec{j} + 7xy\vec{k}$.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

5.1. Розв'яжіть тестові завдання

1. Яка формула виражає потік векторного поля через проекцію на площину Oxz , якщо \vec{n} - зовнішня нормаль?

а) $\iint_{\sigma} a_y dx dz = - \iint_{D_{xz}} a_y(x, y(x, z), z) dx dz$;

б) $\iint_{\sigma} a_y dx dz = \iint_{D_{xz}} a_y(x, y(x, z), z) dx dz$;

в) $\iint_{\sigma} a_y dx dz = \iint_{D_{xz}} a_y(x, y(x, z), z) dx dz$;

г) інша відповідь

2. Яка із формул виражає зв'язок поверхневого інтеграла по замкненій поверхні і потрійного інтеграла по просторовій області, яка обмежена цією поверхнею?

а) $\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} \overline{ads}$;

б) $\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} - \frac{\partial a_y}{\partial y} - \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} \overline{ads}$;

в) інша відповідь;

г) $\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} \overline{ads}$.

3. Вектор, координати якого є значення частинних похідних функції $f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ називають:

- а) похідною за напрямом;
- б) градієнтом;
- в) скаляром;
- г) інша відповідь

4. В загальному випадку для обчислення потоку використовують формулу:

а)
$$\iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \pm \iint_{D_{yz}} a_x|_{x=x(y,z)} dydz \pm \iint_{D_{xz}} a_y|_{y=y(x,z)} dx dz \pm \iint_{D_{xy}} a_z|_{z=z(x,y)} dx dy,$$
 де

D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} – довільні області;

б)
$$\iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \pm \iint_{D_{yz}} a_y|_{y=y(x,z)} dydz \pm \iint_{D_{xz}} a_x|_{x=x(y,z)} dx dz \pm \iint_{D_{xy}} a_z|_{z=z(x,y)} dx dy,$$
 де

D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} – проекції поверхні σ на відповідні координатні площини

в)
$$\iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \pm \iint_{D_{yz}} a_x|_{x=x(y,z)} dydz \pm \iint_{D_{xz}} a_y|_{y=y(x,z)} dx dz \pm \iint_{D_{xy}} a_z|_{z=z(x,y)} dx dy,$$
 де

D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} проекції поверхні σ на відповідні координатні площини;

- г) інша відповідь.

5. Яке із перерахованих нижче чисел є значенням інтеграла $I = \iint_{\sigma} (x - y + \frac{3}{2}z) dydz + x dx dz - z dx dy$, якщо σ – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $2x - 2y + z - 2 = 0$ з координатними площинами?

- а) 6;
- б) 8;
- в) 7;
- г) інша відповідь.

6. Робота, що її виконує сила $\bar{F} = X(x, y, z)\bar{i} + Y(x, y, z)\bar{j} + Z(x, y, z)\bar{k}$ при переміщенні матеріальної точки від точки M до точки N уздовж лінії L , називається

- а) кратним інтегралом;
- б) криволінійним інтегралом;

- в) поверхневим інтегралом;
- г) інша відповідь

7. Циркуляцією векторного поля $\vec{a}(M)$ уздовж контура L називають:

- а) криволінійний інтеграл $\oint_L \vec{a} \times d\vec{l}$;
- б) криволінійний інтеграл $\oint_L \vec{a} d\vec{l}$;
- в) визначений інтеграл $\int_{(M)}^{(N)} \vec{a} d\vec{l}$;
- г) інша відповідь

8. Нехай маємо скалярне поле U та векторне поле \vec{a} , тоді ∇U дорівнює

- а) $\text{div} \vec{a}$;
- б) $\text{grad} U$;
- в) $\text{rot} \vec{a}$
- г) інша відповідь

9. Циркуляція потенціального поля вздовж довільного замкненого контура дорівнює:

- а) 1;
- б) 0;
- в) -1;
- г) інша відповідь

10. Вкажіть, яким є векторне поле $\vec{a} = r(\vec{c} \times \vec{r})$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$?

- а) гармонічним;
- б) потенціальним;
- в) соленоїдним;
- г) інша відповідь

11. Яка із рівностей справедлива для криволінійного інтеграла:

а) $\int_{AB} = - \int_{AB}$;

б) $\int_{AB} = - \int_{BA}$;

в) $\int_{AB} = - \int_{BB}$;

г) інша відповідь.

12. Похідну виду $\frac{\partial f}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta_s f}{\Delta s}$ називають

а) градієнтом скалярного поля;

б) похідною скалярного поля за напрямом вектора \vec{s} ;

в) ротором векторного поля;

г) інша відповідь.

13. Поверхня називається односторонньою, якщо у довільну точку M поверхні σ після обходу будь-якого замкненого контуру, розміщеного на цій поверхні, який не перетинає її межу, ми повертаємось

а) з протилежним напрямом;

б) з початковим напрямом нормалі;

в) без жодного напрямку;

г) інша відповідь.

14. Якщо векторне поле розглядати як поле швидкостей рухомої рідини, то її потік через поверхню σ дорівнює

а) нулю;

б) кількості рідини, що протікає через цю поверхню за одиницю часу у напрямку зовнішньої нормалі;

в) кількості рідини, що протікає через цю поверхню за одиницю часу у напрямку внутрішньої нормалі;

г) інша відповідь

15. Точка M_0 називається джерелом, якщо

а) $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) < 0$;

б) $\operatorname{div} \bar{a}(M_0) > 0$;

в) $\operatorname{div} \bar{a}(M_0) = 0$;

г) інша відповідь

16. Для того, щоб криволінійний інтеграл $\int_L Pdx + Qdy$, в деякій од-
нозв'язній області не залежав від шляху інтегрування необхідно і достат-
ньо щоб

а) інтеграл по будь-якому замкненому контуру, що лежить в цій області
був рівним нулю;

б) в кожній точці цієї області виконувалась умова $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$;

в) виконувалась і умова а) і умова б);

г) інша відповідь

17. Похідна за напрямом обчислюється за формулою

а) $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$, де $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – косинуси до-
вільних кутів;

б) $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta - \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$, де $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – напрямні ко-
синуси вектора \bar{s} ;

в) $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$, де $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – напрямні ко-
синуси вектора \bar{s} ;

г) інша відповідь

18. Поток векторного поля \bar{a} через поверхню σ називають поверхневий
інтеграл виду:

а) $\Pi = \iint_{\sigma} n_p \bar{a}(M) d\sigma$, де \bar{n} – довільний вектор, що належить поверхні
 σ

б) $\Pi = \iint_{\sigma} np_{\bar{n}} \bar{a}(M) d\sigma$, де \bar{n} – нормаль до поверхні σ ;

в) $\Pi = \iint_{\sigma} np_{\bar{n}} \bar{a}(M) d\sigma$, де \bar{n} – вектор колінеарний поверхні σ ;

г) інша відповідь

19. Якщо потік через замкнену поверхню додатний, то це означає, що в середині цієї поверхні є

а) джерела;

б) стоки;

в) точки кипіння;

г) інша відповідь

20. Точка M_0 називається стоком, якщо

а) $\operatorname{div} \bar{a}(M_0) < 0$;

б) $\operatorname{div} \bar{a}(M_0) > 0$;

в) $\operatorname{div} \bar{a}(M_0) = 0$;

г) інша відповідь

21. Можливі позначення криволінійного інтеграла такі:

а) $A = \int_L \bar{F} \times d\bar{l} = \int_L X(x, y, z) dy + Y(x, y, z) dx + Z(x, y, z) dz$;

б) $A = \int_L \bar{F} d\bar{l} = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z) dydz + Y(x, y, z) dx dz + Z(x, y, z) dx dy$;

в) $A = \int_L \bar{F} d\bar{l} = \int_L X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz =$

$= \int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz$

г) інша відповідь

22. Проекцією ротора векторного поля в точці M у напрямі нормалі \bar{n} називають:

$$\text{a) } np_n^- \operatorname{rot} \bar{a}(M) = - \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{a} d\bar{l}}{\Delta S}$$

$$\text{б) } np_n^- \operatorname{rot} \bar{a}(M) = \frac{\oint \bar{a} d\bar{l}}{\Delta S}$$

$$\text{в) } np_n^- \operatorname{rot} \bar{a}(M) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{a} d\bar{l}}{\Delta S}$$

г) інша відповідь

23. Нехай маємо скалярне поле U та векторне поле \bar{a} , тоді $\nabla \bar{a}$ дорівнює

а) $\operatorname{div} \bar{a}$;

б) $\operatorname{grad} U$;

в) $\operatorname{rot} \bar{a}$;

г) інша відповідь

24. Ротор потенціального векторного поля дорівнює:

а) 0;

б) -1;

в) 1;

г) інша відповідь

25. Векторне поле називається гармонічним, якщо воно є

а) одночасно потенціальним та скалярним;

б) одночасно потенціальним та соленоїдним;

в) соленоїдним;

г) інша відповідь

26. Яка із формул виражає зв'язок поверхневого інтеграла по замкненій поверхні і потрійного інтеграла по просторовій області, яка обмежена цією поверхнею?

$$\text{а) } \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} a_x dy dz + a_y dx dz + a_z dx dy ;$$

$$\text{б) } \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV = \iint_{\sigma} a_y dy dz + a_z dx dz + a_x dx dy ;$$

$$\text{в) } \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} - \frac{\partial a_y}{\partial y} - \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} a_x dy dz + a_y dx dz + a_z dx dy ;$$

г) інша відповідь

27. Яка із перерахованих властивостей не є властивістю градієнта:

а) похідна в даній точці за напрямом вектора має найменше значення, якщо напрям цього вектора збігається з напрямом градієнта.

б) похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю.

в) вектор-градієнт у кожній точці поля перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку.

г) інша відповідь

28. Яка формула виражає потік векторного поля через проекцію на площину Oxz , якщо \vec{n}^0 - зовнішня нормаль?

$$\text{а) } \Pi = \iint_{D_{xy}} \frac{\vec{a} \vec{n}^0}{\left| \cos(\vec{n}^0, \vec{k}) \right|} \Bigg|_{z=z(x,y)} dx dy ;$$

$$\text{б) } \Pi = \iint_{D_{yz}} \frac{\vec{a} \vec{n}^0}{\left| \cos(\vec{n}^0, \vec{i}) \right|} \Bigg|_{x=x(y,z)} dy dz ;$$

$$\text{в) } \Pi = \iint_{D_{xz}} \frac{\vec{a} \vec{n}^0}{\left| \cos(\vec{n}^0, \vec{j}) \right|} \Bigg|_{y=y(x,z)} dx dz ;$$

г) інша відповідь

29. Чому дорівнює потік векторного поля $\vec{a} = (2x + y)\vec{i} + (x + 3z)\vec{j}$ через проекцію трикутника ABC , утвореного при перерізі площини $P: x + 2y + z = 2$ з координатними площинами на площину Oxy ?

- а) 1;
- б) -1;
- в) 0;
- г) інша відповідь

30. Замкнутий контур вважається додатньо орієнтованим, якщо при його обході область, обмежена цим контуром, залишається:

- а) знизу;
- б) зліва;
- в) справа;
- г) інша відповідь

31. $\text{rot } \vec{a}(M)$ характеризує

- а) густину циркуляції векторного поля;
- б) потік векторного поля;
- в) питому продуктивність джерел;
- г) інша відповідь.

32. Нехай маємо скалярне поле U та векторне поле \vec{a} , тоді $\text{grad } U \times \vec{a}$ дорівнює

- а) $\text{div } \vec{a}$;
- б) $\text{grad } U$;
- в) $\text{rot } \vec{a}$
- г) інша відповідь

33. Потенціал векторного поля обчислюється за формулою:

а) $U(x, y, z) = \int a_x(x, y, z)dx + a_y(x, y, z)dy + a_z(x, y, z)dz$;

б) $U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} a_y(x, y, z)dx + a_z(x, y, z)dy + a_x(x, y, z)dz$;

$$в) U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} a_x(x, y, z)dx + a_y(x, y, z)dy + a_z(x, y, z)dz ;$$

г) інша відповідь

34. Функція $U = U(x, y, z)$, яка задовольняє умову

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \text{ називається:}$$

- а) гармонічною;
- б) соленоїдною;
- в) потенціальною;
- г) інша відповідь

35. Якщо підінтегральний вираз в криволінійному інтегралі $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом, то значення цього інтеграла залежить:

- а) від початкової і кінцевої точок шляху інтегрування;
- б) від шляху інтегрування;
- в) від а) і від б);
- г) інша відповідь

36. Частинні похідні функції за кожною змінною першого порядку є окремими випадками

- а) похідної за напрямом;
- б) похідної за градієнтом;
- в) похідної за скаляром;
- г) інша відповідь

37. Яка із перерахованих властивостей не є властивістю потоку векторного поля?

а) Якщо $np_n \bar{a} = c = const$, то $\iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{ds} = c \cdot S_{\sigma}$, де S_{σ} – площа поверхні σ

б) При зміні напрямку нормалі потік не змінює знак

$$в) \iint_{\sigma} (\bar{a} + \bar{b}) \bar{ds} = \iint_{\sigma} \bar{a} \bar{ds} + \iint_{\sigma} \bar{b} \bar{ds}$$

г) інша відповідь

38. Якщо потік через замкнену поверхню від'ємний, то це означає, що в середині цієї поверхні є

а) джерела;

б) стоки;

в) точки кипіння;

г) інша відповідь

39. В декартовій системі координат дивергенція векторного поля $\vec{a}(M) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$ обчислюється за формулою:

а)
$$\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \frac{\partial a_x(M_0)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_0)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_0)}{\partial z};$$

б)
$$\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \frac{\partial^2 a_x(M_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y(M_0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z(M_0)}{\partial z^2};$$

в)
$$\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \frac{\partial a_x(M_0)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_0)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_0)}{\partial z};$$

г) інша відповідь

40. Яка із рівностей виражає формулу Гріна:

а)
$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy;$$

б)
$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = \oint_L P(x, y) dx - Q(x, y) dy;$$

в)
$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy;$$

г) інша відповідь.

41. Якщо в кожній точці плоскої або просторової області задано функцію координат точки $f(M) = f(x, y, z)$, то цю функцію називають:

- а) скалярним полем;
- б) векторним полем;
- в) магнітним полем;
- г) інша відповідь

42. Якщо в кожній точці простору та площини задано вектор $\vec{a}(a_x(M), a_y(M), a_z(M))$, то кажуть, що задано

- а) поле напрямів;
- б) інша відповідь;
- в) скалярне поле;
- г) векторне поле.

43. Яка формула виражає потік векторного поля через проекцію на площину Oxy , якщо \vec{n}^0 - зовнішня нормаль?

$$\text{а) } \Pi = \iint_{D_{xy}} \frac{\vec{a} \vec{n}^0}{\left| \cos(\vec{n}^0, \vec{k}) \right|} \Bigg|_{z=z(x,y)} dx dy ;$$

$$\text{б) } \Pi = \iint_{D_{yz}} \frac{\vec{a} \vec{n}^0}{\left| \cos(\vec{n}^0, \vec{i}) \right|} \Bigg|_{x=x(y,z)} dy dz ;$$

$$\text{в) } \Pi = \iint_{D_{xz}} \frac{\vec{a} \vec{n}^0}{\left| \cos(\vec{n}^0, \vec{j}) \right|} \Bigg|_{y=y(x,z)} dx dz ;$$

- г) інша відповідь

44. Відношення $\frac{\oiint \vec{a} d\vec{s}}{\Delta V}$ характеризує:

- а) питому продуктивність джерел;
- б) питому потужність джерел;
- в) інтенсивність обертального руху;
- г) інша відповідь.

45. Обчислити криволінійні інтеграли можна шляхом зведення їх до

- а) визначеного інтегралу;
- б) подвійного інтегралу;
- в) невизначеного інтегралу;
- г) інша відповідь

46. У випадку поля швидкостей рухомої рідини $np_n \text{ rot } \bar{a}(M)$ у напрямі нормалі характеризує:

- а) питому потужність джерел;
- б) потік векторного поля;
- в) інтенсивність обертального руху;
- г) інша відповідь

47. Скалярний диференціальний оператор другого порядку $\bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ називають:

- а) оператором Коші;
- б) оператором Гамільтона;
- в) інша відповідь;
- г) оператором Лапласа

48. Вкажіть, яким є векторне поле $\bar{a} = (3x - yz)\bar{i} + (3y - xz)\bar{j} + (3z - xy)\bar{k}$?

- а) гармонічним;
- б) потенціальним;
- в) соленоїдним;
- г) інша відповідь

49. Яка формула виражає потік векторного поля через проекцію на площину Oxz , якщо \vec{n} - зовнішня нормаль?

- а) $\iint_{\sigma} a_y dx dz = - \iint_{D_{xz}} a_y(x, y(x, z), z) dx dz$;
- б) $\iint_{\sigma} a_y dx dz = \iint_{D_{xz}} a_y(x, y(x, z), z) dx dz$;
- в) $\iint_{\sigma} a_y dx dz = \iint_{D_{xz}} a_y(x, y(x, z), z) dx dz$;

г) інша відповідь

50. Яке із перерахованих нижче чисел є значенням інтеграла $I = \iint_{\sigma} (x - y + \frac{3}{2}z) dydz + x dx dz - z dx dy$, якщо σ – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $2x - 2y + z - 2 = 0$ з координатними площинами?

а) 6;

б) 8;

в) 7;

г) інша відповідь

51. Робота, що її виконує сила $\vec{F} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки від точки M до точки N уздовж лінії L , називається

а) кратним інтегралом;

б) криволінійним інтегралом;

в) поверхневим інтегралом;

г) інша відповідь

52. Яка формула виражає обчислення потоку векторного поля через проекцію на площину Oxy , якщо \vec{n} – зовнішня нормаль ?

а) $\iint_{\sigma} a_z dx dy = - \iint_{D_{xy}} a_z(x, y, z(x, y)) dx dy$;

б) $\iint_{\sigma} a_x dy dz = \iint_{D_{yz}} a_x(x(y, z), y, z) dy dz$;

в) $\iint_{\sigma} a_z dx dy = \iint_{D_{xy}} a_z(x, y, z(x, y)) dx dy$;

г) інша відповідь

53. Поверхня, в кожній точці якої поле зберігає одне і те ж значення, називається

а) кривою рівня;

б) лінією рівня;

- в) поверхнею рівня;
- г) інша відповідь

54. Поверхня називається двосторонньою, якщо у довільну точку M поверхні σ після обходу будь-якого замкненого контуру, розміщеного на цій поверхні, який не перетинає її межу, ми повертаємось

- а) з протилежним напрямом;
- б) з початковим напрямом нормалі;
- в) без жодного напрямку;
- г) інша відповідь

55. Яка формула виражає потік векторного поля через проекцію на площину Oyz , якщо \vec{n}^0 - зовнішня нормаль?

$$\text{а) } \Pi = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}^0}{|\cos(\vec{n}^0, \vec{k})|} \right|_{z=z(x,y)} dx dy ;$$

$$\text{б) } \Pi = \iint_{D_{yz}} \left. \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}^0}{|\cos(\vec{n}^0, \vec{i})|} \right|_{x=x(y,z)} dy dz ;$$

$$\text{в) } \Pi = \iint_{D_{xz}} \left. \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}^0}{|\cos(\vec{n}^0, \vec{j})|} \right|_{y=y(x,z)} dx dz ;$$

- г) інша відповідь

56. Якщо крива L (від точки M до точки N) задана параметричним рівнянням $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, де функції $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t)$, $y'(t)$ і $z'(t)$. Точці M відповідає значення параметра α , а точці N - β . Тоді

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz =$$

$$\text{а) } \int_{\alpha}^{\beta} (X(x(t), y(t), z(t)) + Y(x(t), y(t), z(t)) + Z(x(t), y(t), z(t))) dt ;$$

$$\text{б) } \int_{\alpha}^{\beta} (X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt;$$

$$\text{в) } \int (X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt;$$

г) інша відповідь

57. Яка із перерахованих властивостей не є властивістю ротора?

а) Якщо \bar{c} – сталий вектор, то $\text{rot } \bar{c}(M) = 0$.

б) Якщо \bar{a}_1 і \bar{a}_2 – векторні поля, C_1 і C_2 – числа, то $\text{rot}(C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2) = C_1\text{rot}\bar{a}_1 + C_2\text{rot}\bar{a}_2$.

в) Для будь-якого векторного поля $\bar{a}(M)$ $\text{div}(\text{rot}\bar{a}) = 1$.

г) інша відповідь

58. Векторне поле $\bar{a}(M)$ називається *соленоїдним*, якщо існує таке поле $\bar{b}(M)$, що

$$\text{а) } \bar{a}(M) = \text{rot}\bar{b}(M);$$

$$\text{б) } \bar{a}(M) = \text{grad } \bar{b}(M);$$

$$\text{в) } \bar{a}(M) = \text{div } \bar{b}(M);$$

г) інша відповідь

59. Для того, щоб диференціальний вираз $Pdx + Qdy$, був повним диференціалом деякої функції $U = U(x, y)$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\text{а) } \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y};$$

$$\text{б) } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y};$$

$$в) \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};$$

г) інша відповідь

60. Який зв'язок існує між похідною за напрямом та градієнтом?

$$а) \frac{\partial f}{\partial s} = -np_s \text{ grad } f;$$

$$б) \frac{\partial f}{\partial s} > np_s \text{ grad } f$$

$$в) \frac{\partial f}{\partial s} = np_s \text{ grad } f;$$

г) інша відповідь

61. Правильність вибору знаків перед подвійними інтегралами формули для обчислення потоку можна перевірити за допомогою вектора нормалі \vec{n}^0 до поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$:

$$а) \vec{n}^0 = \pm \frac{\varphi'_x \vec{i} + \varphi'_y \vec{j} + \varphi'_z \vec{k}}{\sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 + (\varphi'_z)^2}};$$

$$б) \vec{n}^0 = \frac{\varphi'_x \vec{i} + \varphi'_y \vec{j} + \varphi'_z \vec{k}}{\sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 + (\varphi'_z)^2}};$$

$$в) \vec{n}^0 = \pm \frac{\varphi''_x \vec{i} + \varphi''_y \vec{j} + \varphi''_z \vec{k}}{\sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 + (\varphi'_z)^2}};$$

г) інша відповідь

62. Якщо векторне поле розглядати як поле швидкостей рухомої рідини, то її потік через поверхню σ дорівнює

а) нулю;

б) кількості рідини, що протікає через цю поверхню за одиницю часу у напрямку зовнішньої нормалі;

в) кількості рідини, що протікає через цю поверхню за одиницю часу у напрямку внутрішньої нормалі;

г) інша відповідь

63. Яке із вказаних нижче чисел, є розв'язком інтеграла $I = \int_L ydx + xdy$, де

L – частина кола $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, що знаходиться у першому квадранті?

а) 1;

б) -1;

в) 0;

г) інша відповідь

64. В декартовій системі координат ротор векторного поля обчислюють за формулою:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k};$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \bar{j} - \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k};$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k};$$

г) інша відповідь

65. Яка із перерахованих формул є формулою Стокса:

$$\text{а) } \oint_L \bar{a} d\bar{l} = \iint_{\sigma} \text{rot } \bar{a} \times \bar{d}s;$$

$$\text{б) } \oint_L (\bar{a}) = \iint_{\sigma} \overline{\text{rot } a} \, ds;$$

$$\text{в) } \Pi(\bar{a}) = \oint_L \bar{a} \, dl = \iint_{\sigma} \overline{\text{rot } a} \, ds;$$

г) інша відповідь

66. Дивергенція соленоїдного векторного поля дорівнює:

- а) 1;
- б) інша відповідь;
- в) -1;
- г) 0

67. Який із перерахованих нижче векторів є ротором векторного поля $\bar{a} = 3x\bar{i} + yz\bar{j} + y^2\bar{k}$?

а) $\overline{\text{rot } a} = y\bar{j}$

б) $\overline{\text{rot } a} = y\bar{i}$;

в) $\overline{\text{rot } a} = y\bar{k}$;

г) інша відповідь

68. Яка із перерахованих властивостей не є властивістю ротора?

а) Нехай U – скалярне поле, $\bar{a}(M)$ – векторне поле. Побудуємо векторне поле $U \cdot \bar{a}(M)$, тоді $\overline{\text{rot}}(U \cdot \bar{a}(M)) = U \overline{\text{rot } a}(M) + \text{grad}(U \times \bar{a}(M))$

б) Якщо \bar{c} – сталий вектор, то $\overline{\text{rot } c}(M) = 0$.

в) Нехай $\bar{a}_1 = \{a_{x_1}(x, y, z), a_{y_1}(x, y, z), a_{z_1}(x, y, z)\}$ і $\bar{a}_2 = \{a_{x_2}(x, y, z), a_{y_2}(x, y, z), a_{z_2}(x, y, z)\}$, тоді $\overline{\text{div}}(\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = \bar{a}_2 \overline{\text{rot } a}_1 - \bar{a}_1 \overline{\text{rot } a}_2$.

г) інша відповідь

69. Потік соленоїдного вектора через будь-яку замкнену поверхню дорівнює:

- а) 1;

- б) -1;
- в) 0;
- г) інша відповідь

70. Яке із вказаних нижче чисел, є розв'язком інтеграла $I = \int_L (x + y)dx - y^2 dy$, де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(1,1)$?

- а) 0.3;
- б) 0.4;
- в) 0.6;
- г) інша відповідь

71. Соленоїдне поле

- а) не має ні джерел, ні стоків;
- б) має лише джерела;
- в) має лише стоки;
- г) інша відповідь

72. Якщо потік через замкнену поверхню дорівнює нулю, то це означає, що в середині цієї поверхні є

- а) джерела;
- б) стоки;
- в) точки кипіння;
- г) інша відповідь

73. Замкнутий контур вважається додатньо орієнтованим, якщо при його обході область, обмежена цим контуром, залишається:

- а) знизу;
- б) зліва;
- в) справа;
- г) інша відповідь

74. Потенціал векторного поля обчислюється за формулою:

а) $U(x, y, z) = \int a_x(x, y, z)dx + a_y(x, y, z)dy + a_z(x, y, z)dz$;

$$\text{б) } U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} a_y(x, y, z)dx + a_z(x, y, z)dy + a_x(x, y, z)dz ;$$

$$\text{в) } U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} a_x(x, y, z)dx + a_y(x, y, z)dy + a_z(x, y, z)dz ;$$

г) інша відповідь

75. Обчислити $\int_{AB} (x - y)dl$, де AB – відрізок прямої $y = 2x$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,2)$

а) $\frac{\sqrt{5}}{2}$;

б) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$;

в) $\frac{1}{2}$;

г) інша відповідь

76. Обчислити $\int_L (x + y)dl$, де L – контур трикутника з вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$ та $B(0,1)$

а) інша відповідь;

б) $1 + \sqrt{2}$;

в) $\sqrt{2}$;

г) $1 - \sqrt{2}$

77. Обчислити $\int_L (x + y)dl$, де L – контур трикутника з вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$ та $B(1,1)$.

а) інша відповідь;

б) $2 - \sqrt{2}$;

в) $2 + \sqrt{2}$;

г) $\sqrt{2}$

78. Обчислити $\int_L y^2 dl$, де L – арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

а) $\frac{15}{256}a^3$;

б) $\frac{256}{15}a^3$;

в) $\frac{1}{15}a^3$;

г) $\frac{256}{15}a^2$

79. Обчислити $\int_L xy dl$, де L – дуга гіперболи $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $0 \leq t \leq t_0$

а) $\frac{a^3}{6} \left((2 \operatorname{ch}^2 t_0 - 1)^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$;

б) інша відповідь;

в) $\frac{a^3}{6} \left((2 \operatorname{ch}^2 t_0 - 1)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)$;

г) $\frac{a^3}{6} \left((\operatorname{ch}^2 t_0 - 1)^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$

80. Обчислити $\int_L x dl$, де L – частина параболи $x = 2\sqrt{y}$, $0 \leq y \leq 2$.

а) $\frac{3}{4}(3\sqrt{3} - 1)$;

б) $\frac{4}{3}(3\sqrt{3} - 1)$;

в) $\frac{4}{3}(3\sqrt{3} + 1)$;

$$\text{г) } \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

81. Обчислити $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L – верхня половина еліпса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, яку проходять за годинниковою стрілкою.

$$\text{а) } \frac{4}{3}ba;$$

$$\text{б) } \frac{4}{3}b^2a^2;$$

$$\text{в) } \frac{4}{3}b^2a;$$

$$\text{г) } \frac{4}{3}a^2b$$

82. Обчислити $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L – нижня половина еліпса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, яку проходять за годинниковою стрілкою.

$$\text{а) } \frac{4}{3}b^2a;$$

$$\text{б) } -\frac{4}{3}b^2a;$$

$$\text{в) } -\frac{3}{4}b^2a;$$

$$\text{г) } -\frac{4}{3}a^2b$$

83. Обчислити $\int_L x^2 dy$, де L – контур трикутника, що обмежений осями координат і прямою $x + y = 2$, який проходять проти годинникової стрілки.

$$\text{а) } -\frac{8}{3};$$

б) $\frac{8}{3}$;

в) $\frac{3}{8}$;

г) $-\frac{3}{8}$

84. Обчислити $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L – дуга параболи $y = 4 - x^2$, що знаходиться у верхній півплощині і яку проходять за годинниковою стрілкою.

а) $\frac{512}{15}$;

б) $-\frac{512}{15}$;

в) 0;

г) 80

85. Обчислити $\int_L (x^2 + 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, де L – дуга параболи $y = 2x^2$ від точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$.

а) $-\frac{15}{86}$;

б) $\frac{86}{15}$;

в) $-\frac{86}{15}$;

г) $\frac{15}{86}$

86. Обчислити $\int_L y dx + \frac{x}{y} dy$, де L – дуга кривої $y = e^{-x}$ від точки $A(0, 1)$ до точки $B(-1, e)$.

а) $\frac{1}{2} - e$;

б) $-\frac{1}{2} + e$;

в) $\frac{e}{2} - 1$;

г) $\frac{1}{2} + e$

87. Обчислити $\int_L (y^2 - z^2) dx + 2zy dy - x^2 dz$, де L – крива $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

а) $\frac{1}{35}$;

б) $\frac{2}{35}$;

в) $\frac{3}{35}$;

г) $\frac{4}{35}$

88. Обчислити $\iint_{\sigma} 6x d\sigma$, де σ – поверхня частини площини $x + 2y + 3z = 6$, що розміщена в першому октанті.

а) $36\sqrt{14}$;

б) $\frac{28}{5}\sqrt{14}$;

в) $\frac{28}{9}\sqrt{14}$;

г) $\frac{28}{11}\sqrt{14}$

89. Обчислити $\int_{\sigma} 4y d\sigma$, де σ – поверхня частини площини $x + 2y + 3z = 6$, що розміщена в першому октанті.

а) $12\sqrt{14}$;

б) $24\sqrt{14}$;

в) $\frac{60}{9}\sqrt{14}$;

г) $\frac{16}{9}\sqrt{14}$

90. Обчислити $\int_{\sigma} d\sigma$, де σ – поверхня частини площини $x + y + z = a$, що розміщена в першому октанті.

а) $\frac{a^3}{2}\sqrt{3}$;

б) $\frac{a^3}{6}\sqrt{3}$;

в) $\frac{a^3}{3}\sqrt{3}$;

г) $\frac{a^2}{6}\sqrt{3}$

91. Обчислити $\iint_{\sigma} z dy dx$, де σ – верхня сторона частини поверхні $x + z - 1 = 0$, що відтинається площинами $y = 0$, $y = 4$ і розміщена в першому октанті

а) 0;

б) 1;

в) 2;

г) 3

92. Обчислити $\iint_{\sigma} yz dy dx$, де σ – верхня сторона частини поверхні $x + z - 1 = 0$, що відтинається площинами $y = 0$, $y = 4$ і розміщена в першому октанті

а) 1;

б) 2;

в) 3;

г) 4

93. Обчислити $\iint_{\sigma} yz dy dx$, де σ – верхня сторона частини поверхні $x + z - 1 = 0$, що відтинається площинами $y = 0$, $y = 4$ і розміщена в першому октанті

- а) $\frac{1}{3}$;
- б) $\frac{2}{3}$;
- в) 1;
- г) $\frac{4}{3}$

94. Обчислити потік векторного поля $\vec{F} = \vec{F}(M)$ через зовнішню сторону замкненої поверхні σ , якщо $\vec{F} = z\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$, $\sigma: 2x + y + 2z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

- а) $\frac{2}{3}$;
- б) $\frac{1}{3}$;
- в) $\frac{1}{2}$;
- г) $\frac{3}{2}$

95. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (1 - z)\vec{k}$ через повну поверхню конуса $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq H$), застосувавши формулу Остроградського.

- а) $\frac{\pi H^3}{3}$;
- б) $\frac{\pi^3 H^3}{3}$;
- в) $\frac{\pi H^3}{6}$;
- г) $\frac{\pi H}{3}$

96. Задано векторне поле $\vec{F} = 3x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$ і площина $x + 3y + z = 3$ (P), яка разом з координатними площинами утворює піраміду V . Нехай σ – основа піраміди, яка належить площині (P); L – контур,

який обмежує σ , \bar{n} – зовнішня нормаль до σ . Обчислити циркуляцію векторного поля \bar{F} вздовж замкненого контура L , застосувавши формулу Стокса.

- а) $\frac{10}{3}$;
- б) $-\frac{10}{3}$;
- в) $\frac{11}{3}$;
- г) -6

97. Задано векторне поле $\bar{F} = (x+z)\bar{i} + 2y\bar{j} + (x+y-z)\bar{k}$ і площина $x+2y+z=2$ (P), яка разом з координатними площинами утворює піраміду V . Нехай σ – основа піраміди, яка належить площині (P); L – контур, який обмежує σ , \bar{n} – зовнішня нормаль до σ . Обчислити циркуляцію векторного поля \bar{F} вздовж замкненого контура L , застосувавши формулу Стокса.

- а) -1;
- б) -2;
- в) 1;
- г) 2

98. Обчислити дивергенцію поля $\bar{F} = (x^2 + y)\bar{i} + (y^2 + z)\bar{j} + (z^2 + x)\bar{k}$ в точці $M_0(1; -2; 3)$.

- а) 4;
- б) 2;
- в) -4;
- г) 3

99. Обчислити ротор векторного поля $\bar{F} = (z-y)\bar{i} + (x-z)\bar{j} + (y-x)\bar{k}$.

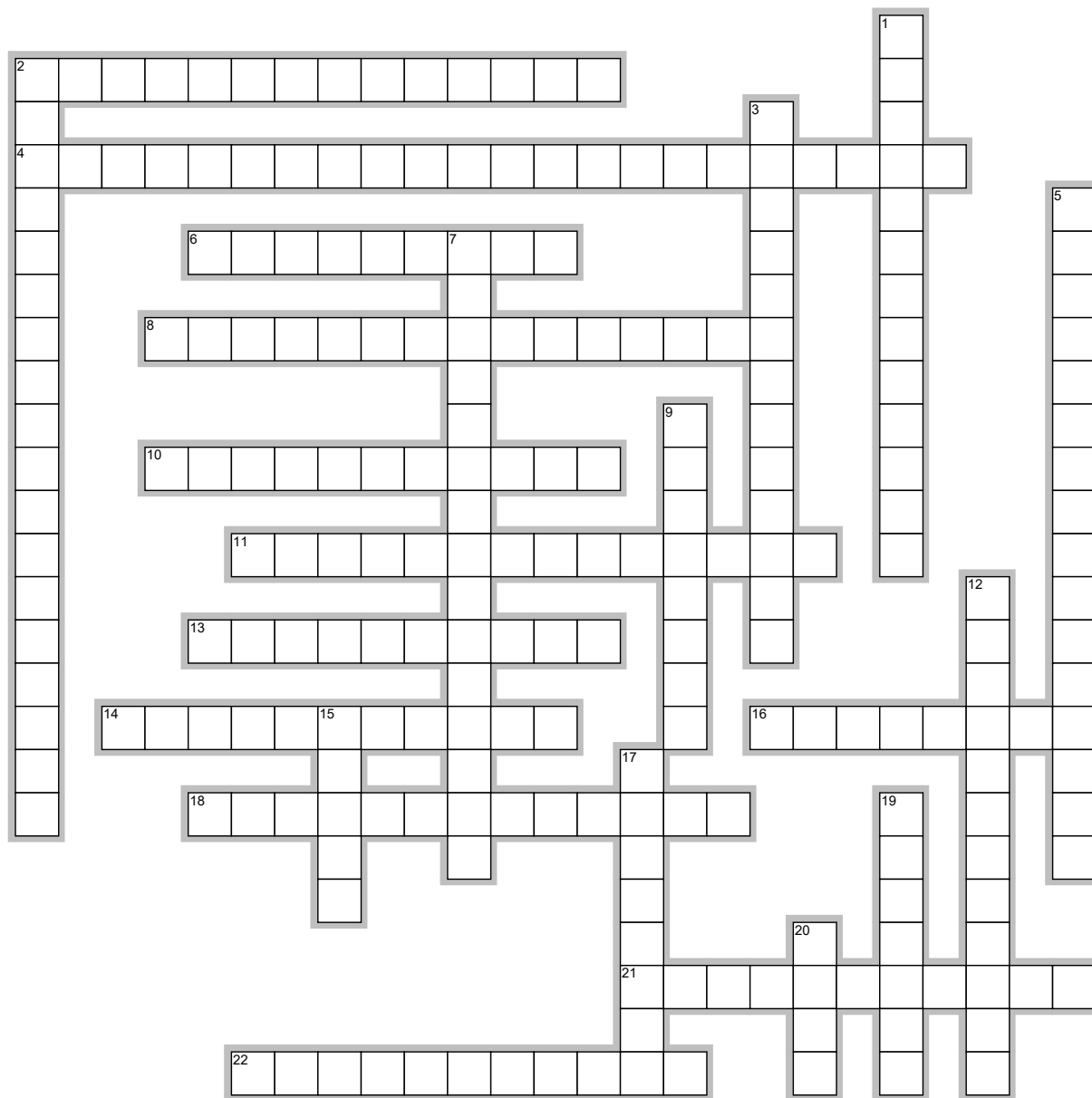
- а) $(-2; 2; 2)$;
- б) $(2; 2; 2)$;
- в) $(2; -2; -2)$;
- г) $(2; 2; -2)$

100. Векторне поле $\bar{a}(M) = (3x + yz)\bar{i} + (3y + xz)\bar{j} + (3z + xy)\bar{k}$ є

- а) соленоїдним;
- б) потенціальним;
- в) гармонічним;
- г) інший варіант

5.2. Розгадайте кросворди

5.2.1 Скалярне поле



EclipseCrossword.com

По горизонталі

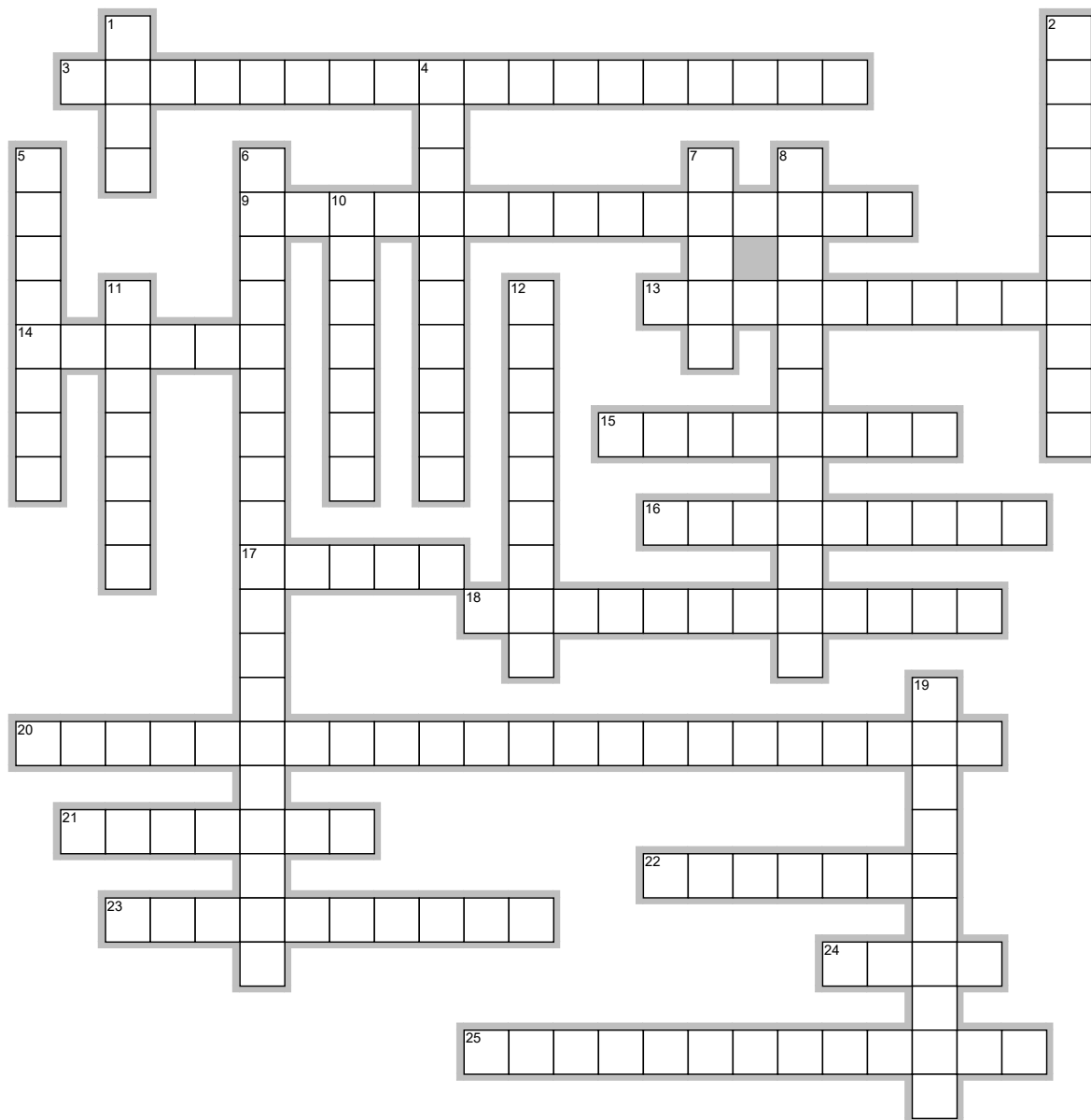
2. поверхня, в кожній точці якої поле зберігає значення
4. зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею свтановлює формула ...
6. сторона поверхні в кожній точці якої нормаль спрямована всередину об'єму, обмеженого цією поверхнею
8. якщо в кожній точці плоскої або просторової області задано функцію координат точки, то цю функцію називають ...
10. характеристика, що дає загальне уявлення про характер зміни поля
11. якщо при обході деякого контуру поверхні напрям нормалі змінюється на протилежний, то таку поверхню називають ...
13. приклад лінії рівня на географічних картах
14. локальною характеристикою скалярного поля є похідна ...
16. вектор, координати якого є значення частинних похідних функції трьох змінних в заданій точці
18. якщо в кожній точці простору чи площини задано вектор, то кажуть що задано ...
21. операцію при якій кожену координату вектора ділять на його довжину називають ...
22. вибір певної сторони двосторонньої поверхні

По вертикалі

1. якщо у довільну точку поверхні після обходу будь-якого замкненого контуру, розміщеного на цій поверхні, ми повертаємось з початковим напрямом нормалі, то таку поверхню називають ...
2. похідна за напрямом, протилежним заданому вектору, дорівнює похідній за цим напрямом, взятій із ...
3. швидкість зміни скалярного поля в довільній точці у напрямі градієнта є ...
5. приклад скалярного поля
7. характеризу похідна скалярного поля в довільній точці за напрямом заданого вектора
9. сторона поверхні в кожній точці якої нормаль спрямована зовні об'єму, обмеженого цією поверхнею
12. двосторонню поверхню називають ...
15. кількість рідини, що протікає через поверхню за одиницю часу у напрямку зовнішньої нормалі
17. знак, який можна поставити між похідною функції в точці за напрямом деякого вектора та проекцією градієнта функції в даній точці на цей вектор

19. вектор, перпендикулярний до будь-якої дотичної площини до поверхні
20. похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта дорівнює ...

5.2.2 Характеристики векторного поля



По горизонталі

3. характеризує проекція ротора векторного поля на напрямок нормалі
9. границя відношення циркуляції до площі поверхні, коли остання прямує до нуля
13. поле, дивергенція якого в будь-якій точці дорівнює нулю
14. формула, що встановлює зв'язок між криволінійним та поверхневим інтегралами
15. результат дії оператора Гамільтона на скалярне поле
16. скалярний диференціальний оператор другого порядку
17. формула, що ілюструє зв'язок між подвійним та криволінійним інтегралом
18. границя, до якої прямує питома потужність джерел при об'ємі тіла, що прямує до нуля, називають ...
20. робота, що її виконує деяка сила по переміщенні матеріальної точки уздовж заданої лінії
21. орієнтація контура при обході якої область, обмежена цим контуром, завжди залишається зліва
22. точка, в якій дивергенція додатня
23. поведінка модуля і напрямку ротора при переході від однієї точки простору до іншої
24. точка, в якій дивергенція від'ємна
25. векторні лінії поля ротора

По вертикалі

1. значення потоку поля точкового електричного заряду на певній відстані від цього заряду через довільну замкнену поверхню, яка не охоплює заряд
2. інтеграл, за допомогою якого обчислюється криволінійний інтеграл
4. криволінійний інтеграл векторного поля уздовж замкненого контуру
5. що можна робити із сталим множником під знаком ротора
6. векторно-диференціальний оператор, який позначають символом набла
7. вектор, у напрямі якого проекція ротора на напрямок нормалі досягає максимального значення
8. поле, ротор якого у будь-якій точці дорівнює нулю
10. значення суми квадратів напрямних косинусів векторного поля
11. те, що не мають вихрові лінії
12. використовується при обчисленні ротора
19. векторне поле, яке одночасно є безвихровим і трубчастим

В кросворді 5.2.1 використовуються слова: орієнтація, нормування, векторне поле, градієнт, за напрямом, висота гір, одностороння, лінія рівня,

скалярне поле, внутрішня, Остроградського-Гаусса, поверхня рівня, нуль, нормаль, дорівнює, потік, орієнтована, зовнішня, швидкість зміни, температура тіла, максимальна, протилежний знак, двостороння

В кросворді 5.2.2 використовуються слова: нуль, визначений, циркуляція, виносити, оператор Гамільтона, ротор, потенціальне, одиниця, початок, визначник, гармонічне, густина циркуляції, проекція ротора, соленоїдне, Стокс, градієнт, лапласіан, Грін, дивергенція, криволінійний інтеграл, додатня, джерело, змінюються, стік, вихрові лінії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Васильченко І. П., Данилов В. Я., Лобанов А. І., Тарах Є. Ю. Вища математика: Основні означення, приклади і задачі. Навч. посібник. Кн. 2 – друге вид., зі змінами. Київ:Либідь, 1994. 280 с.
2. Гершанок В. А., Дергачёв Н. И. Теория поля. Учебник для бакалавров. Москва: Юрайт, 2012. 278 с.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевников Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. II. Москва: Высшая школа, 1986. 415 с.
4. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики, 3-е изд. Москва: Наука, 1966. 455 с.
5. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михайлін Г. О. Вища математика: Приклади і задачі. Посібник. Київ: Видавничий центр «Академія», 2002. 624 с.
6. Иванов С. В., Мартышко П. С. Математика для физиков. Функции нескольких переменных. Теория поля. Санкт-Петербург: Либроком, 2014. 295 с.
7. Мышкис А. Д. Математика для технических вузов: Специальные курсы. 2-е изд. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2002. 640 с.
8. Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І. Елементи теорії поля. Навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2006. 100 с.
9. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа /Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. 2-е изд. Москва: Наука, 1986. 368 с.
10. Соколов А., Иваненко Д. Классическая теория поля. Новые проблемы. Москва: Наука, 2012. 479 с.
11. Шкіль М. І., Колесник Т. В. Вища математика. Київ: Вища школа, 1986. 521 с.
12. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1965. 424 с.

Навчальне видання

**Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна
Ковальчук Майя Борисівна**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ.
Основні поняття, формули та алгоритми для самостійної роботи
студентів**

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *Н. Сачанюк-Кавецькою*

Редактор

Оригінал-макет виготовлено *О. Ткачуком*

Підписано до друку _____ р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк..
Наклад _____ пр. Зам. № _____

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95,

м. Вінниця, 21021.

Тел. (0432) 65-18-06.

press.vntu.edu.ua;

E-mail: kivc.vntu@gmail.com.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р