МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ПРОЦЬКО ІГОР ОМЕЛЯНОВИЧ

УДК 004.421.2:517.443

ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ ДІЙСНИХ ГАРМОНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ НА ОСНОВІ ЦИКЛІЧНИХ ЗГОРТОК

01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Вінниця – 2019

Дисертацією є кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.
Робота виконана в Національному університеті «Львівська політехніка» Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант доктор технічних наук, професор
Теслюк Василь Миколайович,
Національний університет "Львівська політехніка", професор кафедри систем автоматизованого проектування

Офіційні опоненти: доктор технічних наук,
старший науковий співробітник
Винничук Степан Дмитрович,
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України, завідувач відділу моделювання енергетичних процесів і систем

доктор технічних наук, професор
Лужецький Володимир Андрійович
Вінницький національний технічний університет, завідувач кафедри захисту інформації

доктор технічних наук, професор
Удовенко Сергій Григорович,
Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця, завідувач кафедри інформатики та комп'ютерної техніки

Захист відбудеться « 01 » листопада 2019 р. о 11.00 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 05.052.01 у Вінницькому національному технічному університеті за адресою: 21021, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 95, ГНК, ауд. 210.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Вінницького національного технічного університету за адресою: 21021, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 95, ГНК.

Автореферат розісланий « 18 » вересня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради С.М. Захарченко

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Обґрунтування вибору теми дослідження. Застосування ефективних методів для розв’язування завдань з опрацювання інформації почалося ще до ери поширення обчислювальних засобів. Каталізатором інтенсивного дослідження та розвитку швидких обчислень стало використання дискретних перетворень класу Фур’є та цифрових згорток у різноманітних прикладних галузях на базі комп’ютерних систем.

На сучасному етапі розроблено ряд методів та засобів швидкого обчислення дискретних перетворень класу Фур’є та згорток. Всебічно досліджено подання базисної матриці дискретного перетворення через добуток слабозаповнених матриць (факторизацію), що суттєво зменшило кількість обчислювальних операцій під час виконання дискретних перетворень. Встановлено, що обчислення швидких перетворень є спеціальними випадками в алгебрах над полями або кільцями. Метод з використанням поліноміальних перетворень для одержання швидких алгоритмів привів до значних теоретичних і практичних результатів. Варте уваги використання теоретико-числових перетворень, що має свої особливі обчислювальні переваги. Таким чином, є характерним застосування різних теоретичних обґрунтувань для створення обчислювальних методів й алгоритмів дискретних перетворень, що враховують технічні та технологічні особливості розроблення ефективних засобів комп’ютерної реалізації.

Розвиток обчислювальних методів пов’язаний із зростанням складності прикладних завдань і, відповідно, вимог до мультифункціональності, швидкодії та економічності апаратно-програмних засобів їхньої реалізаціїї. У зв’язку з цим почали досліджуватись ортогональні гармонічні базисні системи для обчислення прямого і зворотного дискретного перетворення тільки в дійсній області. Значне місце в опрацюванні дійсних даних зайняли дискретне косинусне перетворення (ДКП), дискретне синусне перетворення (ДСП) та дискретне перетворення Хартлі (ДПХ) та їхні види, які називатимемо дискретними гармонічними перетвореннями (ДГП).

Поряд з дослідженнями ефективних методів виконання дискретних перетворень розвивались і взаємодоповнювались методи швидкого обчислення цифрової згортки, яка має широке застосування. Дискретні перетворення і згортка – два різні, але тісно взаємопов’язані розділи цифрового опрацювання інформації. Адже ефективне обчислення згортки реалізовується на основі теореми про швидку згортку, що базується на використанні швидких перетворень класу Фур’є. У цьому аспекті парадоксальним виглядає метод, в якому використано для ефективного обчислення ДГП циклічну згортку (ЦЗ).

Розвиток підходу обчислення ДПФ на основі ЦЗ розпочався в кінці 60-х років. Значний внесок у теорію і практику ефективного обчислення ДГП у цьому напрямі внесли Ч. Рейдер, Л. Блюстейн, Дж. Кулі, Г. Нуссбаумер, Р. Блейхут, Ш. Віноград, В.-Ч. Сіу та ін. Цей підхід продовжують інтенсивно досліджувати та розвивати, адже він забезпечує виконання мінімальної кількості множень у випадку використання циклічних згорток із мінімальною мультиплікативною складністю. Схеми обчислення ДГП на основі ЦЗ зменшують площу зайнятості кристала НВІС, забезпечуючи високі технічні параметри. Відомі наукові роботи з швидких перетворень класу Фур'є вітчизняних науковців В. К. Задіраки, Л. А. Гнатіва, О. Б. Коханова, В. А. Лужецького, А. М. Терещенка, М. М. Яцимірського та ін.

Отже, створене науково-інформаційне підґрунтя ставить актуальне завдання подальшого розвитку ефективного обчислення ДГП на основі ЦЗ щодо розроблення узагальненої методології, яка забезпечить створення ефективних програмних та апаратних засобів комп'ютерної реалізації обчислення дискретних перетворень класу Фур'є.

Науково-прикладною проблемою, розв'язанню якої присвячена дисертаційна робота, є підвищення ефективності обчислювальних характеристик (кількість арифметичних операцій, кількість циклічних згорток, тривалість виконання) дійсних дискретних гармонічних перетворень шляхом розроблення узагальненої методології, що вирішує завдання формування й аналізу структури дискретних гармонічних складових базису перетворення у вигляді набору ганкелевих циркулянтів і виконання обчислення перетворень на основі циклічних згорток.

Розроблена в дисертаційній роботі узагальнена методологія у виді систематизованої сукупності апробованих принципів, методів, способів, алгоритмів, схем, термінів для виконання обчислення ДГП на основі ЦЗ є важливим компонентом для вирішення багатьох прикладних завдань.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Національному університеті "Львівська політехніка".

Дослідження проводили в рамках науково-дослідних робіт:

ДБ/МЕМС «Високошвидкісні інформаційні технології опрацювання даних у мікроелектромеханічних системах на основі вбудованих штучних нейронних мереж» (№ ДР 0111U001218) (2011-12р.), особистий внесок здобувача – розроблення узагальненої методології обчислення ДГП з використанням ЦЗ на основі аналізу базисів основних видів дискретного косинусного, синусного та перетворення Хартлі;

ДБ/СЕБ «Розроблення базових компонентів для синтезу інтелектуальних мобільних робототехнічних систем» (№ ДР 0113U003191) (2013-14р.), особистий внесок здобувача – розроблення узагальнених методологічних принципів та етапів синтезу алгоритмів дійсних дискретних перетворень класу Фур'є на основі ЦЗ;

ДБ/Енергоефективність «Інтелектуальні інформаційні технології багаторівневого управління енергоефективністю регіону» (№ ДР

0117U004450) (2017-18р.), особистий внесок здобувача – розроблення і реалізація, відповідно узагальненої методології, обчислювальних алгоритмів ДКП-ІІ на основі ЦЗ довільного обсягу.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є створення узагальненої методології синтезу та виконання алгоритмів ДГП на основі циклічних згорток з покращеними обчислювальними характеристиками у комп'ютерних системах.

Поставлена мета визначає такі основні завдання:

- аналіз та дослідження методів ефективного обчислення дійсних дискретних перетворень класу Фур'є на основі ЦЗ, що дасть змогу виділити їхні переваги і недоліки;
- визначення та обґрунтування узагальнених методологічних принципів синтезу алгоритмів обчислення дійсних дискретних гармонічних перетворень на основі ЦЗ;
- розроблення методу визначення твірного масиву, що стисло описує блочно-циклічну структуру базису перетворення ДГП;
- визначення, відповідно узагальненої методології, взаємозв'язаної послідовності етапів синтезу алгоритмів обчислення ДГП на основі ЦЗ;
- розроблення методу цілочисельного пошуку ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення для скорочення обчислень ДГП на основі ЦЗ;
- аналіз особливостей кожного з чотирьох видів дискретних косинусних, синусних і перетворень Хартлі для виконання їхнього обчислення через ЦЗ відповідно узагальненої методології;
- розроблення програмних засобів обчислення ДГП на основі ЦЗ для підтвердження вірогідності визначених методологічних принципів та етапів синтезу алгоритму з покращеними обчислювальними характеристиками.

Об'єкт дослідження – процес синтезу алгоритмів і розроблення структурних схем на основі циклічних згорток для створення нових програмних чи апаратних засобів обчислення основних видів дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі.

Предмет дослідження – принципи, методи і засоби обчислення основних видів дискретних косинусних, синусних і перетворень Хартлі на основі циклічних згорток.

Методи дослідження. Для вирішення задач розроблення узагальненої методології для синтезу ефективних алгоритмів використовувались методи й основні положення цифрової обробки сигналів (для аналізу особливостей базисів перетворення ДГП), теорії матриць (для подання базисів перетворень ДГП у вигляді блочно-циклічних матричних структур), комбінаторного аналізу (для визначення циклічного розкладу підстановки), алгебри та теорії груп (для обґрунтування узагальненої методології). Для аналізу та опрацювання результатів використано високорівневу мову програмування

C++, систему комп'ютерної математики MATLAB, методи експериментальних досліджень та статистичної обробки результатів.

Наукова новизна отриманих результатів.

Вперше:

- розроблено узагальнену методологію на основі циклічного розкладу підстановки, яка дозволила якісно підвищити ефективність виконання обчислення ДГП через циклічні згортки завдяки можливості вибору довільного обсягу перетворення;
- розроблено метод обчислення примітивної підстановки у вигляді твірного масиву або спрощеного твірного масиву, доповненого масивом знаків, який, на відміну від існуючих, підвищує ефективність швидшого визначення послідовності переставлення;
- розроблено метод побудови узагальненої блочно-циклічної структури базисної матриці ДГП, у якому, на відміну від відомих, використано твірний масив для табличного формування структури з використанням спрощених значень аргументів базисної функції зі знаком для перших елементів циклічних підматриць;
- розроблено метод цілочисельного пошуку ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення через використання табличних координат, завдяки якому зменшуються обчислювальні затрати і підвищується ефективність аналізу блочно-циклічної структури базису перетворення ДГП;

вдосконалено:

- метод побудови блочно-циклічної структури базису перетворення для ДГП обсягів рівних цілому степеню простого числа на основі закономірного нарощення горизонтальних лінійок в структурі базису зі збільшенням обсягу перетворення, який забезпечує можливість визначення кількості ідентичних підматриць залежно від значень простого числа обсягу і його степеня;
- метод аналізу ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення ДГП для складених значень обсягів, який полягає у спрощенні пошуку за координатами ідентичних підматриць, що містять елементи, кратні обсягу перетворення, завдяки чому підвищується ефективність тривалості визначення наборів ідентичних підматриць;
- систему взаємозв'язку етапів обчислення твірних масивів, скороченої кількості гармонічних коефіцієнтів, кількості та обсягу циклічних згорток, що забезпечує можливість гнучкої адаптації виконання ДГП до відповідних програмних та апаратних обчислювальних ресурсів;

отримали подальший розвиток:

- схемна модель взаємозв'язку обчислювальних підзадач, яка дає змогу проводити послідовно-паралельну організацію обчислень дійсних ДГП на основі циклічних згорток;
- метод розроблення обчислювальних структурних схем з використанням блоків виконання циклічних згорток, який забезпечує можливість підвищити

ефективність у вигляді показника площа-затримка в мікросхемах обчислення ДГП на основі циклічних згорток.

Практичне значення отриманих результатів. Завдяки застосуванню розробленої узагальненої методології, яка визначає взаємозв'язані обчислювальні підзадачі процесу синтезу алгоритму та його виконання для обчислення дійсних дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі на основі ЦЗ, отримано узагальнені практичні результати, які полягають у:

– зменшенні тривалості визначення послідовності переставлення за твірним масивом $P(n)$ більш ніж втричі в порівнянні з визначенням за цілочисельним степенем примітивного елемента циклічної групи, а для складеного обсягу перетворення $N=N_1 \text{x} N_2 \text{x} \ldots \text{x} N_k$ визначення послідовності переставлення виконується до $3k$-раз швидше у випадку розпаралелення обчислення незалежних k - частин твірних підмасивів;

– мультифункціональності, що зменшує затрати більш ніж вдвічі апаратної або програмної реалізації виконання різних ДПХ-ІІ/ДКП-ІІ/ДСП-ІІ перетворень для конкретного обсягу в одному модулі обчислення;

– зменшенні кількості множень на 30% при використанні циклічних згорток з мінімальною мультиплікативною складністю для коротких обсягів, що дорівнюють $\text{N}=2^{\text{n}}$ для а) варіанта твірного масиву порівняно з традиційними обчисленнями ДКП-ІІ;

– зменшенні використання площі зайнятості кристала НВІС на більше ніж 10% завдяки локальності та регулярності зв'язків між процесорними елементами у блоках ЦЗ;

– зменшенні в межах (1,2÷3) раз тривалості обчислення ДКП-ІІ для коротких обсягів, менших за N=120, розробленого програмного забезпечення порівняно з обчисленням програми бібліотеки FFTW3 (Fastest Fourier Transform in the West) розробника MIT (Massachusetts Institute of Technology).

Завдяки покращеним обчислювальним характеристикам розроблені алгоритми та структурні схеми обчислення дійсних дискретних перетворень класу Фур'є на основі ЦЗ можуть застосовуватись для опрацювання інформаційних даних різноманітних фізичних явищ і процесів. Практичне значення одержаних результатів дослідження підтверджено актами впровадження в ТОВ "Юнісервіс" (м. Львів), ТОВ "Лемберг рішення" (м. Львів), ТДВ "Самбірська швейна фабрика"(м. Самбір, Львівська область).

ТОВ "Юнісервіс", розробник ліцензійного програмного забезпечення систем автоматизованого проектування трубопровідних мереж, для аналізу та діагностики надійності роботи механічних систем трубопроводу використовує спектральні методи. В процесі моделювання роботи спроектованої мережі, що може витримувати опускання ґрунту, його вібрації, високий тиск рідин з великою питомою вагою, діагностується надійність системи завдяки виявленню підвищених амплітуд вібрацій на частотах, що збігаються з частотами можливих пошкоджень механічних елементів, на резонансних частотах деталей, на частотах протікання робочого процесу. В акті надано позитивні відгуки про можливості підвищення швидкості роботи та розширення функціональності існуючої підсистеми спектрального аналізу завдяки використанню розробленої узагальненої методології.

ТОВ “Лемберг рішення”, розробник мобільних додатків на ОС Android, застосовує результати дисертаційної роботи для захисту мовної інформації. Використання ДГП на основі циклічних згорток забезпечує на вищому рівні захищеність мовної інформації до криптоаналізу в процесі атаки. Це ґрунтується на використанні багатоступінчастого ключа криптосистеми, до якого входять різні типи перетворень ДКП/ДСП/ДПХ, різні значення обсягів N мовних фрагментів в поєднанні зі способом скремблювання. Низька обчислювальна складність алгоритмів ДГП на основі ЦЗ зменшує часову затримку мовного зв'язку, спричинену процесом скремблювання.

ТДВ “Самбірська швейна фабрика” використовує результати дисертаційного дослідження для контролю якості фрагментів тканин на основі ефективного обчислення двовимірних ДКП-ІІ. Послідовне виконання розроблених одновимірних ДКП-ІІ на основі циклічних згорток для довільних обсягів за рядками та стовпцями даних двовимірного текстурного зображення дає змогу контролювати якість фрагментів тканин різних розмірів. Рівномірно періодичне зображення структури тканини без браку в результаті гармонічного перетворення має відповідне більш загальне спектральне зображення. Зміна цієї картини свідчить про наявність у ній дефекту, і завдяки контролю забезпечуют високу якість швейних виробів.

Результати дисертаційної роботи, підтверджені актами впровадження, використовують у навчальному процесі та наукових дослідженнях у Національному університеті “Львівська політехніка”, Львівському національному аграрному університеті для вивчення та використання студентами нових ефективних підходів обчислення косинусних, синусних та перетворень Хартлі на основі циклічних згорток.

Публікації. Результати дослідження опубліковано в 56 друкованих наукових працях. Із них за темою дисертації опубліковано 29 наукових робіт у фахових виданнях з технічних наук [1] - [29], серед яких 7 входять до міжнародних наукометричних баз, 24 роботи в матеріалах та тезах наукових конференцій [30] - [53], серед яких 7 входять до міжнародних наукометричних баз, 3 патенти України [54] - [56].

Особистий внесок здобувача. Усі положення, що виносяться на захист, автор сформулював та вирішив самостійно. У 21 науковій праці, опублікованих у співавторстві, авторові дисертації належить: у [3], [18], [21], [30], [31], [34], [48], [50] – узагальнена методологія, що включає принципи та етапи синтезу алгоритмів на основі циклічного розкладу підстановки, для виконання обчислень ДКП, ДСП; у [6] – аналіз розвитку підходів обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі ЦЗ; у [11], [44] – метод пошуку ідентичних підматриць у структурі базисної матриці перетворень; у [8], [12] – розроблення та обґрунтування загальних принципів та етапів формування блочно-циклічних структур у ядрі базису перетворення; у [13] – розроблення методики секціонування на циклічні структури базисної матриці дискретних гармонічних перетворень; у [26], [56] – розроблення ефективного алгоритму канонічного розкладу величини обсягу перетворення; у [51], [55] – розроблення спеціалізованої структури пристрою обчислення дискретного гармонічного перетворення; [4], [52] – розроблення алгоритму обчислення ДКП-ІІ на основі ЦЗ та аналіз результатів виконання; у [53] – застосування узагальненої методології для обчислення цілочисельного ДКП на основі ЦЗ.

Апробація матеріалів дисертації. Основні теоретичні й практичні результати дисертації доповідались та обговорювались на 24 національних і міжнародних конференціях та презентувались у збірках наукових праць: Праці п'ятої всеукраїнської міжнародної конференції УкрОБРАЗ'2000, (Київ, 2000р.); Збірка тез доповідей учасників II Національної науково-практичної конференції "Системний аналіз та інформаційні технології" (Київ, 2000р.); Збірник матеріалів науково-практичної конференції “Математичне моделювання складних систем”, (Львів, 2007р.); Proceedings of the Ist-VIIth International Conferences MEMSTECH 2005, 2006, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012: Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (Lviv-Polyana); Proceeding of the XI International Conference TCSET’2012: Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science, (Lviv-Slavske, 2012р.); Proceedings of the VII-XII International Conferences CADSM 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015: The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (Lviv-Slavske, Polyana); Proceeding of the Vth, VIIth, IXth International Scientific and Technical Conferences CSIT-2010, 2012, 2014, 2017, 2018: Computer Science & Information Technologies (Lviv).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних скорочень, вступу, шістьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи складає 373 сторінки друкарського тексту, з них основного тексту дисертації − 291 сторінка, що включає 44 рисунки, 81 таблицю, список використаних джерел із 272 найменування та займає 25 сторінок, 6 додатків на 31 сторінці.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі проведено загальну характеристику роботи, обгрунтовано її актуальність, визначено мету та завдання, предмет та методи досліджень, сформульовано наукову новизну і практичну цінність отриманих результатів та їхню апробацію, наведено кількість й обсяг публікацій за результатами дисертаційного дослідження.

У першому розділі проведено аналіз ефективних методів обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі швидких ЦЗ.

На сучасному етапі розроблено і досліджено різні методи швидких дискретних перетворень класу Фур'є зі своїми перевагами та недоліками в процесі опрацювання інформаційних даних. Ефективність обчислення, як категорійне поняття, що поєднує у собі якісні та кількісні характеристики, постійно доповнюється в результаті створення нових методів обчислення перетворень, програмних та апаратних засобів ДГП .

Відзначимо основні методи обчислення ДГП, що відповідають якісній характеристиці ефективності. У методі (Гуда-Томаса) переходу від одно до багатовимірного обчислення дискретного перетворення Фур'є складеного обсягу N, що використовує китайську теорему про залишки для цілих чисел, не потрібно виконувати добутки на повертаючі множники, за умовою що N - обсяг послідовності розкладається на взаємно простоті множники. Подання базисної матриці перетворення у вигляді добутку слабозаповнених матриць (факторизацію) суттєво зменшує кількість обчислювальних операцій виконання ДГП. Використання поліноміальних перетворень широко застосовується для побудови швидких алгоритмів згорток та дискретних перетворень Фур'є. Інтенсивно розвиваються методи, в яких для обчислення дійсного перетворення задіяні швидкі алгоритми інших типів гармонічних перетворень.

Становлення підходу розроблення швидкого перетворення Фур'є на основі ЦЗ почалось з роботи Рейдера (1968). Для простого обсягу дискретне перетворення Фур'є з вхідною $x(k)$ та вихідною $X(n)$ послідовностями зводилось до обчислення виду:

$$X(g^n) = \sum_{k=1}^{N-1} x(g^{-k}) W^{g^{n-k}} + x(0) \quad , \tag{1}$$

що відповідає ЦЗ над вхідною та базисною $W(n,k)$ послідовностями без включення $x(0)$. Числу g відповідає первісний корінь з властивостями $g^{(N\text{-}1)} = g^{(0)} = 1$, $g^k \neq 1$ для $0 < k < N\text{-}1$.

У цей же рік з'явилась робота Герцеля, присвячена знаходженню окремих значень ДПФ з використанням операції згортки. У роботі Блюстейна показано, що обчислення ДПФ може зводитись до виконання згортки. З обчислювальної точки зору алгоритми Герцеля та Блюстейна не відзначаються ефективністю за кількістю операцій, тому що їхня обчислювальна складність $O(N^2)$, однак для певних застосувань вони мають простішу апаратну реалізацію.

Подальшим розвитком у цьому напрямі є публікації Вінограда. В алгоритмах Вінограда використовуються для переіндексації порядку даних конкретні обчислення, що базуються на китайській теоремі про залишки, властивостях кронекеровського добутку матриць та алгоритмів ЦЗ.

Гармонічні перетворення і згортка ключові операції цифрової обробки інформаційних даних. Найбільш поширено ефективне обчислення ЦЗ реалізовується на основі теореми про швидку згортку.

Поряд з дослідженнями над ШПФ (швидкі перетворення Фур'є) розвивались і взаємодоповнювались методи ефективного обчислення цифрової згортки. Метод Агарвала-Кулі переводить одновимірну N -точкову ЦЗ у багатовимірну за умови, що обсяг розкладається на взаємно прості множники. Метод на основі блочних псевдоциркулянтів дає змогу обчислити одновимірну N-точкову ЦЗ за допомогою багатовимірної без умови розкладу обсягу на взаємно прості множники. Відповідно методу парисекції згортка парних обсягів може визначатись за згортками вдвічі менших обсягів, що відповідним чином зміщені.

Ефективне обчислення ЦЗ над послідовностями $x(k)$, $h(k)$

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(n)_N \, h(n-k)_N, \quad n = 0,1\ldots,N-1, \tag{2}$$

де $(n)_N$ та $(n\text{-}k)_N$ – операції індексів послідовностей за модулем N, у вигляді поліноміального подання:

$$Y(z) = H(z)\,X(z) \;\; mod(z^N - 1)\,, \tag{3}$$

використовує китайську теорему про залишки для поліномів. Тобто, поліном $(z^N\text{-}1)$ записується у вигляді добутку взаємно-простих поліномів з коефіцієнтами поля раціональних чисел і на основі поліноміальних перетворень визначається $Y(z)$.

Отже, розроблено значну кількість ефективних методів обчислення дискретних перетворень класу Фур'є. Однак більшість методів обчислення ДГП на основі ЦЗ застосовуються для простих та цілих степенів простих обсягів перетворення (алгоритм Рейдера, Вінограда) або мають квадратичну залежність обчислювальної складності (алгоритм Герцеля, Блюстейна) для довільних обсягів. Стандартизовані ISO/IEC дискретні косинусні та синусні перетворення недостатньо досліджені та вивчені в аспекті ефективного обчислення. Тому розроблення узагальненої методології для синтезу швидких алгоритмів та побудови засобів обчислення ДГП на основі ЦЗ є актуальним.

У другому розділі проведено аналіз та обґрунтування узагальнених методологічних принципів та етапів обчислення ДГП на основі ЦЗ.

Узагальнено методологію формування й аналізу структури дискретних гармонічних складових базису перетворення у вигляді набору ганкелевих циркулянтів для обчислення дійсних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток незалежно від значення обсягу перетворення.

Найменш дослідженими обчисленнями на основі ЦЗ є дійсні ДГП та їхні види, що загально описуються в матричній формі виразом

$$X = W_{NxN}^{nk}\, x \,, \tag{4}$$

де W_{NxN}^{nk} - квадратна матриця дійсного дискретного ортогонального базису перетворення (косинусний, синусний, касинусний); N- обсяг послідовності, X - вихідний та x - вхідний стовпці перетворення.

Для обґрунтування методології обчислення ДГП на основі ЦЗ детально проаналізовано цілочисельні аргументи $a_{n,k}$ дискретної базисної функції w($a_{n,k}$ π/T) дійсних перетворень на основі властивості періодичності T та симетричності (табл. 1).

Таблиця 1 – Аргументи $a_{\mathrm{n,k}}$ дискретної базисної функції ДГП

Тип \ Вид	I	II	III	IV
ДКП	$a_{n,k} = (k\, n)$ mod $(2N)$	$a_{n,k} = k(2n+1)$ mod $(4N)$	$a_{n,k} = (2k+1)n$ mod $(4N)$	$a_{n,k} = (2k+1)$ $(2n+1)$ mod $(8N)$
ДСП	$a_{n,k} =$ $(k+1)(n+1)$ mod $(2N)$	$a_{n,k} =$ $(k+1)(2n+1)$ mod $(4N)$	$a_{n,k} =$ $(2k+1)(n+1)$ mod $(4N)$	$a_{n,k} =$ $(2k+1)(2n+1)$ mod $(8N)$
ДПХ	$a_{n,k} = (k\, n)$ mod (N)	$a_{n,k} = k\,(2n+1)$ mod $(2N)$	$a_{n,k} = (2k+1)n$ mod $(2N)$	$a_{n,k} = (2k+1)$ $(2n+1)$ mod $(4N)$

Ці аргументи $a_{n,k}$ можна подати у вигляді таблиці Келі для * - алгебраїчної операції множення за модулем T - періодом базисної функції, що залежно від типу та виду ДГП може набувати значень $T=N$, $2N$, $4N$, $8N$.

Значення аргументів $a_{n,k}$ базисної матриці ДГП відповідають множині $\{1,2,\ldots,\ T\text{-}1\}$ елементів та визначаються на основі * - мультиплікативної операції за модулем, задаючи алгебраїчну структуру $< T\text{-}1,\ * >$.

Досліджено системи $< T\text{-}1,\ * >$ із заданою множиною елементів $\{1,2,3\ \ldots,T\text{-}1\}$ та операцією (*) на відповідність до часткових випадків алгебраїчних структур для простого та складеного значень обсягів перетворень.

Системи $< N,\ * >$ за заданою операцією (*) на множині з N цілочисельних елементів, коли порядок N - просте число, є циклічними групами, причому таблиця Келі (табл. 2), якщо переставити рядки та стовці результатів операцій, відповідає ганкелевому циркулянту.

Таблиця 2 – Таблиця алгебраїчної операції множення за модулем T

*	1	2	3	…	T-1
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	$a_{1(T-1)}$
2	a_{12}	a_{13}	a_{14}	…	a_{11}
3	a_{13}	a_{14}	a_{15}	…	a_{12}
…	…	…	…	…	…
T-1	$a_{1(T-1)}$	a_{11}	a_{12}	…	$a_{1\,(T-2)}$

У роботі в якості симетричної групи вперше використовується група підстановок ψ_i. Значення аргументів функцій базису ДГП для простого обсягу з точки зору операції підстановки відповідає сукупності підстановок $\{\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_t\}$ з операцією – о, що утворюють циклічну групу $< \psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_t$, о $>$ ізоморфну групі $< N, * >$ за теоремою Келі. Кількість і нумерація примітивних і непримітивних елементів як для групи підстановок, так і для групи з мультиплікативною операцією за модулем у системі елементів аргументів збігаються. Сформовані для обох груп послідовності за примітивними елементами співпадають. Встановлено, що в процесі генерування за непримітивними елементами групи підстановок решту елементів групи можна отримати послідовно домножуючи отриману множину на ціле значення, взявши за модулем T.

Для ДГП складеного обсягу $< N=N_1 \text{x} N_2 \text{x} \ldots \text{x} N_k , * >$ одержуємо системи з множиною елементів (1,2,…,T-1) та * - мультиплікативною операцією за модулем. Таблиця Келі яких задається основною підматрицею обсягом

$$[T-\sum_i N_i]\times[T-\sum_i N_i], \quad i=2,3,\ldots,k \quad , \tag{5}$$

що за своїми властивостями є абелевою групою ізоморфною групі підстановок**.**

Аналіз підматриць у таблиці Келі з елементами, кратними складеному обсягу, показує, що кратні елементи цих матриць визначаються за допомогою лінійного відображення f_i натуральної множини $\{1,2,\ldots,N_i\text{-}1\}$ на множину кратних елементів $\{N_i,\ 2N_i,\ 3N_i,\ \ldots,\ N_i(N_i\text{-}1)\ \}$. Множина $\{1,2,\ldots,N_i\text{-}1\}$ з операцією множення за модулем є циклічною групою, таблиця Келі якої подається ганкелевим циркулянтом. Відповідно, за відображенням f_i підматриці з множиною елементів кратною складеному обсягу перетворення, що розміщені вертикально/горизонтально у квадратній матриці цілочисельних аргументів функцій базису ДГП є також циклічні зліва. Отже, переставлення елементів базисної матриці для складеного обсягу перетворення приводить до приведення базисної матриці у вигляді сукупності ганкелевих циркулянтів.

Пошук примітивних елементів групи $< N, * >$ для формування циклічних структур трудомісткий з точки зору аналізу й обчислень. Тому замість пошуку генеруючих елементів запропоновано застосовувати підстановку, за якою формується базисна матриця перетворення з ганкелевими підматрицями. Підстановка задається двома рядками базисної матриці цілочисельних аргументів взятих за модулем T. Це підвищує ефективність визначення переставленої послідовності у порівнянні з поширеною методикою за алгоритмом Рейдера, де знаходження a_i примітивних (генеруючих) елементів виконується на основі виразу ($a_i^n \bmod T$), $n=\varphi(T)$, де $\varphi(T)$-функція Ейлера та обчисленням цілочисельних степенів a_i^k, де $k=0,1,\ldots,T$-1.

Таким чином, в обчисленні для визначення структури матриці аргументів базису ДГП можна застосувати $P(n)$ твірний масив, що відповідає циклічному розкладу підстановки. Твірний масив $P(n)$ задається одним масивом або сукупністю підмасивів:

$$P(n) = (n_{11,}n_{12,\ldots,}n_{1L1})\ (n_{21,}n_{22,\ldots,}n_{2L2})\ldots(n_{\mathrm{kL}1,}n_{\mathrm{kL}2,}\ldots,\ n_{\mathrm{k}L\mathrm{k}}), \qquad (6)$$

де n_{ij} –елемент підмасиву, Li – кількість елементів у підмасиві.

Властивості симетрії та періодичності базисів ДГП приводять до ефективнішого подання $P(n)$ з меншими значеннями елементів у спрощених твірних масивах $P'(n)$ з доповненнями відповідних підмасивів знаків $S(n)$, що містять значення елементів рівними +1,-1,0. Спрощений твірний масив $P'(n)$ та $S(n)$ визначає особливість структури квадратної базисної матриці W та організацію обчислень за кожним конкретним обсягом перетворень N.

Отже, у багатьох випадках твірний масив $P(n)$ задає приведення двовимірної базисної матриці перетворення до псевдоциркулянтних блочних структур, однак формування за спрощеним твірним масивом $P'(n)$ та $S(n)$ цю псевдоциркулянтність у багатьох випадках нівелює. Це дає можливість підвищити ефективність перетворення зменшивши кількість обчислень ЦЗ.

Таким чином, можна виділити такі методологічні принципи, яких необхідно враховувати для виконання обчислення ДГП на основі ЦЗ:

1) розмірність стовпців базисної матриці вибирається на асиметричному інтервалі (наявність додатніх і від'ємних значень базисної функції);

2) розмірність рядків базисної матриці забезпечує визначення вихідних значень обсягу перетворення і не більша розмірності стовпців;

3) номер вибору рядка для формування твірного масиву повинен бути не кратний обсягу перетворення;

4) порядок і повторюваність послідовності вхідних даних визначається розмірністю та порядком стовпців базисної матриці;

5) ідентичні циклічні матриці розміщені по горизонталі потребують об'єднання вхідних даних;

6) об'єднання результатів ЦЗ визначається особливістю блочно-циклічної структури базису перетворення для конкретного обсягу;

7) визначені вихідні значення перетворення через об'єднання результатів ЦЗ потребують корекції знаків.

На основі теоретичних досліджень, що базуються на методологічних принципах, визначено основні етапи ефективного обчислення ДГП на основі ЦЗ, що включають:

- задання виду та обсягу перетворення N, вхідної послідовності;
- формування твірного масиву $P(n)$ та спрощеного твірного масиву $P'(n)$ з доповненням масивом знаків $S(n)$;
- визначення коефіцієнтів функції базису за спрощеним твірним масивом;
- виділення однотипних спрощених циклічних підматриць, розміщених горизонтально та вертикально, з врахуванням знаків;
- переіндексація вхідних даних відповідно до значень твірного масиву та об'єднання вхідних даних відповідно до однотипності циклічних підматриць, розміщених горизонтально;
- обчислення зменшеної кількості швидких ЦЗ;
- об'єднання результатів швидких ЦЗ для обчислення вихідних значень перетворення.

Відповідно до сформульованих етапів узагальненої методології побудовано схемну модель взаємозв'язків підзадач синтезу алгоритму та обчислення ДГП на основі ЦЗ у вигляді графа (рис.1).

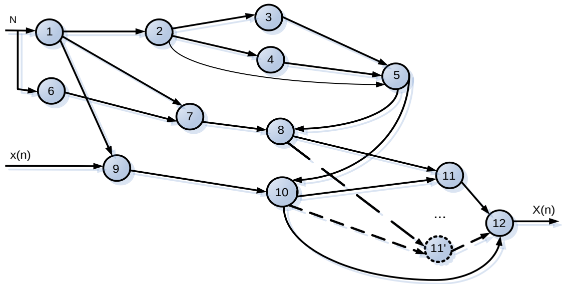


Рисунок 1 – Взаємозв'язок підзадач виконання ДГП на основі ЦЗ

Синтез та обчислення дійсних ДГП складається з декількох підзадач на рівні вузлів великоблокового паралелізму, які пов'язані асинхронними каналами комунікації. Вузли підзадач, прийнявши дані, можуть помістити в канал повідомлення або видалити його з каналу. Ця схема (рис.1) складається з відповідних входів N, $x(n)$ та виходу $X(n)$. Вузли (1, 2, 3, 4, 5) відповідають підзадачі синтезу алгоритму, а вузли (9, 10, 11,…,11', 12) відповідають підзадачі виконання ДГП адаптованого до обсягу та виду перетворення. Наприклад, вузли 11,…,11' відповідають паралельному виконанню швидких ЦЗ між згрупованими послідовностями даних у вузлі 10 та відповідними значеннями гармонічних коефіцієнтів базисної функції з вузла 8.

Послідовно-паралельний синтез алгоритму та обчислення ДГП за даною схемою має не менше двох варіантів реалізації за визначеними твірними масивами $P(n)$ відповідних характеристик, що підвищує ефективність гнучкості вибору взаємозв'язків між потоками даних. До цих характеристик відноситься k - кількість підмасивів у $P(n)$, Li - кількість елементів у підмасиві $P_i(L_i)$ та їхня повторюваність.

Отже, розроблено узагальнену методологію, що включає принципи й етапи синтезу ефективного алгоритму і виконання ДГП з використанням твірного масиву, що дає змогу виконувати обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі ЦЗ.

У третьому розділі відповідно узагальненій методології формування циклічних структур матриці аргументів ядра ДГП проведено аналіз одержаних базисів та встановлено особливості синтезу алгоритмів обчислення чотирьох видів ДКП на основі ЦЗ.

Загальне подання ДКП у вигляді:

$$X^c(k) = \gamma_{k,n} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left[\frac{(2k+k_0)(2n+n_0)\pi}{4N} \right], \qquad (7)$$

де $\gamma_{k,n}$ - відповідні масштабувальні множники, k_0, n_0 - зміщення в загальному виразі (7) можуть набувати значення $k_0, n_0 \in \{0, 1\}$ і визначають види перетворень, $x(n)$, $X^c(k)$ - вхідна та вихідна послідовності перетворення $(k,n=0,1,\dots N\text{-}1)$.

ДКП знайшло своє широке застосування в багатьох прикладних задачах і особливо для стиснення інформаційних даних за низкою причин. По-перше, базисні функції ДКП якісно апроксимують функції перетворення Карунена-Лоєва для стаціонарних випадкових процесів, тобто дають змогу описувати сигнал із заданою точністю з мінімальним числом компонентів. По-друге, ДКП входить як складова частина в деякі ефективні алгоритми ДПФ. По-третє, складові ДКП сконцентровані в нижніх індексах спектра інтенсивніше і обнулення решти вихідних значень не приводить до суттєвої втрати енергії сигналу, що дає змогу запобігти крайовим ефектам у процесі блочного кодування зображень.

Відповідно до теорії ДПФ для тригонометричних перетворень з базисом на інтервалі $[0, \pi]$ необхідно продовжити вхідну послідовність вдвічі. Вісь симетрії перед продовженими вибірками може розширюватись: на вибірку симетрично (WS), на вибірку асиметрично (WA), на піввибірки симетрично (HS), на піввибірки асиметрично (HA). Існує тільки дві осі симетрії для обмеженої послідовності і, відповідно, можливий набір варіантів розширення ε (табл. 3) відповідає 8 видам ДКП.

Таблиця 3 – Варіанти розширення вхідної послідовності для ДКП

ε	WSWS	HSHS	WSWA	HSHA	WSHS	HSWS	WSHA	HSWA
ДКП	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII

У роботі проаналізовано чотири види ДКП I-IV, що мають найбільше практичне застосування. Відповідно, n-та компонента кожного з чотирьох видів k-го базисного вектора (без нормалізуючого множника) матиме вигляд:

ДКП-I : $\cos [n\, k\, \pi/N]$, $(k,n=0,1,\ldots N)$; (8)

ДКП-II : $\cos [(2n+1)\, k\, \pi/2N]$, $(k,n=0,1,\ldots N-1)$; (9)

ДКП-III : $\cos [n(2k+1)\, \pi/2N]$, $(k,n=0,1,\ldots N-1)$; (10)

ДКП-IV : $\cos [(2n+1)(2k+1)\, \pi/4N]$, $(k,n=0,1,\ldots N-1)$. (11)

Проведено аналіз аргументів базисної функції для чотирьох видів ДКП. На основі властивостей періодичності та симетричності базисні функції - періодичні (2π), симетричні (π), асиметричні (π/2) і подані в табл. 4 відповідно до кількості вибірок N для кожного з видів ДКП.

Таблиця 4 – Властивості компонентів базисних функцій ДКП I-IV

Перетворення	*періодичність, T*	*симетричність*	*асиметричність*
ДКП-I	відносно $2N$	відносно N	відносно $N/2$
ДКП-II	відносно $4N$	відносно $2N$	відносно N
ДКП-III	відносно $4N$	відносно $2N$	відносно N
ДКП-IV	відносно $8N$	відносно $4N$	відносно $2N$

Матриця $C_a[k,n]$ аргументів косинусних перетворень видів ДКП I-IV за властивістю періодичності міститиме елементи аргументів $c_{k,n}$ рівні

$$C^{I}_{a}(k,n) = [c_{k,n}] = [(k\, n) \bmod T\,], \qquad (k,n=0,1,\ldots N); \tag{12}$$

$$C^{II}_{a}(k,n) = [c_{k,n}] = [(k\,(2n+1)) \bmod T\,], \qquad (k,n=0,1,\ldots N-1); \tag{13}$$

$$C^{III}_{a}(k,n) = [c_{k,n}] = [((2k+1)n) \bmod T\,], \qquad (k,n=0,1,\ldots N-1); \tag{14}$$

$$C^{IV}_{a}(k,n) = [c_{k,n}] = [((2k+1)(2n+1)) \bmod T\,], \qquad (k,n=0,1,\ldots N-1). \tag{15}$$

На основі підстановки з рядків даних матриць формуються твірні масиви $P(n)$. Спрощені елементи $\underline{c}_{k,n}$ з матриці аргументів ДКП I-IV (12-15) визначаються послідовним виконанням обчислень:

$$c_{k,n} = T - [(c_{k,n}) \bmod T\,], \text{ якщо } [(c_{k,n}) \bmod T\,] > T/2; \tag{16}$$

$$\underline{c}_{k,n} = T/2 - (T - c_{k,n}), \text{ якщо } (T - c_{k,n}) \text{ або } c_{k,n} > T/4; \tag{17}$$

інакше $\underline{c}_{k,n} = c_{k,n}$.

Спрощена матриця аргументів ДКП I-IV доповнюється матрицею знаків $Sc(k,n)$ косинуса, елементи якої визначаються за нерівностями:

$$Sc\,(k,n) = \begin{cases} +1, & \text{якщо} \quad 3T/4 < c_{k,n} < T/4\,; \\ 0, & \text{якщо} \quad c_{k,n} = T/4,\, 3T/4\,; \\ -1, & \text{якщо} \quad T/4 < c_{k,n} < 3T/4\,. \end{cases} \tag{18}$$

Твірний масив $P(n)$ та спрощений твірний масив $P'(n)$ доповнений масивом знаків $Sc(n)$, визначених за формулами (16, 17), є основою синтезу ефективного алгоритму ДКП. Особливості синтезу ефективних алгоритмів для кожного з видів ДКП I-IV подано в табл. 5.

Таблиця 5 – Особливості синтезу ефективних алгоритмів ДКП I-IV

Параметр\Вид		ДКП-I	ДКП-II	ДКП-III	ДКП-IV
1		$[(N\text{-}1)/2] \times [N\text{-}1]$	$[(2N\text{-}1)/2] \times [2N]$	$[N] \times [2N\text{-}1]$	$[2N] \times [2N]$
2		$[x]$	$[x]$ $[x']$	$[x]$ $[-x']$	$[x]$ $[-x']$
3		$[\pm X]$, без $x(0)$	$2[\pm X]$, без $X(0)$	$[X]$, без $x(0)$	$2[\pm X]$
4		існує	існує	існує	для (2^n)
5	5.1	$N(\pi)$	$N(\pi/2)$, $2N(\pi)$, $3N(3\pi/2)$,	$N(\pi/2)$, $2N(\pi)$, $3N(3\pi/2)$,	$2N(\pi/2)$, $4N(\pi)$, $6N(3\pi/2)$,
	5.2	$N/2(\pi/2)$, $N(\pi)$, $3N/2(3\pi/2)$			

де нумерація в першому стовпці визначає відповідні параметри для ДКП I-IV в рядках: 1 - розмірність матриці аргументів за рядками і стовпцями; 2 - формування вхідних даних (за твірним масивом $[x]$, а $[x']$ - зворотне); 3 - формування вихідних даних $[X]$; 4 – повторенням групи елементів послідовності коефіцієнтів у ЦЗ; 5 - осі симетрії базисної функці для номера вибірки(радіани) для обсягів; 5.1- непарних p та 5.2 – парних обсягів.

У результаті синтезу алгоритму, наприклад для ДКП-II обсягом N=8, отримуємо структурну схему модуля відповідно рис.2, де BRC – буферний регістр коефіцієнтів; BRD – буферний регістр даних; $U_{1,2,3,4}$ – блоки об'єднань вхідних даних x(n); CCU – блоки 4,2,1-точкових ЦЗ.

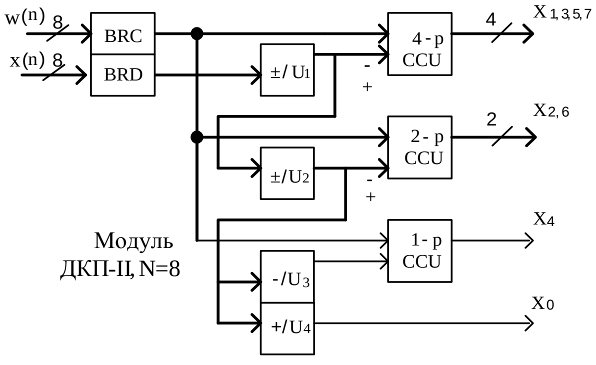


Рисунок 2 – Структурна схема модуля ДКП-II для N=8

Отже, відповідно узагальненій методології формування блочно-циклічних структур у матриці аргументів ядра ДГП для обчислення на основі ЦЗ визначено особливості синтезу та обчислення алгоритмів ДКП I-IV. Вірогідність сформульованих методологічних принципів та етапів синтезу алгоритму з врахуванням особливостей для чотирьох видів ДКП I-IV підтверджено конкретними прикладами.

У четвертому розділі відповідно узагальненій методології формування циклічних структур матриці аргументів ядра ДГП проведено аналіз одержаних базисів та встановлено особливості синтезу алгоритмів обчислення чотирьох видів ДСП на основі ЦЗ.

Загальне подання ДСП у вигляді:

$$X^s(k) = \gamma_{k,n} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \left[\frac{2(k+k_0)\,2(n+n_0)\pi}{4N} \right], \qquad (19)$$

де $\gamma_{k,n}$ – відповідні масштабуючі множники, k_0, n_0 $\in$ {1/2, 1} – коефіцієнти зміщення визначають види перетворень, $x(n)$, $X^s(k)$ вхідна та вихідна послідовності перетворення, (k,n = 0,1,…N-1).

ДСП використовують у багатьох прикладних задачах, особливо це перетворення ефективне для опрацювання слабокорельованих аудіо- та відео інформаційних даних.

Згідно з теорією ДПФ для ДСП, аналогічно ДКП, необхідно продовжити вхідну послідовність вдвічі. Існує тільки дві осі симетрії для обмеженої послідовності і, відповідно, можливий набір варіантів розширення ε (табл. 6) відповідає 8 видам ДСП.

Таблиця 6 – Варіанти розширення вхідної послідовності для ДСП

ε	WAWA	HAHA	WAWS	HAHS	WAHA	HAWA	WAHS	HAWS
ДСП	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII

У роботі проаналізовано чотири види ДСП I-IV, що мають найбільше практичне застосування. Відповідно, n-та компонента для кожного з чотирьох видів k-го базисного вектора (без нормалізуючого множника) буде:

ДСП-I : $\sin[(k+1)(n+1)\,\pi/(N)]$, ($k,n$=0,1,…$N$-2); (20)

ДСП-II : $\sin[(k+1)(2n+1)\,\pi/(2N)]$, ($k,n$=0,1,…$N$-1); (21)

ДСП-III : $\sin[(2k+1)(n+1)\,\pi/(2N)]$, ($k,n$=0,1,…$N$-1); (22)

ДСП-IV : $\sin[(2k+1)(2n+1)\,\pi/(4N)]$, ($k,n$=0,1,…$N$-1). (23)

Проведено аналіз аргументів базисної функції для чотирьох видів ДСП. На основі властивостей періодичності та симетричності базисні функції – періодичні (2π), симетричні (π), асиметричні (π/2) і подані в табл. 7 відповідно до кількості вибірок N для кожного з видів ДСП.

Таблиця 7 – Властивості компонент базисних функцій ДСП I-IV

Перетворення	*періодичність, T*	*асиметричність*	*симетричність*
ДСП-I	відносно 2N	відносно N	відносно N/2
ДСП-II	відносно 4N	відносно 2N	відносно N
ДСП-III	відносно 4N	відносно 2N	відносно N
ДСП-IV	відносно 8N	відносно 4N	відносно 2N

Матриці аргументів синусних перетворень видів ДКП I-IV за властивостю періодичності міститимуть елементи аргументів $c_{k,n}$ рівні

$C^{I}_{a}(k,n) = [c_{k,n}] = [((k+1)(n+1)) \bmod T\,]$, ($k,n$=0,1,…$N$-2); (24)

$C^{II}_{a}(k,n) = [c_{k,n}] = [((k+1)(2n+1)) \bmod T\,]$, ($k,n$=0,1,…$N$-1); (25)

$$C^{III}_{a}(k,n) = [c_{k,n}] = [((2k+1)(n+1)) \bmod T], (k,n=0,1,\ldots N\text{-}1); \qquad (26)$$

$$C^{IV}_{a}(k,n) = [c_{k,n}] = [((2k+1)(2n+1)) \bmod T], (k,n=0,1,\ldots N\text{-}1). \qquad (27)$$

Спрощені елементи $\underline{c}_{k,n}$ матриці аргументів ДСП I-IV (24-27) визначається послідовним виконанням обчислень:

$$c_{k,n} = T - [(c_{k,n})\ mod\ T], \text{ якщо } [(c_{k,n})\ mod\ T] > T/2; \qquad (28)$$

$$\underline{c}_{k,n} = T/2-(T - c_{k,n}), \text{ якщо } (T - c_{k,n}) \text{ або } c_{k,n}\} > T/4, \qquad (29)$$

інакше $\underline{c}_{k,n} = c_{k,n}$.

Спрощена матриця аргументів ДСП I-IV доповнюється матрицями знаків $Ss(k,n)$ синуса, елементи якої визначаються за нерівностями:

$$Ss\,(k,n) = \begin{cases} +1, & \text{якщо} \quad 0 < c_{k,n} < T/2\ ; \\ 0, & \text{якщо} \quad c_{k,n} = 0, T/2\ ; \\ -1, & \text{якщо} \quad T/2 < c_{k,n} < T\ . \end{cases} \qquad (30)$$

За допомогою використання $P(n)$, $P'(n)$, $Ss(n)$, визначених за формулами (28-30), виконується синтез ефективного алгоритму ДСП. Особливості синтезу ефективних алгоритмів для кожного з видів ДСП I-IV, які визначено аналогічно за формою першого стовпця в табл. 5, подано в табл. 8

Таблиця 8 – Особливості синтезу ефективних алгоритмів ДСП I-IV

<table>
<tr><td colspan="2">Параметр\Вид</td><td>ДСП-I</td><td>ДСП-II</td><td>ДСП-III</td><td>ДСП-IV</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td>[2N] × [2N]</td><td>[4N] × [2N]</td><td>[2N] × [4N]</td><td>[4N] × [4N]</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>[x] [-x’]
‘ з кінця</td><td>[x] [-x’]
‘ з кінця</td><td>[x] [x’]
[-x][-x’]</td><td>[x] [x’]
[-x][-x’]</td></tr>
<tr><td colspan="2">3</td><td>2[±X], без X(N)</td><td>2[±X]</td><td>4[±X]</td><td>4[±X]</td></tr>
<tr><td colspan="2">4</td><td>існує (2^n)</td><td>існує (2^n)</td><td>існує (2^n)</td><td>існує (2^n)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>5.1</td><td>π (N)</td><td rowspan="2">N (π/2),
2N (π),
3N (3π/2)</td><td rowspan="2">N (π/2),
2N (π),
3N (3π/2)</td><td rowspan="2">2N (π/2),
4N (π),
6N (3π/2)</td></tr>
<tr><td>5.2</td><td>N/2(π/2), N(π),
3N/2(3π/2)</td></tr>
</table>

У результаті синтезу алгоритму, наприклад для обсягу N=8, отримуємо структурну схему модуля обчислення ДСП-II (обведено пунктиром на рис. 3), а для обчислення ДСП-III ще необхідно отримані прямі та [і] - інвертовані за знаком результати згорток об’єднати для обчислення вихідних даних. В структурній схемі модуля обчислення ДСП-III (рис. 3) позначено: BRC – буферний регістр коефіцієнтів базису, BRD – буферний регістр вхідних даних x(n), $U_{1,2,3,4}$ – блоки об’єднань вхідних даних, CCU – блоки 4, 2,1-точкової ЦЗ, і – інвертування за знаками результатів ЦЗ, ∑ – блок об’єднання результатів згорток.

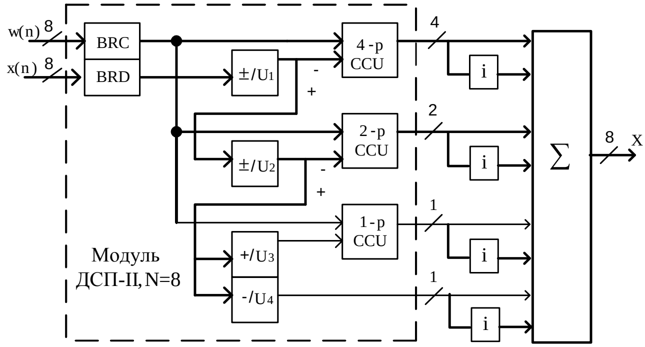


Рисунок 3 – Структурна схема модуля обчислення ДСП-III для *N*=8

У табл. 9 подано число операцій для ДСП I-IV на основі ЦЗ з мінімальним числом добутків (*розроблені*) та число операцій найкращих алгоритмів (*традиційні*) для обсягу *N*=8, де вказано m – кількість множень, a – кількість додавань.

Таблиця 9 – Таблиця числа операцій для ДСП I-IV для *N*=8

Види ДСП	*Розроблені*	*Традиційні*
ДСП-I	m=6, a=22	m=6, a=19
ДСП-II/III	m=8, a=30	m=9, a=24
ДСП-IV	m=14, a=46	m=20, a=38

Підвищення обчислювальної ефективності ДСП I-IV в плані зменшення кількості множень приводить до збільшення кількості додавань в розроблених алгоритмах обчислення ДСП I-IV на основі ЦЗ в порівнянні з традиційними.

Отже, відповідно узагальненій методології формування циклічних структур матриці аргументів ядра ДГП для обчислення на основі ЦЗ визначено особливості синтезу та обчислення алгоритмів ДСП I-IV. Вірогідність сформульованих методологічних принципів та етапів синтезу алгоритму з врахуванням особливостей для чотирьох видів ДСП I-IV підтверджено конкретними прикладами.

У п'ятому розділі відповідно узагальненій методології формування циклічних структур матриці аргументів ядра ДГП проведено аналіз одержаних базисів та встановлено особливості синтезу алгоритмів обчислення чотирьох видів дискретних перетворень Хартлі на основі ЦЗ.

Альтернативою ДПФ для виконання перетворення над дійсними числами стало дискретне перетворення Хартлі. Основи теорії неперервного і дискретного, а також один з варіантів його швидкого перетворення Хартлі (ШПХ), часто називають алгоритмом Хартлі – Брейсуелла, розробленого у

80-х роках. Спектр Хартлі досліджується та застосовується в багатьох прикладних задачах. Найбільше ШПХ застосувуються в обчисленні згорток, визначенні спектральної густини та певних видів цифрового опрацювання дійсних даних, особливо радіографічних.

У загальному ДПХ для обсягу N обчислює вихідні значення $X(k)$ за вхідними $x(n)$ для (k, n=0,1,…N-1) за формулою

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, cas\left[(n+n_0)(k+k_0)\frac{2\pi}{N}\right], \quad k = 0,1,..., N-1 \cdot \tag{31}$$

Зворотне дискретне перетворення Хартлі визначається за формулою

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, cas\left[(n+n_0)(k+k_0)\frac{2\pi}{N}\right], \quad n = 0,1,..., N-1, \tag{32}$$

де $cas(2\pi(k+k_0)(n+n_0)/N) = (cos(2\pi(k+k_0)(n+n_0)/N) + sin(2\pi(k+k_0)(n+n_0)/N))$; n_0, $k_0 \in \{0, ½\}$ – відповідні зміщення. За значеннями зміщення k_0, n_0 у загальному виразі (31, 32) визначаються основні чотири види ДПХ (табл. 10).

Таблиця 10 – Значення зміщень чотирьох видів ДПХ

k_0 , n_0,	0, 0	0, ½	½,0	½, ½
ДПХ	ДПХ-I	ДПХ-II	ДПХ-III	ДПХ-IV

Таким чином, для чотирьох видів ДПХ аргументи $h_{k,n}$ касинусної функції рівні відповідно:

для ДПХ-I $\quad h_{k,n} = kn\, 2\pi/N$, ($k$,$n$=0,1,…$N$); (33)

для ДПХ-II $\quad h_{k,n} = k(2n+1)\, \pi/N$, ($k$,$n$=0,1,…$N$-1); (34)

для ДПХ-III $\quad h_{k,n} = (2k+1)n\, \pi/N$, ($k$,$n$=0,1,…$N$-1); (35)

для ДПХ-IV $\quad h_{k,n} = (2k+1)(2n+1)\, \pi/2N$, ($k$,$n$=0,1,…$N$-1). (36)

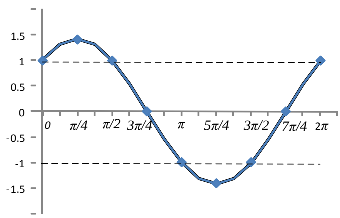


Рисунок 4 – Графік функції cas(φ)

Періодична базисна функція cas(φ) (рис. 4) є асиметричною відносно π та має на проміжку (0, 2π) чотири локальні осі симетрії. Властивості асиметричності та симетричності cas(φ) залежать від виду ДПХ і подані відповідно до обсягу N перетворення в табл. 11.

Таблиця 11 – Властивості компонент базисних функцій ДПХ I-IV

Перетворення	*періодичність, T*	*асиметричність*	*симетричність*
ДПХ-I	відносно N	відносно N/2	відносно N/8
ДПХ-II	відносно 2N	відносно N	відносно N/4
ДПХ-III	відносно 2N	відносно N	відносно N/4
ДПХ-IV	відносно 4N	відносно 2N	відносно N/2

Матриці аргументів чотирьох видів перетворень Хартлі за властивістю періодичності міститимуть елементи аргументів $h_{k,n}$ рівні:

$$\mathrm{H}^{\mathrm{I}}{}_{a}(k,n) = [h_{k,n}] = [(k\,n)\ mod\ T], \qquad (k,n=0,1,\ldots N); \qquad (37)$$

$$\mathrm{H}^{\mathrm{II}}{}_{a}(k,n) = [h_{k,n}] = [(k\,(2n+1))\ mod\ T], \quad (k,n=0,1,\ldots N); \qquad (38)$$

$$\mathrm{H}^{\mathrm{III}}{}_{a}(k,n) = [h_{k,n}] = [((2k+1)n)\ mod\ T] \quad (k,n=0,1,\ldots N); \qquad (39)$$

$$\mathrm{H}^{\mathrm{IV}}{}_{a}(k,n) = [h_{k,n}] = [((2k+1)(2n+1))\ mod\ T], \ (k,n=0,1,\ldots N). \qquad (40)$$

Використовуючи властивості асиметричності та локальної симетричності базисної функції касинус на проміжку (0, 2π), елементи матриці аргументів $h_{k,n}$ можна спростити, зменшуючи кількість їхніх значень. Спрощені елементи матриці аргументів $\underline{h}_{k,n}$ визначаються послідовним виконанням обчислень для:

ДПХ-I з N парним

$$\underline{h}_{k,n} = [(\,h_{k,n})\ mod\ N\,]\text{-}N/2, \text{ якщо } [(h_{k,n})\ mod\ N\,]>N/2; \qquad (41)$$

з N кратним 8

$$\underline{h}_{k,n} = \{N/4 - [(h_{k,n})\ mod\ N - N/2]\}, \text{ якщо } N/8<\{(h_{k,n})\ mod\ N - N/2\}<N/4, \qquad (42)$$

$$\underline{h}_{k,n} = N/4 + \{N/2 - [(h_{k,n})\ mod\ N - N/2]\}, \text{ якщо } 3N/8<\{(h_{k,n})\ mod\ N - N/2\} <N/2, \qquad (43)$$

інакше $\underline{h}_{k,n} = h_{k,n}$;

для ДПХ-II та ДПХ-III

$$\underline{h}_{\,k,n} = [(\,h_{\,k,n})\ mod\ 2N\,]\text{-}N, \text{ якщо } [(h_{\,k,n})mod\ 2N\,]>N\ ; \qquad (44)$$

з N кратним 4

$$\underline{h}_{\,k,n} = N/2 - \{[(h_{\,k,n}mod\ 2N) - N\,]\}, \text{ якщо } [N/4<[(h_{\,k,n})mod\ 2N - N\,]<N/2, \qquad (45)$$

$$\underline{h}_{\,k,n} = N/2 + \{N - [(h_{\,k,n})mod\ 2N) - \mathrm{N}]\}, \text{ якщо } 3N/4<[(h_{\,k,n})mod\ 2N) - N\,]<N, \qquad (46)$$

інакше $\underline{h}_{k,n} = h_{k,n}$;

для ДПХ-IV

$$\underline{h}_{\,k,n} = [(\,h_{\,k,n})\ mod\ 4N\,]\text{-}2N\,], \text{ якщо } [(h_{\,k,n})mod\ 4N\,]>2N; \qquad (47)$$

$$\underline{h}_{\,k,n} = N - \{[(h_{\,k,n})mod\ 4N) - 2N\,]\}, \text{ якщо } N/2<[N/4<(h_{\,k,n})mod\ 4N) - 2N\,]<N, \qquad (48)$$

$$\underline{h}_{\,k,n} = N + \{2N - (h_{\,k,n}mod\ 4N)\} \text{ якщо } 3N/2<[(h_{\,k,n}mod\ 4N) - 2N\,]<2N, \qquad (49)$$

інакше $\underline{h}_{k,n} = h_{k,n}$.

Спрощені матриці аргументів ДПХ I-IV доповнюються матрицями знаків $Sk(k,n)$ функції касинуса $cas(\varphi)$, елементи якої визначаються за нерівностями:

$$Sk\ (k,n) = \begin{cases} +1, & \text{якщо} \quad 7T/8 < h_{\,k,n} < 3T/8\ ; \\ 0, & \text{якщо} \quad h_{\,k,n} = 3\,T/8, 7T/8\ ; \\ -1, & \text{якщо} \quad 3T/8 < h_{\,k,n} < 7T/8\ . \end{cases} \qquad (50)$$

За допомогою $P(n)$, $P'(n)$, $Sk(n)$, визначених за формулами (41-50), виконується синтез ефективного алгоритму ДПХ I-IV із врахуванням особливостей (табл. 12).

Таблиця 12 – Особливості синтезу ефективних алгоритмів ДПХ I-IV

<table>
<tr><td colspan="2">Параметр \ Вид</td><td>ДПХ-I</td><td>ДПХ-II</td><td>ДПХ-III</td><td>ДПХ-IV</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розмірність матриці</td><td>$[N]_{\times}[N]$</td><td>$[N]_{\times}[2N]$</td><td>$[2N]_{\times}[N]$</td><td>$[2N]_{\times}[2N]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Послідовність вхідних значень</td><td>$[x]$ без $x(0)$, $(N/2)$</td><td>$[x]$</td><td>$[x][-x]$</td><td>$[x][-x]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Послідовність вихідних значень</td><td>$X(N/2)$
без $X(0)$</td><td>$[\pm X]$
без $X(0)$</td><td>$2[X]$
без 2x(0)</td><td>$2[\pm X]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Повторення групи елементів у згортках</td><td>для 2^n</td><td>для 2^n</td><td>для 2^n</td><td>існує</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Осі симетрії для обсягів:</td><td>непарних</td><td>нема</td><td>N (π)</td><td>N (π)</td><td>нема</td></tr>
<tr><td>парних $2p$</td><td>$N/2$ (π)</td><td>N (π)</td><td>N (π)</td><td>$2N$ (π)</td></tr>
<tr><td>парних $4p$</td><td>$N/2$ (π)</td><td rowspan="2">N (π),
$N/4$ (π/4),
$3N/4$(3π/4),
$5N/4$(5π/4),
$7N/4$(7π/4)</td><td rowspan="2">N (π),
$N/4$ (π/4),
$3N/4$(3π/4),
$5N/4$(5π/4),
$7N/4$(7π/4)</td><td>$2N$ (π)</td></tr>
<tr><td>решта парних i=1,3,5,7</td><td>$N/2$ (π),
$i*N/8$,
(i*π/4)</td><td>$i*N/2$,
(i*π/4)</td></tr>
</table>

У результаті синтезу алгоритму, наприклад для ДПХ-IV обсягом N=8, отримуємо структурну схему модуля відповідно рис. 5, де w(n) – коефіцієнти функції касинус, x(n) – послідовність вхідних даних, $U_{1,2}$ – блоки об’єднання вхідних даних, CCU – блоки 4-точкової ЦЗ, $U_{3,4}$ – блоки об’єднання результатів ЦЗ.

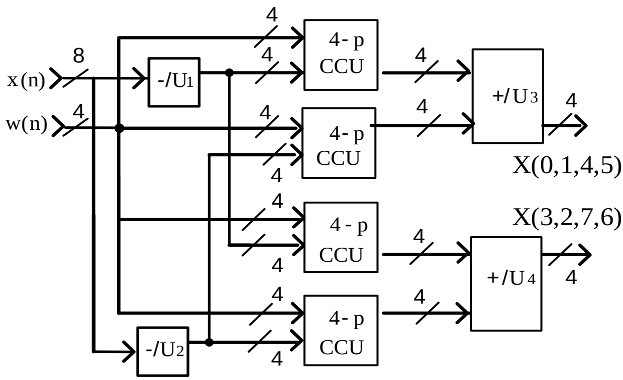


Рисунок 5 – Структурна схема модуля обчислення, ДПХ-IV для N=8

В табл. 13 подано число операцій для окремих обсягів ДПХ I-IV на основі ЦЗ з мінімальним числом добутків (*розроблені*) та число операцій найкращих алгоритмів (*традиційні*) що розроблені для конкретних обсягів $N=2^n$, $N=3^n$ (m – кількість множень, a – кількість додавань). Підвищення обчислювальної ефективності ДПХ I-IV на основі ЦЗ забезпечується для довільних обсягів в плані зменшення кількості арифметичних операцій в порівнянні з алгоритмами, що розроблені для конкретних обсягів в основному N=2^n, N=3^n.

Таблиця 13 – Число операцій для конкретних обсягів ДПХ I-IV

Види ДПХ	*Розроблені*	*Традиційні*
ДПХ-I	N=14, m=16, a=72 N=16, m=10, a=62	N=16, m=12, a=64
ДПХ-II	N=8, m=10, a=26 N=9, m=12, a=60	N=8, m=4, a=18 N=9, m=19, a=38
ДПХ-III	N=8, m=10, a=26; N=11, m=40, a=61	N=8, m=4, a=18
ДПХ-IV	N=5, m=5, a=20 N=8, m=8, a=38	N=8, m=16, a=32

Отже, відповідно узагальненій методології визначено особливості синтезу та обчислення алгоритмів ДПХ I-IV. Вірогідність сформульованих методологічних принципів та етапів синтезу алгоритму з врахуванням особливостей для чотирьох видів ДПХ I-IV підтверджено конкретними прикладами.

У шостому розділі розглянуто розроблені структурні схеми та засоби обчислення ДГП на основі ЦЗ. Описано програмну реалізацію синтезу алгоритмів та обчислення ДГП на основі ЦЗ. Проаналізовано кількісні характеристики підвищення ефективності обчислення ДГП на основі ЦЗ.

Структура обчислювальних систем виконання ДГП у загальному розділяється (рис. 6) на три базових компоненти: 1) блок синтезу (SU) алгоритму обчислення ДГП адаптованого до довільного цілого значення обсягу N; 2) блок (W) визначення гармонічних коефіцієнтів на основі аргументів для відповідного виду перетворення; 3) блок (PU) виконання ДГП адаптованого до обсягу перетворення з входом x(n) та виходом X(n).

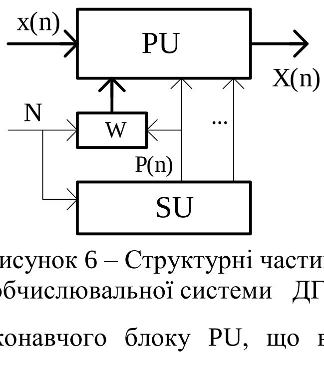


Рисунок 6 – Структурні частини обчислювальної системи ДГП

Блок синтезу виконує визначення: приналежності обсягу перетворення N до підмножини цілих чисел; циклічного розкладу підстановки $P(n)$; спрощеного циклічного розкладу підстановки $P'(n)$ з доповненням знаками $S(n)$; аналіз циклічних структур базисної матриці перетворення. Обмін інформації на цьому рівні виконується на рівні повідомлень від блока синтезу SU до виконавчого блоку PU, що виконує: об’єднання вхідних інформаційних даних перетворення x(n); відбір і групування об'єднаних даних для виконання швидких ЦЗ між відповідними значення гармонічних коефіцієнтів базисної функції з блока W; об'єднання результатів згортки у вихідні X(n) перетворення.

Тобто, обчислення ДГП виконавчим блоком PU, відповідно до розробленого алгоритму, можна поділити на три послідовно-паралельні етапи (рис. 7): попереднього об'єднання даних (препроцесорний), виконання ЦЗ (процесорний), формування вихідних значень (построцесорний). Ефективне обчислення ЦЗ у конвольверах на процесорному етапі (рис. 7) є ключовим завданням в виконання ДГП.

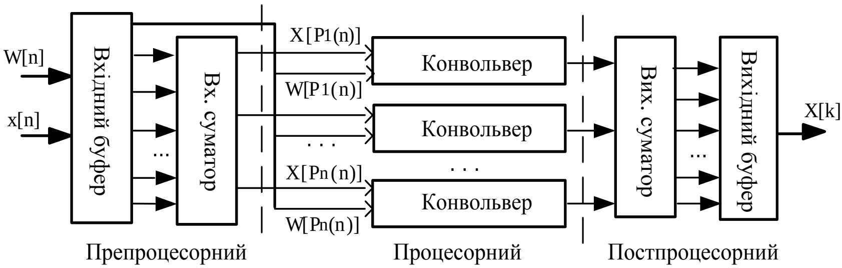


Рисунок 7 – Послідовно-паралельні етапи виконання ДГП блоком PU

Обчислення ЦЗ ефективно реалізується в систолічних масивах з високим рівнем паралелізму. Завдяки регулярності і близькості інтеркомунікацій між процесорними елементами в систолічних обчислювальних системах відбувається зменшення площі зайнятості кристала і, відповідно, підвищення швидкодії виконання. Аналіз робіт, що застосовують обчислення ДГП на основі ЦЗ, з використанням систолічних масивів у НВІС вказує на підвищення ефективності від 10% показника площа-затримка і відповідно зменшення потужності споживання на вибірку перетворення.

Отже, застосування узагальненої методології ефективного обчислення дійсних дискретних перетворень з гармонічним базисом на основі ЦЗ для сучасних інтегральних технологій зменшує вартість розробки та підвищує продуктивність обчислення.

У загальному обчислювальні витрати C запропонованого підходу обчислення ДГП на основі ЦЗ за кількістю операцій на етапах виконання можна подати виразом:

$$C = C_I^{+} + \sum_i C_i^{+,x} + C_{III}^{+} \quad , \tag{51}$$

де $C^{+}{}_{I}$ – кількість додавань на етапі аналізу ідентичних підмасивів; $C^{+,x}$ – значення кількісті додавань та множень на етапі виконання i ЦЗ; $C^{+}{}_{III}$ – кількість додавань на етапі об'єднання результатів ЦЗ та деяких вхідних даних. Значну частину обчислювальних витрат *C* займає виконання ЦЗ, що включає всі операції множення.

Таким чином, обчислювальні витрати залежать від типу та виду ДГП, обсягу *N* перетворення, *i* - кількості та обсягів базових операцій ЦЗ, тобто від блочно-циклічної структури ядра. У табл. 14 подано число операцій ДКП-II для обсягів $N=2^n$, що характеризуються однотипним горизонтальним нарощенням блочно-циклічних структур, завдяки цьому може виключатись етап аналізу ідентичних підматриць. Для обсягів $N=2^n$ відповідний твірний масив описується у вигляді $P\{2N\}=P_0\{2^n\}P_1\{2^{n-1}\}...P_n\{2^0\}$, де підмасиви $P_i\{2^{n-i}\}$ з вказаною в дужках кількістю елементів рівних цілому степеню два. Відповідно до табл. 14, синтезовані алгоритми (*розроблені*) містять на 30% меншу кількість m – множень відносно числа множень у кращих алгоритмах (*традиційні*). Адже на процесорному етапі виконання, у даному випадку, використано алгоритми ЦЗ з мінімальним числом добутків.

Таблиця 14 – Число операцій ДКП-II, обсягів $N=2^n$

Обсяг, $N=2^n$	*Розроблені*	*Традиційні*
8	m=8, a=22	m=12, a=29
16	m=22, a=96	m=32, a=81
32	m=55, a=338	m=80, a=209
64	m=125, a=548	m=192, a=513

Для обсягів $N=q^n$, де q - просте число більше двох, також характерні однотипні горизонтальні нарощення блочно-циклічної структури матричного базису основних чотирьох видів дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі. Адже для даних обсягів відповідні твірні масиви мають конкретний набір твірних підмасивів (52) з кількістю елементів, поданих у фігурних дужках $P_i\{q^i\}$. Наприклад, для ДКП-II обсягів $N=q^n$ твірний масив складається з конкретного набору:

$$P\{2\cdot q^n-1\} = P_1\{q^n-q^{n-1}\}\ P_2\{q^n-q^{n-1}/q\}\ P_3\{q^{n-2}-q^{n-3}\}\ ...\ P_n\{q^2-q^1\}\ P_{n+1}\{1\}$$
$$P_{n+2}\{(q^n-q^{n-1})/2\}\ P_{n+3}\{(q^n-q^{n-1})/2\}\ P_{n+4}\{(q^{n-1}-q^{n-2})/(2q)\}\ P_{n+5}\{(q^{n-1}-q^{n-2})/(2q)\}$$
$$\ldots\ P_{n+2n-3}\{(q^2-q^1)/2\}\ P_{n+2n-2}\{(q^2-q^1)/2\}\ \ldots\ P_{n+2n-1}\{1\}\ P_{n+2n}\{1\}. \quad (52)$$

Це дозволяє вилучити етап аналізу ідентичних підматриць базису ДГП для обсягів $N=q^n$ і, відповідно, прискорити процес синтезу алгоритму.

У процесі синтезу алгоритму ДГП у багатьох випадках обчислення ЦЗ виконується над послідовністю гармонічних коефіцієнтів $H(n)$ з повторенням групи елементів

$$H(n) = (h_1, h_2, \ldots, h_m, \pm h_1, \pm h_2, \ldots, \pm h_m) = H(m), \pm H(m). \quad (53)$$

У випадку використання швидких алгоритмів ЦЗ з мінімальною мультиплікативною складністю обчислення ЦЗ парних обсягів з повторенням

(53) групи елементів зменшується (рис. 8) кількість з m до m' – множень та з а до а' – додавань.

а) б)

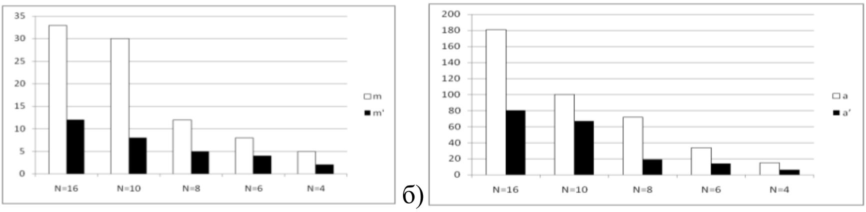


Рисунок 8 – Кількість операцій а) множення m, m' б) додавання а, а' в ЦЗ парних обсягів з повторенням групи елементів та без повторень

У загальному, обчислення ЦЗ над послідовностями з повторенням групи елементів (53) зводиться до ЦЗ вдвічі меншого $m = n/2$ обсягу:

$$\begin{pmatrix} h_1,\ h_2,\ \dots,\ h_m,\ \pm h_1,\ \pm h_2,\dots,\ \pm h_m \\ \pm h_m,\ h_1,\ \dots,\ h_m,\ \pm h_1,\pm h_2\dots,\pm h_{m-1} \\ \dots \\ \pm h_1,\ \pm h_2,\dots,\ \pm h_m,\ h_1,\ h_2,\ \dots,\ h_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H\ (m) \otimes\ (X_0 \pm X_1) \\ \pm H\ (m) \otimes\ (X_0 \pm X_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix}. \qquad (54)$$

Програмне забезпечення для синтезу алгоритмів та обчислення ДГП на основі ЦЗ характеризує простота розділення на послідовність програмних модулів (рис. 9), в яких можливе розпаралелення обчислень.

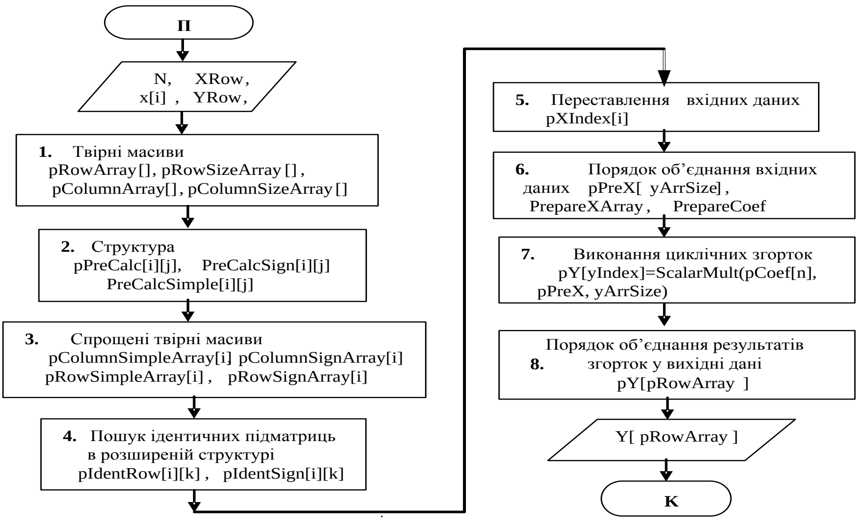
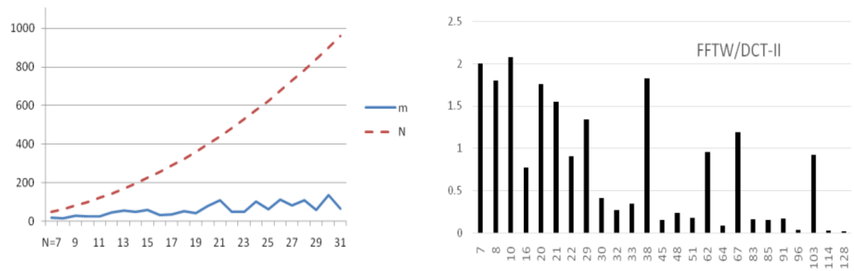


Рисунок 9 – Схема послідовності програмних модулів виконання синтезу алгоритму та обчислення ДГП на основі ЦЗ

Важливою частиною програмної реалізації на основі цього підходу є синтез алгоритму ДГП (модулі 1-4, 6, 8), що використовує тільки операції над цілими числами. Відповідно до узагальненої методології для найскладнішого випадку розроблено програмне забезпечення синтезу швидких алгоритмів та ефективного обчислення ДКП-ІІ на основі ЦЗ. Після виконання етапу ідентифікації однотипних підматриць (модуль 4) отримуємо (рис.10, а) зменшення кількості m - операцій множення обчислення ДКП-ІІ в порівнянні з прямим обчисленням, що має квадратичну обчислювальну складність $O(N^2)$. Результати часу виконання синтезу алгоритмів обчислення ДКП-ІІ на основі ЦЗ та FFTW3 для коротких обсягів N подано на рис.10, б).



а) б)

Рисунок 10 – а) Графік кількості операцій множення обчислення ДКП-ІІ на основі ЦЗ в порівнянні з прямим обчисленням; б) відношення FFTW/DCT-II часу синтезу алгоритмів в FFTW3 та ДКП-ІІ на основі ЦЗ для коротких обсягів N

Порівнюючи синтез алгоритмів та виконання програм у комп'ютерній системі (Intel(R) Core(TM)i-7 CPU 2600@4,2 GHz) обчислення ДКП-ІІ з бібліотеки FFTW3 та розробленого ДКП-ІІ на основі ЦЗ одержуємо, що час виконання (кількість тактів за табл. 15) розробленої тестової програми менший для коротких обсягів N перетворення (крім N=8,16), а час синтезу алгоритму (рис. 10.б) залежить від конкретного обсягу перетворення.

Таблиця 15 – Порівняння виконання ДКП-ІІ (такти)

N	7	8	10	16	20	21	22
FFTW	662	300	1051	813	903	2556	2936
DCT-II	513	677	656	872	895	727	822
віднош.	1,29	0,44	1,60	0,93	1,01	3,52	3,57

продовження таблиці 15

29	30	32	38	45	48	51	64
1966	2915	1595	3984	3252	3981	3866	3697
692	956	1264	847	958	1577	1236	1870
2,84	3,05	1,26	4,70	3,39	2,52	3,13	1,99

продовження таблиці 15

64	67	83	85	91	96	103	114
3697	5029	6661	5523	4569	4457	9320	7962
1870	961	1335	1125	1110	2455	1193	2104
1,98	5,23	4,99	4,90	4,12	1,82	7,81	3,78

Діаграму одержаних мінімальних результатів виконання ДКП-II з табл. 15 подано на рис. 11.

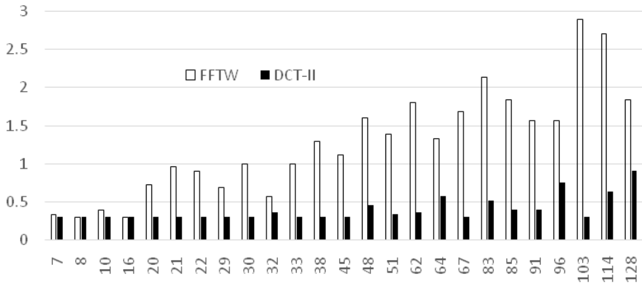


Рисунок 11 – Діаграма результатів виконання часу (мксек) виконання ДКП-II розробленої ДКП-II на основі ЦЗ та програми з бібліотеки FFTW

Отже, отримано підвищення ефективності в межах (1,2÷3) раз тривалості обчислення ДКП-II для коротких обсягів менших N=120, що актуально для застосування узагальненої методології обчислення ДГП на основі ЦЗ для конструювання обчислень більших обсягів перетворень на основі менших.

Порівняння тривалостей (рис. 12) планування програм обчислення ДКП-II з бібліотеки FFTW3 та синтезу розробленого ДКП-II на основі ЦЗ залежить від конкретного обсягу перетворення. Коректність такого порівняння, потребує глибокого аналізу формування плану програмою FFTW3, яка має особливо високі показники для обсягів $N = 2^n$.

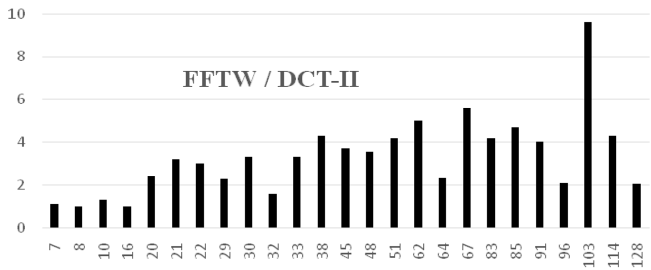


Рисунок 12 – Відношення результатів часу синтезу алгоритму з бібліотеки FFTW та ДКП-II на основі ЦЗ

У розробленій тестовій програмі синтезовано алгоритм ДКП-II, що є найскладнішим випадком узагальненої методології, в який може бути включено синтез інших видів ДГП.

Таким чином, ефективність, як категорійне загальнонаукове поняття, поєднує у собі якісні та кількісні характеристики. Якісна характеристика підвищення ефективності узагальненої методології, що розкриває її інноваційну сутність, полягає в подальшому розвитку підходу обчислення ДГП на основі циклічних згорток. Вперше застосовано твірний масив, на основі якого виконується формування та аналіз структури базису перетворення у вигляді набору ганкелевих циркулянтів, для обчислення ДГП довільних обсягів. Кількісна характеристика підвищення ефективності узагальненої методології відображає при досягненні цілей покращення відношення результату до певного виду ресурсних витрат. Кількісні характеристики ефективності синтезу алгоритму та виконання обчислення ДГП залежать як від видів перетворення, так і від набору конкретних обсягів або довільних обсягів та технічних вимог прикладного застосування. До характеристик підвищення ефективності програмної й апаратної частин реалізації ДГП на основі ЦЗ належать:

– мультифункціональність виконання, яка включає різні перетворення ДКП/ДСП/ДПХ видів (I-IV), прямі та зворотні, довільний обсяг перетворення *N*, зменшує більш ніж вдвічі затрати програмної або апаратної реалізації. Наприклад, структурна схема обчислення ДПХ-II/ДКП-II/ДСП-II обсягу N=8 на рис. 12 (де BRC – буферний регістр коефіцієнтів базису, BRD – буферний регістр даних, OBRD – вихідний буферний регістр, CCU – блок p-точкової циклічної згортки, U_i – блок об’єднання вхідних даних), у випадку обчислення ДПХ-II, додатково підключається блок об’єднання вхідних даних - U_5 та блок 1p-CCU, які позначено пунктиром;

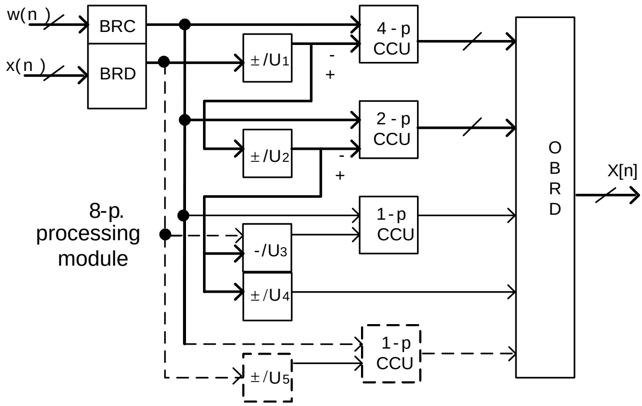


Рисунок 12 – Структурна схема обчислення ДПХ-II/ДКП-II/ДСП-II обсягуN=8

– гнучкість взаємозв'язків між потоками даних забезпечує можливу адаптацію під відповідні програмні та апаратні ресурси, тобто виконання обчислення розподіляється на структурні модулі, в яких можливий поділ алгоритму на підалгоритми з меншими обсягами. Наприклад, відношення у разах кількості тактів виконання прямого обчислення ДКП-II і розробленого ДКП-II на основі ЦЗ для універсальних комп'ютерних систем з чотирьох та двоядерною архітектурою приблизно співпадають. Це свідчить, що в алгоритмах обчислення ДГП на основі циклічних згорток для довільних обсягів відбувається ефективне використання наявних ресурсів універсальної комп'ютерної системи;

– простота синтезу алгоритмів на основі визначення циклічного розкладу підстановки та аналізу структури базису перетворення завдяки виконанню операцій цілочисельної арифметики приводить більш ніж втричі до зменшення тривалості визначення послідовності переставлення в порівнянні з визначенням за цілочисельним степенем примітивного елемента циклічної групи;

– обчислювальні витрати ДГП відповідають кількості операцій на рівні найкращих алгоритмів, у випадку використання швидких згорток із мінімальною мультиплікативною складністю отримуємо мінімальну кількість множень, застосовуються дві основні арифметичні операції – додавання та множення з накопиченням, обчислення не критичні до обсягу пам'яті;

– зменшення площі зайнятості кристала, потужності споживання, паразитної ємності, та відповідно зменшення вартості створення НВІС, завдяки безпосередності та регулярності міжзв'язків при імплементації згорток, стає суттєвим фактором імплементації ДГП у НВІС;

– можливість вибору обсягів виконання циклічних згорток та порядку об'єднання їхніх результатів, зменшення кількості визначення коефіцієнтів функції базису ДГП за спрощеним твірним масивом (в 2 або 4 рази в залежності від значення обсягу перетворення), великоблокове розпаралелення обчислень, можливість нарощення обсягу перетворень для значень рівних цілому степеню простого числа та інше.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальну науково-прикладну проблему підвищення ефективності обчислювальних характеристик дійсних дискретних гармонічних перетворень шляхом розроблення узагальненої методології, що вирішує завдання формування й аналізу структури дискретних гармонічних складових базису перетворення у вигляді набору ганкелевих циркулянтів і виконання обчислення перетворень на основі циклічних згорток.

Зокрема, отримано такі результати.

1. Проаналізовано методи обчислення та обгрунтовано актуальність розроблення математичного та програмного забезпечення для підвищення ефективності обчислення дискретних перетворень класу Фур'є на основі циклічних згорток.

2. Запропоновано методику формування блочно-циклічних структур матриці аргументів функцій базису ДГП за допомогою циклічного розкладу підстановки, що дало змогу синтезувати алгоритми та розробити обчислювальні схеми основних типів дійсних дискретних перетворень класу Фур'є на основі циклічних згорток.

3. Використано твірний масив, що визначається через циклічний розклад підстановки, що дозволило підвищити ефективність більш ніж втричі тривалості обчислення послідовності переставлення базису перетворення порівняно з традиційним визначенням за цілочисельним степенем примітивного елемента циклічної групи.

4. Обґрунтовано узагальнені методологічні принципи та етапи синтезу алгоритмів з врахуванням особливостей кожного з чотирьох видів дискретних косинусних, синусних і перетворень Хартлі для виконання їхнього ефективного обчислення на основі циклічних згорток.

5. Проаналізовано взаємозв'язок послідовно-паралельних частин алгоритму синтезу та обчислення дійсних ДГП довільних значень обсягу перетворення, що дає змогу проведення гнучкої організації виконання ДГП на основі використання швидких циклічних згорток для різних комп'ютерних систем.

6. Розроблено метод побудови стислої характеристики блочно-циклічної структури матриці базису перетворення на основі твірних масивів та спрощених твірних масивів, доповнених масивом знаків, що дало змогу підвищити ефективність виконання аналізу блочно-циклічної структури за першими елементами циклічних підматриць.

7. Розроблено метод цілочисельного пошуку ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення на основі твірних масивів, що дає змогу зменшити обчислювальні затрати, а для обсягів цілого степеня простого числа – вилучити етап аналізу структури базису завдяки однотипності нарощення горизонтальних структур у базисі ДГП.

8. Розроблено структурну схему обчислення ДПХ, ДКП або ДСП для конкретного обсягу в одному виконавчому модулі, що дозволило підвищити ефективність більш ніж вдвічі затрат апаратної або програмної реалізації завдяки однотипності блочно-циклічних структур базису перетворення.

9. Вдосконалено метод аналізу структури базису ДГП для складеного обсягу шляхом визначення ідентичних підматриць у горизонтальних та вертикальних структурах базису, що дає змогу зменшити квадратичну залежність обсягу пам’яті для зберігання значень знака та спрощених перших елементів циклічних підматриць.

10. Проаналізовано кількість операцій обчислення ДГП, що в балансі співвимірна значенням найкращих алгоритмів, а для обсягів $N=2^n$ кількість множень у випадку використання швидких згорток із мінімальною мультиплікативною складністю зменшується на 30%.

11. Розглянуто розроблені структурні схеми обчислення дійсних ДГП з використанням блоків швидких циклічних згорток, що дає змогу при реалізації інтегральних схем підвищити ефективність у вигляді значення показника компоновки НВІС площа/затримка та відповідно зменшити потужність споживання.

12. Розроблено програмне забезпечення синтезу алгоритмів ДГП та їхнього обчислення, проаналізовано використання в процесі обчислення компонентів виконання швидкої циклічної згортки. В результаті отримано підвищення ефективності в межах (1,2÷3) разів тривалості обчислення ДКП-II для коротких обсягів, менших за N=120, порівняно з обчисленням за програмним кодом з бібліотеки FFTW3.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації :

[1] I. Prots’ko, "Algorithm of Efficient Computation of DCT I-IV Using Cyclic Convolutions", *Int. J. Circuits, Syst. and Signal Process.*, vol. 7, iss. 1, pp. 1-9, 2013. (Indexes: Compendex, Scopus, IET Inspec, etc.)

[2] I. Prots’ko, "Algorithm of efficient computation of generalized discrete Hartley transform based on cyclic convolutions", *IET Signal Process.*, vol. 8, iss. 4, pp. 301-308, 2014. (Indexes: Scopus, IET Inspec, SCI, Ei Compendex).

[3] I. Prots’ko, and V. Teslyuk "Algorithm of efficient computation DST^{I-IV} using cyclic convolutions", *WSEAS Trans. Signal Process.*, vol. 10, pp. 278-288, 2014. (Indexes: Compendex, Elsevier, Scopus, IET Inspec, etc.)

[4] I. Prots’ko, and R. Rykmas, "The Runtime Benchmarking of DCT-II based on Cyclic Convolutions", *Int. J. Condition Monitoring and Diagnostic Engineering Management*, vol. 21, no. 2, pp. 11-16, 2018. (Indexes: Scopus, Inspec, Acoustics Abstracts, Engineering Index Monthly, International Aerospace Abstracts, etc.)

[5] I. Prots’ko, "The algorithm and structures for efficient computation of type II/III DCT/ DST/ DHT using cyclic convolutions", *Int. J. Signal Proces. Syst.*, vol. 2, no. 2, pp. 119-127, 2014. (Indexes: IET Inspec, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, etc.)

[6] I. Prots’ko, and R. Rykmas, "Becoming of Discrete Harmonic Transform Using Cyclic Convolutions", *American J.Circuits, Syst. and Signal Process.*, vol. 1, no. 3, pp. 114-119, 2015. (Indexes: Worldcat, ResearchBib, Academickeys)

[7] I. Prots’ko, "Synthesis of Efficient Algorithms of DST for Types I, IV via Cyclic Convolutions", *Int. J. Electronic Engineering and Computer Science*, vol. 1, no. 1, pp. 6-13, 2016.

[8] I. Prots’ko, and V. Teslyuk, "Development of WFTA based on the hashing array", *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, № 2(45), c.135-142, 2018. (Indexes: Web of Science, Index Copernicus, INSPEC, Ulrich’s Periodicals Directory,WorldCat)

[9] І. Процько, "Підхід ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень через циклічні згортки", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп’ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 626, с. 74-78, 2008.

[10] І. Процько, "Взаємозв’язок ефективних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток для обсягів 2^n", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп’ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 685, с. 125-130, 2010.

[11] І. Процько, та Р. Рикмас, "Аналіз циклічних підматриць в структурі базису дискретних гармонічних перетворень", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп’ютерні науки та інформаційні технології*, № 710, с. 209-214, 2011.

[12] Р. Никифорчин, та І. Процько, "Формування блочно-матричних структур для алгоритмів гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Автоматика, вимірювання та керування*, № 530, с. 175-180, 2005.

[13] Р. Никифорчин, та І. Процько, "Секціонування базової матриці дискретного гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 564, с. 40-45, 2006.

[14] І. Процько, "Обчислювальні структури адаптивного до обсягу ШПФ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка":*

Комп’ютерні системи проектування. Теорія і практика, № 651, с. 145-151, 2009.

[15] І. Процько, "Особливості обчислення циклічних згорток для ідентичних послідовностей", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп’ютерні науки та інформаційні технології*, № 719, с.200-206, 2011.

[16] І. Процько, "Аналіз алгебраїчної системи аргументів для простого обсягу ДПФ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп’ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 711, с. 48-53, 2011.

[17] І. Процько, "Алгоритм обчислення основних видів ДКП на базі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп’ютерні науки та інформаційні технології*, № 732, с.274-280, 2012.

[18] І. Процько, та В. Теслюк, "Синтез ефективних алгоритмів прямого і зворотнього ДКП на основі циклічних згорток", *Моделювання та інформаційні технології” збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України*, Вип. 65, с. 110-118, 2012.

[19] І. Процько, "Ефективне обчислення дискретних косинусних перетворень", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 591, с. 58-63, 2007.

[20] І. Процько, "Алгоритм обчислення основних видів ДСП на базі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Інформаційні системи та мережі*, № 743, с. 140-151, 2012.

[21] І. Процько, та В. Теслюк, "Синтез ефективних алгоритмів прямого і зворотнього ДСП на основі циклічних згорток", *Збірн. наук. праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України*, Вип. 65, с. 196-205, 2012.

[22] І. Процько, "Приведення до ефективних обчислень довільних обсягів ортогональних перетворень Хартлі", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 522, с. 85-89, 2004.

[23] І. Процько, "Ефективне обчислення дискретного перетворення Хартлі на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп’ютерні системи та мережі*, № 688, с.190-196, 2010.

[24] І. Процько, "Синтез та обчислення основних типів ДПХ на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська*

політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології, № 744, с.302-311, 2012.

[25] І. Процько, "Схема алгоритму синтезу гармонічних дискретних перетворень в підсистемі аналізу САПР", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології,* № 694, с. 297-302, 2011.

[26] О. Грищук, та І. Процько, "Обчислення значень канонічного розкладу одновимірної величини", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування.Теорія і практика,* №501, с. 30-32, 2004.

[27] І. Процько, "Розробка схеми узагальненого ефективного алгоритму гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Інформаційні системи та мережі,* № 549, с.157-164, 2005.

[28] І. Процько, "Узагальнене ефективне дискретне гармонічне перетворення даних", *Технічні вісті. Львів,* № 1(22), 2(23), с. 88-92, 2006.

[29] І. Процько, "Розпаралелення на рівні підзадач алгоритму ШГП на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка". Комп'ютерні науки та інформаційні технології,* № 826, с.306-312, 2015.

Наукові праці апробаційного характеру:

[30] І. Процько, та В. Радомський, "Узагальнений підхід швидкого трансформування класу Фур'є на основі згорток" на *V Всеукр. міжн. конф. УкрОБРАЗ'2000*, Київ, 2000, с. 249-252.

[31] І. Процько, та В. Радомський, "Обчислення швидкого трансформування Фур'є за допомогою згорток", на ІІ *Національній наук.-практ. конф. "Системний аналіз та інформаційні технології": Збірка тез доповідей,* Київ: НТУУ "КПІ", 2000, с. 97-98.

[32] I. Protsko, "Adaptive synthesis to transform size of Fast Fourier Algorithm", in *Proc. VIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2003),* Lviv-Slavske, 18-22 february 2003. pp. 230-231.

[33] I. Prots'ko, "Computational parallel models of the discrete harmonic transforms", in *Proc. VIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2005),* Lviv-Polyana, 23-26 february, 2005, pp. 230-231.

[34] R. Nykyforchin, and I. Prots'ko, "Computational algorithm of the discrete harmonic components for microelectronic systems", in *Proc. I^st Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2005)*, Lviv-Polyana, 25-28 may, 2005, pp. 21-22.

[35] I. Protsko, "Fast Cosine Transform Algorithm on Base Cyclic Convolutions", in *Proc. 2nd Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2006)*, Lviv-Polyana, 24-27 may, 2006, pp. 65-66.

[36] I. Protsko, "The Efficient Algorithm of Discrete Cosine Transform", in *Proc. IXth Int.l Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2007),* Polyana, 20-24 february, 2007, pp. 163-164.

[37] І. Процько, "Обчислювальні паралельні моделі гармонічних дискретних перетворень", на *наук.-прак. конф. Математичне моделювання складних систем*, Львів, 2007, с. 214-219.

[38] I. Prots'ko, "The generalized technique of computation the discrete harmonic transforms", in *Proc. IVth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2008),* Polyana, 21-24 may, 2008, pp. 101-102.

[39] I. Prots'ko, "Computational structure of adaptive to transform size FFT", in *Proc. Xth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2009)*, Polyana, 24-28 february, 2009, pp. 255-257.

[40] I. Prots'ko, "The compare of computation FFT on base cyclic convolutions for size of $N=2^n$ ", in *Proc. Vth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2009),* Polyana, 22-24 april, 2009, pp. 70-72.

[41] I. Prots'ko, " Interconnection discrete harmonic transforms sizes 2^n on base circular convolutions", in *Proc. VIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2010),* Polyana, 20-23 april, 2010, pp. 49-50.

[42] I. Prots'ko, "The Efficient Computation of Discrete Hartley Transform on Base Cyclic Convolutions", in *Proc. Vth Int. Scientific and Technical Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT 2010)*, Lviv, 14-16 october, 2010, pp. 157-158.

[43] I. Prots'ko, "The Efficient Computation DHT using Cyclic Convolutions", in *Proc. XIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2011)*, Polyana, 24-28 february, 2011, pp. 85-86.

[44] I. Prots'ko, and R. Rikmas, "Analysis cyclic submatrices in structure of basis discrete harmonic transform", in *Proc. VIIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2011),* Polyana, 12-14 may, 2011, pp. 64-66.

[45] I. Prots'ko, "The specific of computation cyclic convolutions for identical sequences", in *Proc. VIth Int.Scien. and Tech. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2011),* Lviv, 16-19 november, 2011, pp.301-302**.**

[46] I. Prots'ko, "Analysis algebraic system of arguments for prime size DHT", in *Proc. XIth Int. Conf. Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET'2012),* Lviv-Slavske, 24-28 february, 2012, pp. 428.

[47] I. Prots'ko, "Generalized approach for synthesis and computation DST using cyclic convolutions", in *Proc. VIIIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2012),* Polyana, 18-21 april, 2012, pp. 66-67.

[48] I. Prots'ko, and R. Rikmas "Analysys parallel processing DHT using convolution on SIMT model", in *Proc. VIIth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2012),* Lviv, 20-24 november, 2012, pp.136-137**.**

[49] I. Prots'ko, "The Module of DCT^{II} for Size N=8 using Cyclic Convolutions", in *Proc. XIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2013),*Polyana, february 2013, pp. 299-301.

[50] I. Prots'ko, R. Rikmas, and V. Teslyuk "The program implementation of the synthesis the efficient algorithms for computation of DCT-II via cyclic convolutions", in *Proc. IXth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2014),* Lviv, 18-22 november, 2014, pp. 116-118**.**

[51] I. Prots'ko, and V. Teslyuk "Computational structure of DST-II using convolvers", in *Proc. XIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2015),* Polyana, february, 2015, pp. 200-202.

[52] I. Prots'ko, R. Rikmas, and M. Mashevska "Performance evaluation of the program of DCT-II using cyclic convolutions", in *Proc. XIIth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2017),* Lviv, 5-8 september 2017, pp.116-118**.**

[53] I. Prots'ko, R. Rikmas, and V. Teslyuk "The efficient computation of integer DCT based on cyclic convolutions", in *Proc. XIIIth Int. Conf.* Computer *Sciences & Information Technologies (CSIT'2018),* Lviv, 11-14 september 2018, pp.245-248.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації :

[54] І. О. Процько, "Спосіб приведення дискретних гармонічних складових цифрових сигналів до циклічних згорток", *G06F 17/16 (2006.01), H03M 7/30 (2006.01), Патент 96540 Україна*, 10.11.2011, Бюл. № 21.

[55] І. О. Процько, та В. А. Радомський, "Пристрій для обчислення швидкого трансформування Фур'є", *G06F7/00, G06F15/00, Декл. патент 34614A Україна*, 15.03.2001, Бюл. № 2.

[56] І. О. Процько, та В. М. Теслюк, "Пристрій канонічного розкладу числа на множники", *G06F7/04(2006.01), G06F17/10(2006.01), Патент 116912 Україна*, 25.05.2018, Бюл. № 10.

АНОТАЦІЯ

Процько І. О. Підвищення ефективності обчислення дійсних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи". – Вінницький національний технічний університет, Вінниця. 2019.

Дисертаційна робота присвячена питанням дослідження та розвитку ефективного підходу обчислення дійсних дискретних гармонічних перетворень (дискретних косинусних, синусних і перетворень Хартлі) на основі циклічних згорток. Вирішено актуальну науково-прикладну проблему підвищення ефективності обчислювальних характеристик дійсних дискретних гармонічних перетворень шляхом розроблення узагальненої методології, що вирішує завдання формування й аналізу структури дискретних гармонічних складових базису перетворення у вигляді набору ганкелевих циркулянтів і виконання обчислення перетворень на основі циклічних згорток.

У результаті розроблення узагальненої методології одержано систематизовану сукупність принципів, методів, алгоритмів, способів для синтезу ефективних алгоритмів обчислення дійсних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток. Для синтезу алгоритмів застосовано твірний масив, який визначається циклічним розкладом підстановки рядків/стовпців аргументів функції базису перетворення. Розвинуто метод цілочисельного пошуку ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі ядра перетворення, що використовує твірні масиви.

Досліджено особливості синтезу алгоритмів для виконання обчислення чотирьох основних видів кожного з ДКП, ДСП, ДПХ перетворень на основі циклічних згорток. Показано, що замість примітивних елементів циклічних груп для формування блочно-циклічної структури базису перетворення простіше застосовувати твірні масиви, за якими формується базис перетворення з ганкелевими підматрицями.

Обчислення циклічних згорток для послідовностей гармонічних коефіцієнтів з повторенням групи елементів, що зустрічаються в запропонованих алгоритмах, зменшує обсяг виконання циклічних згорток і, відповідно, обчислювальну складність дійсних дискретних гармонічних перетворень.

Розроблено ефективні структури обчислювальних систем прямого і зворотнього виконання ДГП, що містять систолічні конвольвери виконання циклічних згорток. На основі узагальненої методології синтезу розроблено програмне забезпечення для швидкого обчислення ДГП довільного обсягу на основі циклічних згорток.

Ключові слова: дійсний базис перетворення, синтез алгоритмів, циклічна згортка, твірний масив, дискретні гармонічні перетворення (ДГП), ДКП, ДСП, ДПХ.

АННОТАЦИЯ

Процько И. Е. Повышение эффективности вычисления вещественных гармонических преобразований на основании циклических сверток. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.05.02 “Математическое моделирование и вычислительные методы”. – Винницкий национальный технический университет, Винница. 2019.

Развитие информационных технологий ставит новые задачи перед средствами обработки информации, связанные с увеличением объемов, быстродействия, расширением функциональности. В связи с этим, широко исследуются дискретные гармонические преобразования (дискретное косинусное преобразование, дискретное синусное преобразование, дискретное преобразование Хартли), которые выполняют прямые и обратные вычисления только в вещественной области.

Разработан ряд методов эффективного вычисления дискретных преобразований класса Фурье, которые основываются на различных теоретических принципах. Метод, который использует для эффективного вычисления дискретных преобразований циклическую свертку, имеет низкие показатели вычислительной сложности, экономен при реализации в интегральных микросистемах, обобщается на разные виды преобразований.

Диссертационная работа посвящена разработке обобщенной методологии синтеза эффективных алгоритмов вычисления вещественных преобразований с косинусными, синусными, касинусными базисными функциями на основании циклических сверток.

Решена актуальная научно-прикладная проблема повышения эффективности вычислительных характеристик действительных ДГП путем разработки обобщенной методологии которая решает задачи формирования и анализа структуры дискретных гармонических составляющих базиса преобразования в виде набора ганкелевых циркулянтов и выполнения вычисления преобразований на основании циклических сверток. Для синтеза алгоритмов предложено использовать хэш массив, который определяется

циклическим разложением подстановки строк/столбцов аргументов базисной функции ДГП.

В результате разработки обобщенной методологии получена систематизированная совокупность принципов, методов, алгоритмов, способов для синтеза эффективных алгоритмов вычисления действительных дискретных гармонических преобразований на основании циклических сверток. Исследованы особенности синтеза алгоритмов для выполнения вычисления четырех видов каждого с ДКП, ДСП, ДПХ преобразований. Показано, что вместо поиска примитивных элементов для формирования перестановки, проще использовать хэш массивы, с помощью которых формируется базис преобразования с ганкелевыми подматрицами. Доказано эффективное использование для синтеза алгоритмов и анализа блочно-циклической структуры ядра ДГП хэш массива по сравнению с использованием примитивных элементов циклических групп.

Вычисление циклических сверток для последовательностей данных с повторением группы элементов, которые встречаются в разработанных алгоритмах, уменьшает вычислительную сложность алгоритма.

Разработаны эффективные структурные схемы содержащие систолические конвольверы для вычисления прямого и обратного ДГП на основании циклических сверток. Описана программная реализация синтеза быстрых алгоритмов вычисления ДГП произвольной длины на основании циклических сверток.

Характеристики повышения эффективности программной и аппаратной частей реализации ДГП на основании ЦЗ включают:
- мультифункциональность исполнения, которая вычисляет различные прямые и обратные преобразования ДКП/ДСП/ДПХ видов (I-IV) для конкретной произвольной длительности преобразования N, что уменьшает более чем вдвое затраты программной или аппаратной реализации;
- гибкость взаимосвязей между потоками данных, которая обеспечивает возможную адаптацию под соответствующие программные и аппаратные ресурсы, то есть выполнение вычисления ДГП распределяется на структурные модули, в которых возможно разделение алгоритма на подалгоритмы с меньшими объемами;
- простоту синтеза алгоритмов, которая на основании определения циклического разложения подстановки и анализа структуры базиса преобразования выполняет операции над целочисельными аргументами базисных функций, что приводит к уменьшению продолжительности определения последовательности перестановки по сравнению с определением за примитивными элементами циклической группы;
- минимальное количество умножений в случае использования быстрых сверток с минимальной мультипликативной сложностью с применением двух

основным арифметических операций - сложения и умножения с накоплением;
- уменьшение площади использования кристалла, мощности потребления, паразитной емкости, и соответственно уменьшение стоимости создания СБИС, благодаря непосредственности и регулярности связей процессорных элементов при имплементации сверток;
- возможность выбора длин вычисления циклических сверток и порядка объединения их результатов, уменьшения количества коэффициентов функции базиса ДГП по упрощенному образующему массиву в 2 или 4 раза в зависимости от значения длины преобразования, крупноблочного распараллеливания вычислений, наращивания длины преобразования для значений равных целой степени простого числа.

Ключевые слова: вещественный базис преобразования, синтез алгоритмов, циклическая свертка, хэш массив, дискретные гармонические преобразования (ДГП), ДКП, ДСП, ДПХ.

ABSTRACT

Ihor Prots'ko. Enhancement of the Efficient Computation of Real Harmonic Transforms Based on Cyclic Convolutions. – The qualified scientific work on the right of the manuscript.

The thesis is presented for the Doctor of Science degree of technical sciences in speciality 01.05.02 "Mathematical Modelling and Computational Methods". – Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia. 2019.

The thesis is devoted to the research and development of an efficient approach to the computation of real discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions and to the solution of the problems related to the analysis and synthesis of multiversion efficient algorithms for the computation of real transforms with cosine, sine, casine basis functions.

The scientific and technical problems of the analysis and synthesis of efficient algorithms for computation of DCT, DST, DHT and their types using cyclic convolutions is resolved; the usage of a hashing array, which is formed via the cyclic of substitution of the basis matrix arguments, is proposed; the technique of the analysis of block cyclic structure of basis discrete harmonic transform using hashing arrays is developed.

In result of analysis the efficient methods of the computation of the discrete transforms of Fourier class based on cyclic convolutions, the general approach to the synthesis of efficient algorithms for the computation of real harmonic transforms and their types is developed. The peculiarities of synthesis algorithms for efficient computation of each of the four types of DCT, DST, DHT are determined. The efficient usage for the synthesis of a hashing array compared with the primitive elements of cyclic groups is proved. The computations of cyclic convolutions for sequences of data with the repetitive groups of the harmonic coefficients, which occur in the proposed algorithms, reduce computational complexity of the algorithms.

The computing structures that perform real discrete harmonic transforms based on cyclic convolution and the components of the efficient computation of fast cyclic convolutions are developed. The software implementation of the synthesis of fast algorithms for the computation of real discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions is described.

Key words: real basis, synthesis of algorithms, cyclic convolution, hashing array, discrete harmonic transforms, DCT, DST, DHT.