УДК 519.6.075

Комар В.О., Лесько В.О.
м. Вінниця, Вінницький НТУ

Критеріальне моделювання якості функціонування автоматичних систем керування

В даній статті пропонується метод отримання критерію якості функціонування автоматичних систем керування, оснований на поєднанні теорії марковських процесів та принципів критеріального моделювання

The method of getting criteria quality functioning of automatically control systems based at association of the theory of Markov processes and criterion modeling is considered in given article.

Вступ

За сучасного рівня розвитку науки та техніки широко почали використовуватись автоматичні системи керування (АСК) в різних областях промисловості: системи управління на транспорті; видобуток і транспортування нафти і газу; телекомунікації і зв'язок; виробництво, передача, розподіл і облік електроенергії; приладо- і верстатобудування; металургія; лабораторно-вимірювальні системи; системи спеціального призначення.

Як правило, сучасні АСК є багаторівневими ієрархічними системами, верхній рівень яких є центром керування у вигляді локальної обчислювальної мереж з розподіленою архітектурою. Така архітектура, з одного боку, підвищує надійність і продуктивність такого роду систем, з іншого, істотно ускладнює можливість їх аналізу і аналітичного дослідження на стадії проектування, експлуатації і вдосконалення. В зв'язку з цим постає задача вибору та визначення критерію, за яким можна було б оцінити поточний стан АСК, розробити стратегію її удосконалення, виконувати порівняння різних структурних реалізацій. Як зазначалось в [1] загальні вимоги, яким має відповідати такий критерій є: відображення об'єктивної реальності; оцінка ефективності, якості та оптимальності; можливість фізичного та абстрактного тлумачення; можливість обчислення, хоча б з використанням ЕОМ; нормування і відображення "крайніх" станів АСК з урахуванням потенційно та реально можливих; повинен бути до певної міри узагальнюючим (характеризувати окремі підсистеми і системи в цілому в усіх життєвих циклах); повинен легко розкладатись на часткові показники та об'єднуватись в узагальнені; повинен мати теоретичну основу і дозволяти розробляти нову теорію або розвивати стару; володіти евристичністю, дозволяти приймати рішення на підставі досвіду та інтуїції тощо.

Для автоматичних систем керування таким критерієм може бути якість функціонування [2]. Завдяки розподіленій структурі АСК можна віднести до складних систем, тобто вони мають здатність під час відмови елементів продовжувати виконання своїх функцій, але з пониженою ефективністю, тобто можуть знаходитись в декількох робочих станах. Ця особливість автоматичних систем керування вимагає визначення такого показника як якість функціонування для оцінки ефективності її роботи, яка безпосередньо впливає на рівень досягнутого оптимального режиму об'єктом керування.

Якість функціонування – це ступінь пристосованості системи до виконання визначених для неї функцій.

Проаналізувавши можливі підходи у визначенні такого критерію можна сказати, що доцільним є використання теорії марковських процесів. Причини популярності марковських моделей включають в себе: здатність охоплювати різні залежності, однакову легкість обчислень стабільного, перехідного і кумулятивного перехідного стану, можливість розширення до марковських моделей винагородження, корисних для аналізу працездатності АСК.

Подібність систем рівнянь Колмогорова та ортогональності і нормування

Як відомо, марковський процес описується системою диференціальних рівнянь Колмогорова [3]

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \nu \cdot \mathbf{p}; \\ \sum_{i=1}^{m} p_i &= 1, \end{aligned}\right\}, \quad (1)$$

де **p** – вектор ймовірностей станів досліджуваної системи; **ν** – матриця густин ймовірностей переходів з одного стану в інший; m - кількість можливих станів досліджуваної системи (рис. 1).

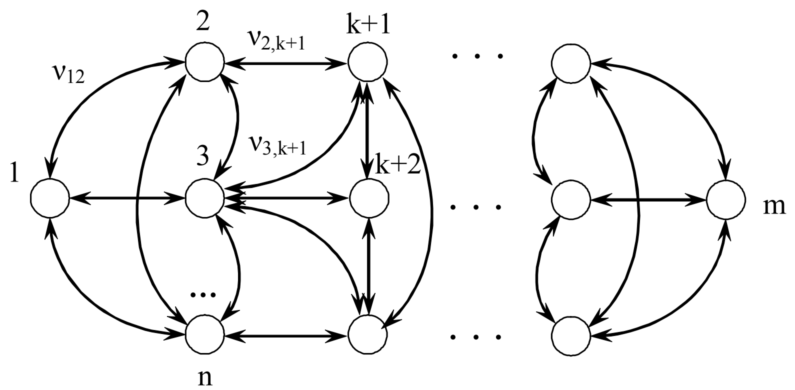

Рис. 1. Граф зміни станів АСК

Аналізуючи систему рівнянь Колмогорова (1) отримати критерії, які б задовольняли висунутим вимогам, досить складно. Але якщо використати аналогію між системою рівнянь (1) та системою рівнянь ортогональності та нормування критеріального програмування [4], то можливо отримати математичну (критеріальну) модель якості функціонування АСК не втративши позитивних особливостей теорії марковських процесів.

Прийнявши припущення про не врахування динаміки перехідних процесів між окремими станами (хоча при необхідності врахування динаміки переходів значних ускладнень не виникає тому, що розроблені підходи в критеріальному програмуванні, які дозволяють розширити класичні підходи цієї теорії), тобто $\frac{dp_i}{dt} = 0$, система рівнянь (1) перепишеться:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\nu_{ji}p_i=0,\quad j=\overline{2,n}\\&\sum_{i=1}^{m}p_i=1,\end{aligned}\right\},\tag{2}$$

де ν_{ji} – постійні величини (елементи матриці $\boldsymbol{\nu}$), що є алгебраїчними сумами величин інтенсивностей переходів з i-го в j-й стан; n – кількість напрямків зміни станів, що виходять з робочого стану 1 (рис. 1). Яка в більш загальному вигляді записується

$$\nu\cdot\mathbf{p}=\mathbf{b}.\tag{3}$$

В критеріальному програмуванні система рівнянь ортогональності та нормування записується [4]

$$\alpha\cdot\pi=\mathbf{b},\tag{4}$$

$\boldsymbol{\alpha}$ – матриця показників; $\boldsymbol{\pi}$ – вектор критеріїв подібності

З порівняння (3) і (4) видно, що форма запису їх схожа. Крім цього фізичний зміст складових аналогічний [5]. Подібність між системою рівнянь ортогональності та системою рівнянь Колмогорова можна показати на підставі теорем теорії подібності [6, 7]. Для цього побудуємо багаточлени від матриць $\boldsymbol{\alpha}$ та $\boldsymbol{\nu}$.

Подібно тому, як будь-яка аналітична функція $f(x)$ може бути представлена рядом (багаточленом), який збігається, від змінної x [8]:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=\sum_{s=0}^{\infty}a_sx^s,$$

функція від матриці $f(X)$ може бути представлена у вигляді багаточлена від матриці, який формально отримується заміною скалярної змінної x матрицею X:

$$f(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots=\sum_{s=0}^{\infty}a_sX^s.$$

Якщо скористатись інтерполяційним багаточленом [6] то матрицю переходів $\boldsymbol{\nu}$ системи рівнянь (3) і матрицю $\boldsymbol{\alpha}$ системи рівнянь ортогональності критеріального програмування (4) можна привести до матричного багаточлену. Використаємо для цього експоненціальну функцію $f(z)=e^{zt}$. Якщо мінімальний багаточлен (в даному випадку це характеристичний багаточлен $\Delta(z)$) складається тільки з лінійних множників $(z-z_k)$, то достатньо визначити функцію $f(z)$ в характеристичних точках $z_1,z_2,\ldots,z_m$. При цьому система рівнянь для коефіцієнтів інтерполяційного багаточлену має вигляд:

$$f(z_k)=a_0+a_1z_k+\ldots+a_{m-1}z_k^{m-1},\tag{5}$$

або в матричній формі

$$\begin{bmatrix}f(z_1)\\f(z_2)\\\ldots\\f(z_m)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\ z_1\ z_1^2\ \ldots\ z_1^{m-1}\\1\ z_2\ z_2^2\ \ldots\ z_2^{m-1}\\\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\\1\ z_m\ z_m^2\ \ldots\ z_m^{m-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\\ldots\\a_{m-1}\end{bmatrix}.$$

Розв'язавши цю систему відносно $a_0,a_1,\ldots,a_{m-1}$, отримаємо

$$f(A)=\sum_{i=0}^{m-1} a_i A^i .$$

Отже в загальному вигляді матриця **α** буде мати багаточлен виду

$$f(\alpha)=\sum_{i=0}^{m-1} a_i \alpha^i . \tag{6}$$

А матриця **ν**

$$f(\nu)=\sum_{i=0}^{m-1} a_i \nu^i . \tag{7}$$

Зробивши таке перетворення можна використовувати всі властивості скалярних багаточленів, в тому числі і наслідки теорем теорії подібності.

Відомо [9], що для встановлення подібності замість умов:

$$\pi_i = \frac{a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}}}{f} = \text{idem}, \tag{8}$$

можуть використовуватися рівнозначні їм вирази

$$\mu_i = \frac{\mu_{a_i} \prod_{j=1}^{n} \mu_{x_j}^{\alpha_{ji}}}{\mu_f} = 1, \tag{9}$$

де π_i – критерії подібності, визначені способом інтегральних аналогів; μ_i – індикатори подібності, які визначаються масштабами відповідних коефіцієнтів та параметрів моделі.

Використавши ці умови, можна показати подібність матричних багаточленів і відповідних їм матриць.

Для матричних багаточленів (6) та (7) умову (9) можна записати:

$$\frac{\mu_{a_1}}{\mu_f}=1; \ \frac{\mu_{a_2}\mu_{\alpha/\nu}}{\mu_f}=1; \ \frac{\mu_{a_3}\mu_{\alpha/\nu}}{\mu_f}=1 \text{ тощо,}$$

де $\mu_{a_i} = \dfrac{a_{i\alpha}}{a_{i\nu}}$; $\mu_{\alpha/\nu} = \alpha \cdot \nu^{-1}$; $\mu_f = \dfrac{e^{\left|\alpha^t\right|}}{e^{\left|\nu^t\right|}}$.

Далі скористуємося еквівалентними матричними перетвореннями, які розглядаються як перехід до нових координатних базисів для вектора x та y, тобто $x' = Q^{-1}x$ і $y' = Py$ [8]. Перетворення $\widetilde{A} = PAQ$ відповідає незалежним перетворенням координат, які визначаються матрицями Q^{-1} та P (неособливі квадратні матриці).

Якщо вектори x та y перетворюються до одного координатного базису, то $P = Q^{-1}$. Тобто переходимо до перетворення подібності $\widetilde{A} = Q^{-1}AQ$. Важливою властивістю перетворення подібності є те, що визначник матриці інваріантний відносно цього перетворення:

$$\det \widetilde{A} = \det A .$$

Оскільки таке перетворення не змінює власних значень матриці, то можна записати

$$\det[zE - \widetilde{A}] = \det[zE - A].$$

Отже, результат розв'язку системи рівнянь (5) для матриць $\widetilde{A}$ і A буде однаковим.

Роль перетворювальної матриці Q відіграє модальна матриця H [8], тобто $\widetilde{A} = H^{-1}AH$. Вона може бути визначена як сукупність стовпців $h^{(i)}$, які є розв'язками однорідних рівнянь:

$$(z_i E - A)h^{(i)} = 0 \quad i = \overline{1, n}, \tag{10}$$

де n – ранг матриці A.

За побудовою матриць $\boldsymbol{\alpha}$ та $\boldsymbol{\nu}$ матриця H існує і задовольняє системі однорідних рівнянь (10). Для підтвердження цього покажемо подібність двох станів – i-го і j-го. Запишемо для цих станів функції від матриці $\boldsymbol{\nu}$ [8]:

для i-го стану

$$f^i(\nu) = \varphi_1^i + \varphi_2^i + ... + \varphi_m^i = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k^i, \tag{11}$$

де $\varphi_k^i = f\left(\nu_1^i, \nu_2^i, ..., \nu_m^i\right)$; (12)

для j-го стану

$$f^j(\nu) = \varphi_1^j + \varphi_2^j + ... + \varphi_m^j = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k^j, \tag{13}$$

де $\varphi_k^j = f\left(\nu_1^j, \nu_2^j, ..., \nu_m^j\right)$. (14)

Рівняння (11) та (13) приведемо до безрозмірного виду діленням відповідно на $f^i(\nu)$ та $f^j(\nu)$:

$$1 = \frac{\varphi_1^i}{f^i} + \frac{\varphi_2^i}{f^i} + ... + \frac{\varphi_m^i}{f^i}; \tag{15}$$

$$1 = \frac{\varphi_1^j}{f^j} + \frac{\varphi_2^j}{f^j} + ... + \frac{\varphi_m^j}{f^j}. \tag{16}$$

В рівняннях (12) та (14) ν_1^i та ν_1^j, ν_2^i та ν_2^j, . . . , ν_m^i та ν_m^j – схожі параметри (система одна лише різні стани), крім цього

$$\nu_1^i = h_1\nu_1^j;\ \nu_2^i = h_2\nu_2^j, \ldots,\ \nu_m^i = h_m\nu_m^j, \tag{17}$$

де $h_1, h_2, \ldots, h_m$ – масштабні коефіцієнти.

Після підстановки співвідношень (17) в (12) і з врахуванням однорідності функції φ_k отримаємо

$$\varphi_k^i = f\left(\nu_1^i, \nu_2^i, ..., \nu_m^i\right) = f\left(h_1\nu_1^j, h_2\nu_2^j, ..., h_m\nu_m^j\right) = h_k f\left(\nu_1^j, \nu_2^j, ..., \nu_m^j\right)$$

або

$$\varphi_k^i = h_k \varphi_k^j. \tag{18}$$

Підставимо (18) в (16) і отримаємо

$$1 = \frac{h_1 \varphi_1^j}{h_k f^j} + \frac{h_2 \varphi_2^j}{h_k f^j} + \ldots + \frac{h_m \varphi_m^j}{h_k f^j}. \qquad (19)$$

В наслідок однорідності рівняння (11) [6]

$$\frac{h_1}{h_k} = \frac{h_2}{h_k} = \ldots = \frac{h_m}{h_k} = 1.$$

Це в свою чергу підтверджує тотожність рівнянь (11) та (13) і як наслідок існування матриці H і рівності – $\alpha = H^{-1}\nu H$. Отже, $\mu_{a_i} = \frac{a_{i\alpha}}{a_{i\nu}} = 1$; $\mu_{\alpha/\nu} = \alpha \cdot \nu^{-1} = 1$; $\mu_f = \frac{e^{\left|\alpha^t\right|}}{e^{\left|\nu^t\right|}} = 1$, а тому виконуються умови (9), що підтверджують подібність матриць ортогональності критеріального програмування та переходів системи рівнянь Колмогорова.

Доведена таким чином подібність дозволяє використати принципи критеріального програмування для перетворення системи рівнянь (2) в поліном, від якого перейти до критеріальної залежності з прийнятим за базис станом ідеальної або нової системи керування.

Критерій якості функціонування АСК

Результатом таких перетворень є критеріальна модель такого виду:

$$d_*(P_*) = \prod_{i=1}^{m} \frac{P_i^{P_i}}{P_{0i}^{P_{0i}}}, \qquad (20)$$

де P_{0i}, P_i – значення імовірності знаходження системи в стані і відповідно перед вводом в експлуатацію і після останнього тестування.

За отриманою критеріальною моделлю якості функціонування можна оцінити реальний стан системи по відношенню до початкового (номінального) її стану. На рисунку 2 побудовані залежності $d_*(P_*)$. Звичайно таких залежностей можна побудувати m (кількість станів), але достатньо побудувати одну відносно імовірності стану, в якому перебуває системи в даний час.

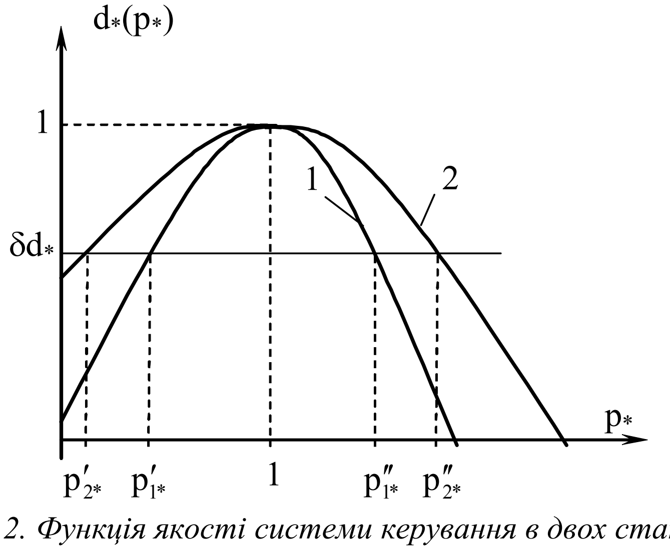

Рис. 2. Функція якості системи керування в двох станах

Використовуючи отримані результати можна визначити критерій якості функціонування, який буде відповідати вимогам [1]. Інтегральний критерій якості функціонування системи визначається як площа S_i, яка обмежена кривою $d_* = f(p_*)$ і прямою $d_* = \delta d_*$:

$$S_i = \int_{p'_{*j}}^{p''_{*j}} \left(d_{*i} \left(p_{*j} \right) \right) dp - \int_{p'_{*j}}^{p''_{*j}} \left(\delta d_* \right) dp .$$

Значення δd_* відповідає межі якості функціонування АСК, за якою система не придатна до виконання своїх функцій або виконує їх з точністю, яка не відповідає вимогам по визначенню вихідного ефекту.

Чим більше значення критерію якості, тим вища функціональна готовність системи. Крім цього, якщо провести аналіз величин S_i, змінюючи незалежні двоїсті змінні (імовірність перебування системи в робочих станах), то можна зробити висновок щодо стратегії подальшого розвитку або перспектив проектування нових систем.

Висновки

Побудова критеріальної моделі якості функціонування розширює можливості під час визначення стану та рівня готовності систем, що функціонують, без врахування економічних показників за критерієм максимуму знаходження в станах задовільної підготовленості системи до виконання своїх функцій.

Аналіз критеріальної моделі якості функціонування дозоляє порівнювати схожі системи не визначаючи техніко-економічних показників. Окрім цього дозволяє розробити економічно доцільну стратегію відновлюваних робіт за станом автоматизованої системи.

1. Кузьмін І.В. Критерії оцінки ефективності, якості та оптимальності складних систем. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – №1(2). – 1994. – С. 5 - 9. 2. Дружинин Г.В. Надежность автоматизированных систем. – М.: Энергия, 1977. – 536 с. 3. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. –М.: Наука, 1977. - 176 с. 4. Астахов Ю.Н., Лежнюк П.Д. Применение критериального метода в электроэнергетике. – К.: УМК ВО, 1989. – 137 с. 5. Лежнюк П.Д., Комар В.О., Томашевський Ю.В. Критеріальне моделювання в задачах оцінки якості функціонування систем // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – №3. – С. 48-52. 6. Веников В.А. Теория подобия и моделирования. – М.: Высшая школа, 1976. – 479 с. 7. Титов Н.Н., Черемисин Н.М. Оценка качества функционирования АСДУ с использованием марковских процессов и критериального моделирования //Вісник Кременчуцького держ. політех. ун-ту. – 2006. – №4. – 147–149. 8. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. - К.: Техніка, 1977. - 768 с. 9. Лежнюк П.Д., Собчук Н.В. Параметрична подібність в задачах оптимізації електричних систем. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 100 с.