Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

С. А. Кирилащук, З. В. Бондаренко В. І. Клочко

ВИЩА МАТЕМАТИКА.
ЧАСТИНА 1.
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Вінниця
ВНТУ
2019

УДК [512.64(075.8)

Н20

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № від 2019 р.

Рецензенти:

О. І. Матяш, доктор педагогічнихl наук, професор (ВДПУ)
В. Х. Касіяненко, доктор фізико-математичних наук, професор
В. Д. Дереч, кандидат математичних наук, професор

Кирилащук, С. А.

Н20 Вища математика. Частина 1. Індивідуальні завдання : навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2019. – 100 с.

Навчальний посібник охоплює матеріал з лінійної алгебри та аналітичної геометрії Кожен розділ посібника містить необхідний теоретичний матеріал (визначення, формули, теореми) і велику кількість детально розібраних прикладів, а також задачі для індивідуального опрацювання.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК [512.64(075.8)

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

П З - 1 . ПОНЯТТЯ МАТРИЦІ. ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ.

Теоретичні відомості

1. Складену з чисел прямокутну таблицю, що містить m рядків і n стовпців, називають **матрицею** розмірності $(m x n)$. Числа, з яких складається матриця, називають **елементами матриці**. Позначають матриці великими літерами латинського алфавіту, а їх елементи – малими літерами з подвійним індексом. Наприклад, a_{ij} – позначення елемента матриці A, який розміщений на перетині i-го рядка та j-го стовпця цієї матриці. Окремі рядки матриці позначають великими літерами латинського алфавіту з індексами: A_1 – перший, A_2 – другий,..., A_n n -й рядок матриці A .

2. Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців і дорівнює n, то таку матрицю називають **квадратною матрицею** n -го порядку.

3. У квадратній матриці n-го порядку елементи з однаковими індексами a_n , a_{22} , a_{33}, … , a_{nm} утворюють **головну діагональ матриці**.

4. Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то її називають **нульовою матрицею** і позначають літерою O.

5. Якщо в квадратній матриці n-го порядку всі елементи, що утворюють головну діагональ, дорівнюють одиниці, а решта рівні нулю, то таку матрицю називають **одиничною матрицею** n-го порядку і позначають літерою E . Наприклад.

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{— одинична матриця третього порядку.}$$

6. Якщо в деякій матриці A розмірністю $(m x n)$ записати всі її рядки стовпцями, зберігаючи порядок, тобто, перший рядок записати першим стовпцем, другий рядок – другим стовпцем і т. д., то отриману матрицю розмірністю $(m x n)$ позначають A^T і називають **транспонованою** до матриці A. Наприклад, якщо

7.

$$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -5 & 6\\ 3 & 0\end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad A^T=\begin{pmatrix}4 & -5 & 3\\ -2 & 6 & 0\end{pmatrix}.$$

8. **Сумою (різницею) двох матриць** A та B однакової розмірності називають матрицю C тієї ж розмірності, кожен елемент якої є сумою (різницею) відповідних елементів матриць A та B: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(c_{ij}=a_{ij}-b_{ij})$.

Приклад 1. Знайти суму і різницю матриць A та B, якщо:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -9 & -2 & 9 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриці A та B мають однакову розмірність (2x3), тому їх можна додавати і віднімати, причому в результаті отримаємо матриці, розмірність яких теж $(2\text{x}3)$. Отже,

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 7+(-9) & -1+(-2) & 5+9 \\ -4+4 & 2+3 & 7+0 \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} -2 & -3 & 14 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$
$$D=A-B=\begin{pmatrix} 7-(-9) & -1-(-2) & 5-9 \\ -4-4 & 2-3 & 7-0 \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} 13 & 1 & -4 \\ -8 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

9. **Добутком числа b на матрицю** A розмірністю $(m\text{x}n)$ називають матрицю bA тією ж розмірністю, кожен елемент якої є добутком
числа b на відповідний елемент матриці A .

Приклад 2. Знайти матрицю (−3A), якщо: $A=\begin{pmatrix} 5 & -0 & 9 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання Оскільки матриця A має розмірність$(2\text{x}3)$, то матриця (−3A) теж матиме розмірність $(2\text{x}3)$. Отже,

$$-3A=\begin{pmatrix} -3\cdot 4 & -3\cdot(-1) & -3\cdot 5 \\ -3\cdot(-3) & -3\cdot 2 & -3\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 3 & -15 \\ 9 & -6 & -21 \end{pmatrix}.$$

10. **Добутком матриці** A розмірністю $(m\text{x}n)$ **на матрицю** B розмірністю $(n\text{x}k)$називають таку матрицю C розмірністю $(m\text{x}k)$, кожен елемент c_{ij} якої дорівнює сумі попарних добутків відповідних елементів *i*-го рядка матриці A та *j*-го стовпця матриці B, тобто для кожного елемента матриці C виконується рівність $c_{ij}=a_{i1}-b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}-b_{nj}$.

Приклад 3. Знайти добуток матриць:

$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 4 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Перевіримо, чи можна перемножувати дані матриці. Їх розмірності $(2x3)$ та $(3x2)$**.** Кількість стовпців матриці А дорівнює кількості рядків матриці В. Отже, дані матриці можна перемножувати. Розмірність добутку АВ $(2x2)$, тому що добуток матиме стільки рядків, скільки рядків має матриця А, і стільки стовпців, скільки стовпців має матриця В. Отже,

$$AB = \begin{pmatrix} 5\cdot 0 + 2\cdot 7 + (-4)\cdot(-9) & 5\cdot 1 + 2\cdot 4 + (-4)\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 2\cdot 7 + 0\cdot(-9) & 1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 50 & 9 \\ 14 & 9 \end{pmatrix}$$

11.**Властивості операцій над матрицями.**

Якщо a, b — числа, а A, B, C— матриці, то:

1) $(A^T)^T = A$; 2) $O+A=A+O=A$;
3) $A+B=B+A$; 4) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
5) $a\cdot(A + B) = aA + aB$; 6) $(a + b)\cdot A = aA + bA$;
7) $0\cdot A=A\cdot 0 =O$; 8) $1\cdot A=A\cdot 1 = A$;
9) $a\cdot O = O$; 10) $a\cdot(AB) = (aA)\cdot B$;
11) $bA = Ab$; 12) $A\cdot(BC)=(AB)\cdot C$;
13) $(A+B)\cdot C=AC+BC$; 14) $A\cdot(B + C) = AB+AC$;
15) $AO = OA = O$; 16) $AE = EA = A$;
17) рівність AB = BA справедлива не завжди.

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Дано матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Знайти:

а) $A+B$; б) $A-B$; в) $2A-3B$;
г) $A+C$; д) $A\cdot B$; е) $A\cdot B^T$;
є) $C\cdot A$; ж) $A^T\cdot B$; з) $B^T\cdot A$.

Відповідь:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 7 & -17 & 12 \\ 0 & 5 & -19 \end{pmatrix}$;

г) не існує; д) не існує; е) $\begin{pmatrix} -20 & 23 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$;

є) $\begin{pmatrix} -3 & 13 & -11 \\ 13 & -5 & 0 \\ 8 & -2 & -1 \\ 9 & -11 & 7 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 11 \\ 6 & -13 & 13 \\ -7 & 11 & -16 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -7 \\ 3 & -13 & 11 \\ 11 & 13 & -16 \end{pmatrix}$.

№ 2. Розв'язати матричні рівняння (знайти матрицю X):

а) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$;

б) $2X - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $8X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -5 & -2 & 6 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 2 & 5 \\ -2 & -13 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} -10 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 7 & -4 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 3. Дано матриці:

$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Перевірити для цих матриць справедливість рівностей:

а) $A + C = C + A$; б) $AB = BA$;
в) $A+(B-C) = (A+B)-C$; г) $B\cdot(A+C) = AB-CB$;
д) $A\cdot(BC)=(AB)\cdot C$; е) $(A-B)\cdot C = AC-BC$;
є) $A\cdot(B-C)=AB-AC$; ж) $(A+C)\cdot B = BA+BC$.

Вказівка: *для доведення* ***рівності*** *матриць слід показати рівність* ***усіх*** *відповідних елементів, а для того, щоб довести, що дві матриці* ***не рівні*** *між собою, досить показати, що* ***хоча б один*** *елемент однієї матриці не дорівнює відповідному елементу другої матриці.*

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ №1-1**; умову і дані відповідного варіанту взяти на сторінці __.

ПЗ-2. ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. МІНОР. АЛГЕБРАЇЧНЕ ДОПОВНЕННЯ. ТЕОРЕМА РОЗКЛАДАННЯ. ТЕОРЕМА АНУЛЮВАННЯ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ.

Теоретичні відомості

1. Нехай дано квадратну матрицю другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Визначником другого порядку називають число, яке позначають одним із символів:

$\det A$; ΔA; $|A|$; $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; $\det(A_1, A_2)$,

і обчислюють за формулою:

$$\det A = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\, a_{21}. \qquad (1)$$

Інколи замість терміну «визначник» вживають термін «детермінант».

2. Для запам'ятовування формули (1) користуються таким **мнемонічним правилом:**

а) перемножують між собою пари елементів, які з'єднані однією лінією *(див. схему);*

б) від першого добутку віднімають другий.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3. Нехай дано матрицю третього порядку $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Визначником третього порядку називають число, яке позначають одним із символів:

$$\det A; \quad \Delta A; \quad |A|; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \det(A_1, A_2, A_3),$$

і обчислюють за формулою:

$$\det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - \\ - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} \qquad (2)$$

4. Для запам'ятовування формули (2) користуються так званим **правилом трикутників:**

а) перемножують між собою кожні три елементи, з'єднані однією прямою чи замкненою ламаною лінією *(див. схему);*

б) додають між собою добутки, отримані з однієї схеми;

в) від числа, отриманого за першою схемою, віднімають число, отримане за другою схемою.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5. Для запам'ятовування формули (2) користуються ще й таким **мнемонічним правилом:**

а) до даної матриці дописують ще раз її перший та другий стовпці *(див. схему);*

б) перемножують між собою кожні три елементи, з'єднані однією лінією;

в) додають між собою добутки, отримані з однієї схеми;

г) від числа, отриманого за першою схемою, віднімають число, отримане за другою схемою.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \; - \; \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Приклад 1.Знайти визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

Розв'язання. За формулою (1) матимемо:

$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1) - 6\cdot(-3) = -4 + 18 = 14.$

Приклад 2. Знайти визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв 'язання. За формулою (2) матимемо:

detA$= \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot(-1) + (-2)\cdot4\cdot3 + 3\cdot(-4)\cdot2 - 3\cdot5\cdot3 - (-2)\cdot(-4)\cdot(-1) - 2\cdot4\cdot2 = -10-24-24-45+8-16 = -111.$

6**. Властивості визначників**.

1) $\mathbf{\det A = \det A^{т}}$. Звідси випливає, що будь-яка властивість, що справедлива для рядків визначника, справедлива і для його стовпців.

2) Визначник, що містить рядок, **всі елементи якого рівні нулю**, теж дорівнює нулю.

3) Визначник, що містить **два однакові рядки,** дорівнює нулю.

4) Якщо **поміняти місцями будь-які два сусідні рядки**, то знак визначника зміниться на протилежний.

5) **Спільний множник елементів одного рядка** можна винести за знак визначника.

6) Визначник не зміниться, якщо **до елементів одного рядка додати елементи іншого рядка, помножені на довільне однакове число**.

7. **Мінором** елемента a_{ij} квадратної матриці A n-го порядку називають визначник квадратної матриці (n-1)-го порядку, яку отримують з матриці A викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця (рядка і стовпця, на перетині яких розміщений елемент a_{ij}). Позначають мінор елемента a_{ij} символом M_{ij}.

8. **Алгебраїчним доповненням A_{ij}** елемента a_{ij} квадратної матриці A називають мінор цього елемента, помножений на коефіцієнт $(-1)^{i+j}$, тобто

9 . $A_{ij} = (-1)^{i+j} - M_{ij}$.

Приклад 3. Знайти мінор M_{23} та алгебраїчне доповнення A_{23} матриці

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Знайдемо квадратну матрицю B 2-го порядку, викресливши 2-й рядок і 3-й стовпець у матриці A.

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & \cancel{3} \\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{4} \\ 3 & -5 & \cancel{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

За формулою (1) знайдемо визначник матриці B. Це й буде шуканий мінор:

$$M_{23} = \det B = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-5) - (-2) \cdot 3 = -24$$

За означенням алгебраїчного доповнення:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot M_{23} = (-1) \cdot -24 = 24$$

Приклад 4 **.** Знайти мінор M_{21} та алгебраїчне доповнення A_{21} матриці

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Викресливши в матриці A 2-й рядок і 1-й стовпець, отримаємо шуканий мінор:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} \cancel{-5} & -7 \\ \cancel{3} & \cancel{2} \end{vmatrix} = -7.$$

За означенням алгебраїчного доповнення:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot M_{21} = (-1) \cdot (-7) = -7.$$

10.**Теорема розкладання**. Величина визначника дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого його рядка (або стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Приклад 5. Знайти визначник $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами 3-го стовпця.

Розв'язання. За теоремою розкладання матимемо:

$$\det A = 3 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-1) \cdot A_{33}. \qquad (3)$$

Знайдемо потрібні алгебраїчні доповнення:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 2 - 5 \cdot 3 = -8 - 15 = -23;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -6\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-\ (3\cdot 2-\ (-6)\cdot 3)=-\ (6+18)=-24;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -6\\ -4 & 5\end{vmatrix}=3\cdot 5-\ (-6)\cdot(-4)=15-24=-9.$$

Підставивши отримані значення в рівність (3), одержимо шуканий результат:

$$\det A = 3\cdot(-23) + 4\cdot(-24) + (-1)\cdot(-9) = -156.$$

11. Теорема розкладання дає можливість обчислювати **визначники будь-якого порядку.** Дійсно, за цією теоремою визначник n-го порядку можна подати через алгебраїчні доповнення його елементів, тобто через визначники (n-1)-го порядку, а кожен з них, в свою чергу, через визначники (n-2) - го порядку і т. д. – аж до визначників третього порядку, обчислити які вже не важко.

11. **Теорема анулювання**. Сума попарних добутків елементів будь-якого рядка (або стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (або стовпця) цієї матриці дорівнює нулю.

12. Матрицю A^{-1} називають **оберненою до матриці** A, якщо виконується рівність

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E.$$

13. Квадратну матрицю називають **невиродженою або неособливою**, якщо її визначник не дорівнює нулю.

14. Для будь-якої невиродженої матриці **існує єдина** обернена матриця.

15. Квадратну матрицю $\tilde{A}$, кожен елемент якої є алгебраїчним доповненням відповідного елемента матриці A, називають **сполучною** або **доповняльною матрицею** матриці A.

16. Матрицю A^{-1}, **обернену до матриці** A, знаходять за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}, \qquad (4)$$

де A_{ij}— алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A. Формулу (4) можна записати так:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot(\tilde{A})^{T}, \qquad (5)$$

де $\tilde{A}$ — доповняльна матриця матриці A.

***Приклад** 6*. Знайти A^{-1} , якщо $A=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Виконати перевірку.

Розв'язання. За формулою (1):

$$\det A=\begin{vmatrix}6 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=24-6=18\neq 0.$$

Визначник не дорівнює нулю, тому дана матриця невироджена і для неї існує обернена матриця.

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$A_{11}=4$; $\quad A_{12}=(-1)\cdot 3=-3$;

$A_{21}=(-1)\cdot 2=-2$; $\quad A_{22}=6$.

Сполучна матриця:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 6\end{pmatrix}.$$

За формулою (5) матимемо:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 6\end{pmatrix}^{T}=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A^{-1}=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}.$$

Перевірка. Знайдемо добуток матриць A^{-1} та A**:**

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}4\cdot 6-2\cdot 3 & 4\cdot 2-2\cdot 4\\ -3\cdot 6+6\cdot 3 & -3\cdot 2+6\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}18 & 0\\ 0 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Ми отримали одиничну матрицю, отже**,** A^{-1}знайдено вірно.

***Приклад* 7.** Знайти A^{-1}та виконати перевірку, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 3 & -3 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. За формулою (2):

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 3 & -3 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-3+0+18-9-0-12=-6\neq 0.$$

Визначник не дорівнює нулю, тому дана матриця невироджена для неї існує обернена матриця.

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A :

$A_{11}=\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3$; $\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-3$; $\quad A_{13}=\begin{vmatrix}3 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3$;

$A_{21}= -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$; $A_{23}= -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$;

$A_{31}= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 9$; $A_{32}= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9$; $A_{33}= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -15$;

За формулою (4) матимемо:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 & 9 \\ -3 & 4 & 9 \\ 3 & -6 & -15 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 & -9 \\ 3 & -4 & -9 \\ -3 & 6 & 15 \end{pmatrix}.$$

Перевірка. Знайдемо добуток матриць A^{-1} та A**:**

$$A^{-1}\cdot A = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 & -9 \\ 3 & -4 & -9 \\ -3 & 6 & 15 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\cdot1-2\cdot3-9\cdot(-1) & 3\cdot4-2\cdot(-3)-9\cdot2 & 3\cdot3-2\cdot0-9\cdot1 \\ 3\cdot1-4\cdot3-9\cdot(-1) & 3\cdot4-4\cdot(-3)-9\cdot2 & 3\cdot3-4\cdot0-9\cdot1 \\ -3\cdot1+6\cdot3+15\cdot(-1) & -3\cdot4+6\cdot(-3)+15\cdot2 & -3\cdot3+6\cdot0+15\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Ми отримали одиничну матрицю, отже, A^{-1} знайдено вірно.

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Знайти визначники матриць:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Вказівка: е)*попередньо за знак визначника винести спільний множник елементів третього стовпця матриці.*

Відповідь: а) $\Delta = 11$; б) $\Delta = -2$; в) $\Delta = -7$;
г) $\Delta = -40$; д) $\Delta = -1$; е) $\Delta = 2\cdot21 = 42$.

№ 2. Відомо, що A — квадратна матриця 3-го порядку, а B – квадратна матриця 2-го порядку, причому $\det A = 5$, а $\det B = 3$.

Знайти:

а) $\Delta = \det(2A)$; б) $\Delta = \det(-5B)$; в) $\Delta = \det(-3A)$.

Відповідь: а) $\Delta=40$; б) $\Delta=75$; в) $\Delta=-135$.

№ 3. Дано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Потрібно:

1) знайти визначник матриці A безпосереднім обчисленням і розкладанням його за елементами 2-го рядка, порівняти результати;

2) знайти визначник матриці B безпосереднім обчисленням і розкладанням його за елементами 3-го стовпця, порівняти результати;

3) використовуючи знайдені алгебраїчні доповнення, перевірити для матриць A і B виконання теореми анулювання;

4) перевірити виконання рівностей:

а) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$;

б) $\det(A + B) = \det A + \det B$;

в) $\det(A^{T}) = \det A$.

Відповідь: $\det A = -30$; $\det B = 35$.

№ 4. Знайти матриці, обернені до даних, і виконати перевірку:

а) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: ------а) $-\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 10 & 17 & -11 \\ 11 & -16 & 13 \\ 8 & -10 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ -2 & -2 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

№ 5. Обчислити визначники матриць:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;   б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ -2 & -4 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Вказівки:а) *виконуючи лінійні операції над рядками матриці, утворити в одному рядку три нулі, а потім розкласти визначник за елементами цього рядка (можна зробити це зі стовпцями);*

б) *виконуючи лінійні операції над рядками матриці, можна утворити рядок, всі елементи якого дорівнюють нулю, а потім скористатися властивостями визначників (див. п.6(2));можна так само використати стовпці матриці.*

Відповідь: а) $\Delta = -87$; б) $\Delta = 0$.

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ № 1 - 2;** умову і дані відповідного варіанту взяти на сторінці__.

ПЗ-3. МАТРИЧНИЙ ЗАПИС СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ. ФОРМУЛИ КРАМЕРА. МЕТОД ГАУССА. МЕТОД ЖОРДАНО-ГАУССА.

Теоретичні відомості

1. Систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

можна записати у вигляді матричної рівності

$$A \cdot X = B, \qquad (1)$$

де A — квадратна матриця n-го порядку, складена з коефіцієнтів при невідомих (її називають матрицею системи);

X – матриця розмірності $(n x 1)$, складена з невідомих;

B – матриця розмірності (nx1) , складена з вільних членів. Тобто:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix};$$

2. Розв'язати систему − означає знайти такі значення невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які одночасно перетворюють в істинні рівності всі рівняння системи. Це те ж саме, що й знайти невідому матрицю X, яка перетворює в істинну рівність матричне рівняння (1).

3. Систему лінійних рівнянь називають **невиродженою,** якщо матриця системи невироджена, тобто det A $\neq 0$.

4. Невироджена система лінійних рівнянь **має єдиний розв'язок**.

5. Розв'язок невиродженої системи лінійних рівнянь, записаної у вигляді матричного рівняння (1), знаходять за формулою:

$$X = A^{-1} \cdot B, \tag{2}$$

де A^{-1} — матриця, обернена до матриці A .

Приклад *1.*Записати в матричній формі і розв'язати за допомогою оберненої матриці систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 10z = 10, \\ x - 3y + 3z = 4, \\ -2x + y + z = -5. \end{cases} \tag{3}$$

Розв'язання. Запишемо систему (3) у вигляді матричної рівності

$$A \cdot X = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -10 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix};$$

Визначник матриці A

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -10 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12-12-10+60-12-2=12\neq 0,$$

тому система рівнянь невироджена і має єдиний розв'язок.

Знайдемо матрицю A^{-1}, обернену до матриці A. Для цього обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A *(див.ПЗ-2,* ***,*** *пп.7, 8)*:

$A_{11}=\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-6$; $A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-7$; $A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-5$;

$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -10\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-12$;$A_{22}=\begin{vmatrix}4 & -10\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-16$;$A_{23}=-\begin{vmatrix}4 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-8$

$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -10\\ -3 & 3\end{vmatrix}=-24$;$A_{32}=-\begin{vmatrix}4 & -10\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-22$; $A_{33}=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-14.$

Тоді *(див. ПЗ-2, п.16)*матриця, обернена до матриці A , така:

$$A^{-1}=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}-6 & -12 & -24\\ -7 & -16 & -22\\ -5 & -8 & -14\end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}6 & 12 & 24\\ 7 & 16 & 22\\ 5 & 8 & 14\end{pmatrix}.$$

Підставивши A і B в формулу (2), отримаємо:

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}6 & 12 & 24\\ 7 & 16 & 22\\ 5 & 8 & 14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\ 4\\ -5\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}6\cdot 10+12\cdot 4+24\cdot(-5)\\ 7\cdot 10+16\cdot 4+22\cdot(-5)\\ 5\cdot 10+8\cdot 4+14\cdot(-5)\end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}-12\\ 24\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}\text{ або }\begin{cases}x=1,\\ y=-2,\\ z=-1.\end{cases}$$

Перевірка. Підставимо знайдені значення змінних в усі рівняння системи (3):

$$\begin{cases}2\cdot 1-2-5\cdot(-1)=5,\\ 1-3\cdot(-2)+3\cdot(-1)=4,\\ -2\cdot 1-2-1=5.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5=5,\\ 4=4,\\ -5=-5.\end{cases}$$

Отримані рівності істинні, тому систему розв'язано вірно.

6. Нехай систему лінійних рівнянь (1) записано у вигляді матричної рівності (2). Позначимо:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Утворимо визначник Δ_1, замінивши у визначнику Δ перший стовпець, на стовпець вільних членів (матрицю B), тобто:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Аналогічно, замінюючи на стовпець вільних членів послідовно 2-й, 3-й, ... , n-й стовпець визначника Δ, утворимо визначники $\Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$.

Розв'язок системи лінійних рівнянь знаходять за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \ldots ; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}; \tag{4}$$

які називають **формулами Крамера.**

7. ***Зауваження.*** *Формули Крамера можна застосовувати для розв'язування лише для невироджених систем лінійних рівнянь (необхідно, щоб виконувалась умова* $\Delta = det\mathrm{A} \neq 0$).

Приклад *2.*За формулами Крамера розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 10z = 10, \\ x - 3y + 3z = 4, \\ -2x + y + z = -5. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник матриці цієї системи рівнянь:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -10 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-12-12-10+60-12-2=12\neq 0$$

$\Delta \neq 0$, тому система рівнянь невироджена і її можна розв'язувати за формулами Крамера.

Замінюючи послідовно стовпці визначника Δ на стовпець вільних членів, утворимо і обчислимо такі визначники:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 10 & 2 & -10 \\ 4 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-30-30-40+150-30-8=12;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}4 & 10 & -5\\ 1 & 4 & 3\\ -2 & -5 & 1\end{vmatrix}=16-60+50-80+60-10=-24;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}4 & 2 & 10\\ 1 & -3 & 4\\ -2 & 1 & -5\end{vmatrix}=60-16+10-60-16+10=-12.$$

За формулами Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{12}{12}=1;\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-24}{12}=-2;\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-12}{12}=-1.$$

Отже, шуканий розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x=\ \ 1,\\ y=-2,\\ z=-1.\end{cases}$$

Перевірка. *Див. приклад 1.*

8. Систему лінійних рівнянь можна записувати у вигляді **розширеної матриці:**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n\end{array}\right). \qquad (5)$$

9. Нехай систему лінійних рівнянь записано у вигляді розширеної матриці (5). Розв'язання цієї системи рівнянь **методом Гаусса** складається з двох частин:

1) **прямий хід**: розширену матрицю (5) шляхом послідовного виконання лінійних операцій над її рядкам (тобто послідовного виконання операції додавання до одного рядка матриці іншого рядка, помноженого на певне число) зводять до вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} & b'_1\\ 0 & 1 & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a'_{3n} & b'_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n\end{array}\right) \qquad (6)$$

2) **зворотний хід**: від розширеної матриці (6) переходять до відповідної системи рівнянь:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1} + a'_{12}\boldsymbol{x_2} + a'_{13}\boldsymbol{x_3} + \cdots + a'_{1n}\boldsymbol{x_n} = b'_1 \\ \boldsymbol{x_2} + a'_{23}\boldsymbol{x_3} + \cdots + a'_{2n}\boldsymbol{x_n} = b'_2 \\ \boldsymbol{x_3} + \cdots + a'_{3n}\boldsymbol{x_n} = b'_3 \\ \cdots\ \cdots \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \boldsymbol{x_n} = b'_n \end{cases} \qquad (7)$$

Останнє рівняння системи (7) дає значення змінної x_n; підставляючи це значення в передостаннє рівняння знаходять x_{n-1}; продовжуючи цей процес, поступово знаходять значення всіх невідомих.

10**. Метод Жордано-Гаусса** розв'язування систем лінійних рівнянь полягає в тому, що прямий хід методу Гаусса продовжують до тих пір, доки розширена матриця (5) системи рівнянь не набуде вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b''_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b''_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b''_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b''_n \end{array}\right) \qquad (8)$$

В розширеній матриці (8) ліворуч від вертикальної лінії записано одиничну матрицю, а в останньому стовпці — розв'язок системи рівнянь.

11. ***Зауваження.*** *Методи Гаусса та Жордано - Гаусса зручно застосовувати тоді, коли в системі рівнянь велика кількість невідомих і застосування інших методів веде до дуже громіздких обчислень. Методи Гаусса та Жордано - Гаусса можна застосовувати для розв'язування* ***вироджених*** *систем лінійних рівнянь.*

Приклад3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + y - 5z = 5, \\ x - 3y + 3z = 4, \\ -2x + y + z = -5. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

Слід зробити так, щоб на місці елемента a_{11} знаходилась одиниця. Для цього поміняємо місцями перший і другий рядок:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -5 & 5\\ 1 & -3 & 3 & 4\\ -2 & 1 & 1 & -5\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -5 & 5\\ -2 & 1 & 1 & -5\end{array}\right).$$

Утворимо нулі на місці елементів a_{21} та a_{31}. Для цього помножимо перший рядок на (-2) і додамо його до другого рядка; помножимо перший рядок на 2 і додамо його до третього рядка:

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -5 & 5\\ -2 & 1 & 1 & -5\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}-2\ 2\\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 3 & 4\\ 0 & -3\cdot(-2)+1 & -3\cdot(-2)-5 & 4\cdot(-2)+5\\ 0 & -3\cdot 2+1 & 3\cdot 2+1 & 4\cdot 2-5\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 3 & 4\\ 0 & 7 & -11 & -3\\ 0 & -5 & 7 & 3\end{array}\right).$$

Утворимо одиницю на місці елемента a_{22}. Для цього помножимо другий рядок на (-2), а третій рядок – на (-3) і додамо їх. Отриману суму залишимо на місці другого рядка, а третій рядок залишимо без змін:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 3 & 4\\ 0 & 7 & -11 & -3\\ 0 & -5 & 7 & 3\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\\ -3\end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & -5 & 7 & 3\end{array}\right).$$

Утворимо нуль на місці елемента a_{32}. Для цього помножимо другий рядок на 5 і додамо його до третього рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & -5 & 7 & 3\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 5\\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 12 & -12\end{array}\right).$$

Помноживши третій рядок на $\frac{1}{12}$, утворимо одиницю на місці елемента a_{33}:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 12 & -12\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{12}\end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right).$$

Прямий хід методу Гаусса завершено. Запишемо систему рівнянь, яка відповідає отриманій розширеній матриці:

$$\begin{cases} x - 3y + 3z = 4, \\ y + z = -3, \\ z = -1. \end{cases}$$

З третього рівняння $z = -1$. Підставимо це значення в друге рівняння і знайдемо у:

$$y - 1 = -3,$$
$$y = -2.$$

Підставимо знайдені значення у та zу перше рівняння і знайдемо х :

$$x - 3\cdot(-2) + 3\cdot(-1) = 4,$$
$$x = 1.$$

Отже, шуканий розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -2, \\ z = -1. \end{cases}$$

Перевірка. Підставимо знайдені значення змінних в усі рівняння системи :

$$\begin{cases} 2\cdot 1 - 2 - 5\cdot(-1) = 5, \\ 1 - 3\cdot(-2) + 3\cdot(-1) = 4, \\ -2\cdot 1 - 2 - 1 = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5, \\ 4 = 4, \\ -5 = -5. \end{cases}$$

Отримані рівності істинні, тому систему розв'язано вірно.

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Жордано-Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + y - 5z = 5, \\ x - 3y + 3z = 4, \\ -2x + y + z = -5\,. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

Виконуючи лінійні операції над рядками цієї матриці *(див. приклад 3.)*, матимемо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -2\;\;2 \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&3&4\\0&7&-11&-3\\0&-5&7&3\end{array}\right)\begin{array}{c}\\-2\\-3\end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&3&4\\0&7&-11&-3\\0&-5&7&3\end{array}\right)\begin{array}{c}\\5\\ \\ \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&3&4\\0&1&1&-3\\0&0&12&-12\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ \frac{1}{12}\end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&3&4\\0&1&1&-3\\0&0&1&-1\end{array}\right).$$

Утворимо нулі на місці елементів a_{23} та a_{13}. Для цього помножимо третій рядок на (-1) і додамо його до другого рядка; помножимо третій рядок на (-3) і додамо його до першого рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&3&4\\0&1&1&-3\\0&0&1&-1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ -1\;-3\end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-1\end{array}\right).$$

Утворимо нуль на місці елемента a_{13}. Для цього помножимо другий рядок на 3 і додамо його до першого рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&0&7\\0&1&0&-2\\0&0&1&-1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\3\\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-1\end{array}\right).$$

Ліворуч від вертикальної лінії утворилася одинична матриця, тому праворуч — шуканий розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -2, \\ z = -1. \end{cases}$$

Перевірка. Підставимо знайдені значення змінних в усі рівняння системи :

$$\begin{cases} 2\cdot 1 - 2 - 5\cdot(-1) = 5, \\ 1 - 3\cdot(-2) + 3\cdot(-1) = 4, \\ -2\cdot 1 - 2 - 1 = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5, \\ 4 = 4, \\ -5 = -5. \end{cases}$$

Отримані рівності істинні, тому систему розв'язано вірно.

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Записати задані системи лінійних рівнянь у матричній формі і розв'язати їх за допомогою оберненої матриці:

а) $\begin{cases} 4x + 6y = 2, \\ 3x - y = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 6y = 4, \\ 4x - 6y = 14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x + 3y - z = 2, \\ 3x - y + z = -5, \\ 2x + 3y - 4z = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1, \\ x - 2y + 4z = 2, \\ 3x + 2y + 3z = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 3, \\ 2x + 4y + 3z = 4, \\ 5x + 2y - 2г = -1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x + 2y - z = -4, \\ x - 2y + 3z = 2, \\ 2x + y + 3z = 3. \end{cases}$

Відповідь: а)$(-1;1)$; б)$(2;-1)$; в)$(-1;2;0)$; г)$(0;\ 1;\ 1)$; д)$(1;-1;2)$; е)$(-2;1;2)$.

№ 2. Розв'язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 5y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 4y = -7, \\ x - 3y = -9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y - 2z = 7, \\ 2x + 3z = 0, \\ 3x + 6y + 4z = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + y + 3z = 2, \\ 2x - y + 5z = 3. \end{cases}$

Відповідь: а)$(2;-1)$; б)$(-3;2)$; в)$(3;0;-2)$; г) $(-1;0;1)$.

№ 3. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x + 10y = -2, \\ 3x + 7y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 4y + 3z = 1, \\ 3x + 2y - 5z = 3, \\ 2x + 4y - 3z = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x - 3y + 3z - 2к = 0, \\ 3x + 2y + 3z + 4к = 3, \\ x + 3y - 5г + 3к = 4, \\ 2x - 2y + 5z - 5к = 3. \end{cases}$

Відповідь: а)$(4;-1)$; б)$(2;1;1)$; в) $(1;2;0;-1)$.

№ 4.Розв'язати задані системи лінійних рівнянь методом Жордано -Гаусса:

а) $\begin{cases} x - 3y = 3, \\ 2x - 5y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2, \\ x - 2y + 4z = 3 \\ -2x + 2y + 3z = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + 4y - 3z + 4к = 7, \\ x + 2y + 5z + 2k = 3, \\ 4x + 3y - 4z + 2k = 5, \\ 3x + 2y + 7z = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 7y + 3z + 2к = 3, \\ 3x + 4y - z + 5k = 3, \\ 2x + 5y - 3z + 4k = 1, \\ x + 5y - 2z + 4k = 4. \end{cases}$

Відповідь: а) $(-3; -2)$; б) $(3; 2; 1)$; в)$(1; -1; 0; 2)$; г)$(-2; 0; 1; 2)$.

№5. Три КСП продавали свою продукцію державі за однаковими цінами. КСП «Перемога» продало 550 т. пшениці, 4800 т. цукрових буряків і 300 т. ячменю за 307 тисяч гривень; КСП«Прогрес» - 500т пшениці, 5000т цукрових буряків і 600т ячменю за 344тисячігривень; КСП «Зоряне» - 500 т пшениці, 4500 т цукрових буряків і 400т ячменю за 323 тисячі гривень.

Скласти математичну модель ситуації у вигляді системи лінійних рівнянь і, розв'язавши її, знайти ціни на вказану сільськогосподарську продукцію.

Відповідь:ціна:
на пшеницю— 220 гривень за тонну;
на цукрові буряки— 30 гривень за тонну;
на ячмінь— 140 гривень за тонну.

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ №1-3;** умову і дані відповідного варіанту взяти на сторінці ___.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

ІЗ № 1-1

Дано матриці А, В та С. Потрібно:
1) знайти: а) $A + C^т$, б) $2C-3A$, в) AC,
г) CA, д) CB, е) $B-CB$;
2) розв'язати рівняння $AB + X=3B$ (знайти матрицю X).

ІЗ№ 1-2

Дано матриці A і C. Знайти:

1)detA методом безпосереднього обчислення;

2)M_{32} матриці A ;

3)A_{21} матриці C;

4)detC, розклавши його за елементами другого стовпця;

5)$\det A^{т}$, розклавши його за елементами третього рядка;

6)C^{-1} (виконати перевірку).

ІЗ № 1-3

Дано матриці A та B. Нехай X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Розв'язати систему лінійних рівнянь, записану в матричній формі AX = B:

1)за допомогою оберненої матриці:

2)за формулами Крамера;

3)методом Гаусса;

4)методом Жордано-Гаусса.

1. A= $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, B =$\begin{pmatrix} 24 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, B =$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, B =$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, B =$\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, B =$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

6. A= $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, B =$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

7. A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8. A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

9. A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 9 \\ 8 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

10. A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

11. A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

12. A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

13. A= $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

14. A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

15. A= $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

16. A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 5 & 9 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

17. A= $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 4 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 9\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & -5\\ 2 & 7 & -1\\ 2 & -7 & 2\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ -5\\ -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 6 & -2 & 1\\ 3 & 3 & -2\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\ 8\\ -2\end{pmatrix}$, $C=\left(\begin{pmatrix}2 & -2 & -3\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}.\right)$.

21. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 5 & -2 & 1\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\ 2\\ -6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 6 & 1 & -3\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ -3\\ -7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 6\\ 4 & 3 & -5\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\ -9\\ 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 6\\ 5 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -3\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -4\\ 1 & 3 & 4\\ 7 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ -5\\ 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 1\\ 5 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ 3 & -2 & 0\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

26. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -5\\ 3 & -3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\ -3\\ 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ 5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-9\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7 & 0 & -2\\ 3 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}7 & 5 & -1\\ 2 & -3 & -2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ 0 & 4 & -3\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ 6 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\ 5\\ -7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -4 & 1\\ 7 & -1 & 5\\ 4 & 5 & -4\end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -5\\ 5 & 3 & 1\\ 2 & 7 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -3\\ 5 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ РОЗДІЛУ 1

ІЗ № 1-1

Дано матриці A, B та C. Потрібно:
1) знайти: а) $A + C^т$, б) $2C-3A$, в) AC,
г) CA, д) CB, е) $B-CB$;
2) розв'язати рівняння $AB + X = 3B$ (знайти матрицю X)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\ 5\\ 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1) а) Транспонуємо матрицю C , тобто замінимо її рядки стовпцями, зберігаючи порядок *(див. ПЗ-1, п.6)*Матимемо:
2)

$$C^т=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 6\end{pmatrix}.$$

За правилом додавання матриць *(див. ПЗ-1,п. 7):*

$$A+C^т=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 6\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1+1 & 2+1 & -3+0\\ 2-1 & -1+0 & 4-1\\ 3+2 & 1-3 & -1+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -3\\ 1 & -1 & 3\\ 5 & -2 & 5\end{pmatrix}.$$

б) За правилом множення матриці на число *(див. ПЗ-1,п. 8)*знаходимо:

$$2C = 2\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 2 & -1\cdot 2 & 2\cdot 2\\ 1\cdot 2 & 0\cdot 2 & -3\cdot 2\\ 0\cdot 2 & -1\cdot 2 & 6\cdot 2\end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\ 2 & 0 & -6\\ 0 & -2 & 12\end{pmatrix};$$

$$-3A = -3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 6 & 9\\ -6 & 3 & -12\\ -9 & -3 & 3\end{pmatrix};$$

За правилом додавання матриць *(див. ПЗ-1,п.* 7):

$$2C-3A = 2C+(-3A)= \begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\ 2 & 0 & -6\\ 0 & -2 & 12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3 & 6 & 9\\ -6 & 3 & -12\\ -9 & -3 & 3\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2-3 & -2+6 & 4+9\\ 2-6 & 0+3 & -6-12\\ 0-9 & -2-3 & 12+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 4 & 13\\ -4 & 3 & -18\\ -9 & -5 & 15\end{pmatrix}.$$

в) Матриці A і C мають розмірність (3x3), тому їх можна перемножувати (кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці C). Добуток цих матриць теж матиме розмірність (3x3) (*див. ПЗ-1,п. 9)*. За правилом множення матриць знаходимо:

$$AC = \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 1-3\cdot 0 & 1\cdot(-1)+2\cdot 0-3\cdot(-1) & 1\cdot 2+2\cdot(-3)-3\cdot 6\\ 2\cdot 1-1\cdot 1+4\cdot 0 & 2\cdot(-1)-1\cdot 0+4\cdot(-1) & 2\cdot 2-1\cdot(-3)+4\cdot 6\\ 3\cdot 1+1\cdot 1-1\cdot 0 & 3\cdot(-1)+1\cdot 0-1\cdot(-1) & 3\cdot 2+1\cdot(-3)-1\cdot 6\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3 & 2 & -22\\ 1 & -6 & 31\\ 4 & -2 & -3\end{pmatrix}.$$

г)Аналогічно розв'язанню попереднього пункту знаходимо:

$$CA = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 5 & -9\\ -8 & -1 & 0\\ 16 & 7 & -10\end{pmatrix}.$$

д) Матриці С і В мають розмірності (3х3) та (1х1), тому їх можна перемножувати (кількість стовпців матриці С дорівнює кількості рядків матриці В). Добуток цих матриць матиме розмірність(3х1), оскільки він містить стільки рядків, скільки й матриця С, і стільки стовпців, скільки має матриця В*(див.ПЗ-1, п 9).*

За правилами множення матриць знаходимо:

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 1\cdot 5 + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 5 - 3\cdot 2 \\ 0\cdot 0 - 1\cdot 5 + 6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

е) Використавши знайдену в попередньому пункті матрицю СВ, за правилами множення матриці на число знаходимо:

$$-CB = -1 \cdot CB = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Матриці В і $(-CB)$ однакової розмірності, тому їх можна додавати. Матимемо:

$$B - CB = B + (-CB) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 5-6 \\ 2+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

3) $AB + X = 3B$, тому $X = 3B - AB$.

Користуючись правилами виконання операцій над матрицями, знайдемо:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 5 - 3\cdot 2 \\ 2\cdot 0 - 1\cdot 5 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 0 + 1\cdot 5 - 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$3B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Тоді шуканий розв'язок рівняння:

$$X = 3B - AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 15-3 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

ІЗ № 1 – 2

Див. приклади, розглянуті в теоретичних відомостях до ПЗ-2:

1) ***приклад 2 ;***

2), 3) ***приклад 3 ;***
4), 5) ***приклад 5 ;***
6) ***приклад* 7.**

ІЗ № 1-3

Див. приклади, розглянуті в теоретичних відомостях до ПЗ-2:
1)***приклад 1 ;***
2)***приклад 2 ;***
3)***приклад 3 ;***
4)***приклад 4 .***

РОЗДІЛ 2

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

ПЗ-1. ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА. ВИДИ ВЕКТОРІВ. ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ. БАЗИС СИСТЕМИ ВЕКТОРІВ. ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТНІЙ ФОРМІ.

Теоретичні відомості

1. **Вектором** називають напрямлений відрізок. Позначають вектори одним із символів $\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{CD}$, $\vec{a}$, $\mathbf{b}$. Якщо точка А є початком вектора, а точка В — його кінцем, то такий вектор позначають $\overrightarrow{AB}$ або $\mathbf{AB}$.

2.Довжину напрямленого відрізка називають **довжиною вектора** або **модулем вектора** і позначають одним із символів $|\overrightarrow{AB}|$, $|\mathbf{CD}|$, $|\vec{a}|$, $|\mathbf{b}|$.

3.Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ **рівні** між собою тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову довжину і однаковий напрям. В такому випадку записують $\vec{a}=\vec{b}$.

4. Вектор, початок і кінець якого співпадають, називають **нульовим вектором** і позначають одним із символів: $\vec{0}$, $\mathbf{0}$, $\overrightarrow{AA}$, $\mathbf{AA}$. Очевидно, що $|\vec{0}|=0$.

5. Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають однаковий напрям, то їх називають **співнапрямленими** і позначають цей факт так: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. Кут між співнапрямленими векторами дорівнює 0°. Вважають, що нульовий вектор співнапрямлений з будь-яким іншим вектором.

6. Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають протилежний напрям, то їх називають **протилежно напрямленими** і позначають цей факт так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює $180°$.

7. Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називають **колінеарними** і позначають $\vec{a} \,||\, \vec{b}$. Очевидно, що $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ або $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

8. Вектори, які лежать на одній площині або на паралельних площинах, називають **компланарними**. Очевидно, що **будь-які два вектори – компланарні**.

9. **Добутком вектора** $\vec{a}$ **на скаляр (число)** α називають вектор $\alpha\vec{a}$ *(рис. 1)*, який задовольняє такі умови:

1) якщо $\alpha \geq 0$, то $\alpha\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$;

2) якщо $\alpha \geq 0$, то $\alpha\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$;

3) $|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$.

10. Вектор $-\vec{a} = -1 \cdot \vec{a}$ називають **протилежним** вектору $\vec{a}$ *(рис. 1)*. Очевидно, що $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

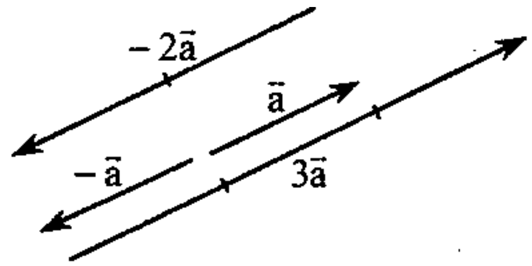
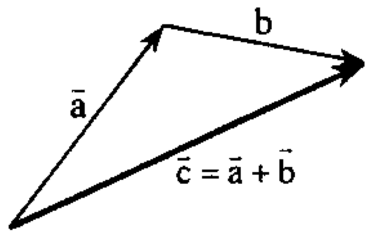


Рис.1.

11. **Сумою векторів** $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, який знаходять одним із таких методів:

1) **метод трикутника**, який полягає в тому, що вектор $\vec{b}$ відкладають від кінця вектора $\vec{a}$ *(рис.* 2*)*, тоді початок вектора $\vec{c}$ співпадає з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$;

2) **метод паралелограма**, який полягає в тому, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відкладають від однієї точки *(рис. 3)*, тоді вектор $\vec{c}$ починається в тій же точці і співпадає з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, як на сторонах.



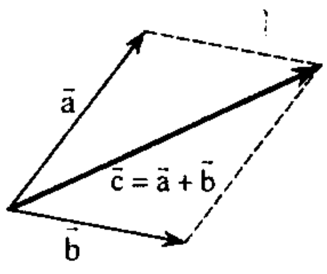


Рис. 2. Рис. 3.

12. **Різницею векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$, метод побудови якого полягає в тому, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відкладають від однієї точки *(рис. 4).* Тоді початок вектора с півпадає з кінцем вектора $\vec{b}$, а його кінець — з кінцем вектора $\vec{a}$.

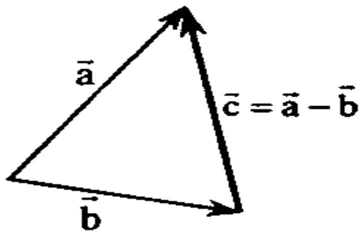


Рис. 4.

13.Якщо $\vec{a}_1\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$— вектори, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$— скалярні величини (числа), то вектор $\vec{k} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n$ називають **лінійною комбінацією векторів** $\vec{a}_1\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

14.Систему векторів $\vec{a}_1\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називають **лінійно незалежною**, якщо їх лінійна комбінація дорівнює $\vec{0}$ **лише** за умови, що $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$.

15. Систему векторів $\vec{a}_1\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називають **лінійно залежною**, якщо існує така їх лінійна комбінація, яка дорівнює $\vec{0}$ і при цьому **хоч одне** з чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не дорівнює нулю.

16. Два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні.

17. Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні

18. **Базисом** системи **векторів** називають таку лінійно незалежну множину векторів, у якій кожен вектор системи можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів цієї множини

19. **Розкласти вектор за векторами базису** означає подати його у вигляді лінійної комбінації векторів базису. Кожен вектор системи можна розкласти за векторами базису єдиним способом.

20. Якщо вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_к$ утворюють базис деякої системи векторів і $\vec{a} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_k\vec{e}_k$, то впорядковану множину чисел називають **координатами** вектора $\vec{a}$ в цьому базисі і позначають $\vec{a} = (\alpha_1;\alpha_2;\dots;\alpha_k)$.

21. Базисом множини всіх векторів, що лежать на одній прямій, може бути будь-який ненульовий вектор, що лежить на цій прямій.

22. Базисом множини всіх векторів площини може бути будь-яка пара неколінеарних векторів цієї площини.

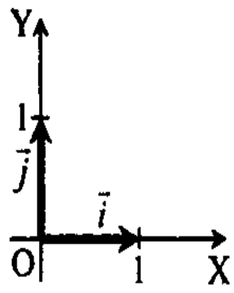


Рис. 5

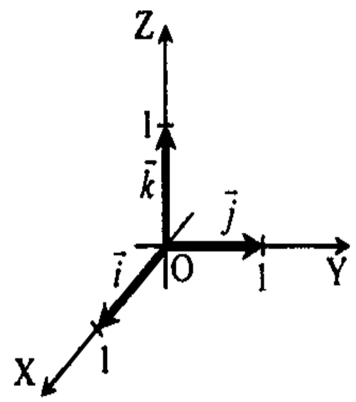


Рис. 6

Надалі ми користуватимемось **прямокутним декартовим базисом**, який утворюють два взаємно перпендикулярні одиничні вектори *(рис.*5) Вектори $\vec{\imath}$,та$\vec{\jmath}$часто називають **ортами**, а утворений ними базис — **ортонормованим базисом векторів площини.**

23. Базисом множини всіх векторів тривимірного простору може бути будь-яка трійка некомпланарних векторів цього простору. Надалі ми користуватимемось прямокутним декартовим базисом, який утворюють три взаємно перпендикулярні одиничні вектори ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}, \vec{k}$) *(рис.6*). Вектори $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$та $\vec{k}$ часто називають **ортами**, а утворений ними базис – **ортонормованим базисом векторів тривимірного простору.**

24. Якщо $\vec{a}= x\vec{i}+ y\vec{j}+ z\vec{k}$, то впорядковану трійку чисел (x y; z) називають координатами вектора $\vec{a}$ в ортонормованому базисі і записують $\vec{a}$ = (x; y; z).

25. Якщо в прямокутній декартовій системі координат $A(x_A, y_A; z_A)$ і $B(x_в; y_в; z_в)$ то

$$\overrightarrow{AB} = (x_B – x_A; y_B – y_A, z_B – z_A). \quad (1)$$

26. Якщо $\vec{a}$ = (x; y; z), то:

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad (2)$$

$$\vec{a} = (\alpha x; \alpha x; \alpha z). \quad (3)$$

27. Якщо $\vec{a} = (x_{\vec{a}};\ y_{\vec{a}};\ z_{\vec{a}})$ і $\vec{b} = (x_{\vec{b}};\ y_{\vec{b}};\ z_{\vec{b}})$, то:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_{\vec{a}} + x_{\vec{b}};\ y_{\vec{a}} + y_{\vec{b}}; z_{\vec{a}} + z_{\vec{b}}); \qquad (4)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_{\vec{a}} - x_{\vec{b}};\ y_{\vec{a}} - y_{\vec{b}}; z_{\vec{a}} - z_{\vec{b}}); \qquad (5)$$

$$a||b \Leftrightarrow \frac{x_{\vec{a}}}{x_{\vec{b}}} = \frac{y_{\vec{a}}}{y_{\vec{b}}} = \frac{z_{\vec{a}}}{z_{\vec{b}}}. \qquad (6)$$

Приклад *1.*Дано координати точок: A(3; −1; 2), B(2; 1; 4), C(−1;3; −2), D(1; −1; −6). Потрібно знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CD}$ та їх модулі;

б) координати векторів $-3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}$;

2) встановити, чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

Розв'язання.1)а)За формулою (1) знаходимо:

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A, z_B - z_A) = (2-3; 1-(-1); 4-2)$,

$\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 2)$;

$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A, z_C - z_A) = (-1-3; 3-(-1); -2-2)$,

$\overrightarrow{AC} = (-4; 4; -4)$;

$\overrightarrow{CD} = (x_D - x_C; y_D - y_C, z_D - z_C) = (1-(-1); -1-3; -6-(-2))$, $\overrightarrow{CD} =$ (2; −4; −4).

За формулою (2) знаходимо: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2 + z_{\overrightarrow{AB}}^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$ лін. од..

Аналогічно:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16 + 16} = 4\sqrt{3}$ лін. од.;

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$ лін. од..

б) За формулою (3) знаходимо:

$-3\overrightarrow{AB} = (-3x_{\overrightarrow{AB}};\ 3y_{\overrightarrow{AB}};\ -3z_{\overrightarrow{AB}}) = (-3\cdot(-1); -3\cdot 2; -3\cdot 2)$;

$-3\overrightarrow{AB} = (3; -6; -6)$.

За формулою (4) матимемо:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (x_{\overrightarrow{AB}} + x_{\overrightarrow{AC}};\ y_{\overrightarrow{AB}} + y_{\overrightarrow{AC}};\ z_{\overrightarrow{AB}} + z_{\overrightarrow{AC}}) = (-1+(-4); 2+4; 2+(-4)) = = (-5; 6; -2)$.

За формулою (5) знаходимо:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (x_{\overrightarrow{AC}} - x_{\overrightarrow{CD}};\ y_{\overrightarrow{AC}} - y_{\overrightarrow{CD}};\ z_{\overrightarrow{AC}} - z_{\overrightarrow{CD}}) =$$
$$= (-4-2; 4-(-4); -4-(-4)) = (-6; 8; 0).$$

1) Координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ пропорційні

$$\frac{x_{\overrightarrow{CD}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{2}{-1} = \frac{y_{\overrightarrow{CD}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{-4}{2} = \frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{-4}{2} = -2$$

тому ці вектори колінеарні *(див.п. 27, формула (б)).*

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Перевірити аналітично і геометрично векторні рівності

а)$\vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$;б)$\vec{a} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$.

№ 2. В трикутнику ABC сторону AB точками M та N поділили натри рівні частини: AM = MN = NB. Знайти вектор $\overrightarrow{CM}$, якщо $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$.

Відповідь : $\overrightarrow{CM} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$.

№ 3. Точка M — точка перетину медіан грані ABC трикутної піраміди ABCD, Знайти вектор $\overrightarrow{DM}$, якщо $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

Відповідь: $\overrightarrow{DM} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

№ 4. Дано три компланарні одиничні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, причому$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$і$\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 60°$ (кути відкладають проти годинникової стрілки). Побудувати вектор $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ і знайти йогомодуль.

Вказівка : *в ламаній, побудованій з векторів* $\vec{a}$, $2\vec{b}$ *та* $3\vec{c}$, *продовжити першу ланку до перетину з третьою*

Відповідь: $|\vec{p}| = \sqrt{2\sqrt{3} + 8}$ лін. од.

№ 5. Дано координати точок: A(2; 1; 0),B(3; −1;2), C (13; 3; 10), D(0; 1; 4). Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$та їх модулі;

б) координати вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{BC}$ і $2\overrightarrow{CD}$

Відповідь:а) $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 2)$, $|\overrightarrow{AB}| = 3$ лін.од.;

$\overrightarrow{AC} = (11; 2; 10)$, $|\overrightarrow{AC}| = 15$ лін. од.;

$\overrightarrow{AD} = (-2; 0; 4)$, $|\overrightarrow{AD}| = 2\sqrt{5}$ лін.од.;

б) (20;8; 16).

№ 6. Дано координати трьох послідовних вершин паралелограма A(1; −2; 3),B(3; 2; 1),C(6; 4; 4). Знайти його четверту вершину.

Відповідь: D(4; 0; 6)

№7. Відомо координати двох вершин паралелограма ABCD: A(1; 2; −2) та B(3; −4; 1). Діагоналі паралелограма перетинаються в точці O(5;4;3). Знайти координати вершин C та D.

Відповідь: C(9; 6; 8), D(7; 12; 5).

№ 8. У правильному шестикутнику ABCDEF $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AF}=\vec{\mathbf{b}}$. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ та $\overrightarrow{AE}$ в базисі, утвореному векторами $\vec{a}$**,** $\vec{b}$**.**

Відповідь: у базисі: $\vec{a}$**,** $\vec{b}$: $\overrightarrow{AC}=(2;1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;2)$, $\overrightarrow{AE}=(1;2)$.

№ 9. Довести, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний її основам.

Вказівка: *розглянути даний відрізок як вектор і виразити його через вектори, що співпадають зі сторонами трапеції.*

№ 10. При яких значеннях α і β будуть колінеарними вектори $\vec{a}=(-2;3;\alpha)$ і $\vec{b}=(\beta;-6;2)$?

Відповідь: $\alpha=-1$; $\beta=4$.

№ 11. На площині дано три точки A(5; 1), B(−1; −2) і C(−7; 5). В початку координат, прикладені сили $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ та $\overrightarrow{OC}$. Побудувати рівнодійну (суму) $\overrightarrow{OM}$ цих сил і знайти її величину (модуль)

Відповідь: $|\overrightarrow{OM}|=5$од..

№ 12. Дано вектори $\vec{a}=(I;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}=(-1;\ 3;\ 2)$, $\vec{c}=(7;\ -3;\ 5)$ і $\vec{d}=(-6;10;3)$. Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, утворюють базис у просторі і знайти координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

Вказівка, а) *Щоб довести, що три вектори утворюють базис у просторі, досить довести їх лінійну незалежність. Для цього слід показати, що визначник, складений з координат цих векторів, не дорівнює нулю.*

б) *Записати розклад вектора* $\vec{d}$ *за векторами* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, *з невідомими коефіцієнтами окремо для кожної координати і розв'язати отриману систему рівнянь.*

Відповідь: $\vec{d}=(2;1;-1)$ в базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ №2-1;** умову і дані відповідного варіанту взяти на сторінці__.

ПЗ - 2. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ. ОЗНАКА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ВЕКТОРІВ. ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВЕКТОР. КУТ МІЖ ВЕКТОРАМИ

Теоретичні відомості

1. **Скалярним добутком** векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, (позначають $\vec{a}\cdot\vec{b}$) називають число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}). \quad (1)$$

2. **Фізичний зміст скалярного добутку**. Якщо $\vec{f}$ – вектор сили, а $\vec{s}$ – вектор переміщення, то скалярний добуток $\vec{f}\cdot\vec{s}$ – робота сили $\vec{f}$ при переміщенні на вектор $\vec{s}$.

3. **Властивості скалярного добутку:**

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{0}=0$;

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$; 4) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$;

5) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$; 6) $\vec{a}\cdot\vec{a}=(|\vec{a}|)^2$.

4. **Ознака перпендикулярності векторів**. Два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю. Тобто, якщо $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, то

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad (2)$$

5. **Проекцією** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ (позначають $пр_{\vec{b}}\vec{a}$) називають число, яке дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$пр_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) \quad (3)$$

6. **Проекцію** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначають за формулою:

$$пр_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} \quad (4)$$

7. Кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ визначають за формулою:
8.

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}. \quad (5)$$

9. Якщо $\vec{a}=(x_{\vec{a}};\ y_{\vec{a}};\ z_{\vec{a}})$ і $\vec{b}=(x_{\vec{b}};\ y_{\vec{b}};\ z_{\vec{b}})$, то
10.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_{\vec{a}}\cdot x_{\vec{b}}+y_{\vec{a}}\cdot y_{\vec{b}}+z_{\vec{a}}\cdot z_{\vec{b}}); \quad (6)$$

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{x_{\vec{a}} \cdot x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}} \cdot y_{\vec{b}} + z_{\vec{a}} \cdot z_{\vec{b}}}{\sqrt{x_{\vec{b}}^2 + y_{\vec{b}}^2 + z_{\vec{b}}^2}}; \qquad (7)$$

$$\cos \angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{x_{\vec{a}} \cdot x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}} \cdot y_{\vec{b}} + z_{\vec{a}} \cdot z_{\vec{b}}}{\sqrt{x_{\vec{a}}^2 + y_{\vec{a}}^2 + z_{\vec{a}}^2} \cdot \sqrt{x_{\vec{b}}^2 + y_{\vec{b}}^2 + z_{\vec{b}}^2}} \qquad (8)$$

Приклад 1. Дано вектори $\vec{a} = (-2; 8; 2)$, $\vec{b} = (11; -2; 10)$. Знайти:

а) скалярний добуток векторів;

б) проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$;

в) кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. а) За формулою (6) знаходимо:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_{\vec{a}} \cdot x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}} \cdot y_{\vec{b}} + z_{\vec{a}} \cdot z_{\vec{b}}) = -2 \cdot 11 + 8 \cdot (-2) + 2 \cdot 10 = -18.$

Скориставшись формулою (7), отримаємо:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{x_{\vec{a}} \cdot x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}} \cdot y_{\vec{b}} + z_{\vec{a}} \cdot z_{\vec{b}}}{\sqrt{x_{\vec{b}}^2 + y_{\vec{b}}^2 + z_{\vec{b}}^2}} = \frac{-18}{\sqrt{11^2 + (-2)^2 + 10^2}} = \frac{-18}{\sqrt{121+4+100}} = \frac{-18}{\sqrt{225}} = -\frac{-18}{15} =$$

$$= -1{,}2$$

в) За формулою (8) знаходимо:

$$\cos \frac{-18}{\sqrt{(-2)^2 + 8^2 + 2^2} \cdot \sqrt{225}} = \frac{-18}{\sqrt{72} \cdot 15} = \frac{-18}{6\sqrt{2} \cdot 15} = \frac{-1}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{10} = -0{,}1 \cdot \sqrt{2}.$$

З отриманої рівності знаходимо:

$$\angle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos(-0{,}1 \cdot \sqrt{2}).$$

***Приклад** 2.* При якому значенні α будуть перпендикулярними вектори

$\vec{a} = (-2; 3; \alpha)$ і $\vec{b} = (4; \alpha; -7)$?

Розв'язання. За формулою (6) знайдемо скалярний добуток даних векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_{\vec{a}} \cdot x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}} \cdot y_{\vec{b}} + z_{\vec{a}} \cdot z_{\vec{b}} = 4\alpha + 3\alpha - 28 = 7\alpha - 28.$$

За ознакою перпендикулярності векторів:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 7\alpha - 28 = 0 \Leftrightarrow 7\alpha = 28 \Leftrightarrow \alpha = 4.$

Отже, дані вектори будуть перпендикулярними при $\alpha = 4$.

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Обчислити значення виразу

$(2\vec{i} - \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot \vec{k} + (\vec{i} - 2\vec{k}) \cdot (\vec{i} - 2\vec{k}).$

Відповідь:2.

№ 2. Обчислити значення виразу $(5\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$,якщо відомо, що $|a|$= 2лін. од., $|b|$= 3лін. од. і $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Відповідь:13.

№ 3. Знайти кути трикутника з вершинами A(2; −1; 3), B(1; 1; 1) і C(0; 0; 5).

Відповідь:∠A=90°, ∠B = ∠C = 45°.

№ 4, Знайти $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ і$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, якщо c = (1; I; 2), $\vec{b}$ = (1; −1; 4).

Відповідь :$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$; $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

№ 5. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$= (2;1;0) і $\vec{b}$= (0; −2;1) як на сторонах.

Відповідь: φ = 90°.

№ 6. Довести, що гострий кут між діагоналями прямокутника зі сторонами a і b обчислюється за формулою:

$$\varphi=\arccos\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

№7. Знайти довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$ та $\vec{b}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2$ як на сторонах, якщо $\vec{e}_1$і $\vec{e}_2$— одиничні вектори, кут між якими становить 60°.

Вказівка:*скористатися властивістю скалярного добутку (див. п. 3(6)).*

Відповідь: $d_1=|d_1|=\sqrt{13}$= лін. од., $d_2=|d_2|=\sqrt{7}$ лін. од.

№ 8.Знайти вектор c, який перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$= (1; 1; 2) і $\vec{b}$ = (2; 1; 1) і має модуль $\sqrt{11}$ лінійних одиниць.

Вказівка: *надати шуканому вектору три невідомі координати; для їх визначення скласти і розв'язати систему трьох рівнянь (два рівняння скласти, виходячи з ознаки перпендикулярності векторів, а третє −з формули для обчислення модуля вектора).*

Відповідь: $\vec{c}_1$=(1; −3;1); $\vec{c}_2$ = (−1; 3; −1) .

№ 9. У трикутнику ABC відомо довжини двох сторін AB = 2лін. од., AC = 4 лін. од. і кут між ними ∠BAC = 60°, Знайти кут між медіаною AM і стороною AB цього трикутника

Вказівка: *скористатися векторною рівністю* $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Відповідь: $\varphi=\arccos\frac{2\cdot\sqrt{7}}{7}$

№ 10.Знайти скалярний добуток векторів $\vec{d}_1=2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$ і $\vec{d}_2=5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}$, якщо $|\vec{a}|$= 1 лін. од., $|\vec{b}|$= 2 лін. од., $|\vec{c}|$= 3 лін. од., $\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{a},\vec{c})=\angle(\vec{b},\vec{c})=60°$.

Відповідь: $\overrightarrow{d_1} \cdot \vec{d}_2$=547.

№ 11.При якому значенні α будуть перпендикулярними вектори $\vec{a}$ = $(1;\ \alpha;\ -2)$ і $\vec{b}$ = $(-1;\ 3;\ \alpha)$?

Відповідь: α= 1.

№ 12. Очищення русла зрошувального каналу відбувається таким чином: очисний пристрій по дну каналу тягнуть за допомогою тросів два однакові трактори, які рухаються протилежними берегами каналу паралельно до його русла.

Кути між тросом кожного трактора і напрямком руху очисного пристрою однакові і дорівнюють 30°. Кожен трактор діє на пристрій з силою 30кН. Знайти роботу, яку виконав кожен трактор, якщо очищено 100 погонних метрів каналу.

Вказівка: *скористатися означенням скалярного добутку та його фізичним змістом.*

Відповідь: А = $1500\cdot\sqrt{3}$кДж =2 598076 Дж.

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **13 № 2 - 2**; умову і дані відповідного варіанту взяти на сторінці ___.

ПЗ - 3. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ. ОЗНАКА КОЛІНЕАРНОСТІ ВЕКТОРІВ. МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ. ОЗНАКА КОМПЛАНАРНОСТІ ВЕКТОРІВ

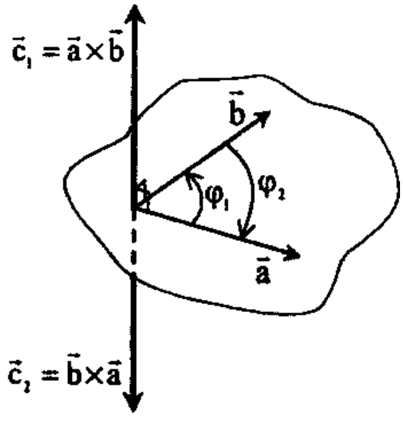
Теоретичні відомості

1. **Векторним добутком векторів** $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (позначають $\vec{a}\times\vec{b}$) називають вектор $\vec{c}$ (*рис.* 7), який задовольняє такі три умови:

1). $\vec{c}\perp\vec{a}$і $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2). $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$;

3). вектор $\vec{c}$має такий напрям, що, коли відкласти вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ від однієї точки і дивитися з кінця вектора $\vec{c}$, то найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$буде виконуватись проти годинникової стрілки (це означає, що трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ є правою).



.   *Рис. 7*

2. **Ознака колінеарності векторів**

Два вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нульовому вектору. Тобто

$$\vec{a}||\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}. \qquad (1)$$

3. **Властивості векторного добутку:**

1) $\vec{a}\times\vec{b}$= -($\vec{a}\times\vec{b}$);   2) $\vec{a}\times\vec{0}$=;$\vec{0}$

3) $(\vec{a}+\vec{b})\times c = \vec{a}\times\vec{c}$+$\vec{b}\times\vec{c}$;   4)$(\vec{a}-\vec{b})\times c = \vec{a}\times\vec{c}$-$\vec{b}\times\vec{c}$;

5) $(\alpha\vec{a})\times(\beta\vec{b})$= aβ·$(\vec{a}\times\vec{b})$;   6)$\vec{a}\times\vec{a}$= $\vec{0}$.

4. Для векторів прямокутного декартового базису виконуються рівності:

$$\vec{\imath}\times\vec{\jmath}=\vec{k}, \vec{\jmath}\times\vec{k}=\vec{\imath}, \vec{k}\times\vec{\imath}=\vec{\jmath}. \qquad (2)$$

5. Модуль вектора чисельно дорівнює **площі паралелограма**, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах.

6. Якщо $\vec{a}$ = $(x_{\vec{a}};\ y_{\vec{a}};\ z_{\vec{a}})$ і $\vec{b}$ = $(x_{\vec{b}};\ y_{\vec{b}};\ z_{\vec{b}})$,то

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_{\vec{a}} & y_{\vec{a}} & z_{\vec{a}} \\ x_{\vec{b}} & y_{\vec{b}} & z_{\vec{b}} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Якщо отриманий визначник розкласти за елементами першого рядка *(див. Розділ 1, ПЗ-2, п.9, приклад 5*), то формула (3) набуде вигляду:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} y_{\vec{a}} & z_{\vec{a}} \\ y_{\vec{b}} & z_{\vec{b}} \end{vmatrix}\cdot\vec{\imath} - \begin{vmatrix} x_{\vec{a}} & z_{\vec{a}} \\ x_{\vec{b}} & z_{\vec{b}} \end{vmatrix}\cdot\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_{\vec{a}} & y_{\vec{a}} \\ x_{\vec{b}} & y_{\vec{b}} \end{vmatrix}\cdot\vec{k} \qquad (4)$$

Приклад 1. Знайти площу трикутника ABC, якщо $\overrightarrow{AB}$ = (4; −2; 5), $\overrightarrow{AC}$ = (2; 3; −4).

Розв'язання. Шукана площа дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ як на сторонах, а площа цього паралелограма *(див. п. 5)* дорівнює $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Тому:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \qquad (5)$$

За формулами (3), (4) та правилом обчислення визначників другого порядку *(див. Розділ I, ПЗ-2, пп. 1, 2)* знаходимо:

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} & z_{\overrightarrow{AB}} \\ x_{\overrightarrow{AC}} & y_{\overrightarrow{AC}} & z_{\overrightarrow{AC}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} -$$

$$- \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = -7\vec{i} + 26\vec{j} + 16\vec{k}.$$

Знайдемо модуль отриманого вектора *(див. ПЗ-1, п.26, рівність (2)*:

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-7)^2 + 26^2 + 16^2} = \sqrt{49 + 676 + 256} = 3 \cdot \sqrt{109}.$$

Підставивши це значення в рівність (5), одержимо:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{109} = 1{,}5 \cdot \sqrt{109} \text{ кв. од.}.$$

7. Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (позначають $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$) називають число, яке дорівнює векторному добутку двох перших векторів, помноженому скалярно на третій вектор. Тобто:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \qquad (6)$$

8**. Ознака компланарності векторів.** Три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

9**. Властивості мішаного добутку векторів:**

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;

2) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$; 3) $(\alpha\vec{a})(\beta\vec{b})(\gamma\vec{c}) = \alpha\beta\gamma(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;

4) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{b} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$; 5) $(\vec{a} - \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{b} - \vec{b}\vec{c}\vec{d}$.

10**.** Модуль мішаного добутку векторів чисельно дорівнює **об'єму паралелепіпеда**, побудованого на цих векторах як на ребрах.

11**.** Об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ як на ребрах, знаходять за формулою:

$$V = \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{6}. \qquad (7)$$

12.Якщо $\vec{a} = (x_{\vec{a}};\ y_{\vec{a}};\ z_{\vec{a}})$, $\vec{b} = (x_{\vec{b}};\ y_{\vec{b}};\ z_{\vec{b}})$, $\vec{c} = (x_{\vec{c}};\ y_{\vec{c}};\ z_{\vec{c}})$ то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_{\vec{a}} & y_{\vec{a}} & z_{\vec{a}} \\ x_{\vec{b}} & y_{\vec{b}} & z_{\vec{b}} \\ x_{\vec{c}} & y_{\vec{c}} & z_{\vec{c}} \end{vmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти об'єм трикутної піраміди ABCD, якщо відомо, що $\overrightarrow{AB} = (-2; -2; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 1; 1)$ і $\overrightarrow{AD} = (2; -1; 0)$.

Розв'язання . Знайдемо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. За формулою (8) та правилами обчислення визначників 3-го порядку *(див. Розділ1, ПЗ-2, пп.3-5)* отримаємо:

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0-4-3-2-2-0 = -11.$$

Підставивши знайдене значення у формулу (7), одержимо шуканий об'єм:

$$V = \frac{|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}|}{6} = \frac{|-11|}{6} = \frac{11}{6} \text{куб. од..}$$

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1.Обчислити значення виразу

$2(\vec{j} \times \vec{k})\cdot\vec{i} + 3\vec{j}\cdot(\vec{i} \times \vec{k}) + 4(\vec{i} \times \vec{j})\cdot\vec{k}$.

Відповідь:3.

№2. Довести: а) $(2\vec{a} + \vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{b}$;

б)$(\vec{a} - \vec{b})\times(\overrightarrow{a - b}) = 2\vec{a} \times \vec{b}$.

№3.Знайти площу трикутника з вершинами A(7; 3; 4), B(1; 0; 6) і C(4; 5–;–2).

Відповідь:S = 24,5 кв. од..

№ 4.Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}–2\vec{b}$ та $3\vec{a}+ 2\vec{b}$ як на сторонах, якщо $|\vec{a}|=|\vec{b}|= 5$ лін од., $\angle(\vec{a},\vec{b})= 45°$.

Відповідь: $S = 50\sqrt{2}$кв. од..

№ 5.Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{e}_1+2\vec{e}_2$ і $\vec{b}=2\vec{e}_1 + e_2$ як на сторонах, якщо$\vec{e}_1$та e_2 - одиничні вектори, що утворюють кут 30°.

Відповідь:S= 1,5 кв. од..

№ 6. Довести, що точки A(2; −1; −2), B(1; 2; 1), C(2; 3; 0), D(5; 0; −6) лежать на одній площині.

Вказівка:*показати, що вектори* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *та* $\overrightarrow{AD}$ *компланарні, тобто їх мішаний добуток дорівнює нулю.*

№7.Довести, що вектори $\vec{a} = (-1;\ 3;\ 2)$, $\vec{b} = (2;\ -3;\ -4)$ і $\vec{c} = (-3;\ 12;\ 6)$ компланарні і розкласти вектор $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Відповідь: $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.

№ 8. Дано координати вершин трикутної піраміди OABC: O(0; 0; 0), A(5; 2; 0), B(2; 5; 0), C(1; 2; 4). Знайти:

1) площу грані ABC ;
2) об'єм піраміди OABC;
3) висоту OM піраміди OABC.

Вказівка:3) *скористатися формулою для обчислення об'єму піраміди, відомою з шкільного курсу геометрії*

Відповідь:1) $S = 6\sqrt{3}$кв. од.; 2) V = 14 куб. од.;3) $OM = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ лін. од.

№ 9. Довести, що об'єм паралелепіпеда, побудованого на діагоналях даного паралелепіпеда, дорівнює подвоєному об'єму даного паралелепіпеда.

Вказівка: *показати, що за умови, коли об'єм даного паралелепіпеда* $\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$, *об'єм шуканого паралелепіпеда –* $\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\right|$; *порівняти модулі цих мішаних добутків.*

№ 10. Знайти об'єм паралелепіпеда $OABCO_1A_1B_1C_1$, в якому дано координати трьох вершин нижньої основи O(0; 0; 0), A(2; −3; 0), C(3; 2; 0) і однієї вершини верхньої основи B_1 (3; 0; 4) (вершина B_1 лежить на ребрі BB_1, протилежному до ребра OO_1).

Вказівка: *знайти вектор* $\overrightarrow{OO_1}$ *з очевидної рівності* $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OO_1}$, *а після цього обчислити об'єм заданого паралелепіпеда (див. п. 10).*

Відповідь: V = 52 куб. од..

№11. Знайти об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, якщо відомо, що ці вектори лежать на бісектрисах координатних кутів і модуль кожного з них дорівнює 2 лін. од..

Вказівка: *знайти координати векторів* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ *і* $\overrightarrow{OC}$*; після цього обчислити об'єм піраміди (див. п. 11).*

Відповідь: $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ куб. од..

№ 12. Показати, що вектори $\vec{a} = (1;\ 1;\ \alpha)$, $\vec{b} = (1;\ 1;\ \alpha + 1)$ і $\vec{c} = (1; -1;\ \alpha)$ не будуть компланарними при жодному значенні α.

Вказівка: *показати, що рівняння* $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ *не має розв'язків.*

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ № 2 - 3**; умову і дані відповідного варіанту взяти на сторінці __.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

ІЗ № 2 – 1

Дано координати вершин трикутної піраміди ABCD. Знайти:
1) координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ та їх модулі;
2) координати векторів: а) $-2\overrightarrow{AB}$,
б) $2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$;
3) довжину медіани DM грані DBC;
4) координати вектора $\vec{a} = 2\overrightarrow{DM}$ в базисі $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

ІЗ № 2-2

Дано координати вершин трикутної піраміди ABCD. Знайти:
1) скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$;
2) проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
3) величину $\angle A$ грані ABC.
З'ясувати, чи перпендикулярні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$.

ІЗ № 2-3

Дано координати вершин трикутної піраміди ABCD. Знайти:
1) площу грані ABC;
2) об'єм піраміди ABCD;
3) відстань від точки D до грані ABC.

1. A(-3; 4;-3),	B(-2; 2;-1),	C(8; 6; 7),	D (5; 8; 5).
2. A(-2;-3; 2),	B(-1;-5; 4),	C(9;-1; 12),	D (6; 1; 10).
3. A(-4; 5; - 5),	B(-3; 3; - 3),	C(7; 7; 5),	D (4; 9; 3).
4. A(2;-1;-4),	B(3;-3;-2),	C(13;1;6),	D (10; 3; 4).
5. A(-8; 3;-1),	B(-7; 1; 1),	C(3; 5; 9),	D(0; 7; 7).
6. A(3;1;-2),	B(4;-1; 0),	C(14; 3; 8),	D(11; 5; 6).
7. A(0; 2;-10),	B(1; 0;-8),	C(11;4;0),	D(8; 6;-2).
8. A(-1;-2;-8),	B(0;-4;-6),	C(10; 0; 2),	D(7; 2; 0).
9. A(1;-4;0),	B(2;-6; 2),	C(12;-2; 10),	D(9; 0; 8).
10. A(-5; 0; 1),	B(-4; - 2; 3),	C(6; 2; 11),	D(3; 4; 9).
11. A(4;-2; 5),	B(8; 2; 3),	C(6; 9;-5),	D(4; 0; 6).
12. A(3; 3;-3),	B(7; 7;-5),	C(5; 14;-13),	D(3; 5;-2).
13. A(-2; 0;-2),	B(2; 4;-4),	C(0;11;-12),	D(-2;2;-1).

14. A(0;4;3), B(4; 8; 1), C(2; 15;-7), D(0; 6; 4).
15. A(-4; 2;-1), B(0; 6;-3), C(-2; 13;-11), D(-4; 4; 0).
16. A(-1; 1;-5), B(3; 5;-7), C(1; 12;-15), D(-1;3;-4).
17. A(-3;-6; 2), B(1;-2; 0), C(-1; 5;-8), D(-3;-4;3).
18. A(1;-4; 0), B(5;0;-2), C(3; 7;-10), D(1;-2; 1).
19. A(5;-1;-4), B(9; 3;-6), C(7; 10;-14), D(5; 1;-3).
20. A(2;-3; 1), B(6; 1;-1), C(4; 8;-9), D(2;-1; 2).
21. A(-5; 2;-3), B(-4; 4;-5), C(6; 12; -1), D(3; 10; 1).
22. A(-1;-4;-1), B(0;-2;-3), C(10; 6; 1), D(7; 4; 3).
23. A(0;-2; 1), B(1; 0;-1), C(11; 8; 3), D(8; 6; 5).
24. A(-2;-1; 8), B(-4;0;6), C(0; 10;-2), D(2; 7; 0).
25. A(-2; 1; 0), B(-1;3;-2), C(9;11;2), D(6; 9; 4).
26. A(1;-3; 3), B(5;-5; 7), C(3;-13; 14), D(1;-2;5).
27. A(3;3;4), B(7;1;8), C(5;-7; 15), D(3; 4; 6).
28. A(2;-5; 1), B(6;-7;5), C(4;-15; 12), D(2;-4;3).
29. A(4; 0;-4), B(8;-2; 0), C(6;-10; 7), D(4;1;-2).
30. A(-3; 2; 4). B(1;6;2). C(8; 4;-6), D(-1; 2; 5).

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ РОЗДІЛУ 2

ІЗ № 2 – 1

Дано координати вершин трикутної піраміди ABCD:
$A(4; -1;3)$, $B(-2; 1; 0)$, $C(0; -5; 1)$, $D\ (3;2; -6)$.
Знайти:

1) координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$ та їх модулі;
2) координати векторів: а) $-2\overrightarrow{AB}$, б) $2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$;
3) довжину медіани DM грані DBC;
4) координати вектора $\vec{a} = 2\overrightarrow{DM}$ у базисі $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Розв'язання

1)За формулою (1) *(див. ПЗ-І)*знаходимо:
$\overrightarrow{AB} = (x_B–x_A;\ \ y_B–y_A,\ \ z_B–z_A) = (-2-4;\ 1-(-1);\ 0-3)$, $\overrightarrow{AB} = (-6; 2; -3)$.

Аналогічно:
$\overrightarrow{AC} = (0-4;\ -5-(-1);\ 1-3) = (-4;\ -4;\ -2)$;
$\overrightarrow{AD} = (3-4; 2-(-1);\ -6-3) = (-1;\ 3;\ -9)$.

За формулою (2) (*див. ПЗ-1)*знаходимо:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2 + z_{\overrightarrow{AB}}^2} = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$ лін. од.

Аналогічно:

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ лін. од.;

$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-9)^2} = \sqrt{1+9+81} = \sqrt{91}$ лін. од..

2) а) За формулою (3) (*див. ПЗ-1*) знаходимо:

$$-2\overrightarrow{AB} = (-2x_{\overrightarrow{AB}}; -2y_{\overrightarrow{AB}}; -2z_{\overrightarrow{AB}}) = (-2\cdot(-6); (-2)\cdot 2; (-2)\cdot -3);$$

$$-2\overrightarrow{AB} = (12; -4; 6).$$

б) За формулами (3), (4) і (5) (*див. ПЗ-1*)матимемо:

$$2AC + 3AD - AB =$$

$$= (2x_{\overrightarrow{AC}} + 3x_{\overrightarrow{AD}} - x_{\overrightarrow{AB}}; -2y_{\overrightarrow{AC}} + 3y_{\overrightarrow{AD}} - y_{\overrightarrow{AB}}; 2z_{\overrightarrow{AC}} + 3z_{\overrightarrow{AD}} - z_{\overrightarrow{AB}}) =$$

$$= (2\cdot(-4) + 3\cdot(-1) — (-6);\ 2\cdot(-4) + 3\cdot 3 - 2;$$

$$2 \cdot(-2) + 3\cdot(-9) - (-3)$$

$$= (-8 - 3 + 6;\ -8 + 9 - 2;\ -4 - 27 + 3) =$$

$$= (-5;\ -1;\ -28).$$

3) Якщо DM — медіана трикутника DBC (*Рис. 8*), то очевидно, що справедлива рівність:

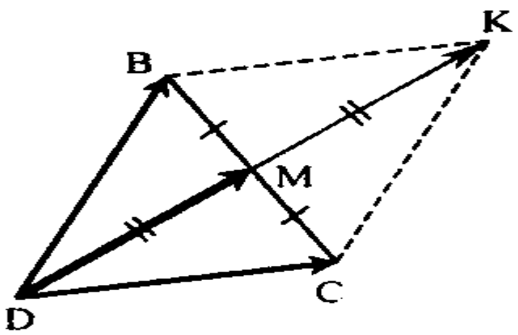


Рис. 8

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DC}$ за формулою (1) (*див.ПЗ-1*):

$$\overrightarrow{DB} = (3-(-2); 2-1; -6-0) = (5; 1; -6);$$

$$\overrightarrow{DC} = (3-0; 2-(-5); -6-1) = (3; 7; -7).$$

За формулою (4) ***(****див. ПЗ-1****)*** знаходимо:

$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = (5+3;\ 1+7; -6+(-7)) = (8; 8; -13).$$

За формулою (3) ***(****див. ПЗ-1****)*** отримаємо:

$$\overrightarrow{DM} = 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DK} = (4;\ 4;\ -6{,}5).$$

4) З міркувань, наведених у попередньому пункті, випливає:

$$\vec{a} = 2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DK} = (8; 8; -13).$$

Нехай у базисі $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$

$$\vec{a} = (x;\ y;\ z).$$

Це означає, що

$$a = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} + z \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Записавши цю рівність окремо для кожної координати, отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -6x - 4y - z = 8, \\ 2x - 4y + 3z = 8, \\ -3x - 2y - 9z = -13. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь одним із відомих нам методів ***(****див. Розділ 1, ПЗ-3, п.п. 5, 6, 9, 10, приклади I - 4****)*** і знайдемо:

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = -1, \\ z = 2. \end{cases}$$

Отже, $\vec{a} = (-1;\ -1; 2)$ у базисі $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

ІЗ № 2-2

Дано координати вершин трикутної піраміди ABCD:

A(4; −1;3), B(−2; 1; 0), C(0; −5; 1), D (3;2; −6).

Знайти:

1) скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$;
2) проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
3) cos ∠A грані ABC.

З'ясувати, чи перпендикулярні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$.

Розв'язання

1) У попередньому завданні було знайдено $\overrightarrow{AC} = (-4;\ -4;\ -2)$ і $\overrightarrow{AD}\ (-1;\ 3;\ -9)$.

За формулою (6) *(див. ПЗ-2)*знаходимо:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = x_{\overrightarrow{AC}} \cdot x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AC}} \cdot y_{\overrightarrow{AD}} + z_{\overrightarrow{AC}} \cdot z_{\overrightarrow{AD}} =$$
$$= -4 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 + (-2) \cdot (-9) = 4 - 12 + 18 =$$
$$= 10.$$

2) У попередньому завданні було знайдено: $\overrightarrow{AB} = (-6;\ 2;\ -3)$, $\overrightarrow{AD} = (-1;\ 3;\ -9)$ і $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 7$ лін. од..

За формулою (6) *(див. ПЗ-2)*знаходимо:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\ \overrightarrow{AD}\ = x_{\overrightarrow{AB}}\cdot\ x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AB}}\cdot\ y_{\overrightarrow{AD}} + z_{\overrightarrow{AB}}\cdot\ z_{\overrightarrow{AD}} =$$
$$= -6\cdot(-1) +\ 2\cdot 3\ + (-3)\cdot(-9) = =\ 6\ +\ 6\ +\ 27 =\ 39.$$

За формулою (4) *(див. ПЗ-2)* і знайденим вище матимемо:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD}\ = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{39}{7}.$$

2) Кут А грані АВС утворюють вектори АВ і АС, координати і модулі яких було знайдено у попередньому завданні. Знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\ \overrightarrow{AC}\ = x_{\overrightarrow{AB}}\cdot\ x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}}\cdot\ y_{\overrightarrow{AC}} + z_{\overrightarrow{AB}}\cdot\ z_{\overrightarrow{AC}}$$
$$= -6\cdot(-4) + 2\cdot(-4) + (-3)\cdot(-2) =\ 24 - 8\ +\ 6 =$$
$$=\ 22.$$

За формулою (5) *(див. ПЗ-2)* знайденим вище матимемо:

$$\cos\angle A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{22}{7\cdot 6} = \frac{11}{21}$$

.

• Координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ було знайдено у попередньому завданні. Обчислимо їх скалярний добуток:

$\overrightarrow{AB}\cdot\ \overrightarrow{DC}\ = x_{\overrightarrow{AB}}\cdot\ x_{\overrightarrow{DC}} + y_{\overrightarrow{AB}}\cdot\ y_{\overrightarrow{DC}} + z_{\overrightarrow{AB}}\cdot\ z_{\overrightarrow{DC}} == -6\cdot 3 + 2\cdot 7 +$ $+(-3)\cdot(-7)$ = 18 + 14 + 21 = 17.

$\overrightarrow{AB}\cdot\ \overrightarrow{DC}$= 17 $\neq$ 0, тому за ознакою перпендикулярності векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ не перпендикулярні.

ІЗ № 2-3

Дано координати вершин трикутної піраміди ABCD:

A(4; −1;3), B(−2; 1; 0), C(0; −5; 1), D (3;2; −6).

Знайти:

1) площу грані ABC;
2) об'єм піраміди ABCD;
3) відстань від точки D до грані ABC.

Розв'язання

1) У попередніх завданнях було знайдено: $\overrightarrow{AB} = (-6;\ 2;\ -3)$ і $\overrightarrow{AC} = (-4;\ -4;\ -2)$. За формулами (3) і (4) *(див.ПЗ-5)* обчислимо координати векторного добутку цих векторів:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} & z_{\overrightarrow{AB}}\\ x_{\overrightarrow{AC}} & y_{\overrightarrow{AC}} & z_{\overrightarrow{AC}}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & 2 & -3\\ -4 & -4 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & -3\\ -4 & -2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}\,-$$

$$-\begin{vmatrix}-6 & -3\\ -4 & -2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}\;+\;+\begin{vmatrix}-6 & 2\\ -4 & -4\end{vmatrix}\cdot\vec{k}\;=\;-16\vec{i}\,-0\vec{j}+32\vec{k}.$$

За формулою (2) *(див. ПЗ-2)*знайдемо модуль отриманого вектора:

$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-16)^2+(0)^2+32^2} = 18\cdot\sqrt{2^2+2^2+1} = 16\cdot\sqrt{5}$ лін.од

Підставимо знайдене значення у формулу (5) *(див. ПЗ-3)*і отримаємо площу грані ABC:

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{16\cdot\sqrt{5}}{2}= 8\cdot\sqrt{5}$ кв. од..

3) Піраміда ABCDпобудована на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$і $\overrightarrow{AD}$,координати яких було знайдено в попередніх завданнях. Знайдемо мішаний добуток цих векторів за формулою (8) *(див. ПЗ-3):*

$$\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right|=\begin{vmatrix}x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} & z_{\overrightarrow{AB}}\\ x_{\overrightarrow{AC}} & y_{\overrightarrow{AC}} & z_{\overrightarrow{AC}}\\ x_{\overrightarrow{AD}} & y_{\overrightarrow{AD}} & z_{\overrightarrow{AD}}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-6 & 2 & -3\\ -4 & -4 & -2\\ -1 & 3 & -9\end{vmatrix}=$$

$$= -216+4+36+12-36-72=-272.$$

Підставивши знайдене значення в формулу (7) *(див ПЗ-3),* одержимо шуканий об'єм:

$$\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right| = \frac{|-272|}{6} = \frac{272}{6} = \frac{136}{3}\text{ куб. од.}$$

4) Якщо вважати грань ABC основою піраміди ABCD, то шукана відстань від точки D до грані ABC буде висотою піраміди. Тоді, як відомо, об'єм піраміди обчислюється за формулою:

5)

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot h_{D,}$$

де V_{ABCD}— об'єм піраміди ABCD;

S_{ABC}— площа грані ABC;

h_D—висота піраміди, опущена з точки D (шукана відстань).

З цієї формули випливає:

$$h_D= \frac{3\cdot V_{ABCD}}{S_{ABC}}.$$

Підставивши знайдені вище V_{ABCD}та S_{ABC}, матимемо:

$$h_D=\frac{3\cdot\frac{136}{3}}{8\cdot\sqrt{5}} = \frac{17}{\sqrt{5}}\quad\text{лін. од..}$$

Отже, відстань від точки D до грані ABC дорівнює $\frac{17}{\sqrt{5}}$ лін. од..

РОЗДІЛ 3

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

ПЗ-1. ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ НА КООРДИНАТНІЙ ПЛОЩИНІ. ПОДІЛ ВІДРІЗКА В ДАНОМУ ВІДНОШЕННІ. РІВНЯННЯ ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ. РІВНЯННЯ КОЛА. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ.

Теоретичні відомості

1**. Відстань між точками** $A(x_A;y_A)$ і $B(x_B;y_B)$ обчислюється за формулою:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (1)$$

Зокрема, відстань від точки $A(x_A;y_A)$ до початку координат (точки $O(0;0)$) обчислюється за формулою:

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \quad (2)$$

2. Якщо для точок A, B та M виконується умова:

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}, \quad (3)$$

де $\lambda \neq -1$ — деяке число, то кажуть, що точка M **ділить відрізок** AB **у відношенні** λ**.**

Очевидно, що при $\lambda = 1$, точка M— **середина відрізка** AB **.**

Якщо $\lambda < 0$, то точка M лежить не на відрізку AB, а на його продовженні; тоді кажуть, що точка M ділить відрізок AB **зовнішнім чином**.

3. Нехай $A(x_A;y_A)$ і $B(x_B;y_B)$. **Координати точки** $M(x_M;y_M)$, **що ділить відрізок** AB **у відношенні** λ, обчислюються за формулами:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}; \quad y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda} \quad (4)$$

Якщо M — **середина відрізка** AB (тобто $\lambda = 1$), то формули (4) матимуть вигляд:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \tag{5}$$

Приклад 1. Дано координати точок $A(-1;\ 2)$ і $B(3;\ 4)$. Знайти:

1)довжину відрізка AB ;

2)координати точки M , що ділить відрізок AB у відношенні λ, якщо:

а) $\lambda_1 = 3$; б) $\lambda_2 = -2$; в) $\lambda_3 = 1$; г) $\lambda_4 = 0$.

Виконати рисунок.

Розв'язання. 1) Підставивши координати точок A і B у формулу (1), знайдемо довжину відрізка AB:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\left(3 - (-1)\right)^2 + (4+2)^2} =$$
$$= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5} \text{лін. од.}$$

2) Підставляючи у формулу (4) координати точок A та B і відповідні значення λ знайдемо:

а) $x_{M_1} = \frac{x_A + \lambda_1 \cdot x_B}{1 + \lambda_1} = \frac{-1 + 3 \cdot 3}{1+3} = \frac{8}{4} = 2;$

Отже, M,(2; 3,5) ділить відрізок AB у відношенні λ_1 = 3.

б)$x_{M_2} = \frac{x_A + \lambda_2 \cdot x_B}{1 + \lambda_2} = \frac{-1 + (-2) \cdot 3}{1 + (-2)} = \frac{-7}{-1} = 7;$

Отже, M_2(7; 6) ділить відрізок AB у відношенні $\lambda_2 = -2$. Ця точка ділить відрізок AB зовнішнім чином.

в)$\lambda_2 = 1$, тому точка M_3 — середина відрізка AB. В такому разі скористаємось формулами (5):

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Отже, M_3(1; 3) — середина відрізка AB. Ця точка ділить відрізок AB у відношенні λ_3= 1.

г) Оскільки λ_4= 0, то рівність (3) матиме вигляд: $\overrightarrow{AM_4} = 0 \cdot \overrightarrow{M_4 B} = \vec{0}$. Це означає, що точки A іM_4 співпадають. Отже, точка M_4(-1; 2) ділить відрізок AB у відношенні λ_4= 0.

Той же результат можна отримати, скориставшись формулами (4). В декартовій системі координат будуємо відрізок AB і точки, що ділять його в заданих відношеннях (*рис. 9*).

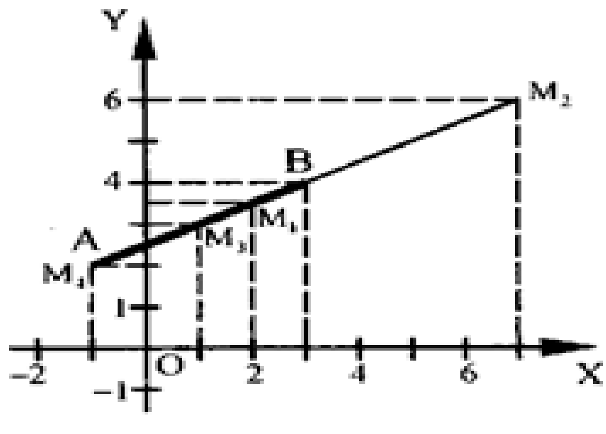


Рис. 9

4. **Рівнянням лінії** на координатній площині називають рівняння відносно змінних x та y, яке задовольняє координати будь якої точки цієї лінії.

5. **Рівняння кола** з центром у точці $O(x_0;\ y_0)$ і радіусом R має вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{6}$$

Зокрема, **рівняння кола** з радіусом R і **центром в початку координат** має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{7}$$

Приклад *2.*Знайти координати центра і радіус кола, заданого рівнянням

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y - 29 = 0.$$

Розв'язання. Згрупуємо доданки, які містять однакові змінні, і доповнимо отримані вирази до повних квадратів. Матимемо:

$$(x^2 + 8x) + (y^2 - 4y) - 18 = 0,$$
$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 4y + 4) - 16 - 4 - 29 = 0,$$
$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 49,$$
$$(x - (-4))^2 + (y - 2)^2 = 7^2.$$

Порівнюючи отримане рівняння і рівняння (6), встановимо, що радіус шуканого кола R= 7 лін. од., а центр $O(-4;\ 2)$.

6. Будь-яке рівняння першого степеня відносно змінних x та y є рівнянням прямої на площині. Будь-яка пряма на площині задається рівнянням першого степеня відносно змінних x та y.

7. **Нормальним вектором прямої** називають вектор $\vec{N}$ перпендикулярний до цієї прямої (*Рис. 10*).

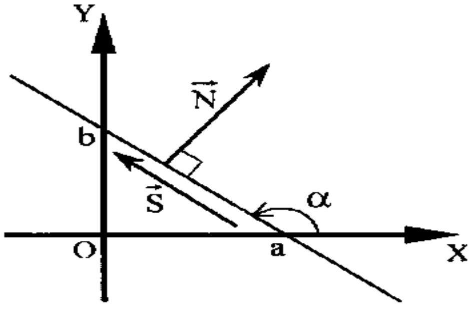


Рис. 10

8. **Напрямляючим вектором прямої** називають вектор $\vec{S}$, паралельний цій прямій (*рис. 10*).

9. Кут α між прямою і додатнім напрямком осі Ох, відкладений проти годинникової стрілки, називають **кутом нахилу прямої** до осі Ох (*рис. 10*).

10. **Кутовим коефіцієнтом прямої** називають тангенс кута нахилу прямої до осі Ох , тобто $k = \operatorname{tg} \alpha$.

11. Ординату **b** точки перетину прямої з віссю Оу називають **початковою ординатою** або відрізком, який відтинає пряма на осі Оу. Абсцису **а** точки перетину прямої з віссю Ох називають відрізком, який відтинає пряма на осі Ох (*рис. 10*).

12.**Загальне рівняння прямої** має вигляд:

$$Ax + By + C = 0, \tag{8}$$

де (А; В) — координати нормального вектора прямої.

13.**Рівняння прямої, що проходить через дану точку**$M_0(x_0;\ y_0)$ **перпендикулярно до даного вектора** $\overrightarrow{N} = (A;\ B)$, має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{9}$$

14**. Рівняння прямої, що проходить через дану точку** $M_0(x_0;\ y_0)$ **паралельно до даного вектора** $\overrightarrow{S} = (l;\ m)$, має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \tag{10}$$

Це рівняння називають ще **канонічним рівнянням прямої**

14. **Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд**:

$$y = kx + b, \tag{11}$$

де k — кутовий коефіцієнт прямої; b — її початкова ордината.

15.**Рівняння прямої у відрізках** має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{12}$$

де a і b — відрізки, які відтинає пряма на осях координат.

16. **Рівняння прямої, що проходить через дану точку** $M_0(x_0;\ y_0)$ в **даному напрямку**, має вигляд:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0), \tag{13}$$

де k — кутовий коефіцієнт прямої.

17. **Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки**$M_1(x_1;\ y_1)$і $M_2(x_2;\ y_2)$, має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{14}$$

*17.**Зауваження.** Під час використання рівняння* (14) *може трапитись, що, наприклад,* $x_2 = x_1$*. Тоді рівняння матиме вигляд.*

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Незважаючи на абсурдність, таке рівняння є цілком справедливим;від нього можна легко перейти до рівняння:$x = x_1$, *яке задає пряму, паралельну до осі* Oy.

Приклад 3. Дано координати вершин чотирикутника ABCD: $A(-3;-1), B(2;\ 5), C(7;4), D(\ 4;-1)$. Знайти точку перетину його діагоналей. Виконати рисунок.

Розв'язання. Складемо рівняння прямих AC і BD. Для цього підставимо координати відповідних точок у рівняння (14):

$\frac{x-x_A}{x_C-x_A} = \frac{y-y_A}{y_C-y_A}$, $\qquad$ $\frac{x-x_B}{x_D-x_B} = \frac{y-y_B}{y_D-y_B}$,

$\frac{x-(-3)}{7-(-3)} = \frac{y-(-1)}{4-(-1)}$, $\qquad$ $\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-5}{-1-5}$,

$\frac{x+3}{10} = \frac{y+1}{5}$, $\qquad$ $\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{-6}$,

$\frac{x+3}{2} = y + 1$, $\qquad$ $x - 2 = \frac{y-5}{-3}$,

$x + 3 = 2y + 2$, $\qquad$ $-3x + 6 = y - 5$,

$x - 2y + 1 = 0.3$ $\qquad$ $x + y - 11 = 0$.

Отже, $x - 2y + 1 = 0$ – рівняння діагоналі AC ; $3x + y - 11 = 0$ – рівняння діагоналі BD.

P- точка перетину діагоналей чотирикутника, яка лежить на обох цих прямих, тому її координати задовольняють обидва знайдені рівняння. Це означає, що координати точки P будуть розв'язком системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ 3x + y — 11 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y - 1, \\ 3 \cdot (2y - 1) + y - 11 = 0: \end{cases}$$

$$6y - 3 + y - 11 = 0,$$
$$7y = 14,$$
$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ y = 2; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3, \\ y = 2. \end{cases}$$

Отже, P(3; 2) — точка перетину діагоналей чотирикутника ABCD. У прямокутній системі координат будуємо заданий чотирикутник і його діагоналі *(Рис. 11)*

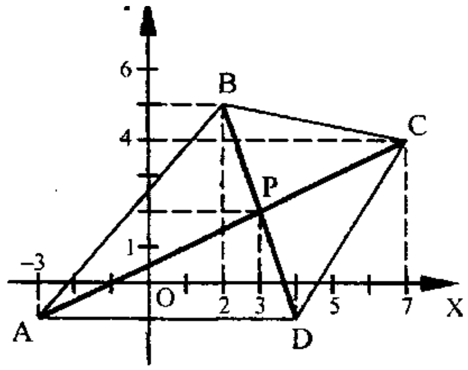


Рис.11

Приклад 4. Пряму задано загальним рівнянням $3x — 5y + 15 = 0$.

Знайти:

1)нормальний вектор прямої;

2)кутовий коефіцієнт прямої;

3)кут нахилу прямої до осі Ox ;

4)рівняння прямої у відрізках;

5)канонічне рівняння прямої;

6)напрямляючий вектор прямої.

Виконати рисунок.

Розв'язання. 1) Порівнявши задане рівняння прямої з рівнянням (8), встановимо, що нормальним вектором цієї прямої буде вектор

$$\vec{N} = (3; -5),$$

оскільки його координати дорівнюють коефіцієнтам при змінних у загальному рівнянні прямої.

2) Розв'язавши відносно у задане рівняння, зведемо його до такого вигляду (11):

$$3x - 5y + 15 = 0,$$

$$5y = 3x + 15,$$
$$y = 0{,}6x + 3.$$

Як видно з рівняння (11), коефіцієнт при x дорівнює кутовому коефіцієнту прямої. Отже, шуканий кутовий коефіцієнт k = 0,6.

3) За означенням кутового коефіцієнта, він дорівнює тангенсу шуканого кута α, кута нахилу прямої до осі Ох . Тобто $\operatorname{tg}\alpha = k$. Підставивши в цю рівність знайдене вище значення k = 0,6, знайдемо:

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}0{,}6 = 0{,}54 \text{ рад}.$$

4) Перенесемо вільний член заданого рівняння в праву частину рівності і поділимо на нього обидві частини рівняння. Отримаємо шукане рівняння прямої у відрізках:

5)

$$3x - 5y = -15,$$
$$\frac{3x}{-15} - \frac{5y}{-15} = 1,$$
$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1.$$

З цього рівняння видно, що задана пряма відтинає на осях координат відрізки $a = -5$ і $b = 3$, тобто проходить через точки $A(-5;\ 0)$ і $B(0;\ 3)$.

6) Виконаємо алгебраїчні перетворення заданого рівняння:

$$3x - 5y + 15 = 0,$$
$$3x = 5y - 15,$$
$$\frac{3x}{15} = \frac{5y - 15}{15},$$
$$\frac{x}{5} = \frac{y - 3}{3}$$

Ми отримали шукане канонічне рівняння заданої прямої.

7)Порівнюючи знайдене вище,канонічне рівняння прямої з рівнянням (10), знайдемо координати шуканого напрямляючого вектора заданої прямої:

$$\vec{S} = (5;\ 3).$$

У прямокутній системі координат будуємо задану пряму, її нормальний і напрямляючий вектори (*Рис 12*).

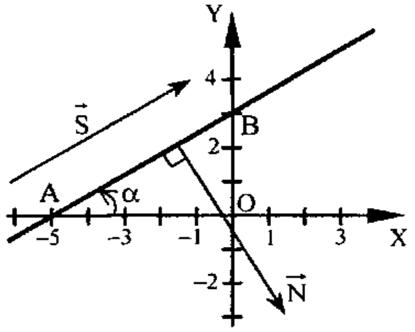


Рис.12

Завдання для роботи в аудиторії

Зауваження. *Всі завдання до розділу 3 слід виконувати методами аналітичної геометрії, а не векторної алгебри.*

№ 1. Дано координати точок $A(-7;\ 0)$ і $B(\ 0;\ 1)$. Побудувати точки А, і B_1, симетричні до точок А і В відносно прямої у = х. Обчислити периметр трапеції ABB_1A_1. Знайти координати точок перетину сторін трапеції з прямою у = х .

Вказівка. 1) *При симетрії відносно прямої* у = х *координати точки міняються місцями.*

2) *Точка перетину сторони отриманої трапеції з прямою у =* х *є серединою цієї сторони.*

Відповідь: $P = 18\sqrt{2}$лін. од.; $A_0(-3{,}5; -3{,}5)$, $B_0(0{,}5; 0{,}5)$.

№ 2. Дано координати точок $A(-2;\ 1)$ і $B(3;\ 6)$. Знайти координати точки М, що ділить відрізок АВ у відношенні λ, якщо:

а) $\lambda = 1{,}5$; б) $\lambda = -1{,}5$;в) $\lambda = 1$; *г)*$\lambda = -1$;

д) $\lambda = 0{,}2$;е) $\lambda = 2$; є) $\lambda = -2$; ж) $\lambda = -3$.

Виконати рисунок.

Відповідь: а) (1; 4) ; б) (13; 16); в) (0,5; 3,5); г) не існує; д)$\left(-\frac{7}{6}; \frac{11}{6}\right)$;е)$\left(\frac{4}{3}; \frac{13}{3}\right)$; є) (8; 11); ж) (6,5; 8,5).

№ 3. Знайти довжини медіан трикутника з вершинами А(0; 0), В(8; 0), С(0; 6). Виконати рисунок.

Відповідь: $AA_1 = 5$ лін. од.,$BB_1 = \sqrt{73}$лін. од., $CC_1 = 2\sqrt{13}$ лін.

№4. Трикутник АВС – рівнобедрений $AC = BC = 5$лін. од. Знайти координати точки С , якщо $A(-1;\ 2)$ і $B(6;\ 1)$. Виконати рисунок.

Відповідь : задача має два розв'язки: $C_1(3;\ 5), C_2(2; -2)$.

№ 5. Знайти рівняння кола, яке проходить через точки $A(\ 5;\ -1)$, $B(-2;\ 6)$ і $C(\ 2;\ 8)$. Вказати координати центра і радіус кола.

Виконати рисунок.

Відповідь: $(x-2)^2+(y-3)^2 = 25$; $O_1(2;3)$; $R = 5$ лін. од..

№ 6. Знайти центри і радіуси кіл, заданих рівняннями:

а) $x^2+y^2-10x+6y+30=0$; б) $x^2+y^2+2x-4y-11=0$;

в) $x^2+y^2+4x+8y+11=0$; г) $x^2+y^2+6x=0$.

Відповідь: а) $O_1(5;-3)$, $R=2$лін. од,; б) $O_1(-1;2)$, $R=4$лін. од.;

в) $O_1(-2;-4)$, $R=3$ лін. од.; г) $O_1(-3;0)$, $R=3$ лін. од..

№ 7. Скласти рівняння прямої,

а) що відтинає на осі Oy відрізок $b=3$ і утворює кут 120° з додатнім напрямком осі Ox ;

б) що проходить через точку A(1; 2) і має кутовий коефіцієнт k = 2 ;

в) що проходить через точки $B(2;-1)$ і $C(-4;8)$;

г) що відтинає на осях Ox і Oy відрізки $a=6$ і $b=-3$;

д) що проходить через точку $D(-2;-3)$і перпендикулярна до вектора $\vec{N}=(1;-2)$;

е) що проходить через точку $E(3;-2)$ і паралельна до вектора $\vec{S}=(2;-1)$.

Знайдені рівняння звести до вигляду загального рівняння прямої. Виконати рисунок.

Відповідь: а) $\sqrt{3}\cdot x+y-3=0$; б) $2x-y=0$;

в) $3x+2y-4=0$; г) $x-2y-6=0$;

д) $x-2y-4=0$; е) $x+2y+1=0$.

№ 8.Дано загальні рівняння прямих. Знайти рівняння цих прямих у відрізках. Знайти кутові коефіцієнти прямих. Виконати рисунок.

а) $2x-3y-6=0$; б) $3x+y-3=0$;

в) $10x+2y-5=0$; г) $8x-5y-10=0$.

Вказівка. *Для знаходження кутового коефіцієнта прямої, заданої рівнянням у відрізках, можна скористатися рівністю* $k=\frac{b}{a}$, *доведення якої пропонуємо виконати самостійно.*

Відповідь:

а) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$, $k=\frac{2}{3}$; б) $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}=1$, $k=-3$;

в) $\frac{x}{0{,}5}+\frac{y}{2{,}5}=1$, $k=-5$; г) $\frac{x}{1{,}25}+\frac{y}{-2}=1$, $k=1{,}6$;

№ 9. Рівнобедрена трапеція з основами 8 лін. од. і 2 лін. од. має гострий кут 45°. Скласти рівняння прямих, що містять сторони трапеції, взявши за вісь Ox більшу основу трапеції, а за вісь Oy – вісь симетрії трапеції. Виконати рисунок.

Відповідь: $x+y-4=0$, $x-y+4=0$, $y=0$, $y=3$.

№ 10. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-4;\ 6)$і утворює з осями координат трикутник площею 6 квадратних одиниць. Виконати рисунок.

Відповідь: два розв'язки: $3x + y + 6 = 0$ і $3x + 4y - 12 = 0$.

№ 11. Скласти рівняння прямої, яка відтинає на осях координат однакові відрізки. Відомо, що довжина відрізка цієї прямої (він міститься між осями координат) дорівнює $5\sqrt{2}\,\text{лін. од.}$. Виконати рисунок.

Відповідь: два розв'язки: $x + y - 5 = 0$ і $x + y + 5 = 0$.

№ 12. Скласти рівняння прямих, які паралельні осям координат і проходять через точку $A(-3;\ 4)$. Виконати рисунок.

Відповідь: $x + 3 = 0$ і $y - 4 = 0$.

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ №3-1**; умову і дані відповідного варіанту взяти на сторінці ___.

ПЗ-2. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ПРЯМИХ. КУТ МІЖ ПРЯМИМИ

Теоретичні відомості

1. Відстань від точки $M(x_0;\ y_0)$ до прямої, заданої рівнянням Ax + By + C = 0 , обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Приклад 1.Знайти відстані від точок $M(-2;\,3)$ і $K(\,1;\,2)$ до прямої AB, заданої рівнянням $2x + y - 4 = 0$. Виконати рисунок.

Розв'язання.1) Підставивши координати точки M і коефіцієнти з рівняння прямої AB у формулу (1), матимемо:

$$d_M = \frac{|2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-4 + 3 - 4|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \\ = \sqrt{5}\,\text{лін. од.}$$

Отже, шукана відстань d_M від точки M до прямої AB дорівнює $\sqrt{5}$лінійних одиниць (*рис. 13*).

3)Підставивши координати точки K і коефіцієнти з рівняння прямої AB у формулу (1), знайдемо:

$$d_M = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 2 - 4|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0\ \text{лін. од.}$$

Отже, шукана відстань d_K від точки К до прямої АВ дорівнює 0 лінійних одиниць. Це означає, що точка К лежить на прямій АВ (*рис. 13*).

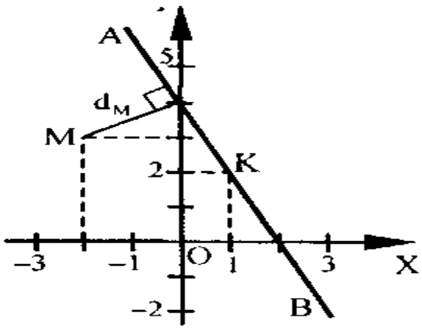


Рис. 13

2. **Кут між прямими** з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2 знаходять за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Приклад *2.* Знайти кут між прямими, заданими рівняннями:

$x + 3y + 2 = 0$ та $x + y - 5 = 0.$

Розв'язання. Розв'язавши відносно у рівняння заданих прямих, зведемо кожне з них до вигляду рівняння з кутовим коефіцієнтом *(див. ПЗ-1, п. 15, формула (11)):*

1) $x + 3y + 2 = 0,$

$$3y = -x - 2,$$

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}. \qquad (3)$$

2) $x + y - 5 = 0,$

$$y = -x + 5. \qquad (4)$$

Кутові коефіцієнти заданих прямих дорівнюють коефіцієнтам при x у рівняннях (3) і (4), тобто:

$$k_1 = -\frac{1}{3}, \quad k_2 = -1.$$

Підставивши знайдені значення k_1 і k_2 у формулу (2), знайдемо тангенс шуканого кута:

$$tg\varphi = \left|\frac{-1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-1)}\right| = \left|\frac{-1+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\right| = \left|\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}\right| = |-0{,}5| = 0{,}5.$$

Отже, кут між заданими прямими $\varphi = \mathrm{arctg}0{,}5 \approx 0{,}463$ рад.

3. **Умови паралельності прямих**.

а) Прямі з кутовими коефіцієнтами k_1і k_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли

$$k_1 = k_2. \qquad (5)$$

б) Прямі, задані рівняннями

$A_1x + B_1y + C_1 =0$ і $A_2x + B_2y + C_2 =0$,

паралельні тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{A_1}{A_2}= \frac{B_1}{B_2}. \qquad (6)$$

4. Умови перпендикулярності прямих.

а) Прямі з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2 перпендикулярні тодіі тільки тоді, коли

$$k_1= -\frac{1}{k_2} \qquad (7)$$

б) Прямі, задані рівняннями

$A_1x + B_1y + C_1 =0$ і $A_2x + B_2y + C_2 =0$,

перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли

$$A_1 A_2+ B_1 B_2 =0 \qquad (8)$$

Приклад 3.Пряму AB задано рівнянням x — 2y + 4 = 0. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку M(2; 1)

а) паралельно до прямої AB ;

б) перпендикулярно до прямої AB.Виконати рисунок.

Розв'язання.Розв'язавши відносно у рівняння прямої AB, зведемо його до вигляду рівняння з кутовим коефіцієнтом *(див. ПЗ-1, п. 15, формула (11)):*

$$x-2y + 4 = 0,$$
$$2y = x + 4,$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \qquad (9)$$

Кутовий коефіцієнт прямої AB дорівнює коефіцієнту при xв рівнянні (9), тобто:

$$k_{AB} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

а) Нехай МК — шукана пряма. За умовою задачі МК || АВ, тому за умовою паралельності прямих *(див. п. 3(а))*матимемо:

$$k_{MK} = k_{AB} = 0{,}5\ .$$

Підставивши координати точки М і знайдене значення кутового коефіцієнта прямої МК у рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямку *(див. ПЗ-1, п.І7, рівність (13)),*отримаємо шукане рівняння прямої МК *(Рис. 14):*

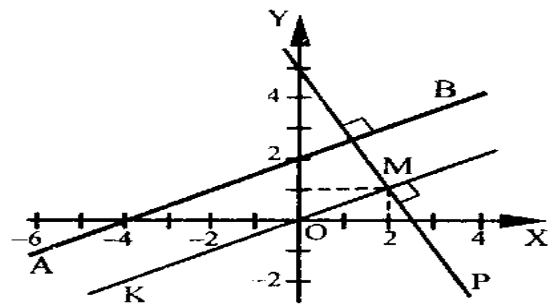


Рис. 14

$$y - y_M = k_{MK}\cdot(x - x_M),$$
$$y - 1 = 0{,}5\cdot(x - 2),$$
$$2y - 2 = x - 2,$$
$$x - 2y = 0\ .$$

б) Нехай МР *(рис. 14)* — шукана пряма. Відомо, що МР⊥АВ, тому за умовою перпендикулярності прямих (*див. п.4(а), рівність (7))*матимемо:

$$k_{MP} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{0{,}5} = -2.$$

Підставивши координати точки М і знайдене значення кутового коефіцієнта прямої МР у рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямку (*див. ПЗ-1, п.17, рівність (13)),*отримаємо шукане рівняння прямої МР:

$$y - y_M = k_{MK}\cdot(x - x_M),$$
$$y - 1 = -2\cdot(x - 2),$$
$$y - 1 = -2x + 4,$$
$$2x + y - 5 = 0.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Зауваження. *Всі завдання до розділу 3 слід виконувати за допомогою методів аналітичної геометрії, а не векторної алгебри.*

№ 1. Серед прямих, заданих рівняннями:

1) $3x–2y + 7 = 0$, 2) $6x + 4y–5 = 0$, 3) $2x–3y–6 = 0$, 4) $6x–4y–9 = 0$,

знайти пари паралельних і пари перпендикулярних між собою прямих. Довести це. Виконати рисунок.

Відповідь:прямі 1) і 4) — паралельні; 2) і 3) — перпендикулярні.

№ 2. Дано координати вершин трикутника: A(3; 4), B(–2;–1), C(4; —7). Знайти величини його кутів і довжину висоти CD.

Вказівка.*Довжина висоти CD дорівнює відстані від точки* C *до прямої* AB.

Відповідь:$\angle A = 1{,}2$; $\angle B = 90°$; $\angle C = \operatorname{arctg}\frac{5}{6}$; $CD = 6\sqrt{2}$лін. од.

№ 3. Дано рівняння сторін трикутника: $x+3y–7= 0$ — сторони AB, $4x-y-2 = 0$ —сторони BC, $6x+8y–35 = 0$ – сторониAC. Знайти довжину висоти BD цього трикутника.

Вказівка.*Довжина висоти*BD*дорівнює відстані від точки*B *(точки перетину прямих*AB і BC*) до прямої* AC.

Відповідь:BD = 1,3 лін. од.

№ 4. Скласти рівняння прямої, паралельної до прямої $x + 3y = 0$ і проходить через точку M перетину прямих $5x-y 4-10 = 0$ та $x + y + 2 = 0$. Виконати рисунок.

Відповідь:$x + 3y + 2 = 0$.

№ 5. Скласти рівняння прямих, які перпендикулярні до прямої $15x + 8y = 0$ і лежать на відстані 4 лінійні одиниці від точки A(4; –2). Виконати рисунок.

Відповідь: $8x–15y + 6 = 0$ та $8x – 15y– 130 = 0$

№ 6. Знайти відстань між паралельними прямими

$3x + y - 3\sqrt{10} = 0$ та $6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0.$

Вказівка. *Вибрати на одній прямій довільну точку (наприклад, точку з абсцисою*

$x = 0$) і знайти відстань від цієї точки до другої прямої.

Відповідь: d= 5,5 лін. од..

№ 7. Знайти рівняння бісектрис кутів, утворених прямими

$x + y - 5 = 0$ та $7x - y - 19 = 0.$

Виконати рисунок.

Вказівка.*Скористатися тим, що кожна точка бісектриси рівновіддалена від сторін кута. Знайти відстані від точки* M(x; y) *до кожної з даних прямих і прирівняти ці відстані Отримані рівності будуть шуканими рівняннями бісектрис.*

Відповідь: $3x + y - 11 = 0$ та $x - 3y + 3 = 0.$

№ 8. Дано координати двох вершин трикутника ABC : $A(-3; -5)$ і B(4; 2). Знайти координати третьої вершини трикутника, якщо його висоти перетинаються у точці $M(-3; -1)$. Виконати рисунок.

Відповідь: $C(-6; 2)$.

№ 9. Скласти рівняння прямих, які проходять через точку $M(5; 1)$ і утворюють з прямою $2x + y - 4 = 0$ кут $\varphi = 45°$. Виконати рисунок.

Відповідь: $x + 3y - 8 = 0$ та $3x - y - 14 = 0$.

№ 10. Скласти рівняння висот трикутника, якщо відомо рівняння його сторін:

$5x - 3y - 14 = 0,\ 3x - 5y + 14 = 0,\ x + y - 6 = 0.$ Виконати рисунок.

Відповідь: $5x + 3y - 26 = 0, 3x + 5y - 26 = 0$, та $x - y = 0$.

№ 11. Знайти відстань від точки $M(2; -1)$ до прямої, яка відтинає на осях Ox і Oy відрізки $a = 8$ і $b = 6$ лінійних одиниць відповідно. Виконати рисунок.

Відповідь: $d_M = 4{,}4$ лін. од..

№ 12. Знайти кути трикутника, сторони якого задано рівняннями $x + y - 4 = 0,\ 3x - y = 0,\ x - 3y - 8 = 0$. Виконати рисунок.

Відповідь: $\angle A = \angle B = \mathrm{arctg}2;\ \angle C = \mathrm{arctg}\frac{4}{3}$.

№ 13. Точки $A(1; 2)$ та $C(3; 6)$ є протилежними вершинами квадрата ABCD. Знайти координати двох інших вершин. Виконати рисунок.

Відповідь: $B(0; 5)$, $0(4; 3)$.

№ 14. Відомо координати вершини $A(2;2)$ трикутника і рівняння двох його висот: $x + y - 2 = 0$ та $9x - 3y - 4 = 0$. Скласти рівняння сторін трикутника. Виконати рисунок.

Відповідь: $x + 3y - 8 = 0, y - x = 0, 7x + 5y - 8 = 0$.

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ № 3 - 2;** умову і дані відповідного варіанту взяти на сторінці **___.**

ПЗ - 3. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ: ЕЛІПС, ГІПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА

Теоретичні відомості

1. **Кривими другого порядку** називають лінії, які у прямокутній декартовій системі координат на площині задаються рівняннями другого степеня відносно змінних x та y. Вище ми вже розглядали один тип кривих другого порядку — **коло***(див. ПЗ-1, п.5).*

2. **Еліпсом** називають лінію, яка при певному виборі системи координат задається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (1)$$

де a і b — сталі, причому a > b> 0 . Рівняння (1) називають **канонічним рівнянням еліпса**.

3. Про еліпс, який задано рівнянням (1), кажуть, що він займає **стандартне положення відносно осей координат** *(рис. 15).*Надалі ми розглядатимемо лише таке розміщення еліпса. У стандартному положенні еліпс **симетричний відносно осей координат.**

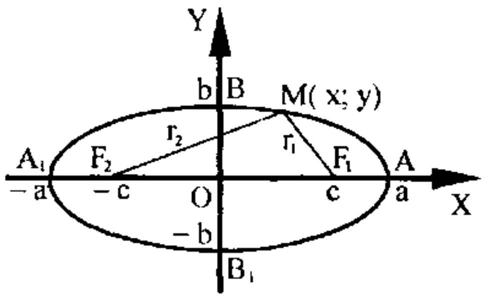


Рис. 15

4. За формою еліпс є деформованим (стиснуте до осі Ox) колом. Коло – частинний випадок еліпса. Дійсно, якщо a = b, то рівняння (1) набуває вигляду:

$$x^2+y^2=a^2 \qquad (2)$$

і є рівнянням кола з центром у початку координат і радіусом R = a лінійних одиниць *(див. ПЗ-1, п. 5).*

5. Число a називають **великою**, а число b — **малою піввіссю еліпса**. Великою і малою віссю еліпса називають відповідно числа 2a і2b.

6. Точки A(a; 0), A,(− a; 0), B(0; b), B,(0; − b) називають **вершинами еліпса** *(рис. 15).*Точки $F_1(c;\ 0)$ і $F_2(-c;\ 0)$, де

$$c\ =\ \sqrt{a^2-b^2}, \qquad (3)$$

називають **фокусами еліпса** *(рис. 15).*Число c називають **фокусною відстанню еліпса**

8. Якщо еліпс набуває форми кола, тобто a = b , то c = 0 і фокуси еліпса «збігаються», стають центром цього кола.

9. **Ексцентриситетом еліпса** називають число

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{4}$$

де a — велика піввісь еліпса, c — його фокусна відстань.

10. З означення еліпса і формул (3) та (4) випливає, що ексцентриситет еліпса задовольняє умову $0 \leq \varepsilon < 1$. За величиною ε можна робити висновки про форму еліпса:

а) якщоεнаближається до нуля, то еліпс набуває форми, близької до кола;

б) якщо ε= 0, то еліпс є колом;

в) якщо ε наближається до одиниці, то еліпс набуває більш розтягнутої вздовж осі Ох форми.

11.Відстані від точки М, що лежить на еліпсі, до його фокусів називають **фокальними радіус-векторами** цієї точки і позначають $MF_1 = r_1$ та $MF_2 = r_2$ *(рис. 15).*

12. **Фокальні радіус-вектори** точки М(x; y), яка лежить на еліпсі *(рис. 15)* обчислюються за формулами:

$$r_1 = a - \varepsilon x_M, \qquad r_2 = a + \varepsilon x_M. \tag{5}$$

де a — велика піввісь еліпса, ε— його ексцентриситет.

13.**Характеристична властивість еліпса**. Сума відстаней від будь-якої точки еліпса до його фокусів є сталою величиною і дорівнює 2a (великій осі еліпса), тобто для будь-якої точки еліпса:

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{6}$$

13. З характеристичної властивості еліпса випливає спосіб його механічної побудови. Якщо відоме розташування фокусів еліпса і його велика вісь 2a, то для побудови еліпса слід взяти нитку довжиною 2a, закріпити її кінці у фокусах еліпса, вставити в прогин нитки олівець і, натягнувши нитку, описати цим олівцем криву. Це і буде шуканий еліпс.

Приклад 1.У еліпса, який займає стандартне положення відносно осей координат і проходить через точку М $(2; \sqrt{3})$, велика піввісь удвічі більша, ніж його мала піввісь. Знайти:

1) півосі еліпса і його канонічне рівняння;
2) фокусну відстань і координати фокусів еліпса;
3) ексцентриситет еліпса;

4) фокальні радіус-вектори точки M.
5) Виконати рисунок.

Розв'язання. 1) Шукане канонічне рівняння еліпса має вигляд рівняння (1).За умовою задачі $a = 2b$, тобто $a^2 = 4b^2$, тоді шукане рівняння еліпса матиме вигляд:

$$\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7}$$

Точка M лежить на еліпсі, тому її координати повинні задовольняти рівняння цього еліпса. Підставимо координати точки M у рівняння (7) і знайдемо b (малу піввісь еліпса):

$$\frac{4}{4b^2} + \frac{3}{b^2} = 1,$$
$$4 + 12 = 4b^2,$$
$$4b^2 = 16,$$
$$b^2 = 4,$$
$$b = 2.$$

Велика піввісь еліпса $a = 2b = 4$. Підставивши знайдені півосі еліпса в рівняння (1), отримаємо шукане канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1. \tag{8}$$

2) Підставивши у формулу (3) знайдені вище півосі еліпса, обчислимо c (фокусну відстань еліпса):

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2 \cdot \sqrt{3}.$$

Фокусами еліпса (*див. п. 7*) будуть точки

$$F_1(2 \cdot \sqrt{3};\ 0) \quad \text{та} \quad F_2(-2 \cdot \sqrt{3};\ 0).$$

3) Підставивши значення a і c у формулу (4), знайдемо ε (ексцентриситет еліпса):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4) Знайдемо фокальні радіус-вектори точки M, підставивши її абсцису $x_M = 2$ і знайдені раніше значення a та ε у формули (5):

$$r_1 = MF_1 = a - \varepsilon x_M = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 4 - \sqrt{3}\ \text{лін. од.};$$
$$r_2 = MF_2 = a + \varepsilon x_M = 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 4 + \sqrt{3}\ \text{лін. од.};$$

На координатній площині побудуємо вершини заданого еліпса (точки з координатами (4; 0), $(-4;\ 0)$, (0; 2) та $(0;\ -2)$) і точку $M\left(2;\sqrt{3}\right)$.Через побудовані точки проведемо еліпс (*рис. 16*)

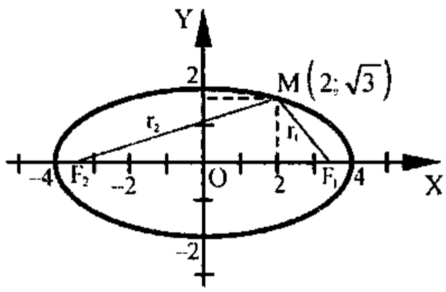


Рис. 16

15. Гіперболою називають лінію, яка при певному виборі системи координат задається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (9)$$

де a>0 і b>0 — сталі. Рівняння (9) називають **канонічним рівнянням гіперболи**.

18. Про гіперболу, яку задано рівнянням (9), кажуть, що вона займає стандартне положення відносно осей координат*(рис. 17)*.

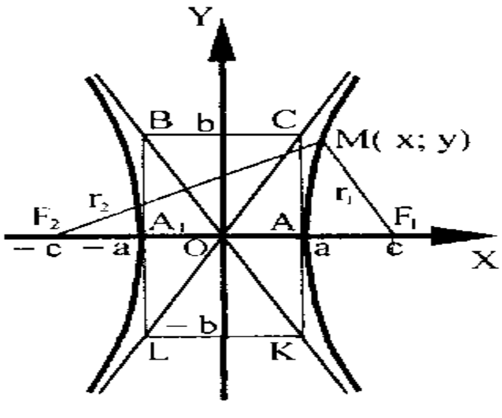


Рис. 17

19. Надалі ми розглядатимемо лише таке розміщення гіперболи. У стандартному положенні гіпербола симетрична відносно осей координат. Вона не перетинає вісь Oy, а вісь Ox перетинає у двох точках A(a; 0) та $A_1(-a;\ 0)$, які називають **вершинами гіперболи** *(рис. 17)*.

17.Число **a** називають **дійсною,** а число **b** — **уявною піввіссю**

гіперболи. Дійсною і уявною віссю гіперболи називають відповідно числа 2a і 2b.

18.Точки $F_1(\mathrm{c};\ 0)$ і $F_2(-\mathrm{c};\ 0)$, де

$$\mathrm{c} \ = \ \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}, \tag{10}$$

називають **фокусами гіперболи** (*рис.17*). Число **с** називають **фокусною відстанню гіперболи.**

19. Якщо точка, рухаючись у нескінченність вздовж деякої кривої, необмежено наближається до певної прямої, то кажуть, що ця пряма є **асимптотою** кривої.

20. **Асимптотами гіперболи** є прямі

$$\mathrm{y} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{x} \quad \text{та} \quad \mathrm{y} = -\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{x}\,, \tag{11}$$

де a і b — півосі гіперболи. Це прямі CL і BK *(Рис. 17).*

21.Прямокутник BCKL (*рис.17*) з вершинами B$(-\mathrm{a};\ \mathrm{b})$, C(a; b), K(a; $-\mathrm{b}$) і Ь$(-\mathrm{a};\ -\mathrm{b})$ називають **асимптотичним прямокутником** гіперболи. Асимптоти гіперболи є продовженням діагоналей цього прямокутника.

22.Якщо півосі гіперболи однакові (a = b), то гіперболу називають рівносторонньою, а її рівняння набуває вигляду:

$$\mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 = \mathrm{a}^2 \tag{12}$$

Рівняння асимптот рівносторонньої гіперболи мають вигляд $\mathrm{y} \ = \ \pm\, \mathrm{x}$, а її фокусна відстань c = a·$\sqrt{12}$.

23.**Ексцентриситетом гіперболи** називають число

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}, \tag{13}$$

де a — дійсна піввісь гіперболи, c — її фокусна відстань.

24. З формул (10) та (13) випливає, що ексцентриситет гіперболи задовольняє умову $\varepsilon > 1$. За величиною ε можна робити **висновки про форму гіперболи**:

а) якщо ε зростає, то гіпербола розтягується вздовж осі Oy;

б) якщо $\varepsilon \ = \ \sqrt{2}$, то гіпербола є рівносторонньою;

в) якщо ε наближається до одиниці, то гіпербола набуває більш стиснутої до осі Ox форми.

25. Відстані від точки M, яка лежить на гіперболі, до її фокусів називають **фокальними радіус-векторами** цієї точки і позначають

$MF_1 = r_1$, та $MF_2 = r_2$ *(рис.17).*

26**. Фокальні радіус-вектори** точки M(x;y), яка лежить на гіперболі *(рис. 17),* обчислюються за формулами:

$$r_1 = |\varepsilon x_M - a|, \qquad \text{та} \qquad r_2 = |\varepsilon x_M + a|, \tag{14}$$

де a — дійсна піввісь гіперболи; ε— її ексцентриситет.

28. **Характеристична властивість гіперболи.** Модуль різниці відстаней від будь-якої точки гіперболи до її фокусів є сталою величиною і дорівнює 2a (дійсній осі гіперболи), тобто для будь-якої точки гіперболи:

$$|r_1 - r_2| = 2a. \tag{15}$$

Приклад 2. Гіпербола займає стандартне положення відносно осей координат. її уявна піввісь $b = 2$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Знайти:

1) дійсну піввісь і канонічне рівняння гіперболи;
2) фокусну відстань гіперболи та координати її фокусів;
3) рівняння асимптот гіперболи;
4) координати і фокальні радіус-вектори точки M , яка лежить на гіперболі і має абсцису $x_м = -5$ та ординату $y_м > 0$.

Виконати рисунок.

Розв'язання.1) Підставивши рівність (10) у рівність (13), матимемо:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}. \tag{16}$$

Підставимо в рівність (16) значення b та ε, відомі з умови задачі, і знайдемо a (дійсну піввісь гіперболи)

$$\frac{\sqrt{13}}{3} = \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}},$$

$$\frac{13}{9} = 1 + \frac{4}{a^2},$$

$$\frac{4}{9} = \frac{4}{a^2},$$

$$a^2 = 9,$$

$$a = 3.$$

Підставивши у рівняння (9) знайдені півосі гіперболи, отримаємо її канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1. \tag{17}$$

2) Підставимо у формулу (10) півосі гіперболи і обчислимо c (фокусну відстань гіперболи):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

Фокусами гіперболи *(див. п. 18)* будуть точки

$$F_1(\sqrt{13};\ 0) \quad \text{та} \quad F_2(-\sqrt{13}; 0).$$

3) Знайдемо рівняння асимптот гіперболи, підставивши її півосі у формули (11). Матимемо:

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{2x}{3},$$

$$3y = \pm 2x.$$

Отже, шукані рівняння асимптот:

$$2x - 3y = 0 \quad \text{та} \quad 2x + 3y = 0.$$

4) Підставимо в рівняння гіперболи (17) абсцису точки M (за умовою задачі $x_M = -5$) і знайдемо її ординату y_M:

$$\frac{(-5)^2}{9} - \frac{y_M^2}{4} = 1,$$

$$4 \cdot 25 - 9y_M^2 = 36,$$

$$9y_M^2 = 100 - 36,$$

$$y_M^2 = \frac{64}{9},$$

$$y_M = \pm\frac{8}{3}$$

За умовою задачі $y_M > 0$, тому робимо висновок, що $y_M = \frac{8}{3}$.

Отже, шукана точка $M\left(-5; \frac{8}{3}\right)$.

Знайдемо фокальні радіус-вектори точки M, підставивши її абсцису $x = -5$ і значення $\mathbf{a}$ та $\boldsymbol{\varepsilon}$ гіперболи у формули (14):

$$r_1 = MF_1 = |\varepsilon x_M - a| = \left|\frac{\sqrt{13}}{3} \cdot (-5) - 3\right| = \frac{5 \cdot \sqrt{13}}{3} + 3 \text{ лін. од.};$$

$$r_1 = MF_1 = |\varepsilon x_M + a| = \left|\frac{\sqrt{13}}{3} \cdot (-5) + 3\right| = \frac{5 \cdot \sqrt{13}}{3} - 3 \text{ лін. од.};$$

На координатній площині будуємо асимптотичний прямокутник гіперболи *(див. п. 21)*,сторони якого паралельні до осей координат *(рис. 18)*.

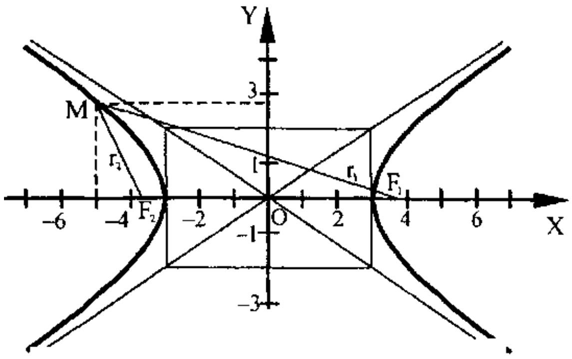


Рис. 18

Точки з координатами (3; 0) і $(-3; 0)$ будуть вершинами гіперболи*(див. п. 16).*

Проведемо діагоналі асимптотичного прямокутника і продовжимо їх за межі цього прямокутника. Отримані прямі будуть асимптотами гіперболи. Побудуємо фокуси гіперболи і точку М, координати яких відомі. Орієнтуючись за асимптотами, проведемо через вершину $(-3;\ 0)$і точку М одну вітку гіперболи. Симетрично до неї відносно осі Оу будуємо другу вітку гіперболи *(Рис. 18).*

28.**Параболою** називають лінію, якапри певному виборі системи координат задається рівнянням:

$$y^2 = 2px, \tag{18}$$

де $p > 0$— стала, яку називають **параметром параболи.** Рівняння (18) називають **канонічним рівнянням параболи**.

29.Парабола, задана рівнянням (18), **симетрична відносно осі Ох** *(рис. 19)* і проходить через початок координат. Точку параболи, яка лежить на її осі симетрії (точку 0(0; 0)), називають **вершиною параболи** *(рис. 19).*

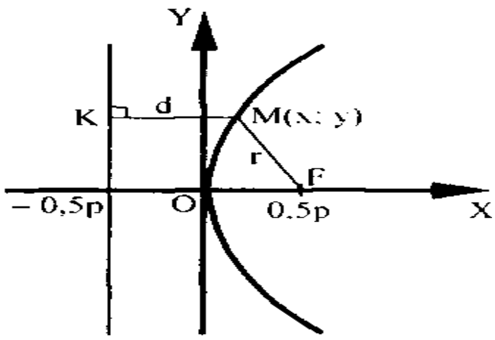


Рис. 19

30.**Фокусом параболи**, заданої рівнянням (18), називають точку Р(0,5р; 0), де р – параметр параболи (р*ис.19).*

31.Пряму $x = — 0,5p$, де p — параметр параболи, називають **директрисою параболи***(рис. 19).*

31.Відстань від точки М, що лежить на параболі, до її фокуса називають **фокальним радіус-вектором** цієї точки і позначають $MF = r$. Відстань від точки М до директриси параболи позначають $MK = d$ *(рис. 19).*

32.**Характеристична властивість параболи**. Кожна точка параболи рівновіддалена від її фокуса та директриси, тобто для будь-якої точки параболи

$$r = d. \tag{19}$$

33.**Фокальний радіус-вектор** точки М(x;y), яка лежить на параболі
*(рис. 19),*обчислюються за формулою:

$$r = d = x_M + 0{,}5p, \tag{20}$$

де p — параметр параболи.

35. Залежно від розміщення параболи відносно осей координат її рівняння може набувати іншого, ніж (18) вигляду; відповідно зміняться координати фокуса, рівняння директриси, формули для обчислення фокальних радіус-векторів точок параболи тощо.

1) $x^2 = 2py$, де $p > 0$. Парабола симетрична відносно осі Оу, її вершина знаходиться в початку координат, вітки напрямлені у бік додатного напрямку осі Оу*(рис. 20)*Рівняння директриси параболи $y = -0{,}5p$, її фокус F(0; 0,5p), фокальний радіус-вектор точки М(x;y), що лежить на параболі, обчислюється за формулою $r = y_M + 0{,}5p$.

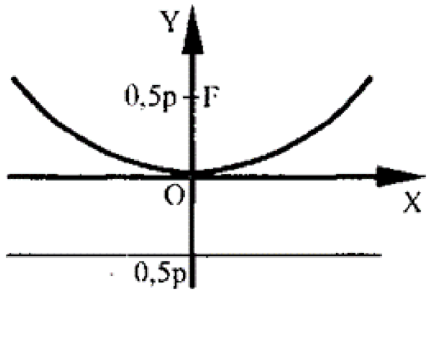


Рис.20

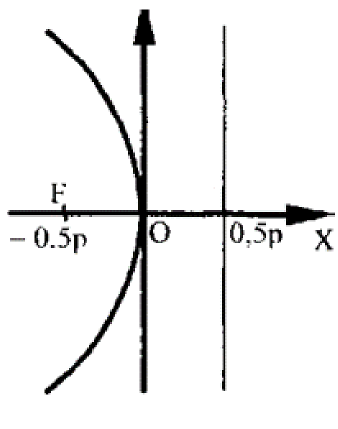


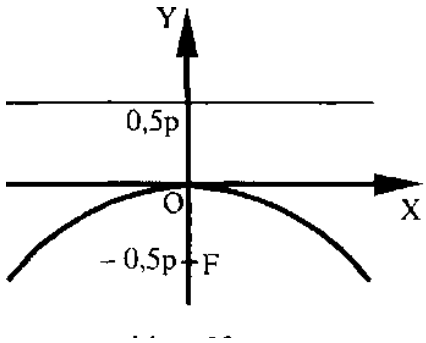
Рис. 21

2) $y^2 = -2px$, де $p > 0$. Парабола симетрична відносно осі Ох , її вершина знаходиться в початку координат, але вітки напрямлені у бік

від'ємного напрямку осі Ох *(Рис. 21)*. Рівняння директриси параболи $x = 0{,}5p$, її фокус F(—0,5p; 0), фокальний радіус-вектор точки М(х; у), що лежить на параболі, обчислюється за формулою

$$r = 0{,}5p - x_M.$$

3) $x^2 = -2py$, де $p > 0$. Парабола симетрична відносно осіОу, її вершина знаходиться в початку координат, але вітки напрямлені у бік від'ємного напрямку осі Оу*(рис. 22)*. Рівняння директриси параболи $y = 0{,}5p$, її фокус F(0;-0,5p), фокальний радіус-вектор точки М(х;у), що лежить на параболі, обчислюється за формулою $r = 0{,}5p - y_M$.



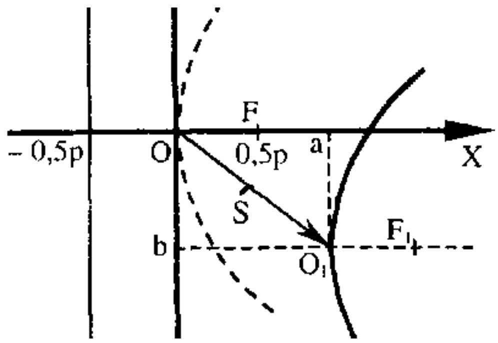


Рис. 22

4) $(y - b)^2 = 2p(x - a)$, де р>0, а і b — сталі. Парабола отримана паралельним перенесенням параболи $y^2 — 2px$ на вектор $\vec{S}$= (a; b). Вершина параболи знаходиться у точці O_1(a; b).Дляповернення до канонічного рівняння досить виконати зворотній паралельний перенос (повернути вершину параболи у початок координат). Таким же чином зміниться, в результаті паралельного перенесення на вектор $\vec{S}$ = (a;b), рівняння будь-якої лінії.

Приклад 3. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої лежить на однаковій відстані від точки F(–2; 3) і прямої у = 1. Привести отримане рівняння до канонічного вигляду і побудувати лінію.

Розв'язання. Нехай точка М(х; у) належить шуканій лінії. Знайдемо відстань від цієї точки до прямої у=1 *(див. «Теоретичні відомості» до ПЗ-2, п. 1, формула (1))*:

$$d_M = \frac{|y - 1|}{\sqrt{0 + 1}} = |y - 1|.$$

Підставивши координати точок М(х; у) та F(−2; 3) у формулу для обчислення відстані між точками *(див. ПЗ-1, п.1, формула (1))*,знайдемо відстань MF:

$$MF = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}.$$

Точка М належить шуканій лінії, тому з умови задачі випливає, що

$MF = d_M$. Отже, рівняння шуканої лінії:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2} = |y-1|. \qquad (21)$$

Приведемо отримане рівняння до канонічного вигляду. Для цього піднесемо обидві частини рівності (21) до квадрату:

$$(x+2)^2+(y-3)^2 = (y-1)^2,$$
$$(x+2)^2 = (y-1)^2-(y-3)^2.$$

Застосувавши до правої частини отриманої рівності формулу різниці квадратів *(див.* [8], *стор. 10, формули 20.1, 21.1)*,матимемо:

$$(x+2)^2 = (y-1-(y-3))\cdot(y-1+(y-3)),$$
$$(x+2)^2 = 2\cdot(2y-4),$$
$$(x+2)^2 = 4\cdot(y-2).$$

Одержане рівняння є рівнянням параболи з вершиною в точці $O_1(-2;\ 2)$ *(див. п. 35(4)).* Вона отримана паралельним перенесенням параболи $x^2=4y$ на вектор $\vec{S}=(2;2)$.

На координатній площині *(рис. 24)*будуємо параболу $x^2=4y$ *(див. п. 35(1)).* Ця парабола симетрична відносно осі Oy , її параметр $p = 2$, фокус F_1 (1; 0), рівняння директриси $y = -1$, вершина параболи знаходиться в початку координат.

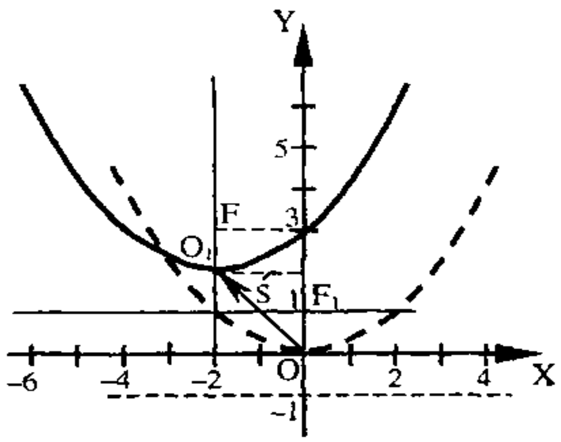


Рис. 24

Виконавши паралельне перенесення побудованої кривої на вектор $\vec{S} = (-2; 2)$, отримаємо параболу $(x+2)^2 = 4\cdot(y-2)$.

Завдання для роботи в аудиторії

№1. Скласти рівняння еліпса, відстань між фокусами якого 8 лінійних одиниць, а мала піввісь b = 3. Виконати рисунок.

Відповідь: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

№2. Еліпс займає стандартне положення відносно осей координат і проходить через точки M(2;$\sqrt{3}$)і B(0; 2). Скласти рівняння еліпса, знайти координати фокусів, ексцентриситет, фокальні радіус-вектори точки M . Виконати рисунок.

Відповідь :$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, $F(\pm 2\cdot\sqrt{3};0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r=4\pm\sqrt{3}$.

№ 3. Планета Земля рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце. Найменша відстань від Землі до Сонця становить 147,5 мільйона кілометрів, а найбільша — 152,5 млн. км. Знайти велику піввісь та ексцентриситет орбіти Землі. Вибрати систему координат так, щоб орбіта Землі займала стандартне положення відносно осей координат; скласти рівняння орбіти Землі у цій системі координат.

Відповідь: a = 150 млн. км, $\varepsilon=\frac{1}{60}$, $\frac{x^2}{22500}+\frac{y^2}{22493,75}=1$.

№ 4. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відомо, що відстань між його фокусами дорівнює відстані між кінцями його великої і малої півосей.

Відповідь: $\varepsilon=\sqrt{0,4}$

№ 5. В еліпс, заданий рівнянням $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, вписано правильний трикутник ABC, одна з вершин якого A(2; 0) співпадає з вершиною еліпса. Знайти координати двох інших вершин трикутника

Вказівка: *Скласти рівняння сторони* AB *трикутника, яка має кутовий коефіцієнт* k = tg150°, *знайти координати точок перетину цієї сторони з еліпсом. Це дасть нам координати вершини* B. *Для знаходження координат вершини* C *слід скористатися симетрією трикутника відносно осі* Ox.

Відповідь: $B\left(\frac{2}{7};\ \frac{4\cdot\sqrt{3}}{7}\right)$.$C\left(\frac{2}{7};\ -\frac{4\cdot\sqrt{3}}{7}\right)$.

№ 6. Скласти рівняння гіперболи, яка займає стандартне положення відносно осей координат і має дійсну піввісь $a=2\cdot\sqrt{5}$ та ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{1,2}$**.** Виконати рисунок.

Відповідь: $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{4}=1$.

№7. Знайти ексцентриситет гіперболи, одна з асимптот якої утворює кут α з їїдійсною віссю.

Відповідь: $\varepsilon=\frac{1}{\cos\alpha}$.

№ 8. Скласти рівняння гіперболи, яка має вершини у фокусах, а фокуси — у вершинах еліпса $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.Виконати рисунок.

Відповідь: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$

№ 9. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться вдвічі ближче до прямої x = 1, ніж до точки P(4; 0). Привести рівняння лінії до канонічного вигляду. Виконати рисунок.

Відповідь: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$

№ 10. Скласти рівняння гіперболи, яка займає стандартне положення відносно осей координат і фокальні радіус-вектори однієї з її вершин дорівнюють 1 лін. од. і 9 лін. од. Виконати рисунок.

Відповідь: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$

№11. Знайти на параболі, заданій рівнянням $y^2 = 6x$, точку, фокальний радіус-вектор якої дорівнює 4,5 лін. од.. Виконати рисунок.

Відповідь: M_1 (3; $3\cdot\sqrt{2}$) і M_2(3; $-3\cdot\sqrt{2}$).

№ 12. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої лежить на однаковій відстані від точки F(0; 2) і прямої y = 4. Привести отримане рівняння до канонічного вигляду. Знайти координати точок перетину лінії з осями координат. Виконати рисунок.

Відповідь: $x^2 = -4-$ (y$-$3); A(0; 3), B($2\cdot\sqrt{3}$; 0), C($-2\cdot\sqrt{3}$; 0).

№ 13. Через фокус параболи, заданої рівнянням $y^2 = -4x$ проведено пряму під кутом 120° до осі Ox Скласти рівняння прямої і знайти довжину утвореної хорди. Виконати рисунок**.**

Відповідь :$\sqrt{3}\cdot x + y + \sqrt{3} = 0.$ $\ell = \frac{16}{3}$лін.од..

№ 14. Дзеркальна поверхня прожектора утворена обертанням параболи навколо її осі симетрії. Діаметр дзеркала $-$ 80 сантиметрів, а його глибина – 10 сантиметрів. На якій відстані від вершини параболи слід розмістити джерело світла, якщо для відбивання променів паралельним пучком (при цьому досягається найбільша ефективність роботи прожектора) воно повинно бути у фокусі параболи?

Відповідь: d = 40 см.

№15. Скласти рівняння кола з центром у фокусі параболи, заданої рівнянням $y^2 = -8x$, якщо відомо, що директриса параболи є дотичною до цього кола. Знайти координати точок перетину параболи і кола. Виконати рисунок.

Вказівка: *радіус шуканого кола дорівнює відстані від фокуса параболи до її директриси, тобто параметру параболи.*

Відповідь:$(x + 2)^2 + y^2 = 16$, A($-$2;4), B($-$2; $-$4).

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ № 3 -**

3; умову і дані відповідного варіанту взяти на сторінці __.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 3

ІЗ № 3-1

Дано координати вершин трикутника ABC. Застосувавши методи аналітичної геометрії, знайти:

1) довжину сторони AB;
2) координати точок M_1 та M_2, які ділять відрізок AB у відношеннях $\lambda_1 = 4$ та $\lambda_2 = -6$.
3) рівняння кола, діаметром якого е відрізок AB;
4) загальні рівняння прямих AB і AC, нормальні вектори та кутові коефіцієнти цих прямих;
5) рівняння прямої AB у відрізках;
6) напрямляючий вектор і канонічне рівняння прямої AE, яка містить медіану трикутника ABC.

Виконати рисунок.

ІЗ № 3-2

Дано координати вершин трикутника ABC. Застосувавши методи аналітичної геометрії, знайти:

1) внутрішній кут A в радіанах з точністю до 0,01;
2) загальне рівняння висоти CD та її довжину;
3) рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно до прямої AC.

Виконати рисунок.

1.	A(7; 0),	B(-5; 9),	C(5; 14).
2.	A(12;-6),	B(0; 3),	C(10; 8).
3.	A(5;-5),	B(-7; 4),	C(3; 9).
4.	A(16;-8),	B(4; 1),	C(4; 6).
5.	A(9; 1),	B(-3; 10),	C(7; 15).
6.	A(8; 3),	B(-4; 12),	C(6; 17).
7.	A(2;-4),	B(-10; 5),	C(0; 10).
8.	A(15;-3),	B(3; 6),	C(13; 1).
9.	A(6;-l),	B(-6; 8),	C(4; 13).
10.	A(10;-2),	B(-2; 7),	C(8; 12).
11.	A(11;-5),	B(-l; 4),	C(15; 7).

12.	A(14;-4),	B(2; 5),	C(18; 8).
13.	A(8; 1),	B(-4; 10),	C(12; 3).
14.	A(13;-9),	B(l; 0),	C(17; 3).
15.	A(3;-3),	B(-9; 6),	C(7; 19).
16.	A(12;-7),	B(0; 2),	C(16; 5).
17.	A(2; 0),	B(-10; 9),	C(6; 22).
18.	A(0;-10),	B(-12;-l),	C(4; 12).
19.	A(7;-2),	B(-5; 7),	C(11; 0).
20.	A(4;-12),	B(-8;-3),	C(8; 10).
21.	A(0; 7),	B(9;-5),	C(14; 5).
22.	A(-5; 5),	B(4;-7),	C(9; 3).
23.	A(l; 9),	B(10;-3),	C(15; 7).
24.	A(10; 0),	B(l; 12),	C(-12;-4)
25.	A(3; 8).	B(12;-4),	C(17; 6).
26.	A(l;-6),	B(-8; 6),	C(-13;-4)
27.	A(-2; 10),	B(7:-2),	C(12; 8).
28.	A(12;-4),	B(3; 8),	C(-10;-8)
29.	A(-4; 2),	B(5:-10).	C(10; 0).
30.	A(-8; 16),	B(l; 4),	C(6; 14).

ІЗ № 3-3

1) Дано ексцентриситет **ε** і велику піввісь **a** еліпса, який займає стандартне положення відносно осей координат. Знайти:

а) фокусну відстань еліпса;

б) координати його фокусів;

в) малу піввісь і канонічне рівняння еліпса.

Виконати рисунок.

2) Гіпербола, яка займає стандартне положення відносно осей координат, проходить через точку А. Кутовий коефіцієнт однієї з її асимптот дорівнює k. Знайти:

а) півосі і канонічне рівняння гіперболи;

б) її фокусну відстань;

в) координати її фокусів;

г) ексцентриситет гіперболи;

д) фокальні радіус-вектори точки А. Виконати рисунок.

3) Парабола, симетрична відносно осі Ох , проходить через початок координат і точку М. Знайти:

а) канонічне рівняння параболи і її параметр;

б) координати фокуса параболи;

в) рівняння її директриси;
г) фокальний радіус-вектор точки М. Виконати рисунок.

1. 1) $\varepsilon = 0{,}4$, $a = 5$.
2) $A(2\sqrt{2};\ 1)$, $k = 0{,}5$.
3) $M(-8;4)$.

2. 1) $\varepsilon = 0{,}5$, $a = 2$.
2) $A(2;\ 2)$, $k = 1$.
3) $M(-3;6)$.

3. 1) $\varepsilon = 0{,}5$, $a = 4$.
2) $A(-2;\ 3\sqrt{3})$, $k = 3$.
3) $M(5;\ 10)$.

4.1) $\varepsilon = 0{,}8$, $a = 5$.
2) $A(2\sqrt{2};4)$, $k = -2$.
3) $M(5;\ 5\sqrt{2})$.

5. 1) $\varepsilon = 0{,}5$, $a = 6$.
2) $A(-\sqrt{2};1)$, $k = -1$.
3) $M(2;-6)$.

6. 1) $\varepsilon = 0{,}2$, $a = 5$.
2) $A(2\sqrt{5};2)$, $k = 0{,}5$.
3) $M(-3;\ 2\sqrt{3})$.

7. 1) $\varepsilon = 0{,}5$, $a = 8$.
2) $A(3\sqrt{5};6)$, $k = -1$.
3) $M(4;2\sqrt{11})$.

8. 1)$\varepsilon = 0{,}5$, $a = 14$.
2) $A(-\sqrt{2};\ 3)$, $k = -3$.
3) $M(-9;3\sqrt{5})$.

9. 1) $\varepsilon = 0{,}2$,$a = 15$.
2) $A(-\sqrt{5};-2)$,$k=-2$.
3) $M(4;\ 2\sqrt{7})$.

10. 1) $\varepsilon = 0{,}2$.$a = 10$.
2) $A(-4;\sqrt{7})$, $k = -1$.
3) $M(-3;\ 3\sqrt{2})$.

11. 1) $\varepsilon = 0{,}5$, $a = 10$.
2) $A(4;2\sqrt{3})$, $k = -1$.
3) $M(1;-4)$.

12. 1) $\varepsilon = 0{,}8$, $a = 10$.
2) $A(\sqrt{5};4)$, $k = -2$.
3) $M(-7;\ 7\sqrt{2})$.

13. 1) $\varepsilon = 0{,}1$, $a = 10$
2) $A(-4;-\sqrt{3})$, $k = 0{,}5$.
3) $M(4;6)$.

.**14.** 1) $\varepsilon = 0{,}4$, $a = 15$.
2) $A(2\sqrt{5};\ 5)$, $k = 2{,}5$.
3) $M(-4;\ 4\sqrt{2})$.

15.1) $\varepsilon = 0{,}3$, $a = 10$.
2) $A(\sqrt{10};2)$, $k=-2$.
3) $M(9;\ 3\sqrt{3})$.

16. 1) $\varepsilon = 0{,}4$, $a = 10$.
2) $A(3;2\sqrt{2})$, $k = -1$.
3) $M(-9;\ 3\sqrt{11})$.

17. 1) $\varepsilon = 0{,}6$, $a = 10$.
2) $A(-\sqrt{2};\ 2)$, $k = -2$.
3) $M(2;\ \sqrt{10})$.

18. 1) $\varepsilon = 0{,}7$, $a = 10$.
2) $A(6\sqrt{2};\ 3)$, $k = 0{,}5$.
3) $M(-1;-3)$.

19. 1) $\varepsilon = 0{,}9$, $a=10$.
2) $A(4;\ 10)$, $k = 2{,}5$.
3) $M(-4;\ 8)$.

20. 1) $\varepsilon = 0{,}6$, $a = 15$.
2) $A(-4;\ 2\sqrt{7})$, $k = -2$.
3) $M(9;\ 6)$.

21. 1) $\varepsilon = 0{,}25$, $a = 4$.
2) $A(4;3\sqrt{3})$, $k = 1{,}5$.
3) $M(2;2\sqrt{7})$.

22. 1) $\varepsilon = 0{,}75$, $a = 4$.
2) $A(2\sqrt{2};\ -5)$, $k = 2{,}5$.
3) $M(-4;\ 2\sqrt{3})$.

23. 1) $\varepsilon = 0{,}25$, $a = 8$.
2) $A(2\sqrt{5};3)$, $k = 1{,}5$.
3) $M(2;-2\sqrt{3})$.

24. 1) $\varepsilon = 0{,}75$, $a = 8$.
2) $A(\sqrt{5};-3)$, $k = -3$.
3) $M(-9;\ 3\sqrt{7})$.

25. 1) $\varepsilon = 0{,}25$, $a = 16$.
2) $A(8\sqrt{2};-4)$, $k = 0{,}5$.
3) $M(l;\ \sqrt{2})$.3)

26. 1) $\varepsilon = 0{,}75$, $a = 16$.
2) $A(-2\sqrt{2};\ 3)$, $k = 1{,}5$.
3) $M(-8;\ 12)$.

27. 1) $\varepsilon = 0{,}25$, $a = 12$.
2) $A(2\sqrt{5};\ 10)$, $k = 2{,}5$.
3) $M(-2;\ 2\sqrt{5})$.

28. 1) $\varepsilon = 0{,}75$, $a = 12$.
2) $A(-4\sqrt{2};\ 6)$, $k = 1{,}5$.
3) $M(6;-6\sqrt{2})$.

29. 1) $\varepsilon = 0{,}5$, $a = 12$.
2) $A(-2\sqrt{2};\ 6)$, $k = -3$.
3) $M(1;-2\sqrt{2})$.

30. 1) $\varepsilon = 0{,}5$, $a = 16$.
2) $A(8;2\sqrt{3})$, $k = 0{,}5$.
3) $M(-2;2\sqrt{10})$.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ 3

ІЗ № 3-1

Дано координати вершин трикутника ABC:
$A(-6;7)$, $B(3;\ -5)$, $C(8;5)$.
Застосувавши методи аналітичної геометрії, знайти:
1) довжину сторони AB ;
2) координати точок M_1 та M_2, які ділять відрізок AB у відношеннях

$\lambda_1 = 4$ та $\lambda_2 = -6$.

3) рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB ;

4) загальні рівняння прямих AB і AC, нормальні вектори та кутові коефіцієнти цих прямих;

5) рівняння прямої AB у відрізках;

6) напрямляючий вектор і канонічне рівняння прямої AE, яка містить медіану трикутника ABC.

Виконати рисунок.

Розв'язання

Побудуємо на координатній площині заданий трикутник ABC *(Рис. 25)*. На цьому рисунку ми будемо будувати всі ті точки і лінії, які знайдемо в ході розв'язання задачі.

1) За формулою (1) *(див. ПЗ-1)*знаходимо:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3+6)^2 + (-5-7)^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{18 + 144} = \sqrt{225} = 15 \text{ лін. од.}.$$

2) Підставивши у формули (4) *(див. ПЗ-1)*координати точок A і B і значення λ_1, таλ_2, знайдемо координати точок M_1 та M_2:

$$x_{M_1} = \frac{x_A + \lambda_1 \cdot x_B}{1 + \lambda_1} = \frac{-6 + 4 \cdot 3}{1 + 4} = \frac{-6 + 12}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2;$$

$$y_{M_1} = \frac{y_A + \lambda_1 \cdot y_B}{1 + \lambda_1} = \frac{7 + 4 \cdot (-5)}{1 + 4} = \frac{7 - 20}{5} = \frac{13}{5} = -2{,}6;$$

$$x_{M_2} = \frac{x_A + \lambda_2 \cdot x_B}{1 + \lambda_2} = \frac{-6 + (-6) \cdot 3}{1 + (-6)} = \frac{-6 - 18}{-5} = \frac{24}{5} = 4{,}8;$$

$$y_{M_2} = \frac{y_A + \lambda_2 \cdot y_B}{1 + \lambda_2} = \frac{7 + (-6) \cdot (-5)}{1 + (-6)} = \frac{7 + 30}{-5} = \frac{37}{5} = -7{,}4;$$

Отже, шукані точки – M,(1,2; −2,6) і M_2(4,8; −7,4).

3) Очевидно, що центром шуканого кола є точка O_1 – середина відрізка AB. Знайдемо координати точки O_1, підставивши координати точок A і B у формули (5) *(див. ПЗ-1):*

$$x_{O_1} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-6 + 3}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5;$$

$$y_{O_1} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7 + (-5)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Отже, центр шуканого кола – O_1(−1,5; 1).

Радіус цього кола $R = \frac{AB}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$лін. од..

Підставивши координати точкиO_1і знайдена значення R у рівняння (6) *(див,ПЗ-1)*, отримаємо рівняння шуканого кола:)

$$(x - x_{0_1})^2 + (y - y_{0_1})^2 = R^2,$$
$$(x - (-1{,}5))^2 + (y-1)^2 = 7{,}5,$$
$$(x + 1{,}5)^2 + (y-1)^2 = 56{,}25.$$

4) Підставивши у рівняння прямої, що проходить через дві дані точки *(див. ПЗ-1, п. 18, рівняння (14)),*координати точок A і B, отримаємо рівняння прямої AB:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}, \qquad \frac{x-(-6)}{3-(-6)} = \frac{y-7}{-5-7}, \frac{x+6}{9} = \frac{y-7}{-12},$$
$$4\cdot(x+6) = -3\cdot(y-7),\ 4x + 24 = -3y + 21,$$

$$4x + 3y + 3 = 0. \qquad \text{(I)}$$

Рівняння (I) є загальним рівнянням прямої AB. Порівнюючи його з рівнянням (8) *(див. ПЗ-1),*встановимо, що нормальним вектором прямої AB буде вектор $\vec{N}_{AB} = (4;\ 3)$, оскільки його координати дорівнюють коефіцієнтам при змінних у загальному рівнянні цієї прямої. Побудуємо нормальний вектор прямої AB, відклавши його від точки B *(рис. 25).*

Розв'язавши відносно y загальне рівняння прямої AB, зведемо його до вигляду рівняння з кутовим коефіцієнтом *(див. ПЗ-1, п. 15, рівняння (11)):*

$$4x + 3y + 3 = 0,$$
$$3y = -4x - 3,$$

$$y = -\frac{4}{3}x - 1. \qquad \text{(II)}$$

Рівняння (II) є рівнянням прямої AB з кутовим коефіцієнтом. Коефіцієнт при x у цьому рівнянні дорівнює кутовому коефіцієнту прямої AB .

Отже,$k_{AB} = -\frac{4}{3}$.

Діючи аналогічно, знаходимо загальне рівняння, координати нормального вектора та кутовий коефіцієнт прямої AC.

$$\frac{x-x_A}{x_C-x_A} = \frac{y-y_A}{y_C-y_A},$$
$$\frac{x-(-6)}{8-(-6)} = \frac{y-7}{5-7},$$

$$x + 7y - 43 = 0. \qquad \text{(III)}$$

Рівняння (III) є загальним рівнянням прямої AC. Нормальним вектором цієї прямої буде вектор $\vec{N}_{AB} = (1;\ 7)$, який на рисунку відкладемо від точки A *(рис. 25)*,

$$x + 7y - 43 = 0,$$

$$y = -\frac{1}{7} \cdot x + \frac{43}{7}. \qquad \text{(IV)}$$

Рівняння (IV) є рівнянням прямої AC з кутовим коефіцієнтом. Звідси

$$k_{AC} = -\frac{1}{7}.$$

5)Зведемо загальне рівняння прямої AB до вигляду рівняння у відрізках *(див. ПЗ-1, п.16, рівняння (12))*Для цього перенесемо вільний член рівняння (I) у праву частину рівності і поділимо на нього обидві частини рівняння:

$$4x + 3y + 3 = 0,$$
$$4x + 3y = -3,$$
$$\frac{4x}{-3} + \frac{3y}{-3} = 1,$$

$$\frac{x}{-0{,}75} + \frac{y}{-1} = 1. \qquad \text{(V)}$$

Рівняння (V) є рівнянням прямої AB у відрізках. Легко бачити, що відрізками, які відтинає пряма AB на осях координат, будуть $a = -0{,}75$ та $b = -1$.

6) Медіана AE трикутника ABC проходить через точку E — середину сторони BC. Знайдемо координати цієї точки, підставивши у формули (5) *(див. ПЗ-1)* координати точок B і C. Матимемо:

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + 8}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5;$$
$$y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-5 + 5}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Отже, E(5,5; 0).

Підставивши координати точок E та A у рівняння прямої, що проходить через дві дані точки *(див.ПЗ-1, п.18, рівняння (14)),* отримаємо шукане рівняння прямої AE :

$$\frac{x - x_E}{x_A - x_E} = \frac{y - y_E}{y_A - y_E},$$

$$\frac{x-5{,}5}{-6-5{,}5}=\frac{y-0}{7-0},$$

$$\frac{x-5{,}5}{-11{,}5}=\frac{y}{7}. \qquad \text{(VI)}$$

Рівняння (VI) є канонічним рівнянням прямої AE. Порівнюючи його з рівнянням (10) *(див. ПЗ-1),* встановимо, що напрямляючим вектором прямої AE буде вектор $\vec{S}_{AE}=(-11{,}5;\ 7)$,

оскільки його координати дорівнюють числам у знаменниках виразів канонічного рівняння цієї прямої. Побудуємо напрямляючий вектор прямої AE, відклавши його від точки E *(рис. 25).* Очевидно, що $\overrightarrow{S_{AE}}=\overrightarrow{EA}$.

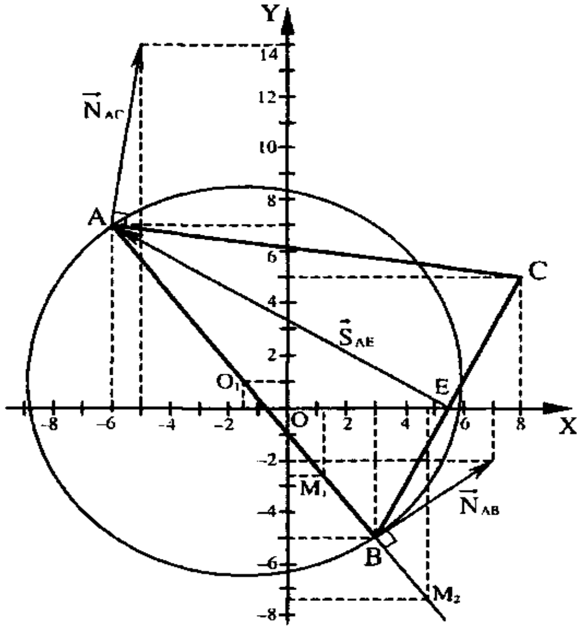


Рис. 25

ІЗ № 3-2

Дано координати вершин трикутника ABC:

A(−6; 7),   B(3; −5),   C(8;5).

Застосувавши методи аналітичної геометрії, знайти:

1) внутрішній кут A в радіанах з точністю до 0,01;
2) загальне рівняння висоти CD та її довжину;
3) рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно до прямої AC.

Виконати малюнок.

Розв'язання

Побудуємо на координатній площині заданий трикутник ABC *(рис. 26).*

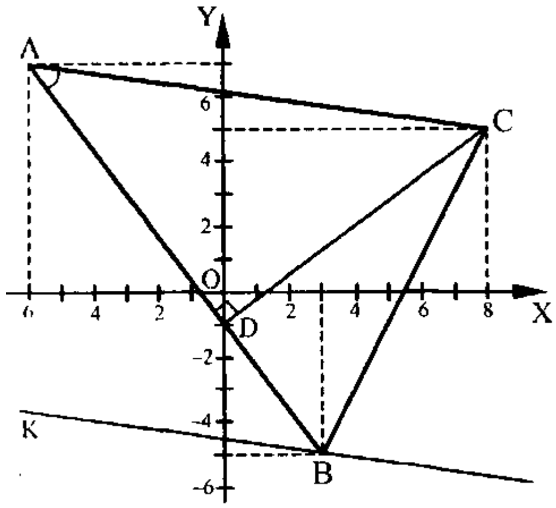


Рис.26

На цьому рисунку ми будемо будувати всі ті точки і лінії, які знайдемо в процесі розв'язування задачі.

1) В попередньому завданні ми вже знайшли кутові коефіцієнти прямих AB і AC, які утворюють шуканий кут A (як видно з рисунка, в трикутнику ABC внутрішній кут A гострий).

Підставивши значення $k_{AB} = -\frac{4}{3}$ та $k_{AC} = -\frac{1}{7}$ у формулу (2) *(див. ПЗ-2, п. 2),* отримаємо тангенс шуканого кута:

$$\mathrm{tg}\angle A = \left|\frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC}k_{AB}}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{7} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{7} + \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{21}}\right| = \left|\frac{\frac{-3+28}{21}}{\frac{21+4}{21}}\right|$$

$$\left|\frac{3+28}{21+4}\right| = \left|\frac{25}{25}\right| = 1.$$

Звідси, виконавши за допомогою мікрокалькулятора необхідні обчислення, отримуємо шуканий кут A трикутника ABC:

$\angle A = \mathrm{arctg}\ 1 = 45° = 0{,}79$ радіан.

2) За умовою задачі CD — висота трикутника ABC, тому $CD \perp AB$. За умовою перпендикулярності прямих *(див. ПЗ-2, п. 4(а), рівність (7)),* використавши знайдений вище кутовий коефіцієнт прямої AB, матимемо:

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{\frac{1}{-4}}{3} = \frac{3}{4}.$$

Підставивши знайдене значення k_{CD}та координати точки С у рівняння прямої, що проходить через дану точку в заданому напрямку *(див. ПЗ-1, п. 17, рівняння (13)),*отримаємо шукане рівняння прямої CD:

$y - y_c = k_{CD} \cdot (x - x_c)$,

$y - 5 = \frac{3}{4} \cdot (x - 8)$,

$$4 \cdot (y - 5) = 3 \cdot (x - 8),$$

$$4y - 20 = 3x - 24,$$

$$3x - 4y - 4 = 0. \qquad \text{(I)}$$

Рівняння (I) є шуканим загальним рівнянням висоти CD трикутника ABC .

Довжина висоти CD дорівнює відстані від точки С до прямої AB. Знайдемо цю відстань. Для цього підставимо у формулу відстані від точки до прямої *(див. ПЗ-2, п. 1, формула (I))*координати точки С і коефіцієнти з загального рівняння прямої AB, знайденого у попередньому завданні:

$$CD = d_C = \frac{|4x_c + 3y_c + 3\,|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|4 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 3|}{\sqrt{16 + 9}} =$$

$$= \frac{32 + 15 + 3}{\sqrt{25}} = \frac{50}{5} = 10 \text{ лін. од.}.$$

3)Позначимо шукану пряму BK. За умовою задачі BK паралельно AC. За умовою паралельності прямих *(див. ПЗ-2, п.3, рівність (5)),*використавши знайдений раніше кутовий коефіцієнт прямої AC, матимемо:

$$k_{BK} = k_{AC} = -\frac{1}{7}.$$

Підставивши знайдене значення k_{BK} та координати точки B у рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямку *(див. ПЗ-1, п.17, рівняння (13)),* отримаємо шукане рівняння прямої BK:

$$y - y_в = k_{вк} \cdot (x - x_в),$$

$$y - (-5) = -\frac{1}{7} \cdot (x - 3),$$

$$-7 - (y + 5) = x - 3,$$

$$-7y - 35 = x - 3,$$

$$x + 7y + 32 = 0: \qquad \text{(II)}$$

Рівняння (II) є шуканим загальним рівнянням прямої BK, яка проходить через точку B і паралельна до прямої AC .

Використавши знайдені рівняння прямих CБ і BK, побудуємо їх на рисунку *(рис.26).*

ІЗ № 3-3

1) Дано ексцентриситет $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 0,6 і велику піввісь **a** = 5 еліпса, який займає стандартне положення відносно осей координат. Знайти:

а) фокусну відстань еліпса;

б) координати його фокусів;

в) малу піввісь і канонічне рівняння еліпса

Виконати рисунок.

2) Гіпербола, яка займає стандартне положення відносно осей координат, проходить через точку $A(6; -6\cdot\sqrt{2})$, кутовий коефіцієнт однієї з її асимптот $k = -1{,}5$. Знайти:

а) півосі і канонічне рівняння гіперболи;

б) її фокусну відстань;

в) координати її фокусів;

г) ексцентриситет гіперболи;

д) фокальні радіус-вектори точки А.Виконати рисунок.

3) Парабола, симетрична відносно осі Ох, проходить через початок координат і точку $M(2; -4)$. Знайти:

а) канонічне рівняння параболи і її параметр;

б) координати фокуса параболи;

в) рівняння її директриси;

г) фокальний радіус-вектор точки М .Виконати рисунок.

Розв'язання

1) а) За означенням, ексцентриситет еліпса: $\varepsilon = \frac{c}{a}$*(див. ПЗ-3, п.9, формула (4)),* де **a** — велика піввісь еліпса, **c** — його фокусна відстань. Звідси $c = \varepsilon a$. Підставивши в цю рівність ата ε з умови задачі, отримаємо шукану фокусну відстань еліпса

$c = 0{,}6\cdot 5 = 3$.

б) Використовуючи обчислену вище фокусну відстань еліпса, знаходимо координати його фокусів *(див. ПЗ-3, п.* 7):

$$F_1(3;\ 0)\text{та}\ \ F_2(-3; 0).$$

в) Як відомо, фокусна відстань еліпса $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, де a та b— його півосі (див. *ПЗ-3, п.7, формула (3)*).Звідси знаходимо:

$b^2 = a^2 - c^2,\ b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Підставивши в останню рівність відомі значення аі c, знайдемо малу піввісь bзаданого еліпса:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2\ - 3^2}\ = \sqrt{25 - 9}\ = \sqrt{16} =\ 4.$$

Підставивши в канонічне рівняння еліпса(*див. ПЗ-3, п.2, формула (1)*)значення

a = 5 і b= 4, отримаємо шукане рівняння заданого еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

На координатній площині побудуємо вершини заданого еліпса (точки з координатами (5; 0), $(-5;\ 0)$, (0; 4) та $(0;\ -\ 4)$).Через побудовані точки проведемо еліпс (*рис. 27*).

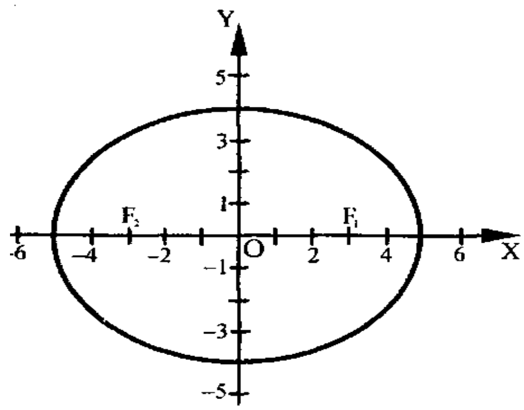


Рис.27

За відомими координатами побудуємо фокуси еліпса.

2) а) Як відомо, кутові коефіцієнти асимптот гіперболи $k=\pm\frac{b}{a}$, де a і b – її півосі(*див. ПЗ-3, п.20, формули (11)*). Заумовою задачі $k=-1{,}5$. Враховуючи те, що a і b —додатні числа, матимемо:

$$\frac{b}{a}=|k|=|-1{,}5|=1{,}5\text{ , звідки}$$

$$\mathrm{b}=1{,}5\mathrm{a}.$$

За умовою задачі точка $\mathrm{A}(\ 6;\ -6\cdot\sqrt{2})$ належить гіперболі, тому її координати повинні задовольняти рівняння цієї гіперболи. Підставимо координати точки А і рівність (I) в канонічне рівняння гіперболи (*див. ПЗ-3, п. 15, рівність (9)*). Матимемо:

$$\frac{\mathrm{x}_\mathrm{A}^2}{\mathrm{a}^2}-\frac{\mathrm{y}_\mathrm{A}^2}{\mathrm{b}^2}=1,$$

$$\frac{6^2}{\mathrm{a}^2}-\frac{\left(-6\cdot\sqrt{2}\right)^2}{(1{,}5\mathrm{a})^2}=1,$$

$$\frac{36}{\mathrm{a}^2}-\frac{72}{2{,}25\mathrm{a}^2}=1.$$

Ми отримали рівняння з одним невідомим. Розв'язавши це рівняння, знайдемо a:

$$36 \cdot 2{,}25 - 72 = 2{,}25\mathrm{a}^2,$$
$$81 - 72 = 2{,}25\mathrm{a}^2,$$
$$2{,}25\mathrm{a}^2 = 9,$$
$$\mathrm{a}^2 = 4.$$

Врахувавши те, що a > 0, встановлюємо, що дійсна піввісь заданої гіперболи $\mathrm{a} = \sqrt{4} = 2$. Підставивши це значення у рівність (I), знайдемо уявну піввісь: $\mathrm{b} = 1{,}5\mathrm{a} = 1{,}5 \cdot 2 = 3$.

Підставимо знайдені півосі гіперболи у канонічне рівняння (*див. ПЗ-3. п. 15, рівність (9)*). Матимемо:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Рівняння (II) є шуканим канонічним рівнянням заданої гіперболи.

б) Підставивши у формулу (10) *(див. ПЗ-3, п.I8)*знайдені вище півосі гіперболи, отримаємо її фокусну відстань:

$$\mathrm{c} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

в) Використавши обчислену вище фокусну відстань гіперболи, знайдемо координати її фокусів *(див. ПЗ-3, п. 18):*

$$F_1(\sqrt{13};\ 0) \ \text{ та } \ F_2(-\sqrt{13};\ 0).$$

г) Підставивши у формулу (13) *(див. ПЗ-3, п. 23)*знайдені вище фокусну відстань c та дійсну піввісь a заданої гіперболи, знайдемо її ексцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{3{,}25}.$$

д) Підставивши у формули (14) *(див. ПЗ-3, п.26)*обчислені раніше величини, знайдемо фокальні радіус-вектори точки A:

$$r_1 = |\varepsilon x_A - a| = \left|6 \cdot \sqrt{3{,}25} - 2\right| = 3 \cdot \sqrt{4 \cdot 3{,}25} - 2 =$$
$$= 3 \cdot \sqrt{13} - 2 \text{ лін. од.};$$
$$r_2 = |\varepsilon x_A + a| = \left|6 \cdot \sqrt{3{,}25} + 2\right| = 3 \cdot \sqrt{13} + 2 \text{ лін. од.};$$

На координатній площині будуємо асимптотичний прямокутник гіперболи *(див. ПЗ-3, п.21),*сторони якого паралельні до осей координат (*рис. 28)*

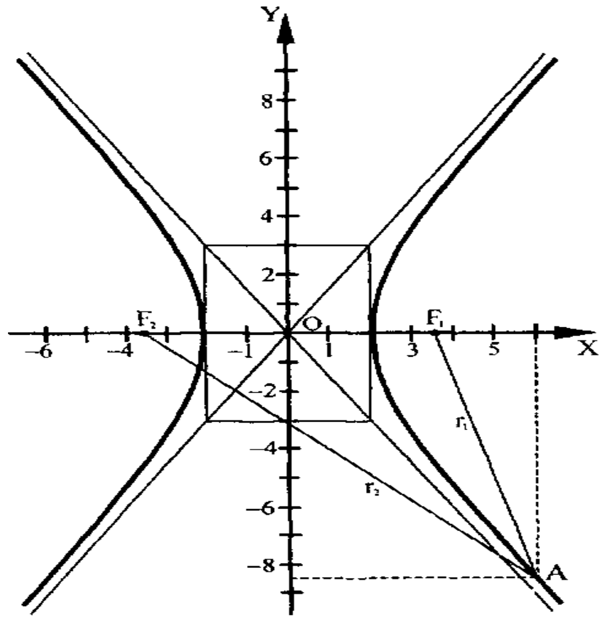


Рис. 28

Точки з координатами (2; 0) і (−2; 0) будуть вершинами гіперболи *(див. ПЗ-3, п.16)*Проведемо діагоналі асимптотичного прямокутника і продовжимо їх за його межі Отримані прямі будуть асимптотами гіперболи. Побудуємо фокуси гіперболи і точку А, координати яких відомі. Орієнтуючись за асимптотами, проведемо через вершину (2; 0) і точку А одну вітку гіперболи. Симетрично до неї відносно осі Оу будуємо другу вітку гіперболи *(рис. 28).*

3) а) За умовою задачі точка М(−2;-4) належить параболі. Оскільки $x_M < 0$, то вітки параболи напрямлені в бік від'ємного напрямку осі Ох . Тоді канонічне рівняння заданої параболи матиме вигляд

$$y^2 = -2px, \qquad \text{(III)}$$

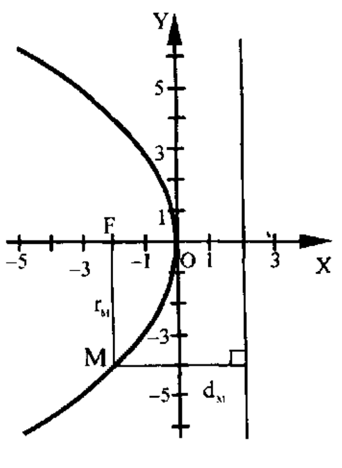


Рис. 29

де $p > 0$ — параметр параболи (див. *ПЗ-3, п. 35(2)*). Підставивши в це рівняння координати точки М, знайдемо параметр параболи:

$$y_M^2 = -2px_м,$$
$$(-4)^2 = -2p \cdot (-2),$$
$$4p = 16,$$
$$p = 4.$$

Підставимо знайдений параметр p у рівняння (III) і отримаємо шукане канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = -2 \cdot 4x,$$
$$y^2 = -8x.$$

б) Фокус параболи, заданої рівнянням (III), матиме координати $(-0{,}5p; 0)$*(див. ПЗ-3, п. 35(2)).*Отже, шуканий фокус параболи:

$$F(-0{,}5 \cdot 4;\ 0) \text{ або } F(-2;\ 0).$$

в) Рівняння директриси параболи, заданої рівнянням (III), матиме вигляд $x = 0{,}5$.Отже, шукане рівняння директриси:

$$x = 0{,}5 \cdot 4 \text{ або } x = 2.$$

г) Підставимо параметр параболи і абсцису точки М у формулу для обчислення фокального радіус-вектора точки, що лежить на параболі, заданій рівнянням (III). Матимемо:

$$r_M = 0{,}5p - x_м = 0{,}5 \cdot 4 - (-2) = 2 + 2 = 4 \text{ лін. од.}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1.Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В. П Дубовик., І. І. Юрик. – 4-те вид. – К. : Ігнатекс-Україна., 2013. – 648 с: іл. - (Вища школа). – Бібліогр.: с. 632-633.

2.Луценко Ю. Л. Вища математика: Навч.-метод. посібник / Ю. Л. Луценко, М. В. Миронюк. – Тірас, 2004. – 464 с.

3.Антоненко В. Ф. Вища математика: Навч. посібник. Модуль 1. Лінійна алгебра / В. Ф. Антоненко, Т. І. Олешко, Ю. А. Паламарчук ; За заг. ред. Т. І. Олешко. – Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 140 с.

4.Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников [та ін.] – К. : Техніка, 2003. – 600 с.

5.Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: навчальний посібник для студ. технічних і технологічних спец. вищих навч. закладів : затв. МОНУ / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К. : Книги України ЛТД, 2009. – 577 с.

6.Кравченко В. В. Вища математика: Навч. посібник. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія / В. В. Кравченко, Т. В. Лубенська, Т. І. Олешко ; За заг. ред. Т. І. Олешко. – Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 144с.

Кирилащук С. А.,   Бондаренко З. В.,   Клочко В. І.

ВИЩА МАТЕМАТИКА.
ЧАСТИНА 1.
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Усі цитати, цифровий, фактичний матеріал та бібліографічні відомості перевірені, написання одиниць відповідає стандартам. Зауваження рецензентів враховані.

Вимогам, які висуваються до навчальної літератури, відповідає.
До друку і в світ дозволяю на підставі § 2 п.15 "Єдиних правил..."

Автор: ___
С.А.Кирилащук
З.В. Бондаренко,
В.І. Клочко

Перший проректор з науково-педагогічної роботи по організації навчального процесу та його науково-методичного забезпечення
О.М.Васілевський

Затверджено
на засіданні кафедри ВМ
Протокол N 1 від 3.09.2019р
____________ В.М. Михалевич
(підпис)

Вінниця   ВНТУ   2019

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА.
ЧАСТИНА 1.
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Редактор   В. Дружиніна
Коректор   З. Поліщук
Укладачі : Кирилащук Світлана Анатоліївна
Бондаренко Злата Василівна
Клочко Віталій Іванович

Оригінал-макет підготовлено З. Бондаренко

Підписано до друку
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк.
Наклад   пр. Зам. №

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
publish.vntu.edu.ua; email: kivc.vntu@gmail.com.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія
ДК № 3516 від 01.07.2009 р.