# Синтез и анализ Уолша-подобных систем секвентных функций

Анатолий Белецкий
кафедра электроники
Национальный авиационный университет,
Киев, Украина,
abelnau@ukr.net

# Synthesis of Walsh-like systems of sequential functions

Beletsky A. Ya.
Department of Electronics
National Aviation University,
Kiev, Ukraine,
abelnau@ukr.net

## I. Введение

Теория и техника спектрального анализа сигналов ориентирована в основном на сигналы синусоидальных функций. Наряду с ними широкое применение в различных приложениях находят функции (волны) несинусоидальных форм. Типичным примером несинусоидальных волн являются функции Уолша [1], отличительная особенность которых состоит в том, что в пространстве оригиналов на двоично степенном интервале определения от $0$ до $N = 2^n$, где $n -$ натуральное число, функции Уолша принимают кусочно-постоянные значения $+1$ или $-1$, заменой которых соответственно числами $0$ и $1$ переводят системы в пространство изображений.

Спектральный анализ дискретных сигналов в большинстве случаев строится на основе базисов *дискретных экспоненциальных функций*, образуемых временной дискретизацией комплексно-значных гармонических сигналов. Известно, что к базисам быстрого преобразования Фурье (БПФ), предъявляются ряд требований, важнейшие из которых состоят в том, что, во-первых, формы базисных функций преобразования должны быть максимально близкими к формам анализируемых сигналов.

И, во-вторых, базисы должны поддерживать такое быстродействие процессоров БПФ, которое обеспечивает обработку сигналов в реальном времени.

Таким образом, выбор систем базисных функций определяется требованиями удобства вычислений и, в конечном счёте, трудоёмкостью алгоритмов реализации искомого преобразования. Исходя из этих соображений, применение вещественных базисов систем функций Уолша и их расширения — *Уолша-подобных систем секвентных функций*, представляется актуальным и перспективным для цифровой (спектральной) обработки сигналов.

## II. Постановка задачи исследования

Данная работа посвящена построению в пространстве изображений систем дискретных Уолша-подобных (0,1)-секвентных функций (базисов), в которых число нулей и единиц в каждой половине интервала определения совсем не обязательно является одинаковым, как это имеет место в классических системах функций Уолша (за исключением функции, левая половина которой заполнена исключительно нулями, а правая — единицами). Обсуждаются области применения систем секвентных функций.

## III. Изложение основного материала

Сформируем полное множество $\mathbf{\Omega}$ секвентных функций $\boldsymbol{s}_i \in \mathbf{\Omega}$ восьмого порядка, выбранного в качестве примера, включая в состав $\mathbf{\Omega}$ нулевую секвенту $\boldsymbol{s}_0$ и все те секвенты (байты), которые начинаются с нуля, а в оставшихся младших семи разрядах размещаются четыре единицы и три нуля. Количество ненулевых секвент восьмого порядка равно 35, так как определяется числом сочетаний из 7 по 3 и, следовательно, полный набор элементов $\mathbf{\Omega}$, включая нулевой, содержит 36 секвент $\boldsymbol{s}_i$, $i = \overline{0, 35}$, (табл. 1).

Таблица 1. Совокупность секвентных функций восьмого порядка

| № $\boldsymbol{s}_i$ | Номер разряда функции | | | | | | | | № $\boldsymbol{s}_i$ | Номер разряда функции | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 19 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 20 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 21 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 22 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 23 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 24 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 25 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 8 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 26 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 9 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 27 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 28 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 29 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 12 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 30 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 13 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 31 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 14 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 32 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 33 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 16 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 34 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 17 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 35 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Каждая ненулевая секвента, обозначим ее $\hat{\boldsymbol{s}}_k$, $k=\overline{1,35}$, отстоит от секвенты $\boldsymbol{s}_0$ на расстоянии Хэмминга $d=N/2$ и для принятого порядка $N=8$ это расстояние равно четырем. Назовем $\hat{\boldsymbol{s}}_k$ *образующей секвентой* множества $\boldsymbol{\Omega}_k$. В состав каждого множества $\boldsymbol{\Omega}_k$ кроме пары $\boldsymbol{s}_0$ и $\hat{\boldsymbol{s}}_k$ входят все те секвенты $\boldsymbol{s}_i$ из табл. 1, которые отстоят от $\hat{\boldsymbol{s}}_k$ на расстоянии $d(\hat{\boldsymbol{s}}_k,\boldsymbol{s}_i)=4$. Неполный набор множеств $\boldsymbol{\Omega}_k$ с выделенными затенением элементами $\boldsymbol{s}_i\in\boldsymbol{\Omega}_k$ представлен в табл. 2.

Обратим внимание на такие особенности табл. 2. Во-первых, будучи дополненной отсутствующими образующими секвентами $\hat{\boldsymbol{s}}_k$, табл. 2 становится симметричной относительно главной диагонали. Во-вторых, каждый столбец таблицы кроме образующей секвенты $\hat{\boldsymbol{s}}_k$ (светлого диагонального элемента, выделенного жирной рамкой) включает 18 секвент $\boldsymbol{s}_i$, отстоящих от образующего элемента $\hat{\boldsymbol{s}}_k$ на расстоянии Хэмминга, равном четырем. Нулевая секвента $\boldsymbol{s}_0$ для компактности из табл. 2 исключена. И, наконец, в-третьих, полная совокупность столбцов табл. 2 (множеств $\boldsymbol{\Omega}_k$) разбито на 10 непересекающихся подмножеств $\boldsymbol{\Omega}^{[l]}$, $l=\overline{1,10}$, причем $l-$е подмножество включает подряд стоящие столбцы, содержащие одинаковое число $n_l$ секвент, расположенных сверху (или слева), образующей секвенты $\hat{\boldsymbol{s}}_k$. Например, подмножество $\boldsymbol{\Omega}^{[1]}$ порождается секвентами $\hat{\boldsymbol{s}}_k$, $k=\overline{1,5}$, при этом $n_1=1$ (единственная секвента, которая находится над (слева) $\hat{\boldsymbol{s}}_k$, является нулевая секвента $\boldsymbol{s}_0$); второе подмножество $\boldsymbol{\Omega}^{[2]}$ формируют секвенты $\hat{\boldsymbol{s}}_k$, $k=\overline{6,9}$, для которых $n_2=4$ и т. д.

Как показали результаты анализа, все 35 множеств $\boldsymbol{\Omega}_k$, каждое из которых содержит 20 секвент $\boldsymbol{s}_i$, образуют по шесть полных групп $\boldsymbol{G}_{k,\,j}$, $j=\overline{1,6}$, в состав которых входят по восемь эквидистантных секвент $\boldsymbol{s}_i$ и в их числе — нулевая $\boldsymbol{s}_0$ и образующая секвента $\hat{\boldsymbol{s}}_k$.

Введем для совокупностей (множеств) этих шестерок групп восьмого порядка обозначение $\boldsymbol{SF}_k$ (***S****equence* ***F****ull*), полагая $\boldsymbol{SF}_k=\bigcup_{j=1}^{6}\boldsymbol{G}_{k,\,j}$. В табл. 3 показаны выделенные затенением секвенты $\boldsymbol{s}_i$, которые входят в полные группы $\boldsymbol{G}_{k,j}$, $k=\overline{1,5}$, $j=\overline{1,6}$, множеств $\boldsymbol{SF}_k$ подмножества $\boldsymbol{\Omega}^{[1]}$.

30 групп $\boldsymbol{G}_{k,\,j}$, $k=\overline{1,5}$, $j=\overline{1,6}$, табл. 3 составляют *полный набор* групп секвентных эквидистантных байт-функций. Это означает, в частности, что группа функций, образуемая какой угодно секвентой $\hat{\boldsymbol{s}}_m$, $6\le m\le 35$, поглощается одной из групп $\boldsymbol{G}_{k,\,j}$ подмножества $\boldsymbol{\Omega}^{[1]}$.

В приложениях зачастую интересными могут оказаться не сами по себе полные системы (группы) эквидистантных секвентных функций $\boldsymbol{G}_{k,\,j}$, а их некоторые упорядочения, такие, например, как системы функций Уолша, образующие симметричные базисы, используемые для спектрального представления сигналов или решения других задач обработки дискретных сигналов.

Таблица 2. Компоненты множеств $\mathbf{\Omega}_k$

| № $s_i$ | № $k$ множеств $\mathbf{\Omega}_k$ и образующих секвент $\hat{\boldsymbol{s}}_k$ | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
| | $\mathbf{\Omega}^{[1]}$ | | | | | $\mathbf{\Omega}^{[2]}$ | | | | $\mathbf{\Omega}^{[9]}$ | | | $\mathbf{\Omega}^{[10]}$ | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 22 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 25 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 26 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 27 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 28 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 29 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 30 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 31 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 32 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 33 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 34 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 35 | | | | | | | | | | | | | | | | |

Таблица 3. Состав групп $\boldsymbol{G}_{k,j}$, формируемых образующими секвентами подмножества $\mathbf{\Omega}^{[1]}$

| Группа | Секвенты групп | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{G}_{1,j}$ | 0 | 1 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\boldsymbol{G}_{2,j}$ | 0 | 2 | 7 | 8 | 9 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 32 | 33 | 34 |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\boldsymbol{G}_{3,j}$ | 0 | 3 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 15 | 16 | 18 | 19 | 21 | 22 | 25 | 26 | 29 | 30 | 32 | 33 | 35 |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Продолжение табл. 3

| $\boldsymbol{G}_{4,j}$ | 0 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 20 | 22 | 24 | 27 | 29 | 31 | 32 | 34 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\boldsymbol{G}_{5,j}$ | 0 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 16 | 17 | 18 | 20 | 21 | 23 | 28 | 30 | 31 | 33 | 34 | 35 |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

В приложениях зачастую интересными могут оказаться не сами по себе полные системы (группы) эквидистантных секвентных функций $\boldsymbol{G}_{k,\,j}$, а их некоторые упорядочения, такие, например, как системы функций Уолша, образующие симметричные базисы, используемые для спектрального представления сигналов или решения других задач обработки дискретных сигналов.

Ниже обсуждается задача построения (синтеза) симметричных базисов на основе полной совокупности эквидистантных секвент $\boldsymbol{s}_i$, образующих группы $\boldsymbol{G}_{k,\,j}$, исходная последовательность которых (секвент $\boldsymbol{s}_i$) совсем не обязательно представима в виде симметричной матрицы.

Возможны различные подходы к решению поставленной задачи. Конструктивным способом синтеза симметричных базисов является *метод направленного перебора* [2], суть которого кратко поясним на примере синтеза симметричных систем (матриц) секвентных функций восьмого порядка, выбрав из табл. 3 в качестве исходного набора секвент полную группу

$$\boldsymbol{G}_{1,1} = \left\{ \boldsymbol{s}_0, \hat{\boldsymbol{s}}_1, \boldsymbol{s}_{10}, \boldsymbol{s}_{15}, \boldsymbol{s}_{21}, \boldsymbol{s}_{24}, \boldsymbol{s}_{28}, \boldsymbol{s}_{29} \right\}. \qquad (1)$$

В любом симметричном базисе (матрице) секвентных функций в пространстве изображений, обозначим ее (матрицу) через $\boldsymbol{S}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, верхняя строчка матрицы преобразования (базиса) состоит из одних нулей и не может быть переставлена ни на какую другую строчку, так как это приводит к потере симметричности матриц $\boldsymbol{S}_i$. В следующей (первой) строке матрицы $\boldsymbol{S}_i$ может находиться любая из оставшихся базисных функций. Пусть в качестве базисной функция первого порядка выбрана секвента $\hat{\boldsymbol{s}}_1$, в результате чего получим первые две строчки и два столбца матрицы $\boldsymbol{S}_i$. Возможности выбора очередной (второй) строки ограничены условием сохранения симметричности матрицы $\boldsymbol{S}_i$. Для того чтобы это условие соблюсти, из оставшихся базисных функций (1) нужно выбрать только такие, начальные элементы которых совпадают с начальными элементами второй строки, образованной двумя левыми столбцами матрицы $\boldsymbol{S}_i$.

Выполняя указанным способом процедуру синтеза, приходим (как и для варианта классических систем функций Уолша) к полному набору, состоящему из 28 перестановок секвент $\boldsymbol{s}_i$ группы $\boldsymbol{G}_{1,1}$, каждая из которых (перестановок базисных функций) порождает симметричную систему (базис) секвентных функций.

## Выводы

Простота алгоритма синтеза Уолша-подобных симметричных систем (базисов) секвентных функций, высокие скорости спектральной обработки сигналов, обеспечиваемые предлагаемыми базисами, открывают разрабатываемым системам широкую перспективу применения в различных направлениях науки и техники как для целей спектрального анализа дискретных сигналов, так и криптографической защиты информации.

## Література References


[1] Трахтман А. М. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. / А. М. Трахтман, В. А. Трахтман. — М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.

[2] Білецький А. Я. Синтез симетричних матриць Уолша по методу спрямованої перестановки базисних функцій. / А. Я. Білецький, О. А. Білецький, О. Г. Кучер. // Вісник НАУ, Київ, 2001, № 3. – С. 141-146.